УДК 519.7

М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко

МОДЕЛИ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ

1. Задача моделирования зрительных процессов

Орган зрения человека, являющийся сложнейшей системой приема и обработки информации, давно привлекает внимание исследователей. Многое о принципах работы органа зрения человека уже известно, и эти знания широко используются в светотехнике, технике кино и телевидения, полиграфии и в ряде других областей. Глаз современного человека работает в контакте со многими техническими устройствами. К ним относятся установки телевидения, кино и радиолокации, пульты управления, измерительные приборы, светотехнические устройства, книги, различные знаки (например, дорожные), карты и многое другое. Все эти устройства создаются с учетом свойств человеческого зрения. Так, например, скорость развертки луча в телевизионном изображении, размеры и форма шрифтов книг, частота смены кадров в кино, характер сигнальных огней, размеры и форма шкал, режимы освещения, — все это выбирается в зависимости от свойств человеческого зрения. Чем лучше и полнее мы будем знать эти свойства, тем эффективнее, проще и дешевле будут технические устройства, создаваемые для совместной работы с органом зрения человека.

Данные о принципах работы органа зрения важны также и в связи с тем, что уже в настоящее время для различных технических целей создаются специальные устройства фотоввода информации. Это — различного рода фотоприемные устройства для измерительных приборов и систем автоматики, телевизионные системы и системы радиолокации, устройства фотоввода информации в вычислительные, управляющие и информационные машины. Орган зрения человека также является фотоприемником информации. Будучи неизмеримо более совершенным по сравнению с техническими приборами, орган зрения во многих отношениях может служить образцом при создании новых и усовершенствовании существующих устройств фотоввода информации.

При исследовании органа зрения человека целесообразно рассматривать его как устройство, осуществляющее прием и преобразование сигналов. В настоящей работе рассматривается задача исследования закономерностей преобразования сигналов в органе зрения с целью формулировки этих закономерностей в виде математических моделей. Вопрос об анатомических структурах и физиологических механизмах, обеспечивающих выполнение этих преобразований, не будет затрагиваться. Основой при построении математических моделей работы органа зрения для нас будут служить психофизические реакции зрительного анализатора. При такой постановке задачи для наблюдения доступны лишь входные и выходные сигналы органа зрения, и математическое моделирование зрительных процессов можно вести по методу, получившему название метода кибернетического «черного ящика». Входными сигналами органа зрения являются зрительные картины, наблюдаемые испытуемым, а выходными — возникающие при этом у испытуемого зрительные ощущения.

Следует отметить, что математическое моделирование зрения человека, основанное на изучении психофизических реакций глаза и фактическом использовании понятия «черного ящика», не является чем-то принципиально новым. Такая работа, хотя и в иных терминах, ведется уже давно, и к настоящему времени в области математического моделирования зрения получен ряд существенных результатов. В этой области успешно работали Ньютон, Юнг, Максвелл, Грассман, Гельмгольц, Шредингер. Значительный вклад в развитие проблем математического моделирования зрения человека внесли отечественные ученые П. П. Лазарев, А. В. Луизов, В. В. Мешков, Н. Д. Нюберг, М. М. Бонгард, А. Б. Матвеев, М. С. Смирнов, Д. А. Шкловер и др. Однако, в связи со сложностью законов преобразования информации в органе зрения человека, многие стороны и свойства зрения остаются пока еще не охваченными математическими моделями. Настоящая работа посвящена дальнейшей разработке проблем математического моделирования зрения человека.

Прежде чем приступить к исследованию избранного нами вопроса, рассмотрим, что представляют собой входные и выходные сигналы органа зрения человека и дадим их математическое описание. С этой целью воспользуемся схемой, представленной на рис. 1. На ней изображен эскиз преобразования сигналов в органе зрения человека. Перед глазом 1 расположена зрительная картина 2, заданная в поле зрения. Выделим в поле зрения точку фиксации o и проведем через нее горизонтальную и вертикальную оси. Координатами x и y произвольной точки M поля зрения будем называть соответственно углы $oo'a$ и $oo'b$:

$$x = \angle oo'a,\ y = \angle oo'b. \tag{1}$$

Точка o' расположена внутри хрусталика глаза. Каждой точке поля зрения соответствует входной сигнал b_λ, характеризующий зрительную картину в этой точке в данный момент времени, а именно спектральная плотность лучистой яркости в функции длины волны или просто спектр излучения $b(\lambda)$ [1, с. 34].

Любая конкретная зрительная картина, заданная в поле зрения, может быть математически описана в виде функции входного сигнала b_λ от координат поля зрения x, y и времени t:

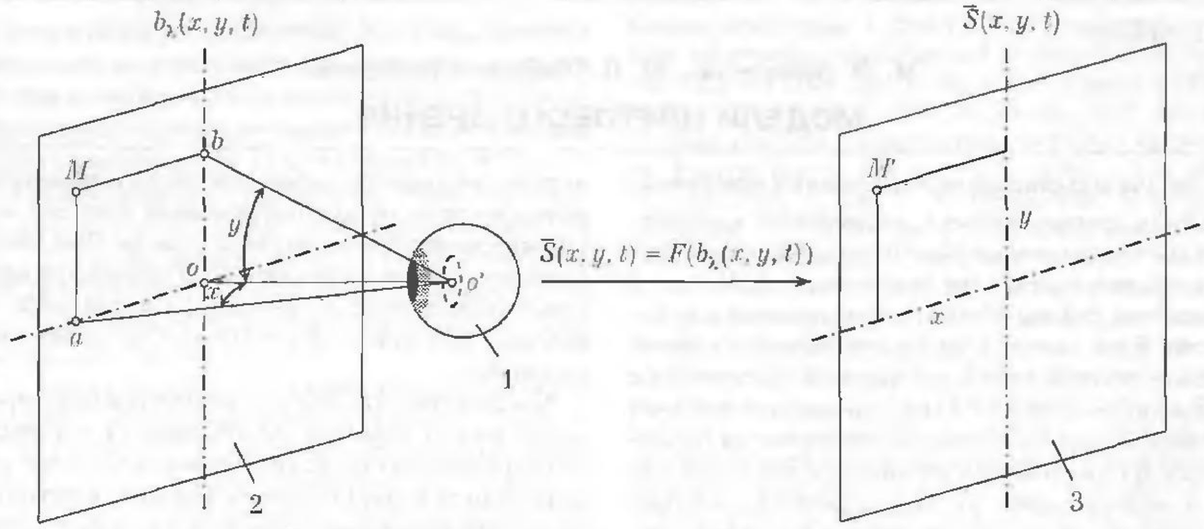

Рис. 1. Схема преобразования сигналов в органе зрения человека

$$b_\lambda = b_\lambda(x, y, t). \qquad (2)$$

Таким образом, в принципе, можно математически описать любую зрительную картину, изменяющуюся в пространстве и во времени. В органе зрения человека осуществляется преобразование зрительной картины в зрительное ощущение 3. Зрительное ощущение также задано в двумерном поле. Точке M' зрительного ощущения приписываем координаты x, y соответствующей точки M зрительной картины. Зрительное ощущение в каждой точке поля зрения характеризуется цветом. Считаем, что цвет может быть разложен на три компонента: цветовой тон, насыщенность и светлоту [2, с. 11]. Таким образом, зрительное ощущение в каждой точке поля зрения будем описывать с помощью трехмерного вектора цвета $\overline{S}$, компонентами которого служат светлота S_1, насыщенность S_2 и цветовой тон S_3. Зрительное ощущение в целом, так же как и зрительная картина, может быть описано некоторой зависимостью цвета $\overline{S}$ от координат поля зрения x, y и времени t:

$$\overline{S} = \overline{S}(x, y, t). \qquad (3)$$

Мы ввели в рассмотрение входной $b_\lambda(x, y, t)$ и выходной $\overline{S}(x, y, t)$ сигналы органа зрения. Теперь более строго и детально сформулируем задачу исследования. Она состоит в том, чтобы отыскать закон F преобразования входного сигнала органа зрения в выходной:

$$\overline{S}(x, y, t) = F(b_\lambda(x, y, t)). \qquad (4)$$

Функция F преобразует бесконечномерную вектор-функцию $b_\lambda(x, y, t)$ трех переменных x, y, t в трехмерную вектор-функцию $\overline{S}(x, y, t)$ тех же переменных. Можно считать, что функция F есть векторный оператор [3, с. 12], который ставит в соответствие вектор-функциям $b_\lambda(x, y, t)$ вектор-функции $\overline{S}(x, y, t)$. Исходя из повседневного опыта зрения, можно заключить, что этот оператор непрерывен [3, с. 18], поскольку всегда при непрерывном изменении зрительной картины $b_\lambda(x, y, t)$ наблюдается непрерывное изменение зрительного ощущения $\overline{S}(x, y, t)$. Даже не опираясь на специальные эксперименты, а используя только повседневную практику зрения каждого человека, можно заключить, что искомый оператор зрения F не будет очень простым. Напротив, легко прийти к выводу о его большой сложности. Этот оператор должен воспроизводить разнообразные свойства цветового зрения, инерции и иррадиации зрения, адаптации и контраста. В связи с этим имеет смысл общую задачу отыскания оператора F разбить на ряд более простых задач.

