

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Рассматривается вопрос оценки систематической погрешности идентификации переходных характеристик аperiodических средств измерительной техники методом моментов. Определены границы применимости этого метода и даны рекомендации по повышению эффективности планирования и проведения измерительного эксперимента и уменьшению систематической погрешности идентификации переходных характеристик на примерах аperiodических звеньев первого и второго порядка.

Актуальность вопроса идентификации динамических характеристик (ДХ), как одного из этапов метрологического обеспечения средств измерительной техники (СИТ), вызвана тем, что ДХ входят в совокупность нормируемых метрологических характеристик [1]. Одним из распространенных методов идентификации ДХ является метод моментов [2]. В работах [2-4] подробно описаны алгоритмы идентификации методом моментов параметров моделей ДХ СИТ различного порядка, однако не уделено внимание исследованию погрешностей этого метода, что является препятствием его дальнейшего совершенствования.

Цель работы – оптимизация измерительного процесса и увеличение точности его результатов, а также выявления границ применимости метода моментов для идентификации переходных характеристик (ПХ) СИТ.

Задачи – анализ основных составляющих систематической погрешности реализации метода моментов, определение условий для их минимизации и построение методики, позволяющей повысить эффективность подготовки и проведения измерений.

Метод моментов заключается в описании динамических свойств СИТ ограниченным числом (обычно не более трех) начальных моментов  $\alpha_j$  нормированной переходной характеристики  $h(t)$

$$\alpha_j = \int_0^{\infty} t^{j-1} [1 - h(t)] dt. \quad (1)$$

В результате обработки экспериментально полученной ПХ СИТ по формуле (1) находят числовые значения начальных моментов, посредством которых можно определить оценки параметров ПХ в зависимости от выбора аппроксимирующей ее модели.

Для наиболее распространенных аperiodических СИТ переходная характеристика описывается выражением

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - \sum_{m=1}^M A_m \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right), & t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $A_m$ ,  $\tau_m$  – амплитуды и постоянные времени экспонент: для каждой определенной модели ПХ амплитуды выражаются посредством постоянных времени.

С учетом выражения (2) начальные моменты ПХ могут быть определены как

$$\alpha_j = \sum_{m=1}^M A_m \int_0^{\infty} t^{j-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) dt, \quad (3)$$

где  $\int_0^{\infty} t^{j-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) dt = \tau_m^j \Gamma(j) = \tau_m^j (j-1)!$  ( $\Gamma(j)$  - гамма-функция),

и, таким образом,

$$\alpha_j = (j-1)! \sum_{m=1}^M A_m \tau_m^j. \quad (4)$$

Идентификация заключается в нахождении постоянных времени, посредством которых описывается ПХ СИТ

$$\tau_m = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (5)$$

где функция  $f_m$  определяется моделью ПХ.

Обычно для реализации (1) применяют формулы численного интегрирования, поскольку измерение ПХ осуществляется стандартными АЦП методом дискретизации по времени.

Систематическая погрешность идентификации ПХ СИТ вызвана следующими причинами:

- ограничением времени измерения;
- применением при вычислении начальных моментов по дискретным значениям ПХ алгоритмов численного интегрирования.

Эти составляющие погрешности при измерении неотделимы, однако исследование каждой составляющей необходимо, поскольку дает возможность улучшить результат измерения.

Абсолютная погрешность определения постоянных времени, вызванная ограничением времени измерения, выражается формулой

$$\Delta\tau_{m \text{ орг}} = \tau_{m \text{ орг}} - \tau_m,$$

где  $\tau_m$  - значения постоянных времени, определяемые путем подстановки (4) в (5);

$\tau_{m \text{ орг}}$  - значения постоянных времени при ограничении времени измерения ПХ, когда выражение (3) для начальных моментов имеет вид

$$\alpha_{j \text{ орг}} = \sum_{m=1}^M A_m \int_0^T t^{j-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) dt, \quad (6)$$

где  $T$  – время измерения ПХ СИТ.

