УДК 518:517,944-947

ДВУСТОРОННИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ)

КАЛИНИЧЕНКО В.И., ПАН Н.П., АФАНАСЬЕВ В.А., СОВА А.В.

Для обыкновенного дифференциального уравнения вида $-\left(p(x)u'\right)' + r(x)u = f(x), \quad x \in (a,b)$ решается краевая задача с условиями типа Дирихле на концах: $u(a) = A$, $u(b) = B$. Предлагается алгоритм получения приближений "сверху-снизу", построенный таким образом, что точное решение попадает строго в "вилку". Исследуется тот специальный случай, когда коэффициент $r(x)$ обращается в нуль. Это приводит к сингулярностям в двойственной задаче.

Современные требования научно-технического прогресса на первый план выдвигают различного рода задачи оптимизации. Это касается в первую очередь рационального использования ресурсов, внедрения оптимальных технологий, принятия оптимальных решений и т.п. В математической формулировке эти задачи можно охарактеризовать как "задачи управления системами с распределенными параметрами". В частности, сюда же мы относим и их дискретные аналоги.

Известно, что при нахождении оптимальных значений неизвестных параметров чаще всего приходится решать серию прямых задач, причем, как правило, в реальном масштабе времени. Ниже мы сформулируем одну из таких прямых задач, которая состоит в нахождении решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, порождаемого самосопряженным дифференциальным выражением. Такие задачи часто встречаются на практике и, следовательно, представляют значительный интерес. В настоящей статье решается вопрос о построении строгих приближений сверху и снизу к неизвестному решению. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея сведения дифференциальной постановки краевой задачи к ее вариационной формулировке, состоящей в нахождении минимума квадратичного функционала [1-3]. Задачу минимизации назовем прямой (P). Для двусторонних приближений будет сформулирована задача (*D*) максимизации, являющаяся двойственной к исходной.

Рассмотрим один специальный случай построения двусторонних приближений решения первой краевой задачи, связанной с уравнением

$$\begin{aligned} &l(u) \equiv -(p(x)u')' + r(x)u = f(x), x \in (a,b), \\ &u = u(x); C_1 \ge p(x) \ge C_2 > 0; C_3 \ge r(x) \ge 0, \\ &f \in H(a,b), \end{aligned} \qquad (1)$$

т.е. для краевых условий типа Дирихле (не обязательно однородных) вида

$$u(a) = u(b) = 0\,. \qquad (2)$$

Под $H(a,b)$ подразумевается гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций [5]. Мы ограничимся требованием непрерывности функций p и r на интервале (a,b). Впрочем, это требование можно ослабить. Более того, коэффициент p может обращаться в нуль в некоторых точках, но так, чтобы интеграл от $1/p$ сходился. При $p \equiv 0$ уравнение перестает быть дифференциальным. Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что коэффициент $r = r(x)$ может обращаться в нуль на интервале (a,b). Более того, он может равняться нулю тождественно. В этом смысле настоящую работу следует рассматривать как обобщение предыдущей нашей публикации [6], где на коэффициент $r(x)$ налагались жесткие требования его положительности $r \ge const > 0$. В практических задачах часто возникает ситуация даже когда $r \equiv 0$. В этом случае сингулярность возникает при решении задачи (D).

В операторной форме задачу (1)-(2) запишем в виде

$$Au = f\,, \qquad (3)$$

где оператор A на множестве функций $u \in D_A$ [2, 7] порождается дифференциальным выражением l(u) (1) и краевыми условиями (2); D_A − область определения оператора *A*. В данном случае это класс дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах интервала.