Наиболее простой постановка задачи получается, если ограничить класс входных сигналов лишь однородными и стационарными зрительными картинами. Однородной мы называем такую зрительную картину, у которой излучения во всех точках поля зрения одинаковы. В этом случае входной сигнал b_λ не зависит от координат поля зрения x, y, а зависит лишь от времени t, то есть $b_\lambda = b_\lambda(t)$. Стационарной назовем такую зрительную картину, у которой излучения во всех точках не меняются со временем. Иными словами, функция b_λ, описывающая зрительную картину, не зависит от времени, а зависит лишь от координат поля зрения, то есть $b_\lambda = b_\lambda(x, y)$. Функция, описывающая однородную и стационарную зрительную картину, не зависит от координат поля зрения и времени и представляет собой спектр излучения $b_\lambda = b(\lambda)$. Такая картина представляет собой равномерное поле сигналов, не меняющихся с течением времени. Опыт показывает, что таким зрительным картинам соответствует зрительное ощущение, также являющееся однородным и стационарным, то есть не зависящее от координат поля зрения. Зрительное ощущение имеет вид равномерного фона одного цвета, заполняющего все поле зрения. Выходной сигнал представляет собой трехмерный вектор $\overline{S}$.

Далее можно усложнить задачу, расширив класс входных сигналов за счет введения нестационарных зрительных картин. В этом случае входной сигнал становится функцией времени, то есть $b_\lambda = b_\lambda(t)$. Опыт показывает, что зрительное ощущение также будет представлять собой функцию времени и не будет зависеть от координат поля зрения, то есть $\overline{S} = \overline{S}(t)$. Зрительное ощущение будет выглядеть в виде равномерного фона, цвет которого меняется со временем. Точно так же возможно изолированное рассмотрение задачи о связи $b_\lambda(x)$ и $\overline{S}(x)$, $b_\lambda(y)$ и $\overline{S}(y)$. Далее могут быть изолированно рассмотрены задачи о связи сигналов $b_\lambda(x, y)$ и $\overline{S}(x, y)$, $b_\lambda(x, t)$ и $\overline{S}(x, t)$, $b_\lambda(y, t)$ и $\overline{S}(y, t)$. Наконец, мы приходим к общей задаче о связи между сигналами $b_\lambda(x, y, t)$ и $\overline{S}(x, y, t)$.

Построение математической модели стационарных и однородных зрительных процессов $\overline{S} = F(b(\lambda))$ должно основываться на фактах так называемых «низшей» и «высшей» метрик цвета. Исследование нестационарных зрительных процессов $\overline{S}(t) = F(b_\lambda(t))$ требует рассмотрения явлений инерции и адаптации зрения. Математическая модель неоднородных зрительных процессов $\overline{S}(x,y) = F(b_\lambda(x, y))$ может быть построена на основе изучения фактов иррадиации зрения и явлений зрительного контраста. Задача моделирования зрительных процессов в общем случае $\overline{S}(x, y, t) = F(b_\lambda(x, y, t))$ приводит к необходимости изучения реакций органа зрения на зрительные картины произвольной сложности. Таким образом, мы приходим к необходимости освоения обширного экспериментального материала. В полном объеме такая работа не может быть выполнена в одном исследовании. В силу этого приходится сузить задачу и ограничиться построением математических моделей для ряда частных случаев функционирования органа зрения.

При построении этих моделей мы придерживались следующего порядка в проведении работ и изложении полученных результатов. Вначале конструируется математическая модель, которая, хотя бы в качественном отношении, воспроизводит ту или иную область фактов зрения. Затем на основе этой модели чисто дедуктивным путем определяются предсказываемые зрительные реакции, которые сравниваются с фактическими реакциями зрительного анализатора, описанными в литературе. Если литературных данных оказывается недостаточно или они вовсе отсутствуют, то проводятся новые необходимые опыты. Модель считается заслуживающей внимания, если хотя бы некоторые из предсказаний, полученных на основе этой модели, совпадают с фактическими реакциями органа зрения. После этого решается задача построения такой новой модели, которая в логическом отношении была бы равносильна следствиям из прежней модели, оправдавшим себя на опыте. Новая модель отличается от первоначальной тем, что в ней устранены те детали, справедливость которых не удалось подтвердить в опыте. В случаях, когда такую задачу удается решить, мы получаем модель, которая логически вытекает из надежно установленных экспериментальных законов, принимаемых в качестве аксиом. Степень достоверности полученной таким путем модели определяется лишь надежностью установления соответствующих экспериментальных законов. Хотя мы и стремились к возможно более полному осуществлению изложенной программы, однако ее удалось реализовать только в ряде частных случаев. Не во всех из этих случаев эта программа была выполнена полностью. Полное осуществление изложенной программы означало бы получение достоверной и исчерпывающей информации об операторе человеческого зрения $\overline{S}(x, y, t) = F(b_\lambda(x, y, t))$.

2. Задача моделирования стационарных и однородных зрительных процессов

Задача математического моделирования стационарных и однородных зрительных процессов сводится к отысканию вида зависимости:

$$\overline{S} = F(b(\lambda)), \tag{5}$$

где $b(\lambda)$ — входной сигнал органа зрения в виде спектра излучения; $\overline{S}$ — выходной сигнал органа зрения в виде трехмерного вектора цвета; F — искомая функциональная зависимость выходного сигнала от входного. Исследования Ньютона [5], Ломоносова [6], Юнга [7], Максвелла [8], Гельмгольца [9] и других авторов привели к построению трехкомпонентной теории цветового зрения, которую можно сформулировать следующим образом. Всевозможные излучения $b(\lambda)$, для которых совпадают тройки чисел B_1, B_2, B_3, вычисляемые по формулам

$$B_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)m(\lambda)d\lambda, \quad B_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)n(\lambda)d\lambda,$$

$$B_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)p(\lambda)d\lambda, \tag{6}$$

порождают одинаковые цвета. Вместе с тем, излучения, для которых эти тройки различны, порождают различные цвета. В равенствах (6) $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ обозначают линейно независимые функции (так называемые функции сложения), определяемые для органа зрения экспериментально [10, с. 224]. Числа λ_1 и λ_2 обозначают соответственно наименьшее и наибольшее значения длины волны видимого диапазона спектра электромагнитных колебаний.

Как непосредственно следует из приведенной формулировки трехкомпонентной теории цветового зрения, вектор цвета $\overline{S}$ с компонентами S_1, S_2, S_3 связан некоторой взаимно однозначной вектор-функцией f с вектором $\overline{B}$, имеющим компоненты B_1, B_2, B_3:

$$\overline{S} = f(\overline{B}). \tag{7}$$

Конкретный вид зависимости f трехкомпонентной теорией цветового зрения не расшифровывается. Совокупность соотношений (6) и (7) можно рассматривать в качестве математической модели, описывающей вид искомого преобразования сигналов, осуществляемого органом зрения человека. Блок-схема этой модели изображена на рис. 2. В ней блоки 1_1, 1_2, 1_3 осуществляют вычисление линейных функционалов B_1, B_2, B_3 по формулам (6). Блок 2 осуществляет некоторое взаимно однозначное преобразование (7) вектора $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3 в вектор $\overline{S}$ цвета зрительного ощущения с компонентами S_1 — светлотой, S_2 — насыщенностью, S_3 — цветовым тоном.

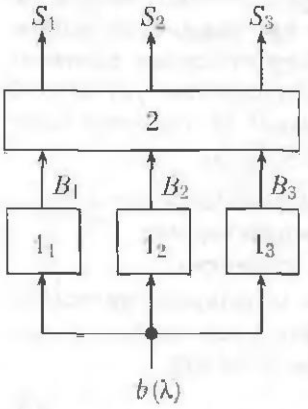

Рис. 2. Математическая модель цветового зрения

Возникает вопрос, является ли эта модель всего лишь гипотезой, различные следствия которой подтверждаются в эксперименте, или же ее можно рассматривать как достоверный факт и, следовательно, она может быть логически выведена из прочно установленных экспериментальных законов, принимаемых в качестве аксиом. Многие авторы вводят эти уравнения прежде, чем рассматриваются экспериментальные факты, подтверждающие их справедливость. В этом случае соотношения (6), (7) фактически фигурируют в качестве гипотезы. Так сделано, например, в книге Мешкова [10, с. 101, 198]. Затем, основываясь на соотношениях (6) и (7), вводят понятие вектора цвета, понимая под ним вектор $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3. Далее вводят операции сложения цветов и умножения их на постоянные числа, а также понятие линейной зависимости цветов. Затем с помощью введенных понятий формулируются три закона смешения цветов (законы Грассмана [10]). Иногда эти три закона объединяют в один. Законы Грассмана служат тем основанием, на котором строится затем стройное здание колориметрии. Приведем один из вариантов формулировки законов Грассмана: закон аддитивности — суммы попарно равных цветов также суть равные цвета; закон трехмерности — любые четыре цвета линейно зависимы, однако существуют тройки линейно независимых цветов; закон непрерывности — непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета.

