Міністерство освіти та науки України
Національна академія наук України
Люблінський відділ Польської Академії Наук
Представництво „Польська академія наук” у Києві
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харківський національний університет міського господарства
ім. А.М. Бекетова
AGH науково-технологічний університет в Кракові
Миколаївський кораблебудівний університет ім. адмірала Макарова
Одеський національний політехнічний університет
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
Українська нафтогазова академія
Українська Федерація Інформатики
Академія Наук Прикладної Радіоелектроніки
Білоруський державний університет інформатики та радіоелектроніки
Білоруський національний технічний університет
Національний університет цивільного захисту України
Запорізький національний технічний університет

«Інформаційні системи та технології» ІСТ-2018

М А Т Е Р І А Л И

7-ї Міжнародної науково-технічної конференції,

**присвяченої 55-річчю кафедри Прикладної математики ХНУРЕ,
55-річчю кафедри Програмної інженерії ХНУРЕ
та 40-річчю кафедри Прикладної математики та інформаційних технологій
ХНУМГ імені О.М. Бекетова**

**10-15 вересня 2018
Коблеве-Харків, Україна**

«INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES» IST-2018

Proceedings
of the 7-th International Scientific and Technical Conference

September 10-15, 2018
Kobleve-Kharkiv, Ukraine

Харків 2018

Эквивалентные Представления и Декомпозиция Дескрипторных Систем Управления

Лариса Власенко, Анатолий Руткас
кафедра программной инженерии
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
Харьков, Украина
lara@rutrus.com, anatoly@rutrus.com

Equivalent Representations and Decomposition of Descriptor Control Systems

Larisa Vlasenko, Anatolii Rutkas
Department of Software Engineering
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
lara@rutrus.com, anatoly@rutrus.com

***Аннотация*—Устанавливаются условия, позволяющие представить дескрипторную систему управления как последовательное соединение систем меньших размерностей. Результаты иллюстрируются на примере дескрипторной системы, описывающей переходные режимы в радиотехническом фильтре.**

***Abstract*—We establish conditions to represent a descriptor control system as a series connection of systems of smaller dimensions. The results are illustrated on an example of a descriptor system which describes transient states in a radio technical filter.**

Ключевые слова—дескрипторная система управления; регулярный пучок матриц; последовательная композиция; декомпозиция; эквивалентные системы; четырехполюсный фильтр

Keywords—descriptor controlled system; regular matrix pencil; sequential composition; decomposition; equivalent systems; two-port filter

I. Введение

Мы осуществляем разложение (декомпозицию) дескрипторной системы управления в цепочку более простых систем. В отличие от системы управления с входом (управлением) $u(t)$, состоянием $x(t)$, выходом $v(t)$ и начальным состоянием x_0 из классической монографии [1], динамика дескрипторной системы управления $\Phi = \Phi(u, x_0, x, v)$ описывается соотношениями более общего вида, не разрешенными относительно производной состояния:

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx(t) = Fu(t),\ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}(Mx) + Nx + Ku,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Существует обширная литература по дескрипторным системам управления, см., например, [2,3] и библиографию в этих работах. Дескрипторная система управления, которая возникает при моделировании переходных режимов радиотехнических цепей, исследуется в работе [4]. В теории дифференциальных игр изучаются дескрипторные системы с двумя конфликтными управлениями [5]. Состояния дескрипторных систем управления также могут описываться дифференциальными уравнениями второго порядка, не разрешенными относительно старшей производной. Эти дескрипторные системы служат хорошими конечномерными аппроксимациями бесконечномерных систем управления типа Соболева [6].

В (1)-(3) мы предполагаем, что значения вектор-функций $u(t), v(t), x(t)$ принадлежат вещественным евклидовым пространствам U, V, X соответственно, а коэффициенты в (2) есть линейные операторы $M, N : X \to V$, $K : U \to V$, где $\dim U = n$, $\dim V = p$. Области значений линейных операторов A, B, F в (1) принадлежат евклидовому пространству образов Y, размерность которого совпадает с размерностью пространства состояний X: $\dim X = \dim Y = m$. Таким образом, $A, B : X \to Y$, $F : U \to Y$. Соотношения (1)-(3) также будем рассматривать в векторно-матричной форме, зафиксировав базисы в пространствах X, Y, U, V. Для

соответствующих векторов и матриц сохраняем прежние обозначения.

