УДК 621.391

С. А. САБУРОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

Одно из основных требований, предъявляемых к современным системам управления (СУ) объектами и услугами телекоммуникационных сетей и систем, – это обеспечение их устойчивости и управляемости.

Устойчивость – способность сети СУ сохранять работоспособное состояние во времени и в условиях, создаваемых воздействиями внешних и внутренних дестабилизирующих факторов (ДФ). Устойчивость в свою очередь характеризуется свойствами надежности и живучести.

Надежность – свойство сети СУ сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях использования и технического обслуживания.

Живучесть – свойство сети СУ сохранять способность выполнять требуемые функции в условиях, создаваемых воздействиями внешних ДФ.

Постановка задачи

Исследовать непрерывные процессы, протекающие в одномерных и многомерных системах управления и провести анализ обеспечения их устойчивости и управляемости на основе системных характеристик, которые используются для выяснения качественных особенностей поведения систем управления объектами и услугами телекоммуникационных сетей и систем .

Вместе с тем, в целях изучения различных форм математического описания систем управления большое внимание также уделяется алгоритмам решения основной задачи анализа - задачи анализа выходных процессов, т.е. получению количественных характеристик процессов, происходящих в системах управления.

Одномерные системы. Рассмотрим одномерную стационарную систему управления, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \ldots + b_0 g(t) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

где $g(t)$ и $x(t)$ – входной и выходной сигналы; t_0 – начальный момент времени.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции:* эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов каждого из воздействий в отдельности. Поэтому выходной сигнал линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_c(t) + x_{вын}(t). \qquad (2)$$

В соответствии с представлением (2) выходного сигнала системы управления в виде суммы свободного и вынужденного движений: вводятся следующие понятия устойчивости системы.

Система управления называется *устойчивой по начальным данным*, если при ненулевых ограниченных начальных условиях свободное движение $x_c(t)$ ограничено при всех $t \in [t_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} x_c(t) = 0$.

Система управления называется *устойчивой по входу*, если при любом ограниченном воздействии $g(t)$ реакция системы $x_{вын}(t)$ является ограниченной в любой момент времени $t \in [t_0, +\infty)$.

Более краткий термин – *устойчивая система управления* – употребляется, если сист. устойчива и по входу, и по начальным данным, т.е. при отсутствии внешних и внутренних д

Критерии устойчивости

1. Для устойчивости системы (1) по начальным данным необходимо и достаточно, что корни λ_i характеристического уравнения

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

имели отрицательные действительные части: $Re\,\lambda_i < 0$, $i = 1,\ldots,n$, т.е. располагались в лев полуплоскости комплексной плоскости (рис. 1).

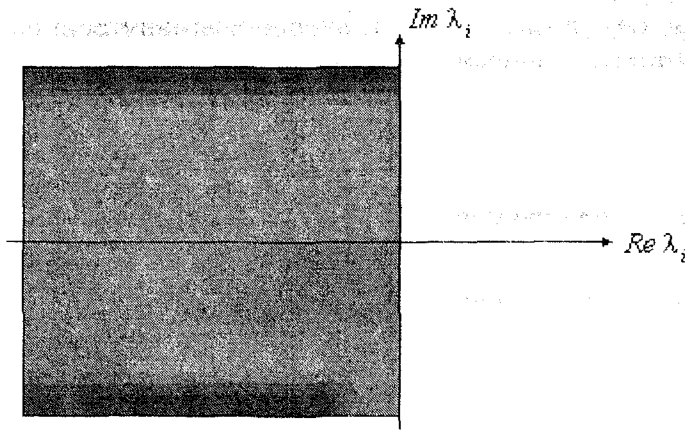

Рис. 1

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристическ уравнения (3) можно использовать ***критерий Рауса-Гурвица***.

Для устойчивости системы (1) по начальным данным необходимо и достаточно, что угловые миноры Δ_i матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

были положительны: $\Delta_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, где $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix}$ и т. д.

При заполнении квадратной порядка n матрицы (4) отсутствующие в уравнении коэффициенты a_{n-i} и a_i при $i > n$ заменяются нулями.

3. Если система устойчива по начальным данным и порядок m дифференциально оператора $M(p) = b_m p^m + \ldots + b_0$ правой части уравнения (1) не больше порядка n дифф ренциального оператора $D(p) = a_n p^n + \ldots + a_0$ левой части, т.е. $m \le n$, то система (1) усто чива по входу [21].

Необходимое условие устойчивости. Если система (1) устойчива, то все коэффициен характеристического уравнения (3) положительны.

Замечания. 1. Первый критерий устойчивости называется ***прямым***, а второй – ***косве ным***, так как в этом случае процедура анализа устойчивости не требует нахождения корн уравнения (3).

2. Коэффициент a_n в уравнении (3) всегда можно сделать положительным, например, умножая уравнение на (-1).

Пример 1. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$3\dot{x} + x = g$.

