УДК 621.391.175

Н.С. ПОДЦЫКИН

АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ И РАБОТОСПОСОБНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предлагается модель надежности и работоспособности технической системы. Предполагается, что в процессе эксплуатации из-за случайных процессов износа и разрегулировки работоспособность системы снижается. Характеристики этого процесса известны не полностью. Предлагается метод последовательного улучшения стратегии управления работоспособностью в процессе наблюдения за поведением системы. Управлениями считаются виды регламентных работ, проводимые в заданные моменты времени.

1. Общая постановка задачи, актуальность и цель исследования

Важной задачей при эксплуатации технической системы на неограниченном интервале времени является обеспечение оптимального уровня ее работоспособности [1]. Основной показатель работоспособности часто может быть охарактеризован величиной прибыли, которую обеспечивает работающая система. Для поддержания оптимального уровня работоспособности предусмотрено проведение регламентных работ, направленных на обновление системы. Под обновлением системы будем понимать все виды ремонтных работ, проведение регулировок и других действий, обеспечивающих такое состояние системы, которое в конечном итоге увеличивает прибыль и эффективность ее использования. Регламентные работы различаются по глубине воздействия на систему и, следовательно, по стоимости.

Актуальной задачей является выбор такой стратегии применения регламентных работ и их типов, которые обеспечивали бы максимальную прибыль от эксплуатации системы.

Пусть введено в рассмотрение понятие состояния системы. Состояние системы определяется набором контролируемых параметров, которому соответствует определенный уровень эффективности и работоспособности. Выбор набора информативных параметров и определение с их помощью состояния могут быть проведены методами теории распознавания образов [2]. Далее будем считать, что множество состояний $\Xi = \{x\}$ определено и ранжировано по уровню работоспособности системы. Положим, что это множество совпадает с множеством неотрицательных вещественных чисел. Состоянию $x = 0$ соответствует наивысшая эффективность функционирования системы, при возрастании значения x эффективность монотонно уменьшается.

Предполагается, что регламентом установлено проведение профилактических ремонтов после ее работы в течение интервала времени τ. Тип регламентных работ далее будем называть управлением. Множество всех различных управлений обозначим через $Y = \{y_1, y_2, ..., y_l\}$. Допускаем, что применение управления y_1 в любом состоянии x не меняет этого состояния. Применение управления y_k, $k > 1$, в состоянии x приведет к переходу системы в одно из лучших, по сравнению с x, состояний. Это состояние определяется заданным вероятностным распределением на множестве $[0, x)$. Будем предполагать, что среднее значение обновления системы тем больше, чем больше номер управления. Ниже это свойство будет уточнено.

Реализация управления занимает определенное время, в течение которого система простаивает, и требует определенных затрат.

Состояние системы в момент контроля и принятия решения о выборе управления является реализацией случайной величины. Вероятностное распределение этой случайной величины неизвестно. Выбор типа распределения для конкретной рассматриваемой системы возможен лишь в том случае, если доступна необходимая статистическая информация. Выберем для моделирования тот класс систем, для которых это распределение является гамма-распределением. Такой выбор достаточно общий, так как при определенных значениях параметров гамма-распределение определяет экспоненциальное распределение, распределение χ^2 и другие. Предлагаемый метод моделирования и оптимизации потребует очевидных изменений при использовании другого типа распределения.

Целью исследования является разработка метода оптимизации уровня работоспособности технической системы в условиях неполной информации о ее характеристиках. В работе предлагается адаптивный подход к решению этой задачи. Наблюдения, получаемые в процессе работы системы, последовательно используются для уточнения стратегии управления.

2. Математическая модель

В основу моделирования выбранной системы положим марковский процесс принятия решений [3]. Для этого необходимо определить следующие элементы: E – множество состояний, Y – множество управлений, Q – переходная функция, определяющая одношаговые переходы на множестве состояний E, π – стратегия управления, w – функция непосредственных доходов.

Положим, что множество состояний E конечно. Для этого проведем дискретизацию множества $\Xi=[0,\infty)$. Пусть h – шаг дискретизации. Выберем количество состояний, задав число N. Тогда множество состояний $E=\{x_0,x_1,...,x_N\}$. Если в момент контроля состояние системы попадает в полуинтервал $[ih,(i+1)h)$, $0\le i\le N-1$, то будем считать, что наблюдалось состояние $x_i=ih$. Наблюдению значения из полуинтервала $[Nh,\infty)$ поставим в соответствие состояние x_N.