Будем использовать следующие обозначения: $\dim X$ – размерность пространства X, $Ker K$ – ядро оператора или матрицы K, $Im K$ – образ оператора K, $Lin\{\dots\}$ – линейная оболочка векторов, E – единичный оператор или единичная матрица, 0 – нулевой оператор или нулевая матрица.

В данной статье мы распространяем результаты работы [7] о декомпозиции дескрипторной системы $\Phi = \Phi(u, x_0, x, v)$ на случай необратимого оператора K при управлении $u(t)$ в соотношении (2) для выхода $v(t)$. Поэтому в разделе II напоминаем некоторые определения и результаты из работы [7], которые понадобятся в дальнейшем.

II. Предварительные сведения

Предполагаем, что дескрипторная система $\Phi = \Phi(u, x_0, x, v)$ и уравнение (1) являются *регулярными*, а именно регулярным является характеристический пучок матриц $\lambda A + B$, т.е. его определитель не есть тождественный нуль: $det(\lambda A + B) \not\equiv 0$. В *вырожденной* системе с необратимой матрицей A начальное состояние x_0 и управление $u(t)$ не могут быть произвольными [8]. Описание множества допустимых пар $\{x_0, u(t)\}$ дает формула (10) из [7]. Для каждой допустимой пары $\{x_0, u(t)\}$ с помощью формулы (11) из [7] однозначно определяется состояние $x(t)$ и выход $v(t)$. В дальнейшем рассматриваем только регулярные дескрипторные системы с допустимыми парами $\{x_0, u(t)\}$.

Последовательной композицией систем Φ_1, Φ_2 называется система $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$, полученная отождествлением выхода v_1 системы Φ_1 со входом u_2 системы Φ_2, вход u системы Φ совпадает с входом u_1 системы Φ_1, выход v системы Φ совпадает с выходом v_2 системы Φ_2. Относительно пространств входов U_1, U_2, U и выходов V_1, V_2, V систем Φ_1, Φ_2, Φ предполагаем, что $V_1 = U_2, U = U_1, V = V_2$. Пространства состояний X и образов Y системы Φ есть прямые суммы соответствующих пространств систем Φ_1, Φ_2:

$$X = X_1 \dot{+} X_2,\ Y = Y_1 \dot{+} Y_2. \qquad (4)$$

На рис. 1 изображен принцип последовательной композиции $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$.

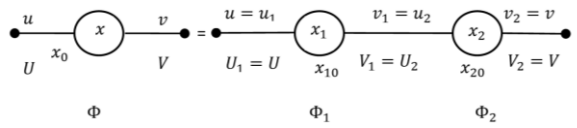

Рис. 1. Последовательная композиция.

Согласно [7] операторные коэффициенты представлений (1),(2) композиции Φ обладают свойствами: пара подпространств X_2, Y_2 из сумм (4) *инвариантна относительно пучка* $\lambda A + B$ ($AX_2 \subset Y_2, BX_2 \subset Y_2$), и если оператор $K : U \to V$ имеет обратный $K^{-1} : V \to U$, то пара дополнительных подпространств X_1, Y_1 инвариантна относительно возмущенного пучка $\lambda(A + FK^{-1}M) + (B + FK^{-1}N)$. Согласно теореме декомпозиции 2 из [7] любая система Φ (1)-(3), обладающая указанными парами инвариантных подпространств, допускает *декомпозицию* – представление $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ в виде композиции двух систем Φ_1, Φ_2 меньших размерностей.