В то же время в литературе существует мнение, по-видимому, впервые высказанное в 1920 г. Шредингером в работе [12], что из законов Грассмана в приведенной выше формулировке чисто логически вытекает модель цветового зрения в виде формул (6) и (7). В той же работе Шредингер дал вывод, доказывающий, по его мнению, это положение. Нюберг в работе [13, с. 158] пишет: «Обычно интегральные выражения цвета выводятся как следствие гипотезы Гельмгольца, но их возможно получить непосредственно из закона Грассмана, *не пользуясь никакой гипотезой* (курсив Нюберга. — *Авт.*). Это положение за недостатком места я оставляю без доказательства, которое можно найти в статье Шредингера». Однако выполненный нами анализ этого доказательства показал, что в его основе содержится ошибка «логического круга», делающая вывод неэффективным. Дело в том, что в качестве исходной посылки Шредингер использовал законы Грассмана, сформулированные с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа.

Однако легко доказать, что законность введения операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа не может быть строго обоснована до тех пор, пока не будет доказана справедливость модели в виде соотношений (6), (7). Действительно, законность введения операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа может быть обоснована только в том случае, если под цветом понимать вектор $\overline{B}$, компоненты B_1, B_2, B_3 которого линейно зависят от излучения $b(\lambda)$, то есть, иными словами, определяются соотношениями (6) (поскольку других линейных зависимостей не существует [14, с. 180]). Однако вектор $\overline{B}$ может рассматриваться в качестве характеристики цвета лишь в том случае, если имеется уверенность в том, что одинаковым векторам $\overline{B}$ соответствуют одинаковые цвета и одинаковым цветам соответствуют одинаковые векторы $\overline{B}$. Таким образом, мы приходим к необходимости использования зависимости (7).

Следовательно, для строгого обоснования законности введения операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа необходимо прежде признать справедливой модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7). Поэтому при выводе модели цветового зрения в виде соотношений (6) и (7) мы не имеем права пользоваться законами Грассмана, сформулированными с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Тем не менее, сказанное вовсе не означает, что из законов Грассмана не вытекает модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7). Такое утверждение было бы справедливо лишь в том случае, если бы эти законы было невозможно сформулировать без привлечения понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Однако, как будет показано ниже, такая формулировка законов Грассмана возможна. Мы также докажем, что из этой формулировки законов Грассмана логически следует модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7).

3. Новая формулировка законов Грассмана

Выше было сказано, что использование понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа в неявной форме опирается на гипотетическую модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7). Следовательно, и законы Грассмана, сформулированные с использованием тех же понятий, зависят от этой гипотезы. Но в таком случае уместно поставить вопрос: могут ли законы Грассмана, опирающиеся на гипотезу, называться законами. Для того чтобы восстановить законы Грассмана в своих правах, необходимо их сформулировать без привлечения понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Приступая к решению этой задачи, мы будем пользоваться лишь операциями сложения излучений и умножения излучения на постоянные числа. Законность введения этих операций основана на хорошо изученных свойствах света и не зависит от каких-либо гипотез о виде преобразования сигналов в органе зрения.

Пусть имеются два поля сравнения, причем на одном из них сформировано излучение $b_1(\lambda)$, а на другом $b_2(\lambda)$. При предъявлении этих зрительных картин в органе зрения возникают зрительные ощущения, характеризующиеся соответственно цветами $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Для характеристики условий такого опыта удобно ввести функцию $\beta(\lambda)$, равную разности спектров излучений первого и второго полей сравнения:

$$\beta(\lambda) = b_1(\lambda) - b_2(\lambda). \quad (8)$$

Этой функции мы не приписываем никакого физического смысла. Она вводится лишь затем, чтобы с ее помощью можно было более изящно и кратко сформулировать законы Грассмана. Заметим, что каждой функции $\beta(\lambda)$ соответствует не одна, а бесчисленное множество пар излучений вида $b_1(\lambda) + \beta_0(\lambda)$, $b_2(\lambda) + \beta_0(\lambda)$, где $\beta_0(\lambda)$ — произвольная функция длины волны. Таким образом, прибавляя или вычитая (когда это возможно) на полях сравнения одинаковые излучения, мы не меняем значения функции $\beta(\lambda)$. Важно также отметить, что в силу полной равноправности полей сравнения перемена излучений местами соответствует, по существу, одному и тому же опыту. Так что, если для пары излучений $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ наблюдается равенство цветов полей сравнения, то это равенство будет также наблюдаться и для пары излучений $b_2(\lambda)$, $b_1(\lambda)$. С учетом изложенного сформулируем закон аддитивности.

Закон аддитивности. *Если в двух опытах с условиями, характеризуемыми функциями $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$, наблюдается равенство цветов полей сравнения, то во всевозможных опытах с условиями, характеризуемыми функцией $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$, также будет наблюдаться равенство цветов полей сравнения.*

Важно отметить, что в новой редакции закон аддитивности может быть продемонстрирован на опыте. Это можно сделать следующим образом. Берем две произвольные пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$, цвета которых попарно одинаковы (цвет излучения $b_1'(\lambda)$ совпадает с цветом излучения $b_2'(\lambda)$, а цвет излучения $b_1''(\lambda)$ совпадает с цветом излучения $b_2''(\lambda)$). Определяем для этих пар излучений функции, характеризующие условия опытов: $\beta'(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda)$, $\beta''(\lambda) = b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda)$, а также суммарную функцию: $\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)$. Затем берем произвольную пару излучений $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, разность которых дает функцию $\beta(\lambda)$, то есть $b_1(\lambda) - b_2(\lambda) = \beta(\lambda)$, и убеждаемся на опыте, что для этих излучений также будет наблюдаться равенство цветов полей сравнения.

Как следствие из закона аддитивности вытекает, что одинаковые излучения порождают одинаковые цвета. Действительно, пусть на поля сравнения поданы излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$, для которых наблюдается равенство цветов полей сравнения. Характеристикой условий этого опыта является функция $\beta_1(\lambda)$, равная $\beta_1(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$. Поменяем излучения местами. Как было отмечено выше, в силу равноправности полей сравнения по-прежнему будет наблюдаться равенство цветов. Характеристикой условий этого опыта служит функция $\beta_2(\lambda)$, равная $\beta_2(\lambda) = b''(\lambda) - b'(\lambda)$. Согласно закону аддитивности, равенство цветов полей сравнения будет наблюдаться также для всевозможных опытов, характеризуемых функцией: $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda) = (b'(\lambda) - b''(\lambda)) + ((b''(\lambda) - b'(\lambda)) = 0$. Этой функции соответствуют всевозможные пары равных излучений. Следовательно, одинаковые излучения порождают одинаковые цвета.

Это следствие весьма важно в методологическом отношении. Так как одинаковым излучениям, то есть входным сигналам, соответствуют одинаковые цвета, то есть выходные сигналы органа зрения, то между ними существует причинная связь. Этим обосновывается правомерность постановки задачи моделирования стационарных и однородных зрительных процессов. Предположим, что на полях сравнения сформированы излучения, цвета которых одинаковы. Из закона аддитивности следует, что добавление или вычитание на этих полях одинаковых излучений в результате снова дает равенство цветов. Именно это обстоятельство делает естественным введение функций $\beta(\lambda)$, определяемых равенством (4), для характеристики условий опыта. Сформулируем теперь закон трехмерности.

Закон трехмерности. *Существует тройка фиксированных функций $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$ такая, что для любой функции $\beta(\lambda)$ можно подыскать, и притом единственным образом, тройку чисел U_1, U_2, U_3 таких, что в опытах с условиями, характеризуемыми функцией*

$$U_1\beta_1(\lambda) + U_2\beta_2(\lambda) + U_3\beta_3(\lambda) + \beta(\lambda), \quad (9)$$

будет наблюдаться равенство цветов полей сравнения.

Закон трехмерности может быть продемонстрирован на опыте следующим образом. Пусть нам даны три пары специально подобранных излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$; $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$; $b_3'(\lambda)$, $b_3''(\lambda)$, разности которых обозначим через $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$, то есть $\beta_1(\lambda) = (\lambda) - (\lambda)$; $\beta_2(\lambda) = (\lambda) - (\lambda)$; $\beta_3(\lambda) = (\lambda) - (\lambda)$. Закон трехмерности утверждает, что такие три пары излучений всегда могут быть найдены. Пусть, кроме того, дана произвольная пара излучений $b'(\lambda)$, $b''(\lambda)$, разность которых обозначим через $\beta(\lambda)$, то есть $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$. Подадим на поля сравнения излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. Будем теперь добиваться достижения равенства цветов полей сравнения. С этой целью разрешается излучения каждой из трех пар одновременно прибавлять на соответствующие поля сравнения, причем в любом порядке и с умноженном на любые равные положительные числа. Кроме того, разрешается прибавлять или вычитать (когда это возможно) на полях сравнения любые равные излучения. Производя такие опыты, убеждаемся, что всегда возможен подбор на полях сравнения линейных комбинаций излучений, обеспечивающих равенство цветов полей сравнения. Такому подбору соответствует функция (9), определяемая как разность полученных излучений на полях сравнения. На опыте также убеждаемся, что всякий раз, когда достигается равенство цветов полей сравнения, в функции разности излучений полей сравнения для такого опыта получаются всегда одни и те же коэффициенты U_1, U_2, U_3. Закон непрерывности сформулируем следующим образом.

Закон непрерывности. *Непрерывному изменению функции* $\beta(\lambda)$ *соответствует непрерывное изменение чисел* U_1, U_2, U_3.