Как и в работе [6], рассмотрим гильбертово пространство $H(a,b)$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_a^b uv dx, u, v \in H \qquad (4)$$

и нормой

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_a^b u^2 dx\right)^{1/2}, u \in H\,. \qquad (5)$$

Можно показать, что множество элементов из (3) $u \in D_A$ плотно в H [2], оператор A линейный, симметричный, положительно-определенный, т.е. для любых вещественных чисел α, β и для $u, v \in D_A$ выполняются условия [2, 7]:

$$\alpha u + \beta v \in D_A, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av\,; \qquad (6)$$

$$(Au,v) = (u,Av), (Au,u) \ge \gamma^2 \|u\|, \gamma \ge const > 0\,. \qquad (7)$$

Справедливо следующее [1-3]

Утверждение 1. Элемент $u_O \in D_A$ тогда и только тогда доставляет минимум функционалу

$$J(u) = (Au,u) - 2(u,f)\,, \qquad (8)$$

когда он является решением задачи (3).

Это утверждение устанавливает эквивалентность задачи (3) и задачи нахождения элемента $u \in D_A$, на котором достигается минимум функционала J, но ничего не говорит о существовании решения. Оказывается, можно видоизменить постановку вариационной задачи о минимизации $J(u)$ так, чтобы можно было гарантировать существование и единственность ее решения. Обычно поступают следующим образом [2]. Вводят на D_A новое скалярное произведение

$$[u,v]=(Au,v)=\int_a^b\left[(-(pu')'+ru)v\right]dx \qquad (9)$$

с нормой

$$|u|=\sqrt{(Au,u)},u\in D_A . \qquad (10)$$

Пополнив D_A по введенной норме (10), получают полное [5] гильбертово пространство H_A, которое принято называть энергетическим пространством, порождаемым оператором А [2]. Отметим, что $D_A\subset H_A\subset H$ и из последнего неравенства (7) следует

$$|u|\ge\gamma^2\|u\|^2 . \qquad (11)$$

Вместо функционала J, определенного на D_A, рассмотрим функционал

$$J^+(u)=[u,u]-2(u,f) , \qquad (12)$$

совпадающий с J(u) при $u\in D_A$ и имеющий смысл на всем энергетическом пространстве.

Можно показать, что (u,f) – линейный непрерывный функционал, а значит, по теореме Рисса [5] о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует, и притом единственный, элемент $u_o\in H_A$ такой, что

$$(u,f)=[u,u_o],\forall u\in H_A . \qquad (13)$$

Воспользовавшись полученным соотношением, функционал (12) можно представить в виде [2]

$$\begin{aligned}J^+(u)&=[u,u]-2(u,f)=[u,u]-2[u,u_o]=\\&=[u-u_o,u-u_o]-[u_o,u_o]=|u-u_o|^2-|u_0|^2.\end{aligned} \qquad (14)$$

Отсюда очевидно, что

$$\inf J^+(u)=-|u_0|^2 , \qquad (15)$$

$u\in H_A$, т.е. решение вариационной задачи

$$J^+(u)\to\inf ,\quad u\in H_A \qquad (16)$$

существует, единственное и совпадает с u_o. Его принято называть *обобщенным* решением задачи (3) [1-3]. Если оказывается, что $u_o\in D_A$, то, как отмечалось выше, u_o является решением задачи (3) или, что то же самое, (1)-(2), т.е. *классическим* решением.

В развернутом виде функционал J^+ (16) представляется интегралом

$$J^+(u)=\int_a^b\left[(pu')^2+ru^2-2uf\right]dx . \qquad (17)$$

Для решения задачи минимизации (16) применяется известный метод Ритца [2]. Если последовательность функций $\{\varphi_k\},k=1,2,...$ образует базис в H_A, то n -е приближение u_n к точному решению u_o представимо в виде

$$u_n=\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k , \qquad (18)$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u_o,\quad \inf J^+(u_n)=J^+(u_o) . \qquad (19)$$

Коэффициенты c_k ($k=1,2,..,n$) разложения (18) находят как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} r_{11}c_1+...+r_{1n}c_n=b_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ r_{n1}c_1+...+r_{nn}c_n=b_n\end{cases}, \qquad (20)$$

где

$$r_{kj}=\int_a^b[p\varphi'_k\varphi'_j+r\varphi_k\varphi_j]dx , \qquad (21)$$

$$b_k=\int_a^b f\varphi_k dx,(k,j=1,2,...,n) . \qquad (22)$$

Матрица системы (20) симметрична и положительно определена, ее определитель отличен от нуля и, следовательно, система уравнений всегда разрешима и имеет единственное решение.