III. Основной результат

В теореме декомпозиции [7] предполагалось, что для системы Φ оператор K имеет обратный. В реальных системах этот оператор может быть необратимым и даже нулевым, как в рассматриваемом далее примере радиотехнического фильтра. В этом случае теорема декомпозиции применяется не к исходной системе, а к эквивалентной $\tilde{\Phi}$, у которой уже оператор $\tilde{K}$ при управлении в выражении для выхода является обратимым.

Соотношения (1) и (2), описывающие систему Φ, полностью определяются заданием блочного оператора:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B & -F \\ M & N & K \end{bmatrix} : X \oplus X \oplus U \to Y \oplus V. \qquad (5)$$

Для системы $\tilde{\Phi}$ зададим блочный оператор

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & -\tilde{F} \\ \tilde{M} & \tilde{N} & \tilde{K} \end{bmatrix} : X \oplus X \oplus U \to Y \oplus V. \qquad (6)$$

Тогда система $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{v})$ описывается соотношениями

$$\frac{d}{dt}(\tilde{A}\tilde{x}) + \tilde{B}\tilde{x}(t) = \tilde{F}\tilde{u}(t),\ 0 \le t \le T, \qquad (7)$$

$$\tilde{v}(t) = \frac{d}{dt}(\tilde{M}\tilde{x}) + \tilde{N}\tilde{x} + \tilde{K}\tilde{u},\ 0 \le t \le T, \qquad (8)$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0. \qquad (9)$$

Две регулярные системы Φ (1)-(3) и $\tilde{\Phi}$ (7)-(9) называются *эквивалентными* ($\Phi \sim \tilde{\Phi}$), если они имеют одинаковые пространства управлений, одинаковые пространства состояний, одинаковые пространства образов, одинаковые пространства выходов, а из равенства начальных состояний $x_0 = \tilde{x}_0$ и управлений $u(t) = \tilde{u}(t)$ следует совпадение состояний $x(t) = \tilde{x}(t)$ и выходов $v(t) = \tilde{v}(t)$. Переход к эквивалентной системе $\tilde{\Phi}$ осуществляем с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть $Q: Y \to Y$ – произвольный линейный оператор, который имеет обратный $Q^{-1}: Y \to Y$, $\Lambda: Y \to V$ – произвольный линейный оператор. Тогда можно определить блочный оператор $\tilde{\Gamma}$ (6) из коэффициентов системы $\tilde{\Phi}$ (7)-(9), эквивалентной системе Φ (1)-(3), в виде

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & -\tilde{F} \\ \tilde{M} & \tilde{N} & \tilde{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ \Lambda & E \end{bmatrix} \Gamma : X \oplus X \oplus U \to Y \oplus V . \quad (10)$$

Для *доказательства* леммы устанавливается эквивалентность уравнений (1) и (7) при условии $u(t) = \tilde{u}(t)$. Тогда при совпадении начальных условий $x_0 = \tilde{x}_0$ в (3) и (9) совпадают состояния $x(t) = \tilde{x}(t)$. Непосредственно проверяется, что совпадают выходы $v(t) = \tilde{v}(t)$ в (2) и (8).

Теорема. Предположим, в регулярной системе Φ (1)-(3) с оператором коэффициентов Γ (5) совпадают размерности $dim U = dim V$ и пересечение $H_0 = KerF \cap KerK$ аннуляторов операторов F, K тривиально:

$$H_0 = KerF \cap KerK = \{0\}. \quad (11)$$

Тогда существует эквивалентная система $\tilde{\Phi}$ (7)-(9) с блочным оператором коэффициентов (10), в которой блок $\tilde{K}: U \to V$ имеет обратный $\tilde{K}^{-1}: V \to U$, и существует ее декомпозиция $\tilde{\Phi} = \Phi_1 \otimes \Phi_2$. Если совпадают пространства $U = V$ входов и выходов, то существуют эквивалентная система $\tilde{\Phi}$ (7)-(9) с $\tilde{K} = E$ и ее декомпозиция $\tilde{\Phi} = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ с единичными операторами при управлениях в выражениях для выходов систем Φ_1, Φ_2.