Непрерывность функции $\beta(\lambda)$ понимается в смысле метрики пространства L суммируемых функций [15, с. 150]. Имеются в виду числа U_1, U_2, U_3, существование и единственность которых постулируется вторым законом. Демонстрация закона трехмерности может быть осуществлена следующим образом. Берем две произвольные пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$ такие, что соответствующие им функции разности излучений $\beta_1(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda) = b_2'(\lambda) - b_2''(\lambda)$ близки в смысле метрики пространства L. Это значит, что расстояние σ между этими функциями, определяемое формулой

$$\sigma = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\beta_1(\lambda) - \beta_2(\lambda)| d\lambda,$$

достаточно мало. На опыте убеждаемся, что соответствующие числа $U_1' - U_1''$, $U_2' - U_2''$, $U_3' - U_3''$ всегда оказываются достаточно близкими к нулю.

Сравнивая новую формулировку законов Грассмана с прежней, можно видеть, что теперь в формулировке законов совершенно не участвуют операции сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. О цветах утверждается лишь то, что они равны или не равны между собой. Сознание наблюдателя используется при этом лишь как нулевой прибор, фиксирующий равенство или неравенство цветов двух зрительных ощущений. Важно заметить, что стандартные колориметрические опыты фактически выполняются в точности по той процедуре, которая необходима для демонстрации справедливости законов Грассмана в новой формулировке, поскольку в этих опытах операциям сложения и умножения на постоянные коэффициенты подвергаются именно излучения, а не цвета. Цвета же подвергаются единственной операции, состоящей в установлении их равенства или неравенства [16]. Наконец, необходимо заметить, что за отказ от использования операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа приходится расплачиваться более громоздкой формулировкой законов. Однако новая формулировка законов Грассмана, в отличие от прежней, свободна от каких-либо гипотез.

4. Вывод модели из законов Грассмана

Приступим теперь к выводу математической модели цветового зрения в виде соотношений (6) и (7) из законов Грассмана в новой формулировке. Прежде всего докажем, что совокупность функций $\beta(\lambda)$, являющихся разностью спектров пар всевозможных излучений, образует линейное нормированное пространство $L[\lambda_1, \lambda_2]$ суммируемых функций [17, с. 19]. Для этого достаточно показать, что выполняются следующие три условия: 1) для любой функции $\beta(\lambda)$ может быть введена операция умножения на произвольное вещественное число; 2) может быть введена операция сложения двух любых функций $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$; 3) любой функции $\beta(\lambda)$ может быть поставлено в соответствие конечное число — норма этой функции, определяемая равенством

$$\|\beta\| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\beta(\lambda)| d\lambda \qquad (10)$$

и удовлетворяющая аксиомам нормы [18, с. 53].

Возьмем произвольную функцию $\beta(\lambda)$, которую можно представить как разность спектров $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ некоторой пары излучений:

$$\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda). \qquad (11)$$

Образуем функцию $m\beta(\lambda)$, где m — любое неотрицательное число. Эту функцию также можно представить в виде разности спектров пары излучений. В качестве таковых можно использовать излучения со спектрами $mb'(\lambda)$ и $mb''(\lambda)$. Действительно,

$$mb'(\lambda) - mb''(\lambda) = m(b'(\lambda) - b''(\lambda)) = m\beta(\lambda). \qquad (12)$$

Пусть теперь m — любое отрицательное число. Функцию $m\beta(\lambda)$ также можно представить в виде разности спектров двух излучений, в качестве которых можно принять $-mb''(\lambda)$ и $-mb'(\lambda)$. Действительно,

$$-mb''(\lambda) - (-mb'(\lambda)) = m(b'(\lambda) - b''(\lambda)) = m\beta(\lambda). \qquad (13)$$

Таким образом, если функция $\beta(\lambda)$ представима в виде разности спектров пары излучений, то этим свойством обладает также функция $m\beta(\lambda)$, где m — любое вещественное число. Следовательно, первое условие выполняется.

Пусть имеются две функции $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$, представимые в виде разности спектров пар излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$:

$$\beta_1(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda), \qquad (14)$$

$$\beta_2(\lambda) = b_2'(\lambda) - b_2''(\lambda). \qquad (15)$$

Сумма этих функций $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$ также представима в виде разности спектров пары излучений, в качестве таковых можно принять спектры излучений $b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)$. Действительно,

$$b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda)-(b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda)) =$$
$$=b_1'(\lambda)-b_1''(\lambda)+(b_2'(\lambda)+b_2''(\lambda))=\beta_1(\lambda)+\beta_2(\lambda). \quad (16)$$

Таким образом, если функции $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ представимы в виде разности спектров пар излучений, то и их сумма $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$ также обладает этим свойством. Следовательно, второе условие также выполняется.

Пусть имеется функция $\beta(\lambda)$, представимая в виде (11). Норма этой функции определяется по формуле (10) и равна:

$$\|\beta\| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |b'(\lambda)-b''(\lambda)|d\lambda \le \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)d\lambda. \quad (17)$$

Интегралы $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)d\lambda$ и $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)d\lambda$ представляют собой в некотором масштабе энергию излучений со спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ и, следовательно, всегда имеют конечные значения. Таким образом,

$$\|\beta\| < \infty. \quad (18)$$

Кроме того, выполняются все аксиомы нормы. Действительно, для любой функции $\beta(\lambda)$ имеем: 1) $\|\beta\| \ge 0$, причем $\|\beta\| = 0$, лишь если $\beta(\lambda) = 0$ в смысле метрики L; 2) $\|m\beta\| = |m|\cdot\|\beta\|$; 3) аксиома треугольника $\|\beta_1+\beta_2\| \le \|\beta_1\|+\|\beta_2\|$ следует из неравенства Минковского для интегралов [3, с. 498]. Этим доказано выполнение третьего условия. Итак, мы доказали, что совокупность функций $\beta(\lambda)$ образует линейное нормированное пространство $L[\lambda_1, \lambda_2]$ суммируемых функций.

Докажем теперь, что числа U_1, U_2, U_3, введенные законом трехмерности, суть линейные непрерывные функционалы функций $\beta(\lambda)$. Для этого достаточно доказать [3, с. 143], что функционалы

$$U_1 = U_1(\beta(\lambda)),\ U_2 = U_2(\beta(\lambda)), U_3 = U_3(\beta(\lambda))$$

аддитивны и непрерывны. Пусть $\beta(\lambda)$ есть сумма функций $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$:

$$\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda). \quad (19)$$

Согласно закону трехмерности, функции $\beta(\lambda)$ соответствует тройка чисел $U_1(\beta(\lambda))$, $U_2(\beta(\lambda))$, $U_3(\beta(\lambda))$ такая, что в опытах с условиями, характеризуемыми функцией

$$U_1(\beta(\lambda))\beta_1(\lambda) + U_2(\beta(\lambda))\beta_2(\lambda) +$$
$$+ U_3(\beta(\lambda))\beta_3(\lambda) + \beta(\lambda), \quad (20)$$

наблюдается равенство цветов полей сравнения.

С другой стороны, согласно закону трехмерности, функциям $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$ также соответствуют свои тройки чисел $U_1(\beta'(\lambda))$, $U_2(\beta'(\lambda))$, $U_3(\beta'(\lambda))$ и $U_1(\beta''(\lambda))$, $U_2(\beta''(\lambda))$, $U_3(\beta''(\lambda))$ такие, что в опытах с условиями, характеризуемыми функциями:

$$U_1(\beta'(\lambda))\beta_1(\lambda) + U_2(\beta'(\lambda))\beta_2(\lambda) +$$
$$+ U_3(\beta'(\lambda))\beta_3(\lambda) + \beta'(\lambda), \quad (21)$$
$$U_1(\beta''(\lambda))\beta_1(\lambda) + U_2(\beta''(\lambda))\beta_2(\lambda) +$$
$$+ U_3(\beta''(\lambda))\cdot\beta_3(\lambda) + \beta''(\lambda), \quad (22)$$

наблюдается равенство цветов полей сравнения. Образуем сумму функций (21) и (22):

$$(U_1(\beta'(\lambda)) + U_1(\beta''(\lambda)))\beta_1(\lambda) + (U_2(\beta'(\lambda)) +$$
$$+ U_2(\beta''(\lambda)))\beta_2(\lambda) + (U_3(\beta'(\lambda)) +$$
$$+ U_3(\beta''(\lambda)))\beta_3(\lambda) + \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda). \quad (23)$$

Согласно закону аддитивности, в опытах с условиями, характеризуемыми функцией (23), имеет место равенство цветов полей сравнения.

В выражениях (20) и (23) функции $\beta(\lambda)$ и $\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)$, согласно (19), совпадают. Следовательно, согласно закону трехмерности в этих выражениях совпадают коэффициенты при функциях $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$, то есть

$$U_1(\beta(\lambda)) = U_1(\beta'(\lambda)) + U_1(\beta''(\lambda)),$$
$$U_2(\beta(\lambda)) = U_2(\beta'(\lambda)) + U_2(\beta''(\lambda)), \quad (24)$$
$$U_3(\beta(\lambda)) = U_3(\beta'(\lambda)) + U_3(\beta''(\lambda)).$$

Заменяя $\beta(\lambda)$ согласно равенству (19), окончательно получим:

$$U_1(\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)) = U_1(\beta'(\lambda)) + U_1(\beta''(\lambda)),$$
$$U_2(\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)) = U_2(\beta'(\lambda)) + U_2(\beta''(\lambda)), \quad (25)$$
$$U_3(\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)) = U_3(\beta'(\lambda)) + U_3(\beta''(\lambda)).$$

Равенства (25) означают, что функционалы $U_1(\beta(\lambda))$, $U_2(\beta(\lambda))$, $U_3(\beta(\lambda))$ аддитивны. Непрерывность этих функционалов непосредственно вытекает из закона непрерывности. Таким образом, числа U_1, U_2, U_3 суть линейные непрерывные функционалы, определенные на линейном нормированном пространстве $L[\lambda_1, \lambda_2]$ суммируемых функций $\beta(\lambda)$.