Таким образом, погрешность, вызванная ограничением времени измерения ПХ, в общем случае определяется по формуле

$$\Delta\tau_{m \text{ орг}} = f_m(\alpha_{1 \text{ орг}}, \alpha_{2 \text{ орг}}, \dots, \alpha_{m \text{ орг}}) - f_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m). \quad (7)$$

Погрешность, обусловленная дискретным измерением ПХ СИТ (погрешность численного интегрирования) выражается формулой

$$\Delta\tau_{m \text{ ч.и}} = \tau_{m \text{ изм}} - \tau_{m \text{ орг}},$$

где  $\tau_{m \text{ ч.и}}$  - постоянные времени, получаемые при численном интегрировании ограниченного временем измерения участка ПХ. Они рассчитываются по измеренным значениям ПХ посредством начальных моментов (1), которые вследствие дискретного измерения ПХ преобразуются к виду

$$\alpha_{j \text{ изм}} = \left(\frac{T}{N}\right)^j B_j, \quad (8)$$

где  $N$  - количество отсчетов ПХ за время измерения  $T$ ;

$B_j$  рассчитываются в зависимости от способа численного интегрирования [5] и для трех формул прямоугольников (здесь  $C\left(\frac{iT}{N}\right) = 1 - h\left(\frac{iT}{N}\right)$ ;  $\beta = \begin{cases} 1, j=1; \\ 0, j \neq 1; \end{cases}$   $T$  - время измерения ПХ;  $N$  - количество наблюдения за время измерения)

$$B_1 = \sum_{i=1}^N i^{j-1} C\left(\frac{iT}{N}\right); \quad (9)$$

$$B_2 = \sum_{i=0}^{N-1} i^{j-1} C\left(\frac{iT}{N}\right); \quad (10)$$

$$B_3 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(i + \frac{1}{2}\right)^{j-1} C\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{T}{N}\right), \quad (11)$$

и формулы трапеций

$$B_4 = \frac{1}{2} \left( \beta C(0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^{j-1} C\left(\frac{iT}{N}\right) + N^{j-1} C(T) \right). \quad (12)$$

В общем случае погрешность численного интегрирования ограниченного участка ПХ

$$\Delta \tau_{мч.и} = f_m(\alpha_{1изм}, \alpha_{2изм}, \dots, \alpha_{мизм}) - f_m(\alpha_{1огр}, \alpha_{2огр}, \dots, \alpha_{могр}). \quad (13)$$

Общая систематическая погрешность идентификации ПХ равна

$$\Delta \tau_m = \Delta \tau_{могр} + \Delta \tau_{мч.и}$$

или может быть получена как

$$\Delta \tau_m = \tau_{мизм} - \tau_m,$$

$$\Delta \tau_m = f_m(\alpha_{1изм}, \alpha_{2изм}, \dots, \alpha_{мизм}) - f_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m). \quad (14)$$

Рассмотрим перечисленные погрешности для СИТ, моделируемых аperiodическими звеньями первого и второго порядков.

### 1. Аperiodическое звено первого порядка

ПХ такого СИТ имеет вид

$$h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right). \quad (15)$$

Для определения постоянной времени  $\tau_1$  достаточно найти начальный момент  $\alpha_1$  (выражение (4))

$$\tau_1 = \alpha_1. \quad (16)$$

С учетом ограничения времени измерения согласно (6) постоянная времени определится выражением

$$\tau_{1огр} = \alpha_{1огр} = \int_0^T \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) dt,$$

следовательно, относительная погрешность от ограничения времени измерения равна

$$\delta_{1огр} = \frac{\tau_{1огр}}{\tau_1} - 1 = -\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right).$$

Относительная погрешность численного интегрирования имеет вид

$$\delta_{1ч.и} = \frac{\tau_{мизм} - \tau_{1огр}}{\tau_1},$$

где  $\tau_{1\text{изм}}$  определяется согласно (8) и (16).