Пусть множество управлений Y состоит из l элементов: $\{y_1,y_2,...,y_l\}$, каждое из которых может быть применено в любом состоянии.

Отображение $\omega:E\to Y$ назовем решающей функцией, последовательность решающих функций $\pi=\{\omega_1,\omega_2,...\}$ – стратегией управления. Стратегия управления π для каждого состояния x в момент t_k определяет выбор управления $\omega_k(x)\in Y$.

Стратегию вида $\pi=\omega^{(\infty)}=\{\omega,\omega,...\}$ назовем стационарной.

Для определения переходной функции Q проведем вспомогательные построения. Пусть в момент контроля t_k идентифицировано значение $x\in\Xi$. Применение управления $y_k\in Y$ в этом состоянии за время T_k переведет систему в некоторое случайное состояние $z\in[0,x)$ в соответствии с плотностью распределения вероятностей $f_k(z)(x)$, $k=2,...,l$. Для $k=1$ величина простоя системы T_1 равна 0, а плотность f_1 вырождена в точке x. Все плотности $f_k(z)(x)$, $k=2,...,l$ определяются конкретными регламентными работами, оцениваются статистическими методами. Будем считать их заданными.

Управления различаются по степени обновления системы. Положим, что они упорядочены следующим образом. Если $2\le k<n\le l$, то

$$\int_0^x zf_k(z)(x)dz>\int_0^x zf_n(z)(x)dz$$

для всех $x\in\Xi$.

Последнее неравенство означает, что чем больше номер управления, тем в большей степени в среднем оно обновляет систему.

Рассмотрим теперь действие управлений на множестве E. Если наблюдаемое значение x попало в полуинтервал $[x_i,x_{i+1})\subset\Xi$, то будем считать, что система находится в состоянии $x_i\in E$. Пусть в этом состоянии было применено управление $y_k\in Y$. Тогда через интервал времени T_k система перейдет в состояние x_j, $j=0,...,i$, с вероятностью

$$p_{i0}^{(k)}=\int_0^{x_1}f_k(z)(x)dz\,,\ p_{i1}^{(k)}=\int_{x_1}^{x_2}f_k(z)(x)dz\,,\ \dots\,,\ p_{ii}^{(k)}=\int_{x_i}^{x}f_k(z)(x)dz\,. \tag{1}$$

Очевидно, что $p_{00}^{(k)}=1$ для любого $y_k\in Y$, $p_{ii}^{(1)}=1$ для любого $x_i\in E$. Заметим, что длительность перехода T равна 0 только для управления y_1.

После перехода в состояние z под действием управления $y_k \in Y$, система работает в течение периода времени τ. С работающей системой связана интенсивность дохода ν_ξ, зависящая от состояния $\xi \in \Xi$. По предположению случайная величина $(x-z)$ имеет гамма-распределение с неизвестными параметрами α и β, где $x \in \Xi$ – наблюдение состояния системы в конце указанного периода. Плотность гамма-распределения имеет следующий вид [4]:

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Определим соответствующие переходы на дискретном множестве состояний E и вероятности переходов.

Пусть $x_i \in E$ – состояние системы, в которое управление ее переводит. Обозначим искомые вероятности через q_{ij}, $x_i, x_j \in E$. По предположению, состояние системы в процессе работы не может улучшиться. Поэтому

$$q_{i0} = 0, \; q_{i1} = 0, \; \ldots, \; q_{ii-1} = 0, \; q_{ii} = \int_0^h f(x|\alpha,\beta)dx, \; q_{ii+1} = \int_h^{2h} f(x|\alpha,\beta)dx, \ldots,$$

$$q_{iN-1} = \int_{(N-i-1)h}^{(N-i)h} f(x|\alpha,\beta)dx, \; q_{iN} = \int_{(N-i)h}^{\infty} f(x|\alpha,\beta)dx. \tag{2}$$