Функционал $J^+=J^+(u)$, как легко видеть, является выпуклым. Поэтому любое приближение u_n к точному решению u_o дает приближение к $\inf J^+$ сверху. Можно строго доказать [2], что такое приближение монотонно. В связи с этим появляется возможность получения некоторых косвенных критериев, позволяющих судить о точности приближения с ростом числа n, т.е. с увеличением количества координатных функций φ_k, например,

$$J^+(u_n)-J^+(u_{n+1})\to 0 \text{ при } n\to\infty . \qquad (23)$$

Однако критерий (23) не является надежным (хотя на практике им пользуются довольно часто, главным образом, ввиду его простоты).

Вначале поставим задачу: как, зная приближение u_n, оценить погрешность u_o-u_n. Допустим, что координатные элементы φ_k принадлежат области D_A определения оператора *A*. Тогда [2] погрешность равна

$$u_o-u_n=A^{-1}(A(u_o-u_n))=A^{-1}(f-Au_n) , \qquad (24)$$

откуда в метрике исходного гильбертова пространства *H* следует погрешность для нормы

$$\|u_o-u_n\|\le\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|f-Au_n\|\le\frac{1}{\gamma^2}\|f-Au_n\| . \qquad (25)$$

В общем случае Au_n не стремится к f, поэтому оценка (25) может оказаться очень грубой. Более того, она неприменима, если координатные функции не принадлежат области D_A: в этом случае она просто лишена смысла [см. 2, с.297].

Другой, более тонкий способ апостериорной оценки погрешности состоит в следующем. По (14) имеем

$$J^+(u_n)=\left|u_n-u_0\right|^2-\left|u_0\right|^2. \qquad (26)$$

Обозначим

$$\inf J^+(u)=-\left|u_o\right|^2=d. \qquad (27)$$

Тогда

$$\left|u_n-u_o\right|^2=J^+(u_n)-d. \qquad (28)$$

Сама по себе задача нахождения точного значения числа d достаточно трудоемка и обычно определить его точно не удается. Если имеется некоторый алгоритм получения серии чисел $J^- \le d$, то легко видеть, что в метрике H_A

$$\left|u_n-u_o\right| \le \sqrt{J^+(u_n)-J^-}. \qquad (29)$$

В метрике исходного гильбертова пространства H

$$\left\|u_n-u_o\right\| \le \frac{1}{\gamma}\sqrt{J^+(u_n)-J^-}. \qquad (30)$$

Таким образом, задача сводится к построению чисел J^-, меньших d и желательно, по возможности, близких к d. Такое построение мы эффективно осуществляем с помощью теории двойственности, позволяющей прямую задачу типа inf свести к двойственной ей типа sup, а именно нами строится функционал $J^-=J^-(v)$, который является вогнутым и таким, что

$$\inf_{u\in U} J^+(u)=\sup_{v\in V} J^-(v), \qquad (31)$$

$$U=\{u:u\in H_1, u(a)=u(b)=0\}, V=\{v:v\in H_1\}.$$

Здесь $H_1=H_1(a,b)$ — соболевский класс функций, которые интегрируемы на интервале (a,b) вместе со своим квадратом и имеют там же *обобщенную* производную, также интегрируемую вместе с квадратом [2, 3, 5].

В работе [6] нами приводился вид двойственного функционала

$$J^-(v)=-\int_a^b\left\{\frac{v^2}{p}+\frac{(f+v')^2}{r}\right\}dx. \qquad (32)$$

Из (32) ясно видно, что коэффициент пропорциональности r не может обращаться в нуль, так как в этом случае (двойственная) задача максимизации

$$J^-(v)\to\sup_{v\in V} \qquad (33)$$

лишена смысла.