При этих условиях, согласно теореме об общем виде линейного функционала [14, с. 180], функционалы U_1, U_2, U_3 могут иметь лишь следующий вид:

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)m(\lambda)d\lambda,$$
$$U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)n(\lambda)d\lambda, \quad (26)$$
$$U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)p(\lambda)d\lambda,$$

где $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые фиксированные функции (эти функции могут выбираться только из класса существенно ограниченных измеримых функций, включающих в себя как частный случай класс непрерывных функций [15, с. 99]). Других видов линейных непрерывных функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве $L[\lambda_1, \lambda_2]$ суммируемых функций $\beta(\lambda)$, не существует.

Можно показать, что функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ линейно независимы. Действительно, в случае их линейной зависимости одну из них (пусть это будет, к примеру, функция $p(\lambda)$) можно было бы выразить в виде линейной комбинации остальных:

$$p(\lambda) = a_1 m(\lambda) + a_2 n(\lambda), \tag{27}$$

где a_1, a_2 — некоторые фиксированные вещественные числа. Подставляя (27) в последнее из равенств (26), имеем:

$$U_3 = a_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) m(\lambda) d\lambda + a_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) n(\lambda) d\lambda. \tag{28}$$

Используя первые два из равенств (26), перепишем (28) в виде:

$$U_3 = a_1 U_1 + a_2 U_2. \tag{29}$$

Таким образом, для любой функции $\beta(\lambda)$ число U_3 однозначно определяется числами U_1 и U_2 по формуле (29). Если, к примеру, $U_1 = U_2 = 0$, то должно быть также $U_3 = 0$. Однако это не так, поскольку для функции $\beta_3(\lambda)$ $U_1 = U_2 = 0$, но $U_3 = -1$, и этот набор чисел, согласно закону трехмерности, является единственным. Итак, мы пришли к противоречию. Следовательно, функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ линейно независимы.

Введем теперь в рассмотрение вектор $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3, определяемыми для произвольного излучения $b(\lambda)$ с помощью соотношений (6). Можно доказать, что вектор $\overline{B}$ связан взаимно однозначной зависимостью (7) с вектором цвета $\overline{S}$. Для доказательства этого утверждения нужно установить, что: 1) излучения, имеющие одинаковые значения интегралов (6), порождают одинаковые цвета; 2) излучения, порождающие одинаковые цвета, имеют одинаковые значения интегралов (6).

Докажем справедливость первого утверждения. Возьмем для этого пару излучений $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$, имеющих одинаковые значения интегралов (6):

$$B_1' = B_1'',\ B_2' = B_2'',\ B_3' = B_3'', \tag{30}$$

где

$$B_1' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) m(\lambda) d\lambda,$$

$$B_2' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) n(\lambda) d\lambda, \tag{31}$$

$$B_3' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) p(\lambda) d\lambda,$$

$$B_1'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) m(\lambda) d\lambda,$$

$$B_2'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) n(\lambda) d\lambda, \tag{32}$$

$$B_3'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) p(\lambda) d\lambda,$$

Введем в рассмотрение функцию $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ и определим для нее значения интегралов (26):

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) m(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) m(\lambda) d\lambda,$$

$$U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) n(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) n(\lambda) d\lambda, \tag{33}$$

$$U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) p(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) p(\lambda) d\lambda.$$

Используя формулы (30)–(32), получаем:

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) m(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) m(\lambda) d\lambda = B_1' - B_1'' = 0,$$

$$U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) n(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) n(\lambda) d\lambda = B_2' - B_2'' = 0, \tag{34}$$

$$U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) p(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) p(\lambda) d\lambda = B_3' - B_3'' = 0.$$

Таким образом, для функции $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ числа U_1, U_2, U_3 равны нулю. Согласно закону трехмерности, для любой пары излучений, соответствующей функции $\beta(\lambda)$, имеет место равенство цветов полей сравнения. Одной из таких пар излучений являются излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$, следовательно, для них также имеет место равенство цветов полей сравнения. Итак, мы приходим к выводу, что излучения, имеющие одинаковые значения интегралов (6), порождают одинаковые цвета.

Докажем теперь справедливость второго утверждения. Пусть излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ порождают одинаковые цвета. Тогда для функции $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ имеет место равенство цветов полей сравнения. Следовательно, согласно закону трехмерности, для этой функции значения интегралов (26) U_1, U_2, U_3 равны нулю:

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) m(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) m(\lambda) d\lambda = 0,$$

$$U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) n(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) n(\lambda) d\lambda = 0, \tag{35}$$

$$U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) p(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda) - b''(\lambda)) p(\lambda) d\lambda = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda)m(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''(\lambda)m(\lambda)d\lambda,\\
&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda)n(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''(\lambda)n(\lambda)d\lambda,\\
&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'(\lambda)p(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''(\lambda)p(\lambda)d\lambda.
\end{aligned} \qquad (36)$$

Используя зависимости (31) и (34), приходим к выводу, что

$$B'_1 = B''_1,\ B'_2 = B''_2,\ B'_3 = B''_3. \qquad (37)$$

Следовательно, излучения, порождающие одинаковые цвета, имеют одинаковые значения интегралов (6).

Итак, мы доказали, что вектор $\overline{B}$ связан взаимно однозначной зависимостью (7) с вектором цвета $\overline{S}$. Таким образом, доказано, что из законов Грассмана логически вытекает математическая модель цветового зрения в виде соотношения (6) и (7). Только теперь, используя равенства (6) и (7), мы получаем право рассматривать вектор $\overline{B}$ как вектор цвета без привлечения каких-либо гипотез и можем обоснованно ввести понятия сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа, лежащие в основе колориметрии. Важно отметить, что утверждение о трехмерности вектора $\overline{S}$ до сих пор принималось нами без доказательства. Теперь это положение может быть строго доказано: оно вытекает как логическое следствие из факта трехмерности вектора $\overline{B}$ и наличия взаимно-однозначной зависимости (7) вектора $\overline{S}$ от вектора $\overline{B}$.

5. Вывод законов Грассмана из модели

В предыдущем разделе мы доказали, что из законов Грассмана можно чисто логически вывести математическую модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7). Теперь напрашивается вопрос: нельзя ли из законов Грассмана вывести нечто большее, чем эту модель? Может быть, в законах Грассмана заключена какая-либо дополнительная информация, не нашедшая еще отражения в модели? Здесь мы докажем, что на этот вопрос должен быть дан отрицательный ответ. Законы Грассмана, с одной стороны, и математическая модель цветового зрения в виде равенств (6) и (7), с другой стороны, представляют собой равносильные утверждения. Математическая модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7) есть лишь переформулировка законов Грассмана, равно как и законы Грассмана являются переформулировкой математической модели цветового зрения в виде равенств (6) и (7). Чтобы доказать это утверждение, нам достаточно вывести законы Грассмана в виде логического следствия из математической модели цветового зрения, представленной в виде соотношений (6) и (7).

Выведем сначала из равенств (6) и (7) закон аддитивности. Предположим, что две пары излучений со спектрами $b'_1(\lambda)$, $b'_2(\lambda)$ и $b''_1(\lambda)$, $b''_2(\lambda)$ порождают на выходе модели попарно одинаковые сигналы $\overline{S}'_1$, $\overline{S}'_2$ и $\overline{S}''_1$, $\overline{S}''_2$, то есть что

$$\overline{S}'_1 = \overline{S}'_2,\ \overline{S}''_1 = \overline{S}''_2. \qquad (38)$$

Попарные разности спектров излучений обозначим через $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$:

$$\beta'(\lambda) = b'_1(\lambda) - b'_2(\lambda),\ \beta''(\lambda) = b''_1(\lambda) - b''_2(\lambda). \qquad (39)$$

Образуем функцию $\beta(\lambda)$, равную сумме функций $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$:

$$\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda). \qquad (40)$$

Требуется доказать, что любая пара излучений со спектрами $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$, разность которых дает функцию

$$b_1(\lambda) - b_2(\lambda) = \beta(\lambda). \qquad (41)$$

порождает на выходе модели пару одинаковых сигналов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, то есть что $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$. Для доказательства этого утверждения, ввиду наличия взаимно однозначной зависимости (7), достаточно показать, что совпадают векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$, соответствующие сигналам $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, то есть что $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$. Обозначим компоненты векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ соответственно через B_{11}, B_{12}, B_{13} и B_{21}, B_{22}, B_{23}. Совпадение векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ будет доказано, если мы установим, что:

$$B_{11} - B_{21} = 0,\ B_{12} - B_{22} = 0,\ B_{13} - B_{31} = 0. \qquad (42)$$

Приступим к доказательству справедливости равенств (42). Согласно равенствам (6), имеем:

$$\begin{aligned}
B_{11} - B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda))m(\lambda)d\lambda,\\
B_{12} - B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda))n(\lambda)d\lambda,\\
B_{13} - B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda))p(\lambda)d\lambda.
\end{aligned} \qquad (43)$$