Теперь легко определить переходную функцию Q марковского процесса принятия решений. Пусть в момент контроля наблюдалось состояние $x_i \in E$, в котором применено управление $y_k \in Y$. Через интервал времени T_k это управление переведет систему в состояние $x_s \in E$ с вероятностью $p_{is}^{(k)}$. Затем через интервал времени τ состояние $x_j \in E$ будет наблюдаться с вероятностью q_{sj}. Поэтому вероятность перехода за один период, с учетом формул (1) и (2), в этом случае составит величину

$$Q_{ij}^{(k)} = \sum_{s=0}^{\min(i,j)} p_{is}^{(k)} q_{sj}. \tag{3}$$

Рассмотрим далее определение функции непосредственных доходов w. Для этого необходимо вычислить среднюю прибыль системы на одном периоде как функцию от состояния в начале периода перед применением управления и управления. Вычислим сначала средний доход на интервале времени τ, получаемый при работе системы. Пусть $x_s \in E$ – состояние системы после применения управления $y_k \in Y$. Предположив, что на интервале времени $(0,\tau)$ износ и падение эффективности работы системы происходит по линейному закону, получим среднюю величину дохода:

$$V(x_s) = \sum_{j=s}^{N} q_{sj}(\nu_s \tau + \frac{1}{2}(\nu_{j+1} - \nu_j)\tau),$$

где $\nu_{N+1} = 0$.

Величина непосредственного дохода в единицу времени на одном периоде при условии, что в начале периода в состоянии $x_i \in E$ применено управление $y_k \in Y$, равна

$$w(x_i, y_k) = \frac{1}{T_k + \tau}\left(\sum_{s=0}^{i} p_{is}^{(k)} V(x_s) - r(x_i, y_k)\right), \tag{4}$$

здесь $p_{is}^{(k)}$ определены в (1); $r(x_i, y_k)$ – стоимость управления $y_k \in Y$, примененного в состоянии $x_i \in E$.

Решающей функции ω поставим в соответствие матрицу переходных вероятностей $Q(\omega)$ с элементами $Q_{ij}^{(\omega(x_i))}$, $i,j = 1,\ldots,N$, $\omega(x_i) \in Y$, и вектор-столбец непосредственных доходов $w(\omega)$ с компонентами $w(x_i, \omega(x_i))$, $i = 1,\ldots,N$, $\omega(x_i) \in Y$. Пусть система управляется стационарной стратегией $\pi = \omega^{(\infty)}$. Тогда средний доход в единицу времени, приносимый системой при неограниченном времени работы, составит величину

$$\varphi(\pi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\omega) w(\omega) \ . \qquad (5)$$

Известно [3], что если множество состояний образует один эргодический класс, то вектор-столбец $\varphi(\pi)$ состоит из одинаковых компонент. Это означает, что величина среднего дохода в единицу времени не зависит от начального состояния. В нашем случае это условие выполнено.

Задача состоит в отыскании стационарной стратегии π, для которой компоненты вектора $\varphi(\pi)$ максимальны. Решение этой задачи дает алгоритм Ховарда [3]. Применить непосредственно этот алгоритм не удастся, так как модель определена не полностью. Параметры α и β, определяющие распределение приращений траектории процесса износа и разрегулировки системы, неизвестны. Предлагается применить адаптивный подход к выбору оптимальной стратегии управления. Именно, наблюдая состояние системы после применения "априорной" стратегии управления, уточнить оценки параметров, получить улучшенную "апостериорную" стратегию, применить ее и получить очередное наблюдение. Затем вновь улучшить стратегию. Улучшение стратегии понимаем здесь в смысле критерия φ. Учитывая, что стационарных стратегий конечное число, а оценки параметров α и β в определенном смысле сходятся к истинным значениям, можно доказать, что за конечное число улучшений будет достигнута ε-оптимальная стратегия. Далее рассмотрим метод оценки неизвестных параметров.

Выбор байесовского подхода к решению задачи оценки параметров в нашем случае удобен, так как легко позволяет последовательно уточнять оценки параметров по мере поступления дополнительной информации о распределении.

Заметим, что для практического применения байесовского метода оценки параметра распределения необходимо для оцениваемого параметра найти сопряженное семейство распределений [4]. Оно существует, если для этого параметра найдется достаточная статистика конечной размерности, не зависящая от объема выборки [4].

Рассмотрим метод получения оценки параметра β гамма-распределения по повторной выборке $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ объема n. Легко видеть, что достаточной статистикой для этого параметра является $t(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ и, следовательно, существует сопряженное семейство распределений параметра β.

Докажем, что если задана выборка x, априорное распределение параметра β есть гамма-распределение с параметрами α_0, β_0, то апостериорное распределение параметра β есть гамма-распределение с параметрами $\alpha' = \alpha_0 + n\alpha$, $\beta' = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, α – параметр распределения наблюдений.