Существуют многие способы обойти трудности, связанные с сингулярностью в представлении (32). Вот некоторые из них.

Предварительно решается спектральная задача, соответствующая оператору *A*. Затем осуществляется сдвиг по спектру на некоторую величину $\mu<\lambda_1$, где λ_1 — первое (минимальное) собственное число оператора *A*. Трудность здесь заключается в том, что необходимо знать приближение снизу к λ_1. Сама по себе эта задача не проще исходной.

Можно добиться тождественного нуля в числителе, решая уравнение 1-го порядка вида

$$f+v'=0 \qquad (34)$$

относительно неизвестной функции v. Функционал (32) в этом случае приобретает другой вид. Если правая часть f имеет сложный вид, включая разрывы, то интегрирование (34) — тоже нелегкая задача.

И, наконец, предпринимались попытки решения последовательности задач вида (33), зависящих от положительного параметра $\varepsilon_n\to 0, (n\to\infty)$, который суммируется со знаменателем r и, таким образом, деление на нуль возможно лишь в пределе. Нам такой подход представляется сомнительным.

В [4] был предложен эффективный прием сдвига знаменателя на некоторую положительную величину путем введения специального параметра α [4]. Остановимся на этом подробнее (опуская доказательства).

Теорема. *Если существует непрерывно дифференцируемая функция* α *такая, что выполняется условие*

$$\delta=r+\alpha'-\frac{\alpha^2}{p}\ge const>0, \forall x\in(a,b), \qquad (35)$$

то $J^-(v)$ *из* (32) *приобретает вид*

$$J^-(v)=-\int_a^b\left\{\frac{v^2}{p}+\frac{1}{\delta}\left(f+v'-\frac{\alpha v}{p}\right)^2\right\}dx, \qquad (36)$$

и равенство (31)

$$\inf_{u\in U} J^+(u)=\sup_{v\in V} J^-(v)$$

достигается на некотором элементе $v=v_o\in H_1(a,b)$, *причем никакими условиями на краях функция* v *не связана. Равенство* (31) *выполняется, если в интервале* (a,b)

$$v=pu'+u\alpha, \qquad (37)$$

$$u=\frac{1}{\delta}\left(f+v'-\frac{\alpha v}{p}\right). \qquad (38)$$

Это так называемые формулы связи. Ими можно пользоваться для контроля правильности вычислений и тестирования программ.

Построение функции α с условиями (35) трудностей не вызывает, так как имеется большой произвол при нахождении какого-либо решения, удовлетворяющего дифференциальному неравенству. Если $r\ge const>0$, то $\alpha\equiv 0$. В противном случае (в том числе и при $r\equiv 0$) в качестве α можно взять функцию

$$\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_2}{x-(a-1)}. \qquad (39)$$

При этом неравенство (35) лишь усилится (по условию (1) $p\ge C_2$) и

$$\alpha'-\frac{\alpha^2}{p}\ge\frac{3}{4}\frac{C_2}{(x-(a-1))^2}\ge\delta=\frac{3}{4}\frac{C_2}{b-a+1}>0. \qquad (40)$$

Дальнейшие наши рассуждения совпадают с выводами [6], т.е. имеет место

Утверждение 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $u_{+\varepsilon}, u, u_{-\varepsilon}$ — суть решения соответствующих краевых задач

$$-(pu'_{+\varepsilon})' + ru_{+\varepsilon} = f + \varepsilon \,, \tag{41}$$

$$-(pu')' + ru = f \,, \tag{42}$$

$$-(pu'_{-\varepsilon})' + ru_{-\varepsilon} = f - \varepsilon \tag{43}$$

с однородными краевыми условиями, то

$$u_{-\varepsilon} < u < u_{+\varepsilon} \,. \tag{44}$$

Теорию двойственности мы привлекаем с одной целью — для достоверности соблюдения *строгих* неравенств типа (44).