Общая относительная систематическая погрешность согласно (14) равна

$$\delta_1 = \frac{\tau_{1\text{изм}}}{\tau_1} - 1.$$

Исследования показали, что при использовании формул (10) и (12) для численного интегрирования систематическая погрешность определения постоянной времени при некотором отношении  $T/\tau_1$  равна нулю, а для (9) и (11) – имеет минимумы. Это происходит в результате взаимной компенсации составляющих систематической погрешности. Зависимости минимумов погрешностей и соответствующих им отношений  $T/\tau_1$  для различного числа отсчетов показаны на рис.1 а и б (цифрами обозначены формулы численного интегрирования согласно выражениям (9) – (12)).

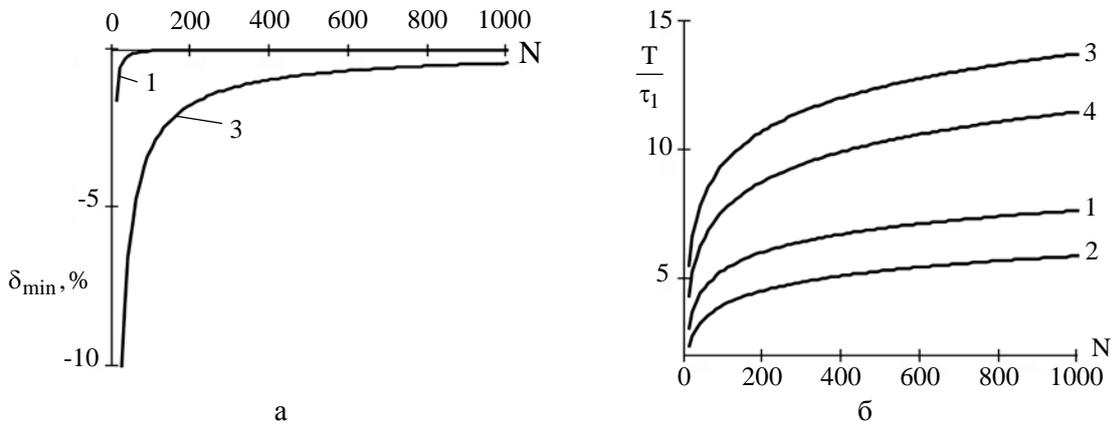


Рис. 1. Минимумы систематической погрешности идентификации ПХ СИТ (а) и соответствующие им отношения  $T/\tau_1$  (б)

## 2. Аperiodическое звено второго порядка

Рассмотрим аperiodическое звено второго порядка, для которого ПХ имеет вид

$$h(t) = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right). \quad (17)$$

Для определения постоянных времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  [4] необходимо знать первые два начальных момента

$$\tau_{1,2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{4\alpha_2 - 3\alpha_1^2}}{2}. \quad (18)$$

Чтобы определить погрешность нахождения постоянных времени, вызываемую ограничением времени измерения ПХ, необходимо рассчитать начальные моменты в соответствии с (6)

$$\alpha_{1\text{огр}} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right) + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right);$$

$$\alpha_{2\text{огр}} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_1 - (\tau_1 + T) \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right) + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_2 - (\tau_2 + T) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right).$$

С учетом этого рассчитывают постоянные времени  $\tau_{1\text{огр}}$  и  $\tau_{2\text{огр}}$  в соответствии с (18).

Относительные погрешности определения постоянных времени от ограничения времени измерения рассчитывают по формуле

$$\delta_{1,2 \text{ огр}} = \frac{\tau_{1,2 \text{ огр}}}{\tau_{1,2}} - 1.$$

Относительные погрешности определения постоянных времени, обусловленные дискретным измерением ограниченного временем измерения участка ПХ, определяются выражением

$$\delta_{1,2 \text{ ч.и}} = \frac{\tau_{1,2 \text{ изм}} - \tau_{1,2 \text{ огр}}}{\tau_{1,2}}.$$