Заменяя в (43) разность $b_1(\lambda) - b_2(\lambda)$ по формулам (39)–(41), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
B_{11} - B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'_1(\lambda) - b'_2(\lambda))m(\lambda)d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''_1(\lambda) - b''_2(\lambda))m(\lambda)d\lambda,\\
B_{12} - B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'_1(\lambda) - b'_2(\lambda))n(\lambda)d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''_1(\lambda) - b''_2(\lambda))n(\lambda)d\lambda,\\
B_{13} - B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b'_1(\lambda) - b'_2(\lambda))p(\lambda)d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b''_1(\lambda) - b''_2(\lambda))p(\lambda)d\lambda.
\end{aligned} \qquad (44)$$

Все интегралы, стоящие в правой части формул (44), равны нулю, поскольку по условию (38) излучения

$b_1'(\lambda)$, $b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$ дают попарно одинаковые цвета, а это значит, что и интегралы (6) от них попарно одинаковы. Этим доказывается справедливость формул (42). Вывод закона аддитивности из равенств (6) и (7) завершен.

Переходим к выводу закона трехмерности из соотношений (6) и (7). В качестве тройки фиксированных функций примем функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$. Нам нужно доказать, что для произвольной функции $\beta(\lambda)$ всегда можно построить функцию:

$$U_1 m(\lambda) + U_2 n(\lambda) + U_3 p(\lambda) + \beta(\lambda), \tag{45}$$

притом с единственно возможным набором чисел U_1, U_2, U_3, такую, что для любой пары излучений со спектрами $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, разность которых равна функции (45):

$$b_1(\lambda) - b_2(\lambda) = \\ = U_1 m(\lambda) + U_2 n(\lambda) + U_3 p(\lambda) + \beta(\lambda), \tag{46}$$

будут совпадать порожденные этими излучениями выходные сигналы модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Для доказательства этого утверждения сначала установим, что если совпадение выходных сигналов модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ возможно, то для каждой функции $\beta(\lambda)$ оно достигается лишь при единственном наборе чисел U_1, U_2, U_3.

Действительно, пусть выходные сигналы модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ совпадают. Это равносильно попарным равенствам координат B_{11}, B_{12}, B_{13} и B_{21}, B_{22}, B_{23} соответствующих векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$, которые ввиду (6) можно записать в виде условий:

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda)) m(\lambda) d\lambda = 0, \\ B_{12} - B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda)) n(\lambda) d\lambda = 0, \\ B_{13} - B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda) - b_2(\lambda)) p(\lambda) d\lambda = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

После подстановки по формуле (46) равенства (47) примут вид:

$$\begin{aligned} &U_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)m(\lambda)d\lambda + U_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)m(\lambda)d\lambda + \\ &+ U_3 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)m(\lambda)d\lambda = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)m(\lambda)d\lambda, \\ &U_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)n(\lambda)d\lambda + U_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)n(\lambda)d\lambda + \\ &+ U_3 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)n(\lambda)d\lambda = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)n(\lambda)d\lambda, \\ &U_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)p(\lambda)d\lambda + U_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)p(\lambda)d\lambda + \\ &+ U_3 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)p(\lambda)d\lambda = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{aligned} \tag{48}$$

В силу линейной независимости функций $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$, составленный из них определитель Грама [19, с. 226]

$$D = \begin{vmatrix} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)m(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)n(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{vmatrix} \tag{49}$$

не равен нулю [20, с. 71]. Вместе с тем, этот определитель совпадает с определителем системы трех линейных уравнений (48) относительно неизвестных U_1, U_2, U_3. Следовательно, для каждой функции $\beta(\lambda)$ решение системы (48) существует, и оно единственно. Итак, мы доказали, что если совпадение выходных сигналов модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ возможно, то оно достигается лишь при единственном наборе чисел U_1, U_2, U_3.

Докажем теперь, что при наборе чисел U_1, U_2, U_3, являющемся решением системы уравнений (48), действительно имеет место совпадение выходных сигналов модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. С этой целью введем в рассмотрение следующие определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)m(\lambda)d\lambda \\ -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)n(\lambda)d\lambda \\ -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{vmatrix}, \tag{50}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)m(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)m(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)n(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)n(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)p(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{vmatrix}, \tag{51}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)m(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)m(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)m(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)n(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)n(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)n(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)p(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)p(\lambda)d\lambda & -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{vmatrix}. \tag{52}$$

Система уравнений (48) имеет следующее решение:

$$U_1 = \frac{D_1}{D}, \; U_2 = \frac{D_2}{D}, \; U_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{53}$$

Согласно (6), попарные разности соответствующих координат векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ равны:

$$B_{11}-B_{21}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(b_1(\lambda)-b_2(\lambda))m(\lambda)d\lambda,$$

$$B_{12}-B_{22}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(b_1(\lambda)-b_2(\lambda))n(\lambda)d\lambda, \quad (54)$$

$$B_{13}-B_{23}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(b_1(\lambda)-b_2(\lambda))p(\lambda)d\lambda.$$

Производя в формулах (54) подстановку согласно (46) и (53), получим:

$$B_{11}-B_{21}=$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{D_1}{D}m(\lambda)+\frac{D_2}{D}n(\lambda)+\frac{D_3}{D}p(\lambda)+\beta(\lambda)\right)m(\lambda)d\lambda,$$

$$B_{12}-B_{22}=$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{D_1}{D}m(\lambda)+\frac{D_2}{D}n(\lambda)+\frac{D_3}{D}p(\lambda)+\beta(\lambda)\right)n(\lambda)d\lambda. \quad (55)$$

$$B_{13}-B_{23}=$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{D_1}{D}m(\lambda)+\frac{D_2}{D}n(\lambda)+\frac{D_3}{D}p(\lambda)+\beta(\lambda)\right)p(\lambda)d\lambda.$$

Непосредственное вычисление показывает, что выражения, стоящие в правой части равенств (55), равны нулю. Следовательно, соответствующие координаты векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ совпадают. Поэтому совпадают и сами векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$. В силу соотношения (7) имеет место также совпадение сигналов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Этим доказана выводимость закона трехмерности из равенств (6) и (7).

Для доказательства выводимости из соотношений (6) и (7) закона непрерывности достаточно обратить внимание на то, что при непрерывном изменении функции $\beta(\lambda)$ непрерывно изменяются значения свободных членов

$$-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)m(\lambda)d\lambda,\ -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)n(\lambda)d\lambda,\ -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)p(\lambda)d\lambda$$

системы (48). Вместе с ними непрерывно изменяется решение системы (48) — числа U_1, U_2, U_3. Итак, мы доказали выводимость законов Грассмана из соотношений (6) и (7), то есть из математической модели цветового зрения. Вместе с тем, в предыдущем разделе было установлено, что справедливо также обратное утверждение — выводимость модели из законов Грассмана. Следовательно, модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7) и законы Грассмана являются равносильными утверждениями. Поэтому из законов Грассмана нельзя вывести ничего такого, чего бы не содержала в себе модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7).

6. Обобщение модели цветового зрения на случай произвольных зрительных картин

Важно подчеркнуть, что математическая модель цветового зрения в виде соотношений (6) и (7) определена и имеет силу пока лишь для весьма узкого класса входных сигналов, а именно для стационарных и однородных зрительных картин $b(\lambda)$. Однако интересно узнать, можно ли сохранить в модели те же самые преобразования в виде интегралов (6) при допущении произвольных входных сигналов $b_\lambda(x, y, t)$, изменяющихся как в поле зрения, так и во времени. На этот вопрос можно ответить утвердительно, если опереться на приведенный ниже постулат.

Постулат 1. *Зрительное ощущение $\overline{S}(x, y, t)$ останется тем же, если в порождающей его зрительной картине $b_\lambda(x, y, t)$ произвольным образом произвести замену излучений на любые метамерные излучения.*

Под метамерными [20] понимаются излучения, для которых числа B_1, B_2, B_3, вычисляемые по формулам (6), совпадают. В формулировке этого постулата использована высказанная Нюбергом в работе [20] идея о замещении метамерных излучений. Важно заметить, что при экспериментальной проверке этого постулата сознание наблюдателя используется как нулевой прибор. Однако теперь происходит сравнение не двух трехмерных векторов, а объектов неизмеримо более сложной природы — двух вектор-функций трех независимых действительных переменных $\overline{B}_1(x, y, t)$ и $\overline{B}_2(x, y, t)$.

Подтверждается ли этот постулат в психофизическом эксперименте? В литературе отсутствуют какие-либо экспериментальные данные, которые могли бы набросить тень сомнения на справедливость этого постулата. В то же время отсутствуют и специальные исследования по его проверке. В некоторых частных случаях справедливость сформулированного принципа не вызывает сомнений. Так, при временной скачкообразной замене излучения $b'_\lambda(x, y)$ на метамерное излучение $b''_\lambda(x, y)$ сознание не замечает каких-либо временных изменений в зрительном ощущении [23, 24]. Сознание наблюдателя также не обнаруживает границу раздела между двумя метамерными излучениями.

