



РАСПОЗНАВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ НА МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

ЗАЛЕССКАЯ Е.В., КИРИЧЕНКО Л.О.

Рассматриваются качественные методы распознавания различных типов хаотических колебаний, возмущающих матрицу переходных вероятностей марковского процесса. Приводятся результаты численных исследований поведения предельных вероятностей для разных типов хаотических процессов.

Многие реальные процессы в технике, экономике, биологии и медицине в силу своей природы наделены так называемым марковским свойством, которое можно охарактеризовать так: будущее определяется настоящим. Важным направлением в теории марковских систем является исследование процессов, в которых имеет место стабилизация. Под стабилизацией понимается такое свойство процесса,

когда при $t \rightarrow t_0$ ($t_0 \leq \infty$) основные его характеристики принимают определенные значения. Для марковского процесса это означает, что существует набор стационарных вероятностей, к которым стремятся с течением времени соответствующие вероятности нахождения данного процесса в его состояниях. Такой процесс мы можем рассматривать как динамическую систему, имеющую устойчивую точку равновесия [1].

Пусть на матрицу P переходных вероятностей процесса с n состояниями, в общем случае зависящую от времени,

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

которая определяет эволюцию системы, действует возмущение $D(t)$. Тогда на каждом временном шаге матрица $P(t)$ будет иметь вид

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) + \Delta_{11}(t) & p_{12}(t) + \Delta_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) + \Delta_{1n}(t) \\ p_{21}(t) + \Delta_{21}(t) & p_{22}(t) + \Delta_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) + \Delta_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) + \Delta_{n1}(t) & p_{n2}(t) + \Delta_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) + \Delta_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

где $\forall i \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) + \Delta_{ij}(t) = 1$. На каждом временном

шаге t_k вектор безусловных вероятностей $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ возмущенной системы определяется как $p(t_k) = p(t_{k-1})P(t_{k-1})$ для заданного начального распределения $p(0)$.

Пусть фактором, возмущающим марковскую систему, является одна из компонент непрерывного во времени хаотического процесса

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)).$$

Хаос представляет особый тип поведения детерминированной системы в установившемся режиме. Хотя эволюция этой системы однозначно определяется динамическими законами, ее динамика является стохастической. В данной работе мы рассматриваем диссипативные хаотические системы, эволюция которых задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Фазовые траектории таких систем представляются в виде бесконечной, нигде не пересекающейся линии, причем при $t \rightarrow \infty$ траектория не покидает замкнутой области. Такие системы широко распространены в гидродинамике, механике, физике плазмы и т. д. [2].

Итак, мы наблюдаем эволюцию марковского процесса, на который воздействуют хаотические колебания, представленную в виде временной последовательности векторов:

$$p(t_k) = (p_1(t_k), p_2(t_k), \dots, p_n(t_k)).$$

На рис.1 показаны компоненты вектора $p(t)$ марковской системы размерностью $n=3$, на которую воздействует хаотический процесс. Прямые линии представляют собой стационарные вероятности невозмущенного процесса.

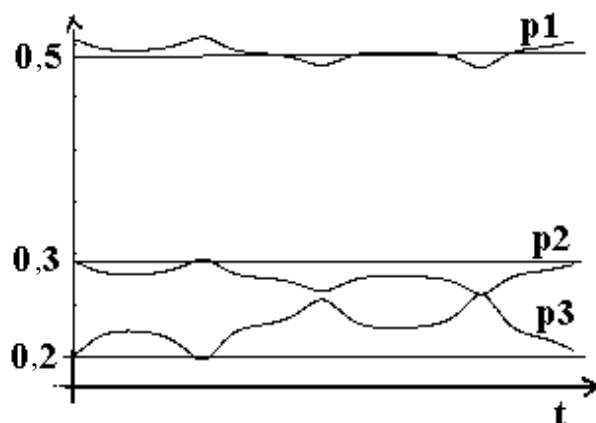


Рис. 1. Компоненты вектора $p(t)$ марковского процесса под воздействием хаотических колебаний

Ставится задача: определить, какой именно вид хаоса зашумляет наблюдаемый марковский процесс. В настоящей работе рассматриваются качественные методы распознавания на примерах хорошо известных хаотических аттракторов Лоренца, Ресслера и Чуа [2].