Общая систематическая погрешность идентификации ПХ рассматриваемого аperiодического звена определяется по формуле

$$\delta_{1,2} = \frac{\tau_{1,2 \text{ изм}}}{\tau_{1,2}} - 1.$$

Было выяснено, что при использовании формул (10) и (12) невозможно определить постоянные времени при определенных их отношениях вследствие появления отрицательного дискриминанта в выражении (18). Зависимости отношений  $\tau_2/\tau_1$ , для которых

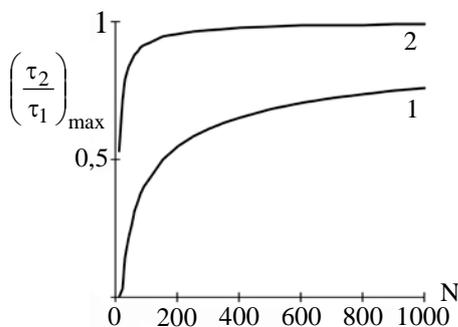


Рис.2. Максимальные отношения  $\tau_2/\tau_1$

метод моментов с использованием формулы (10) (кривая 1) и формулы (12) (кривая 2) не действителен, от количества отсчетов приведены на рис.2.

При этом существуют ограничения на выбираемое время измерения ПХ, вызванные необходимостью дискретного измерения ПХ за определенное время измерения, причем для формул (10) и (12) ограничения накладываются как со стороны малых отношений  $T/\tau_1$ , так и со стороны больших, что следует учитывать при планировании эксперимента.

Общая систематическая погрешность при использовании формул (9) и (11) имеет нулевые значения: соответствующие отношения  $T/\tau_1$  показаны на рис.3 а и б соответственно (сплошной линией обозначены зависимости для  $\tau_1$ , штриховой - для  $\tau_2$ ).

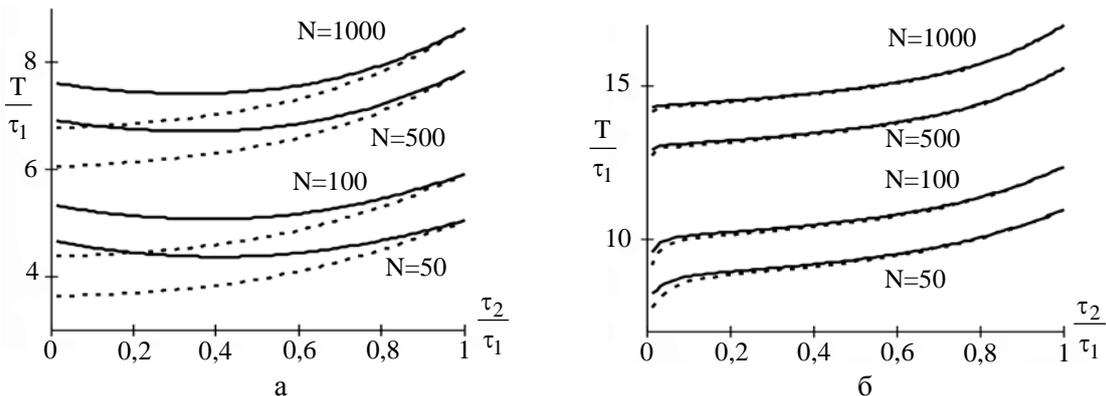


Рис.3. Отношения  $T/\tau_1$ , при которых общая систематическая погрешность

идентификации ПХ равна нулю для первой (а) и третьей (б) формул прямоугольников

При использовании формул (10) и (12) систематическая погрешность имеет минимальные значения. Эти значения и соответствующие им отношения  $T/\tau_1$  показаны на рис.4 и 5 соответственно.