Из сформулированного принципа непосредственно вытекает модель преобразования информации в органе зрения в виде блок-схемы, изображенной на рис. 3.

Математическое описание модели следующее:

блок 1_1 —

$$B_1(x,y,t)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}b_\lambda(x,y,t)m(\lambda)d\lambda,$$

блок 1_2 —

$$B_2(x,y,t)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}b_\lambda(x,y,t)n(\lambda)d\lambda, \quad (56)$$

блок 1_3 —

$$B_3(x,y,t)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}b_\lambda(x,y,t)p(\lambda)d\lambda,$$

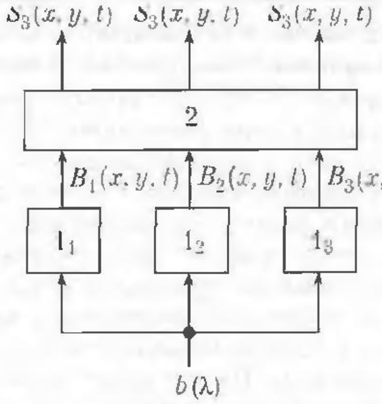

Рис. 3. Обобщенная математическая модель цветового зрения

где $B_1(x, y, t)$, $B_2(x, y, t)$, $B_3(x, y, t)$ — компоненты вектор-функции $\overline{B}(x, y, t)$ — промежуточного сигнала модели;
блок 2 —

$$\overline{S}(x, y, t) = F(\overline{B}(x, y, t)), \tag{57}$$

где F — произвольный однозначный оператор; $\overline{S}(x, y, t)$ — вектор-функция зрительного ощущения с компонентами $S_1(x, y, t)$, $S_2(x, y, t)$, $S_3(x, y, t)$.

Важно отметить, что оператор F нельзя полагать взаимно однозначным. Если бы это было так, то любая замена излучений в зрительной картине, кроме той, которая предусмотрена постулатом 1, приводила бы к изменению зрительного ощущения. Однако это заведомо не так. Заменяя стационарное излучение специально подобранной парой неметамерных достаточно быстро мелькающих излучений, можно получить то же самое зрительное ощущение. Такой же эффект можно получить при замещающем неметамерном излучении в виде серии достаточно густых полос (временной и пространственный законы Талбота [25]). Постулат 1 можно дополнить следующим постулатом, обеспечивающим непрерывность оператора F.

Постулат 2. *При непрерывном изменении функций $B_1(x, y, t)$, $B_2(x, y, t)$, $B_3(x, y, t)$, определяемых формулами (56), всегда происходит непрерывное изменение соответствующего зрительного ощущения $\overline{S}(x, y, t)$.*

Экспериментальная проверка этого постулата возможна ввиду наличия у сознания способности оценивать величину расстояния между двумя вектор-функциями трех переменных $\overline{S}_1(x, y, t)$ и $\overline{S}_2(x, y, t)$, то есть степень различия между двумя зрительными ощущениями. Подтверждение этого постулата на примере простых зрительных картин вселяет уверенность в его справедливости также и в общем виде. Принимая этот постулат, мы имеем право считать оператор F непрерывным.

7. Анализ литературных данных

7.1. Критика вывода Шредингера интегральных соотношений из законов Грассмана

В работе [12] на стр. 411 Шредингер формулирует закон аддитивности в следующем виде: «Одинаково выглядящие излучения дают при сложении снова одинаково выглядящие излучения». Непосредственно за этим Шредингер пишет: «Этот факт — и только он — позволяет нам ... оперировать непосредственно с цветами вместо того, чтобы оперировать с излучениями». Затем Шредингер вводит обозначения для цветов и знак «+» для операции сложения цветов, считая, очевидно, что он имеет для этого все основания. Однако легко показать, что из закона аддитивности еще не следует существование операции сложения цветов.

Сущность только что приведенной формулировки закона аддитивности состоит в следующем. Пусть имеются две пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$, цвета которых попарно одинаковы, то есть что:

$$\overline{S}(b_1'(\lambda)) = \overline{S}(b_1''(\lambda)), \ \overline{S}(b_2'(\lambda)) = \overline{S}(b_2''(\lambda)). \tag{58}$$

Закон аддитивности утверждает, что цвета суммарных излучений $b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda)$, $b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)$ будут также одинаковы, то есть что:

$$\overline{S}(b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda)) = \overline{S}(b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)). \tag{59}$$

Однако для строгого введения *операции сложения цветов* необходима аддитивность цвета, записываемая равенством:

$$\overline{S}(b_1(\lambda) + b_2(\lambda)) = \overline{S}(b_1(\lambda)) + (b_2(\lambda)). \tag{60}$$

В формуле же (60) $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ обозначают два произвольных значения.

Очевидно, что закон аддитивности, с одной стороны, и свойство (60) аддитивности цвета, с другой, представляют собой различные утверждения. Построим пример преобразования излучения в цвет, для которого закон аддитивности будет выполняться, а свойство аддитивности цвета — нет. Допустим, что координаты S_1, S_2, S_3 вектора цвета вычисляются по формулам:

$$S_1(b(\lambda)) = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) m(\lambda) d\lambda\right)^3,$$
$$S_2(b(\lambda)) = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) n(\lambda) d\lambda\right)^3, \tag{61}$$
$$S_3(b(\lambda)) = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) p(\lambda) d\lambda\right)^3,$$

где $b(\lambda)$ — излучение, порождающее цвет $\overline{S}$.

Легко убедиться в том, что принятое преобразование излучения в цвет удовлетворнет закону аддитивности. Действительно, равенства (58) в нашем случае запишутся в виде:

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda) m(\lambda) d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda) m(\lambda) d\lambda\right)^3,$$
$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda) n(\lambda) d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda) n(\lambda) d\lambda\right)^3, \tag{62}$$
$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda) p(\lambda) d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda) p(\lambda) d\lambda\right)^3.$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)m(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)m(\lambda)d\lambda\right)^3,$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)n(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)n(\lambda)d\lambda\right)^3, \qquad (63)$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)p(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)p(\lambda)d\lambda\right)^3.$$

Извлекая кубический корень из обеих частей каждого из равенств (62), (63), имеем:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)m(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)m(\lambda)d\lambda,$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)n(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)n(\lambda)d\lambda, \qquad (64)$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)p(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)p(\lambda)d\lambda;$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)m(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)m(\lambda)d\lambda,$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)n(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)n(\lambda)d\lambda, \qquad (65)$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)p(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)p(\lambda)d\lambda.$$

Складываем левые и правые части соответствующих равенств (64) и (65):

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))m(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))m(\lambda)d\lambda,$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))n(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))n(\lambda)d\lambda, \qquad (66)$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))p(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))p(\lambda)d\lambda.$$

Наконец, возводим в куб левые и правые части полученных равенств:

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))m(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))m(\lambda)d\lambda\right)^3,$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))n(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))n(\lambda)d\lambda\right)^3,$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda))p(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda))p(\lambda)d\lambda\right)^3.$$

Учитывая (61), имеем:

$$\overline{S}_1(b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda)) = \overline{S}_1(b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda)),$$

$$\overline{S}_2(b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda)) = \overline{S}_2(b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda)),$$

$$\overline{S}_3(b_1'(\lambda)+b_2'(\lambda)) = \overline{S}_3(b_1''(\lambda)+b_2''(\lambda)).$$

Таким образом, мы приходим к выводу о справедливости равенства (59). Закон аддитивности для построенного примера выполняется.

Проверим теперь, выполняется ли для преобразования (61) свойство (60) аддитивности цвета. Если бы формула (60) была справедлива, то при любых $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$ были бы также справедливы следующие равенства:

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda)+b_2(\lambda))m(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)m(\lambda)d\lambda\right)^3 + \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)m(\lambda)d\lambda\right)^3,$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda)+b_2(\lambda))n(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)n(\lambda)d\lambda\right)^3 + \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)n(\lambda)d\lambda\right)^3,$$

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (b_1(\lambda)+b_2(\lambda))p(\lambda)d\lambda\right)^3 = \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)p(\lambda)d\lambda\right)^3 + \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)p(\lambda)d\lambda\right)^3.$$

Однако это заведомо не так. Следовательно, свойство (60) аддитивности цвета для преобразования (61) не выполняется. Построенный пример доказывает, что из закона аддитивности не вытекает аддитивность цвета. Следовательно, закон аддитивности не является достаточным основанием для введения операции сложения цветов.

Продолжая свой вывод, Шредингер, используя введенную им операцию сложения цветов, формулирует закон трехмерности [12, с. 419]: «Имеется линейно независимая тройка цветов. Четыре цвета всегда линейно зависимы». Основываясь на этой формулировке закона трехмерности, Шредингер на с. 436 приходит к интегральным соотношениям (6) для вычисления координат цвета. Таким образом, вывод интегральных соотношений цвета из законов Грассмана, построенный Шредингером, не имеет доказательной силы, поскольку в нем в значительной мере использована операция сложения цветов, введенная, как уже упоминалось, без достаточного основания.