Характеристическое уравнение $3\lambda + 1 = 0$ имеет отрицательный корень: $\lambda = -\frac{1}{3}$. Кроме того, порядок ($m = 0$) правой части уравнения меньше порядка ($n = 1$) левой части. Согласно первому и третьему критериям система устойчива при условии отсутствия внутренних и внешних ДФ.

Многомерные системы. Аналогично одномерным системам рассмотрим качественное поведение многомерных систем, описываемых уравнениями состояния.

Рассматривается линейная многомерная стационарная система, описываемая уравнением состояния:

$$\dot{x}(t) - Ax(t) + Bg(t),\ x(0) = x_0,$$

где x – n-мерный вектор состояния; g – r-мерный вектор входных воздействий; t – время, начальный момент времени $t_0 = 0$; x_0 – вектор начальных состояний; A, B – матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно.

Система (5) называется *асимптотически устойчивой,* если ее свободное движение $x_c(t)$ (при $g(t) \equiv 0$) ограничено при ограниченных начальных состояниях x_0 и выполняется условие

$$\lim_{t \to +\infty} \|x_c(t)\| = 0. \tag{6}$$

Критерии устойчивости

1. Для асимптотической устойчивости системы (5) необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i характеристического уравнения

$$det(A - \lambda E) = 0 \tag{7}$$

имели отрицательные действительные части: $Re\lambda_i < 0$, $i = 1,...,n$, т.е. располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (см. рис. 1).

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (7), которое записывается в форме (3), можно использовать критерий Рауса –Гурвица.

Необходимое условие устойчивости. Если система (5) асимптотически устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения (7) положительны при условии отсутствия внутренних и внешних ДФ.

Пример 2. Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + g_1.$$

Решение: Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ или $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ имеет действительные корни разных знаков: $\lambda_1 = 5 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$. Согласно первому критерию система не является устойчивой при наличии ДФ.

Анализ управляемости и наблюдаемости

Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t),$$

где x – мерный вектор состояния; u – r-мерный вектор управления, $u \in R^r$; t – вр
$t \in [t_0, t_1]$ – интервал функционирования системы; y – k-мерный вектор выхода; A, B,
матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(k \times n)$ соответственно; x_0 –начальное состояние.

Система называется ***вполне управляемой***, если выбором управляющего воздействия на интервале времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния в произвольное заранее заданное конечное состояние $x(t_1)$.

Система (8) называется ***вполне наблюдаемой***, если по реакции $y(t)$ на выходе систе на интервале времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно опре лить начальное состояние $x(t_0)$ при условии отсутствия внутренних и внешних ДФ.

Постановка задачи формулируется следующим образом.

Пусть известны матрицы A, B, C системы (8). Требуется определить, является ли тема вполне управляемой и наблюдаемой.

Критерии управляемости и наблюдаемости

Критерий управляемости. Для того чтобы система (8) была вполне управляемой, необхо мо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости

$$W = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

равнялся размерности вектора состояния

$$rangW = n.$$

Критерий наблюдаемости. Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходи и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$Q = \begin{pmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{pmatrix}$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$rangQ = n.$$

Алгоритм решения задачи

1. В уравнениях состояния и выхода выделить матрицы A, B, C.

2. Составить матрицу управляемости W и матрицу наблюдаемости Q.

3. Подсчитать ранги обеих матриц и сделать вывод об управляемости и наблюдаемо на основе соответствующего критерия.

Замечание. Если линейная стационарная система управления описывается соотношениям

$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = g(t),\ y(t) = x(t),$

то, вводя обозначения

$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}, \ldots,\ x_n = x^{(n-1)},\ u = g,$

их можно записать в эквивалентной форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \cdots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix} u,\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$
$$A \quad B \quad C$$

Пример 3. Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u, \; y = x_1.$$

Решение: 1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \; n = 2, \; r = 1, \; k = 1.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определяем ранги матриц: $rangW = 2 = n$, $rangQ = 2 = n$. Согласно критериям управляемости (9) и наблюдаемости (10) система вполне управляема и наблюдаема при условии отсутствия внутренних и внешних ДФ.

Выводы

1. Проведен анализ обеспечения устойчивости и управляемости систем управления на основе системных характеристик, которые использованы для оценки качественных особенностей поведения систем управления объектами телекоммуникационных систем и сетей с приведением примеров реализации предлагаемых математических методов.

2. В результате проведенного анализа необходимо выделить три класса решения задач повышения устойчивости и управляемости:

- найти вариант реализации сети СУ, сохраняющей работоспособное состояние в конкретных условиях, создаваемых при появлении внешних и внутренних дестабилизирующих факторов;
- оценить возможность сохранения сетью СУ работоспособного состояния в определенных условиях, создаваемых действиями внешних и внутренних дестабилизирующих факторов;
- выявить условия, создаваемые действиями внешних и внутренних дестабилизирующих факторов, при которых конкретная сеть СУ еще сохраняет работоспособное состояние.

Список литературы: 1. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Басов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу систем. М.: Изд-во МАИ, 1997. 2. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 3. *Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Математическая теория управления в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1997.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 23.01.2006