Доказательство. Эквивалентную систему $\tilde{\Phi}$ выбираем согласно приведенной лемме. Из формулы (10) следует конструкция оператора $\tilde{K}: U \to V$:

$$\tilde{K} = K - \Lambda F . \quad (12)$$

Покажем, что линейный оператор $\Lambda: Y \to V$ в (12) можно выбрать так, чтобы обеспечить существование обратного оператора $\tilde{K}^{-1}: V \to U$.

Согласно ортогональным разложениям пространств

$$U = Im F^* \oplus KerF,\ V = Im K \oplus KerK^*,\ Y = Im F \oplus KerF^*$$

операторы $K: U \to V$, $F: U \to Y$ и $\Lambda: Y \to V$ исходной системы Φ имеют блочный вид:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где существует обратный оператор $F_0^{-1}: Im F \to Im F^*$. С помощью (13) получаем блочный вид оператора $\tilde{K}$ (12):

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{11} - \Lambda_1 F_0 & K_{12} \\ -\Lambda_3 F_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

В силу (11) ядро оператора $K_{12}: KerF \to Im K$ тривиально и найдутся блоки $\tilde{K}_1: Im F^* \to Im K$, $\tilde{K}_2: Im F^* \to KerK^*$ такие, что оператор

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & K_{12} \\ \tilde{K}_2 & 0 \end{bmatrix}: U \to V$$

имеет обратный оператор $S^{-1}: V \to U$. Если у оператора Λ в (13) выбрать блоки $\Lambda_1 = (K_{11} - \tilde{K}_1)F_0^{-1}$ и $\Lambda_3 = -\tilde{K}_2 F_0^{-1}$, то оператор $\tilde{K}$ (14) принимает вид $\tilde{K} = S$. Следовательно, существует обратный оператор $\tilde{K}^{-1}: V \to U$. Таким образом, искомая эквивалентная система $\tilde{\Phi}$ построена и теорема доказана.

Замечание. Если условие (7) не выполнено, то можно изменить пространство управлений U исходной системы Φ так, чтобы в новой системе это условие выполнялось, а также не изменялись операторы A, B, M, N, состояние и выход системы. Понятно, что в качестве нового пространства управлений можно выбрать прямое дополнение в U к подпространству H_0.

IV. Иллюстративный пример радиотехнической системы

Проиллюстрируем полученные результаты на примере системы, которая возникает при описании переходных режимов фильтра нижних частот на рис. 2.

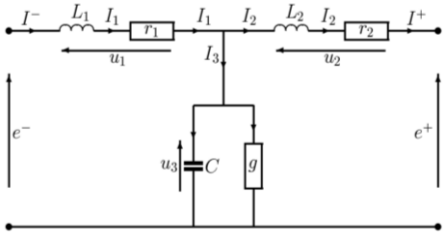

Рис. 2. Четырехполюсный фильтр.

Комбинируя уравнения Кирхгофа и колебаний элементов цепи, получим систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}(L_1 I_1) + r_1 I_1 + u_3 = e^-,\ I_1 = I^-,\ \frac{d}{dt}(C u_3) + I_2 + g u_3 = I^-,$$

$$e^+ = -\frac{d}{dt}(L_2 I_2) - r_2 I_2 + u_3,\ I^+ = I^- - \frac{d}{dt}(C u_3) - g u_3 .$$

Эти уравнения записываются в векторно-матричной форме (1)-(2), если ввести векторы управления (входа) u, выхода v, состояния x и матрицы A,B,F,M,N,K как

$$u=\begin{pmatrix} e^- \\ I^- \end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix} e^+ \\ I^+ \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 0 & -r_2 & 1 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве пространств состояний X, образов Y, входов U, выходов V выбираем $X=Y=\mathbf{R}^3$, $U=V=\mathbf{R}^2$. Матрицы записаны в канонических базисах указанных пространств. Матрица K необратима, условие (11) выполняется. В силу теоремы можно перейти к эквивалентной системе $\tilde{\Phi}$ с обратимой матрицей $\tilde{K}$. Переход к эквивалентной системе осуществим с помощью леммы, в которой в качестве матриц Q и Λ выберем следующие:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эквивалентная система $\tilde{\Phi}$ задается с помощью блочного оператора $\tilde{\Gamma}$ (10), в котором