Действительно, функция правдоподобия имеет вид:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^n} \beta^{n\alpha} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i} .$$

Если параметр β считать переменной, а $\sum_{i=1}^{n} x_i$ константой, то с точностью до множителя, не содержащего β, функция L пропорциональна плотности гамма-распределения, т.е. $L(\beta) \propto \beta^{n\alpha} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i}$, где $\propto$ – символ пропорциональности. Поэтому сопряженным семейством распределений параметра β является гамма-распределение [4]. Пусть априорное распределение $\xi(\beta)$ параметра β есть гамма-распределение с параметрами α_0, β_0, т.е. $\xi(\beta) \propto \beta^{\alpha_0 - 1} e^{-\beta_0 \beta}$. Тогда по формуле Байеса апостериорная плотность $\xi(\beta|x)$ распределения параметра β пропорциональна произведению априорной плотности на функцию правдоподобия:

$$\xi(\beta|x) \propto \beta^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\beta}\beta^{n\alpha}e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i} = \beta^{\alpha_0+n\alpha-1}e^{-\beta(\beta_0+\sum_{i=1}^{n}x_i)}.$$

Полученная апостериорная плотность распределения параметра β совпадает с плотностью гамма-распределения с параметрами

$$\alpha' = \alpha_0 + n\alpha,\ \beta' = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{6}$$

Заметим, что здесь параметр α является параметром распределения наблюдений. Далее оценки параметров распределения наблюдений будем обозначать $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, а оценки параметров распределения β через: α_0, β_0 – априорные, α', β' – апостериорные. Для вычисления оценки $\tilde{\alpha}$ отметим следующее. При заданных значениях параметров α и β средняя величина приращения траектории за время τ составляет величину $\frac{\alpha}{\beta}$, а дисперсия – величину $\frac{\alpha}{\beta^2}$. Поэтому их оценки, в соответствии с методом моментов, могут быть получены из системы

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i,$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 - n\overline{\eta}^2\right), \tag{7}$$

где $\overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$, η_i, $i = 1,...,n$ – наблюдения приращений процесса.

Из (7) получим оценки: $\tilde{\beta} = \frac{\tilde{\alpha}}{\overline{\eta}}$,

$$\tilde{\alpha} = \frac{(n-1)\overline{\eta}^2}{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 - n\overline{\eta}^2}. \tag{8}$$

Априорные значения параметров α_0 и β_0 выберем из условия $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \tilde{\beta}$. В модели предполагается, что параметр распределения случайного приращения α вычисляется по формуле (8), а параметр β – по формуле Байеса.

Оценки $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ позволяют задать все элементы модели, найти оптимальную (в условиях имеющейся информации) стратегию, применить ее и получить новые наблюдения $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$.

Далее можно получим оценку $\tilde{\alpha}$ по формуле (8), учитывая, что n – объем всех наблюдений. Подставив полученное $\tilde{\alpha}$ в (6) и, если были апостериорные значения α', β', подставив их вместо α_0, β_0, получим новые апостериорные оценки α', β' распределения параметра β. Далее действия повторяются.

В основу метода вычисления оптимальной стратегии управления положен итерационный алгоритм Ховарда [3]. Каждое наблюдение за управляемым процессом содержит дополнительную информацию о рассматриваемой системе. Эта информация используется для улучшения по критерию φ вычисленной ранее стратегии управления. Если на текущей итерации, за счет обработки очередной порции информации, величина критерия φ изменилась на малую величину ε, где $\varepsilon > 0$ заранее задано, то предлагается алгоритм остановить.

3. Оптимизационный алгоритм

Пусть перед началом процесса управления и оптимизации системы имеется информация о наблюденных величинах приращений процесса износа и разрегулировки: $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$. Выберем величину $\varepsilon > 0$.

Алгоритм, реализующий адаптивный подход к управлению системой, состоит в выполнении следующих действий.

1. Выбрать решающую функцию ω_1, определив для каждого $x_i \in E$ управление $\omega_1(x_i) \in Y$.

2. С учетом (8) найти $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta} = \frac{\tilde{\alpha}}{\eta}$, выбрать положительные значения α_0, β_0 из условия $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \tilde{\beta}$.

k-й шаг алгоритма.

3. По формулам (3) и (4) вычислить матрицу переходных вероятностей $Q(\omega_k)$ с элементами $Q_{ij}^{(\omega_k(x_i))}$, $i, j = 1,...,N$, и вектор-столбец $w(\omega_k)$ непосредственных доходов с компонентами $w(x_i, \omega_k(x_i))$, $i = 1,...,N$, соответствующих стационарной стратегии $\omega_k^{(\infty)}$. При вычислениях использовать полученные оценки $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ в плотности распределения вероятностей $f(x|\alpha, \beta)$.