Рассмотрим одну примечательную особенность странного аттрактора, которая позволяет восстанавливать его на основе последовательности отсчетов,

полученных путем дискретизации во времени лишь одной компоненты его состояния..

Функция восстановления F определяется следующим образом. Рассмотрим аттрактор A , располагаемый в компактном многообразии M , имеющем размерность N . Указанная функция определяет отображение $F: M \rightarrow R^{2N+1}$ следующего вида:

$$F(x) = [\varphi_1(x), \varphi_1(x + \tau), \dots, \varphi_1(x + 2N\tau)],$$

где $\varphi_i(x + n\tau)$ — i -я компонента траектории системы; $\tau > 0$ — период дискретизации, выбираемый произвольным образом. Тогда, в общем, отображение F представляет собой некоторое вложение [3]. Пространство R^{2N+1} всегда оказывается достаточным для восстановления аттрактора. Однако такое восстановление может осуществляться и в пространстве, размерность которого меньше $2N+1$ [4].

Восстанавливать аттрактор можно практически при любом значении τ , однако все же существуют определенные ограничения. Если значение τ слишком мало, выполняется равенство $\varphi_i(x + k\tau) \approx \varphi_i(x + (k+1)\tau)$, и восстановленный аттрактор оказывается ограниченной областью вблизи диагонали пространства, в котором производится восстановление. Если же значение τ слишком велико, а система является хаотической, то значения $\varphi_i(x + k\tau)$ и $\varphi_i(x + (k+1)\tau)$ оказываются некоррелированными (в пределах точности, определяемой производимыми вычислениями), и структура аттрактора исчезает. Если же значение τ оказывается слишком близким к значению какого-либо периода системы, то та составляющая, которая характеризуется указанным периодом, при восстановлении будет представлена недостаточно полно.

На рис. 2 показан фазовый портрет аттрактора системы Чуа в плоскости переменных $x(t)$ и $y(t)$ (а) и восстановленный по значениям компоненты $x(t)$ при $T=0,35$ (б).

Рассмотрим временную реализацию какой-либо компоненты вектора безусловных вероятностей $\vec{p}(t)$ возмущенной системы, показанного на рис. 1. Подбирая значения T в зависимости от величины шага дискретизации системы и ее размерности, мы можем восстановить фазовый портрет возмущающего хаотического процесса. На рис. 3 показан фазовый портрет аттрактора Ресслера в плоскости переменных $x(t)$ и $y(t)$ (а) и восстановленный по значениям компоненты $p_1(t)$ вектора безусловных вероятностей зашумленного марковского процесса при значе-