7.2. К вопросу о формулировке законов Грассмана

Грассман следующим образом сформулировал свои законы. 1) Закон трехмерности: «Для любого излучения можно подобрать одинаково выглядящую смесь белого излучения с некоторым чистым спектральным или же пурпурным излучением. Под пурпурным излучением понимается смесь крайних видимых излучений спектра» [11, с. 78]. 2) Закон непрерывности: «Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета» [11, с. 72]. 3) Закон аддитивности: «Одинаково выглядящие излучения дают при сложении одинаково выглядящие излучения» [11, с. 82].

Очевидно, что формулировка Грассманом закона трехмерности существенно отличается от даваемой нами. Также существенно отличается от нашей формулировка Грассманом закона непрерывности. В то время как в формулировке Грассмана речь идет о непрерывном изменении цвета, в нашей формулировке имеется в виду непрерывное изменение некоторых чисел, а не цвета. Закон аддитивности в формулировке Грассмана содержит меньше информации, чем в нашей формулировке. Для того, чтобы обе формулировки стали равносильными, формулировку Грассмана необходимо дополнить следующим утверждением: «Если к одинаково выглядящим излучениям добавить или вычесть (когда это возможно) равные излучения, то суммарные излучения также будут выглядеть одинаково».

Шредингер, принимая без изменений грассмановские формулировки законов непрерывности и аддитивности, закон трехмерности формулирует следующим образом [12, с. 419]: «Имеется линейно независимая тройка цветов. Четыре цвета всегда линейно зависимы». Недостаток этой формулировки состоит в том, что в ней в значительной мере использовано понятие линейной зависимости цветов, а следовательно, использованы операции сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Как указывалось выше, это приводит к привлечению гипотетической модели цветового зрения в виде преобразований (6) и (7). Шредингер, кроме трех законов Грассмана, привлекает еще один постулат. Он пишет: «Я напрасно старался обойтись без новых ссылок на опыт и считаю это невозможным» [12, с. 417]. Формулировка дополнительного постулата Шредингера следующая [12, с. 418]: «Не существует двух таких излучений, которые при одинаковом увеличении интенсивности периодически выглядели бы одинаковыми и неодинаковыми». В нашей же работе, как было показано выше, интегральные соотношения цвета (6) выводятся исключительно из трех законов Грассмана без привлечения каких-либо дополнительных постулатов.

Формулировки законов Грассмана, встречающиеся в более поздних работах, как правило, не отличаются или незначительно отличаются от формулировок Шредингера. Нюберг так формулирует закон трехмерности [26, с. 17]: «Для любых четырех цветов всегда существует связывающее их линейное соотношение, причем это соотношение будет единственным, если только три цвета из этих четырех не связаны линейными соотношениями, причем, с другой стороны, можно найти бесчисленное множество троек цветов, которые никаким линейным соотношением не связаны». В другой работе Нюберг формулирует закон трехмерности так: «Для любых четырех цветов (три известных, один неизвестный) всегда можно составить одно и только одно цветовое уравнение одного из указанных выше типов, связывающее четыре данных цвета» [27, с. 53]. В этой же работе мы находим формулировку закона аддитивности (с. 38): «Результат сложения двух или нескольких цветов зависит только от того, каковы эти цвета, но совершенно не зависит от того, из каких спектральных лучей составлен свет, вызывающий тот или иной из складываемых цветов».

В работе [28, с. 159] Нюберг так формулирует закон аддитивности: «Если какие-либо два излучения визуально неразличимы, то после прибавления к обоим любого одинакового излучения полученные новые суммарные излучения также будут визуально неразличимы». В книге Гуревича находим следующую формулировку всех трех законов Грассмана [29, с. 23]. Закон трехмерности: «Любые четыре цвета находятся в линейной зависимости, хотя существует неограниченное число линейно независимых совокупностей из трех цветов». Закон непрерывности: «Непрерывному изменению излучения соответствует также непрерывное изменение цвета». Закон аддитивности: «Цвет смеси зависит только от цветов смешиваемых компонент и не зависит от их спектральных составов».

Наконец, приведем формулировку Нюбергом всех трех законов Грассмана, опубликованную в работе [22, с. 492]. Закон аддитивности: «Цвет суммы двух излучений зависит только от цветов складываемых излучений, но не от их спектрального состава». Закон трехмерности: «Всякие четыре цвета линейно связаны, но существуют тройки линейно независимых цветов». Закон непрерывности: «При любом непрерывном изменении излучения цвет изменяется непрерывно». Очевидно, что все приведенные формулировки законов Грассмана воспроизводят в точности или с небольшими изменениями формулировки, использованные Шредингером.

В заключение упомянем еще одну формулировку закона аддитивности, опубликованную в работе Шейбнера [30]: «В результате аддитивного смешения излучений в психофизиологической преобразующей системе возникают классы метамерных излучений или цвета. Эти классы являются подмножествами общего множества излучений, для которых справедливы законы тождества, симметрии и транзитивности». Приведенная формулировка закона аддитивности также отличается от даваемой нами.

8. Заключение

Законы Грассмана, сформулированные с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа, не могут быть использованы в качестве исходной предпосылки при выводе математической модели цветового зрения, поскольку для строгого обоснования законности введения операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа необходимо прежде признать справедливой модель цветового зрения. Вывод модели цветового зрения из законов Грассмана, данный Шредингером, не является эффективным, поскольку в нем в качестве исходной посылки использованы законы Грассмана, сформулированные с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Предложена новая формулировка законов Грассмана, в которой не используются понятия сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Показано, что стандартные колориметрические опыты выполняются в точности по той процедуре, которая необходима для демонстрации справедливости законов Грассмана в новой формулировке. Показано, что математическая модель цветового зрения может быть выведена в виде следствия из новой формулировки законов Грассмана. Построен вывод модели цветового зрения из законов Грасcмана в новой формулировке. Показано, что из законов Грассмана в новой формулировке нельзя вывести ничего, кроме математической модели цветового зрения. Построен вывод новой формулировки законов Грасcмана из модели цветового зрения. Построена обобщенная математическая модель цветового зрения, реагирующая на произвольные зрительные картины. Сформулированы постулаты, справедливость которых может быть продемонстрирована в эксперименте, обосновывающие обобщенную модель цветового зрения.

Список литературы: 1. *Мешков В. В.* Основы светотехники: Ч. 1.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957. 2. *Кравков С. В.* Цветовое зрение.– М.: Изд-во АН СССР, 1951. 3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.– М.: Наука, 1965. 4. *Shklover D. A.* The problem of the equicontrast colorimetric system: Report at Symposium on visual problems of colours, Teddington, 1957. 5. *Ньютон И.* Оптика: Изд. 2-е.– М.: Гостехтеориздат, 1954. 6 *Ломоносов М. В.* Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее. Избранные философские произведения.– М.: Госполитиздат, 1950. 7. *Young T.* Lecture on the theory of light and colours // Phil. Trans. Roy. Soc.– 1802.– Vol. 21. 8. *Maxwell J. C.* On the theory of compound colours and the relations of the colours of the spectrum // Proc. Roy. Soc.– 1860.– Vol. 10. 9. *Helmholtz H.* Handbuch der physiologischen Optic.– Hamburg u. Leipzig, 1909–1911. 10. *Мешков В. В.* Основы светотехники: Ч. 2. Физиологическая оптика и колориметрия.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. 11. *Grassman H.* Zur Theorie der Farbenmischung // Ann. d. Phys. u. Chemie.– 1853.– Bd. 89. № 5. 12. *Schrödinger E.* Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen // Ann. d. Phys.– 1920.– Bd. 63. 13. *Нюберг Н. Д.* Математические основы задачи измерения цвета // Федоров Н. Т. Современное состояние колориметрии.– М.-Л.: Гостехтеориздат, 1933. 14. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная.– М.: Наука, 1967. 15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.– М.: Гостехтеориздат, 1957. 16. *Майзель С. О., Ратнер Е. С.* Цветовые расчеты и измерения.– М.: Госэнергоиздат, 1941. 17. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике.– М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950. 18. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.– М.: Физматгиз, 1959. 19. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц: Изд. 2-е.– М.: Физматгиз, 1966. 20. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.– М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. 21. *Нюберг Н. Д.* Теоретические основы цветной репродукции.– М.: Советская наука, 1947. 22. *Нюберг Н. Д.* Грассмана законы // Физический энциклопедический словарь: Т. 1.– М.: Сов. энциклопедия, 1960. 23. *Бонгард М. М., Смирнов М. С.* Четырехмерность цветового пространства человека // ДАН СССР.– 1956.– Т. 108, № 3. 24. *Фридрих Л.* Об участии палочкового зрения в работе светлоадаптированного глаза человека // Биофизика.– 1957.– Т. 2, вып. 3. 25. *Talbot H. F.* Experiments on light // Phil. Mag.– 1834.– № 5. 26. *Нюберг Н. Д.* Измерение цвета и цветовые стандарты.– М.: Стандартизация, 1933. 27. *Нюберг Н. Д.* Курс цветоведения.– М.-Л.: Гизлегпром, 1932. 28. *Нюберг Н. Д.* Колориметрические эксперименты как средство исследования цветового зрения и требования к ним // Биофизика.– 1957.– Т. 2, вып. 2. 29. *Гуревич М. М.* Цвет и его измерение.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 30. *Scheibner H.* On colours of the same appearance // Optica acta.– 1966.–Vol. 13. № 3.

Поступила в редколлегию 14.03.2006