4. Решить систему линейных уравнений

$$w(\omega_k) + Q(\omega_k)R(\omega_k) - R(\omega_k) = \varphi(\omega_k)$$

относительно компоненты вектора $\varphi(\omega_k)$ и компонент вектора $R(\omega_k)$, у которого первая компонента равна 0. Если $k = 1$, обозначить $\varphi_1 = \varphi(\omega_k)$.

Вычислить $U(\omega') = w(\omega') + Q(\omega')R(\omega_k) = \max_{\omega}\left(w(\omega) + Q(\omega)R(\omega_k)\right)$ и проверить неравенство $U(\omega') - w(\omega_k) - Q(\omega_k)R(\omega_k) > 0$.

Если оно выполнено, обозначить ω' через ω_k и перейти в 3. Если оно не выполнено, перейти в 5.

5. Если $k \geq 2$, обозначить $\varphi_k = \varphi(\omega_k)$ и перейти в 6. Если $k = 1$, перейти в 7.

6. Проверить условие: $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| < \varepsilon$. Если оно выполнено, перейти в 8. Если оно не выполнено, перейти в 7.

7. Получить наблюдения приращения траектории управляемого процесса $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$, $s \geq 1$, применив полученную стационарную стратегию $\pi = \omega_k^{(\infty)}$. Вычислить оценку $\tilde{\alpha}$ по формуле (8), в которой n – количество всех наблюдений. Обозначить α' через α_0, β' через β_0 и найти параметры апостериорного распределения β по формулам:

$$\alpha' = \alpha_0 + s\tilde{\alpha}, \quad \beta' = \beta_0 + \sum_{i=1}^{s} \eta_i .$$

Увеличить k на единицу. С уточненными значениями оценок параметров $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ перейти в 3.

8. Стратегия $\pi = \omega_k^{(\infty)}$ является искомой. Эта стратегия обеспечивает средний доход в единицу времени, равный φ_k.

4. Заключение

Построена модель надежности и работоспособности технической системы, характеристики которой заданы не полностью. Эта модель основана на понятии состояния, которое и определяет текущий уровень надежности и работоспособности системы. Использование состояния в задачах моделирования надежности является новым и перспективным, так как позволяет строить более адекватные модели по сравнению с существующими. Для модели предложен оптимизационный алгоритм, в основе которого лежит марковский процесс принятия решений и адаптивный подход улучшения начальной стратегии, выбранной в условиях ограниченной информации об объекте. Алгоритм реализуется в реальном масштабе времени. По мере поступления информации о результатах применения текущей стратегии управления алгоритм обеспечивает уточнение этой стратегии в смысле выбранного критерия φ.

При моделировании реальной системы, как правило, информация о процессе ее износа практически отсутствует. Мы предположили, что этот процесс случаен, и за фиксированный интервал времени ухудшение характеристик системы может быть описано гамма-распределением. Выбор другого распределения, который в реальных условиях во многом зависит от состояния системы, т.е. набора информативных параметров, не изменит принципиально модель и предложенный алгоритм.

Статистический метод оценки неизвестных параметров, в нашем случае байесовский, обеспечивает сходимость этих оценок по вероятности к истинным значениям. Это означает, что мы не можем гарантировать, что за конечное число итераций алгоритма будет достигнута оптимальная стратегия. Однако вероятность этого события с учетом конечного числа состояний и управлений возрастает с увеличением количества итераций. Предложенный метод остановки алгоритма основан на практическом требовании: продолжение алгоритма должно обеспечивать улучшение стратегии по выбранному критерию на каждой итерации не менее, чем на заданную величину ε. Оценка вероятности достижения оптимальной стратегии в момент остановки алгоритма имеет больше теоретический характер и может быть основана на оценке, полученной в [6].

Список литературы: 1. *Вопросы* математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376с. **2.** *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1984. 208 с. **3.** *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 175с. **4.** *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 493с. **5.** *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648с. **6.** *Подцыкин Н.С.* Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. 2004. Вип. 3. № 629. С.25-32.

Поступила в редколлегию 11.03.2010

Подцыкин Николай Серафимович, канд. техн. наук, доцент кафедры математического моделирования и программного обеспечения Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование управляемых стохастических систем и методы их оптимизации. Адрес: Украина, 61115, Харьков, ул. 2-й Пятилетки, 2-Г, кв. 115, тел.: 707-54-68.