Зададимся двумя положительными числами ε и ξ, причем $\varepsilon >> \xi$. После этого с привлечением теории двойственности решаем последовательно три задачи (41)-(43) с точностью ξ (в метрике гильбертова пространства H_A) до выполнения условия (29):

$$|u_n - u_o| \le \sqrt{J^+(u_n) - J^-(v_n)} < \xi \,.$$

Строгость неравенств (44) контролируется в процессе счета по мере стремления ε и ξ к нулю.

Литература: 1.*Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. 216 с. 2.*Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. 3.*Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с. 4.*Калиниченко В.И., Кощий А.Ф., Ропавка А.И.* Численные решения задач теплопроводности. Харьков: Вища шк., 1987. 112 с. 5.*Канторович В.Л., Крылов В.И.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с. 6.*Калиниченко В.И., Пан Н.П., Сова А.В.* Верхние и нижние приближения в первой краевой задаче для самосопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Коммунальное хозяйство городов. 2000, №23. С.228-237. 7.*Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

Поступила в редколлегию 21.05.2001

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Гнесин В.И.

Калиниченко Виталий Иванович, канд. физ.-мат. наук, научный руководитель ВЦ Харьковского национального университета им. В.Н.Каразина. Научные интересы: численные методы в краевых задачах математической физики. Адрес: Украина, 61111, Харьков, ул. Познанская, 8, кв.83, тел. 63-21-65.

Пан Николай Павлович, начальник информационно-вычислительного центра Харьковской государственной академии городского хозяйства. Научные интересы: сети ЭВМ, системы управления базами данных. Адрес: Украина, 61110, Харьков, пр.Тракторостроителей, 108, кв.153, тел.47-65-00.

Афанасьев Вадим Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: специальные функции математической физики. Адрес: Украина, 61168, Харьков, ул.Героев труда, 10, кв.24. тел.68-15-05.

Сова Анна Васильевна, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: радиоэлектроника, распределение радиоволн. Адрес: Украина, 61204, Харьков, ул. Асхарова, 15-А, кв.22, тел.37-18-31.

УДК 681.3.06

УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ

ШОСТАК В.Ф., ШОСТАК И.В., КУЗЬМЕНКО О.Ю.

Рассматривается проблема управления в реальном времени сложными объектами с неполной априорной информацией. Предлагается концепция интеллектуальных интегрированных систем, сочетающих преимущества традиционных и интеллектуальных методов управления. Описывается особая стратегия вывода на знаниях, позволяющая учесть неопределенность состояния объекта в достаточно удаленные от текущего моменты времени.

В процессе функционирования сложных объектов часто возникают нештатные режимы, которые могут приводить к авариям, катастрофам и, как следствие, к чрезвычайным ситуациям (ЧС).

Предупреждение, преодоление и ликвидация последствий ЧС представляет собой ряд взаимосвязанных проблем, охватывающих вопросы возникновения и развития ЧС, а также комплекс мероприятий организационного и технологического характера, направленных на борьбу с ЧС. Указанные проблемы сравнительно мало изучены, их развитие, как правило, невозможно точно предсказать, что приводит к большим трудностям при их ликвидации.

ЧС принято рассматривать как слабоструктурированный нестационарный объект, обладающий рядом проблематичных для традиционного управления свойств, таких как уникальность, определяемая конкретными условиями возникновения и развития ЧС, высокая динамичность, неполнота описания объекта, индивидуальность лица, принимающего решения (ЛПР), проявляющаяся в ходе формирования и принятия решения. Процесс развития ЧС подвержен многочисленным внешним и параметрическим возмущениям, о которых обычно имеется неполная априорная информация. Управление в ЧС требует учета большого числа взаимосвязанных параметров, изменение которых, как правило, носит стохастический и нечеткий характер.

В этих условиях разработка адекватной математической модели и, следовательно, применение традиционных методов идентификации ЧС в целом как объекта управления представляет значительные трудности. Кроме того, при использовании традиционных методов весьма затруднительно учесть