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g \\ r_1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \tilde{F}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} -L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C \end{pmatrix},\ \tilde{N}=\begin{pmatrix} -r_1 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix},\ \tilde{K}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $\tilde{K}$ обратима. Для системы $\tilde{\Phi}$, описывающей переходные режимы фильтра на рис. 2, условия теоремы 2 о декомпозиции из [7] выполнены. Поэтому существуют подсистемы Φ_1,Φ_2 такие, что имеет место декомпозиция $\tilde{\Phi}=\Phi_1\otimes\Phi_2$. Система Φ_1 имеет одномерные пространства состояний и образов

$$X_1=Y_1=Lin\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

а система Φ_2 – двухмерные пространства состояний и образов $X_2=Y_2=Lin\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Двухмерные пространства входов и выходов этих систем совпадают: $U_1=V_1=U_2=V_2=U=V=\mathbf{R}^2$.

В канонических базисах матричные коэффициенты систем Φ_1,Φ_2 получены в формуле (35) в статье [7]. Система управления Φ_2 в свою очередь также допускает декомпозицию $\Phi_2=\Phi_{21}\otimes\Phi_{22}$ на одномерные системы согласно теореме 2 из [7] с пространствами состояний и образов $X_{21}=Y_{21}=Lin\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $X_{22}=Y_{22}=Lin\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Вид матричных коэффициентов систем Φ_{21},Φ_{22} приведен в формуле (36) из [7]. В результате трехмерная система управления $\tilde{\Phi}$ допускает декомпозицию в цепочку трех одномерных систем $\tilde{\Phi}=\Phi_1\otimes\Phi_{21}\otimes\Phi_{22}$. Эти три системы $\Phi_1,\Phi_{21},\Phi_{22}$ описывают переходные режимы трех четырехполюсников, изображенных в соответствующем порядке на рис. 3. Четырехполюсники содержат лишь по одному инерционному элементу L_1,C,L_2 соответственно. Их каскадное соединение дает исходный четырехполюсник, изображенный на рис. 2.

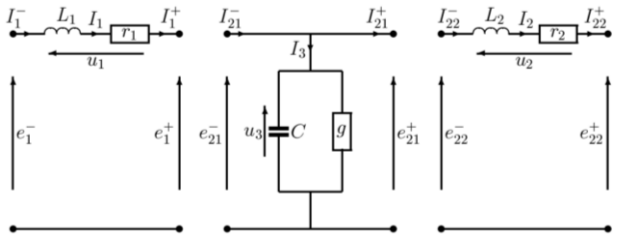

Рис. 3. Четырехполюсники, реализующие звенья декомпозиции $\Phi=\Phi_1\otimes\Phi_{21}\otimes\Phi_{22}$.

ЛИТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, Очерки по математической теории систем, М.: Мир, 1971.

[2] D.J. Bender, A. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 8, pp. 672-688, 1987.

[3] G.R. Duan, Analysis and Design of Descriptor Linear Systems, New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010.

[4] Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, "Об оптимальном управлении переходными процессами в электрических цепях", *Радиоэлектроника и информатика*, N 1, с. 3-7, 2016.

[5] L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, A.A. Chikrii, "On a differential game in an abstract parabolic system", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 293 (Suppl. 1), pp. 254-269, 2016.

[6] L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, "Optimal control of undamped Sobolev-type retarded systems" *Mathematical Notes*, vol. 102, no. 3, pp. 297-309, 2017.

[7] Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенец, "Последовательные композиция и декомпозиция дескриптрных систем управления", *Проблемы управления и информатики, Т. 50, № 5, с. 5-18, 2018.*

[8] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, М.: Наука, 1966.