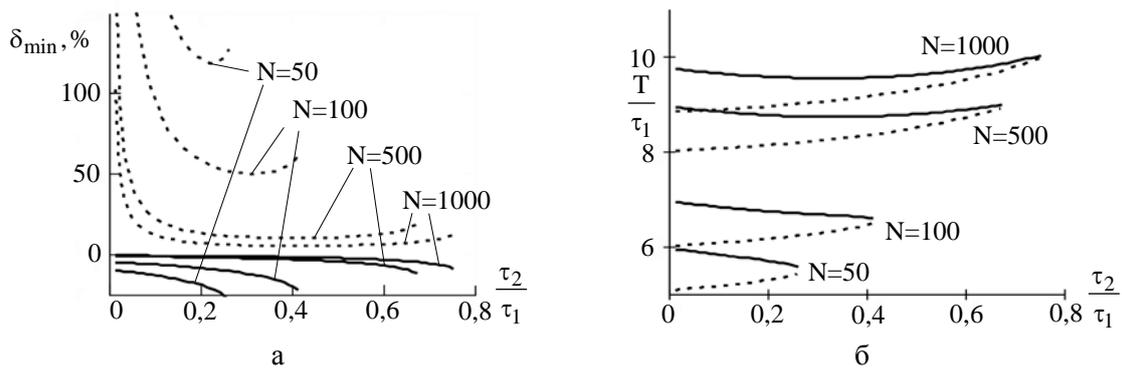


Рис.4. Минимальные значения систематической погрешности идентификации ПХ (а) и соответствующие им отношения  $T/\tau_1$  (б) для второй формулы прямоугольников

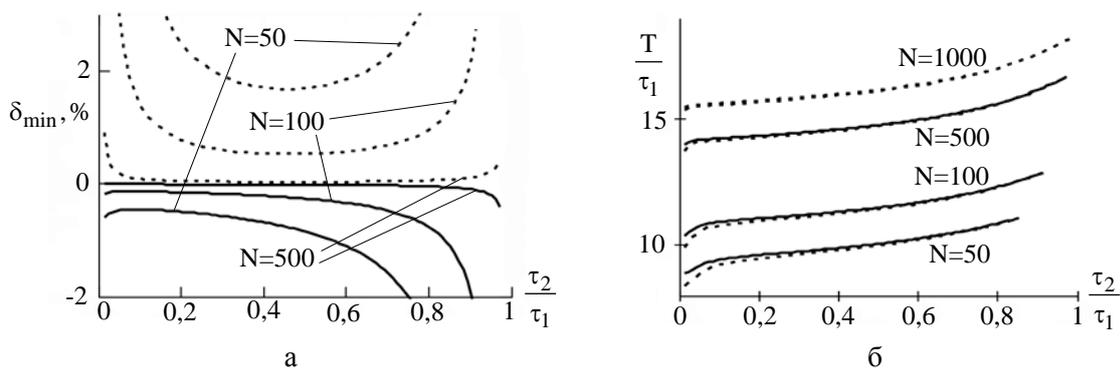


Рис.5. Минимальные значения систематической погрешности идентификации ПХ (а) и соответствующие им отношения  $T/\tau_1$  (б) для формулы трапеций

Проведенные исследования систематической погрешности идентификации ПХ апериодических СИТ первого и второго порядков позволяют сделать следующие выводы:

1) при идентификации ПХ апериодических СИТ первого порядка целесообразно применять для численного интегрирования формулы (10) и (12), поскольку при определенном значении времени измерения можно добиться отсутствия общей систематической погрешности. Также возможно применение формулы (11), поскольку в этом случае на продолжительном отрезке значений времени измерения погрешность принимает минимальное значение, и, следовательно, нет необходимости в точном подборе значения времени измерения;

2) при идентификации ПХ СИТ рассмотренной модели второго порядка с использованием указанных формул численного интегрирования существуют такие значения времени измерения, при которых метод моментов недейственен, причем для формул (10) и (12) применимое время измерения ПХ ограничено со стороны малых и больших значений. Также для этих формул интегрирования метод моментов недейственен при некоторых соотношениях между постоянными времени, поэтому применять эти формулы не рекомендуется. Таким образом, в данном случае повышение степени аппроксимирующей функции приводит к заметному ухудшению эффективности метода;

3) при использовании формул (9) и (11) для численного интегрирования ПХ СИТ второго порядка можно добиться отсутствия систематической погрешности при правильном выборе соотношений между постоянными времени и временем измерения ПХ. Использование формул (10) и (12) позволяет получить минимальные значения систематической погрешности.