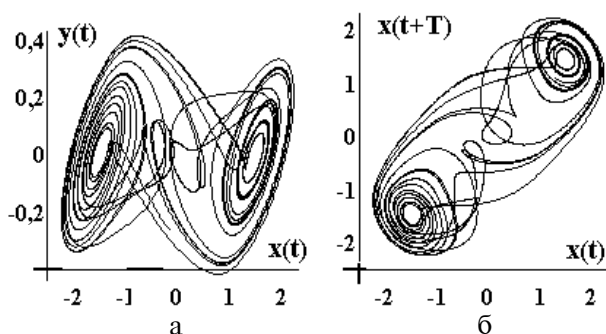


Рис. 2. Фазовый портрет аттрактора Чуа

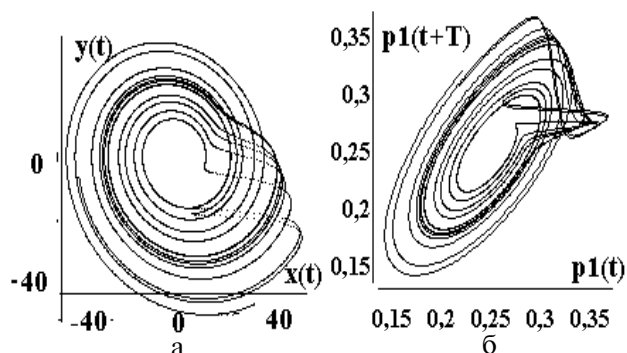


Рис. 3. Фазовый портрет аттрактора Ресслера

нии $\tau=0,75$ (б). Портреты построены по реализации длиной 50 временных единиц.

Наглядную информацию о свойствах динамической системы дает расчет спектра мощности реализации процесса. Расчеты фурье-спектра важны также и потому, что в физических экспериментах измерение спектра, как правило, типичная, а часто и единственная информация о системе. Обычно спектры мощности вычисляются непосредственной обработкой данных реализации с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье [5]. Чтобы уменьшить погрешность счета, вызванную конечностью реализации, можно применить методы введения специальных окон, однако для качественного анализа вполне можно ограничиться прямоугольными окнами, но обрабатывать при этом относительно длинные реализации. Более важным является необходимость усреднения результатов расчета спектров. Эта процедура адекватна расчету спектра по некоторому наперед заданному числу различных периодограмм одинаковой длительности с последующим усреднением результатов. В данной работе проводилось усреднение по 20 периодограммам, каждая из которых была построена по реализации длиной около 10 временных единиц.

На рис. 4, а показаны спектры мощности компоненты, $x(t)$ системы Лоренца (вверху) и компоненты $p_1(t)$ вектора безусловных вероятностей зашумленного марковского процесса (внизу). На рис. 4, б

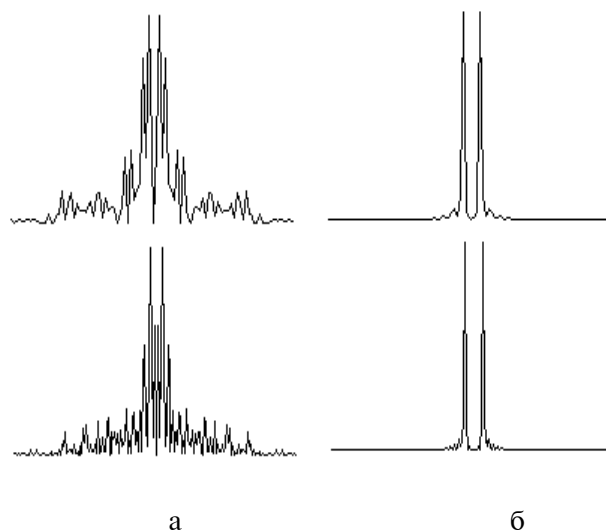


Рис. 4. Спектры мощности систем Лоренца и Ресслера

показаны соответствующие спектры для системы Ресслера.

Полную информацию о вероятностных свойствах хаотического процесса дает функция плотности распределения $p(X, t)$. Предполагая, что процесс $X(t)$ в системе стационарный и эргодический, можно значительно упростить нахождение этой функции. Вследствие стационарности исключается зависимость установившегося распределения вероятностей от времени, а предположение эргодичности дает возможность заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени вдоль одной реализации. Плотность распределения $p(X)$ стационарного эргодического процесса может быть вычислена как предел отношения среднего времени пребывания траектории системы в элементах объема фазового пространства, соответствующих некоторому дискретному разбиению [4].

На рис. 5 показана плотность распределения компоненты $x(t)$ системы Лоренца (а) и компоненты $p_1(t)$ вектора безусловных вероятностей возмущенного марковского процесса (б). Функция плотности распределения построена по реализациям длиной 100 временных единиц. Область изменения аргумента была разбита на 80 равных интервалов.