4) таким образом, методика минимизации систематической погрешности идентификации ПХ апериодических СИТ методом моментов в общем случае выглядит следующим образом:

а) по предварительно проведенному измерению ПХ в дискретных точках с учетом ограничений, оговоренных выше, рассчитывают постоянные времени в соответствии с (4) и (5);

б) подбирают необходимое количество отсчетов и формулу численного интегрирования, для них выбирают время измерения ПХ, обеспечивающее минимальное (нулевое) значение систематической погрешности, и проводят повторное измерение и обработку результатов.

Научная новизна работы состоит в исследовании погрешностей метода моментов, что позволило увеличить точность результата измерения и определить границы применимости этого метода.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что выполнение предложенных рекомендаций позволяет снизить временные затраты на проведение эксперимента за счет оптимизации процесса его подготовки и проведения и уменьшить относительную погрешность определения постоянных времени.

По сравнению с наиболее часто применяемым на практике методом, когда систематическая погрешность результата измерения рассчитывают после проведения эксперимента и вводят соответствующую поправку, предложенный метод позволяет снизить относительную систематическую погрешность на 3...20 % в зависимости от выбора аппроксимирующей модели ПХ и формулы численного интегрирования.

**Список литературы:** 1. *ГОСТ 8.009-84* Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. М.: Изд-во стандартов, 1988. – 38 с. 2. *Вайсбанд М.Д., Проненко В.И.* Техника выполнения метрологических работ. К.: Техніка, 1986. – 168 с. 3. *Дехтяренко П.И., Коваленко В.П.* Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования. М.: Энергия, 1973. – 120 с. 4. *Захаров И.П., Штефан Н.В.* Идентификация динамических характеристик апериодических измерительных преобразователей мощности СВЧ// Радиотехника. 1997. Вып. 104. С.47 – 55. 5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1981. – 720 с.

Поступила в редколлегию 00.00.00

**Захаров Игорь Петрович**, к.т.н., доцент кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы – метрологическая идентификация многопараметрических средств измерений. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

**Сергиенко Марина Петровна**, аспирант кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы - динамические измерения. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

УДК 681.2.089

**Дослідження систематичної похибки ідентифікації динамічних характеристик засобів вимірювальної техніки за допомогою методу моментів/** І.П. Захаров, М.П. Сергієнко// АСУ та прилади автоматики. 2004. № 00. С.000-000.

Аналіз похибок ідентифікації динамічних характеристик засобів вимірювань надає можливість знайти способи їх мінімізації. Розглянуто основні складові систематичної похибки ідентифікації перехідних характеристик за допомогою методу моментів та їх взаємний зв'язок. Для засобів вимірювальної техніки, що відображені моделями першого та другого порядків, представлені рекомендації щодо застосування методу моментів: вибору часу вимірювання перехідної характеристики, кількості відліків, формули чисельного інтегрування в залежності від попередньо знайдених співвідношень між постійними часу. Надано удосконалену методику ідентифікації перехідних характеристик засобів вимірювальної техніки.

Лл. 5. Бібліогр.: 5 назв.

UDC 681.2.089

**Research to systematic error to identifications of the dynamical characteristics of the measuring instruments by method of the moments/** I.P. Zakharov, M.P. Sergienko//Management Information System and Devices. All-Ukr. Sci. Interdep. Mag. 2004. N 00. P. 000-000.

The analysis of errors to identifications of the dynamic characteristics of the measuring instruments enables to find the ways for their minimization. They are considered main forming systematic error to identification of the transitive characteristics by method of the moments and their intercoupling. For the measuring instruments described model the first and the second order is presented recommendations on using the method of the moments: choice of measurement time of the transitive characteristic, amount counting out, formulas numerical integration depending on beforehand determined correlations between of time constants. It is described advanced methods to identifications of the transitive characteristic of the measuring instruments.

Fig. 5. Ref.: 5 items.