Подводя итоги, можно сказать, что “зашумленные хаосом” безусловные вероятности марковского процесса приобретают топологическую структуру, свойственную данному виду хаотической системы. Используя такие методы как построение фазового портрета, спектра мощности и плотности распределения, можно адекватно установить тип хаотического процесса.

Литература: 1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 283 с. 2. Мун Ф. Хаотические колебания. М.:

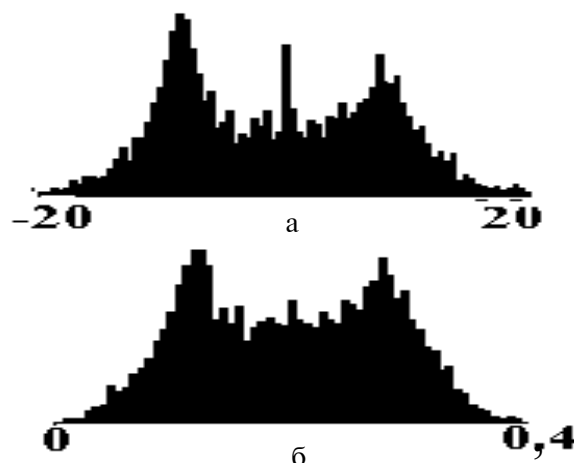


Рис. 5. Плотность распределения системы Лоренца

Мир, 1990. - 311 с. 3. Takens F. Detecting Strange Attractors in Turbulence // Lect. Notes in Math. Warwick: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366-381. 4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с. 5. О.В. Землянский, Л.О. Кириченко Хаос в нелинейной динамической системе с V-образной переходной характеристикой // Радиоэлектроника и информатика, 1998. №2. С.66-68.

Поступила в редколлегию 12.12.1998

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Буц В.А.

Залесская Евгения Викторовна, студентка ХТУРЭ. Научные интересы: марковские процессы. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.44-68-07.

Кириченко Людмила Олеговна, аспирантка кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: хаотическая динамика и марковские процессы. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.44-68-07.

УДК 007.001.362; 681.327.12.001.362

РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ПУТЯТИН Е.П., ЯКОВЛЕВА Е.В., ЛЮБЧЕНКО В.А.

Исследуется проблема разложения матрицы центроаффинного преобразования в суперпозицию простых геометрических преобразований. Полученные разложения могут быть использованы для решения задачи нормализации изображений путем перехода к методам одномерной нормализации, что повышает ее эффективность.

Как известно, основной задачей обработки изображений является их распознавание. Но перед тем, как непосредственно заняться распознаванием, необходимо привести интересующее изображение к удобному для распознавания виду. Так, если существует вероятность того, что изображение было подвергнуто действию групп геометрических преобразований, то сразу же после сегментации следует его нормализовать. Под нормализацией понимается процедура компенсации геометрических преобразований, связывающих эталонные и реальные изображения. Множество геометрических преобразований, формирующих разницу между эталоном и реальным

изображением, как правило, образует группы преобразований [1].

Обычно при обработке реального изображения заранее не известно, каким геометрическим преобразованием оно могло подвергаться. Поскольку все простые геометрические преобразования и их комбинации содержат в себе аффинное преобразование, то будем предполагать, что исследуемое реальное изображение находится под воздействием аффинной группы преобразований G_a . Компенсацию смещений осуществить довольно просто. Например, можно вычислить центр тяжести исследуемого изображения, а затем провести операцию центрирования, совместив центр тяжести изображения с геометрическим центром поля зрения [1]. После центрирования исследуемое изображение будет находиться под действием только центроаффинной группы G_a^c , которая описывается вещественной квадратной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$.

Таким образом, чтобы нормализовать исследуемое изображение, необходимо определить заранее неизвестные параметры центроаффинного преобразования, после чего процедура нормализации будет заключаться в применении обратного центроаффинного отображения, описываемого матрицей A^{-1} .

Для нахождения параметров центроаффинной матрицы предлагается найти разложение матрицы A в