ПРО ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ОБЛАСТЯХ СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Юхименко В. Є.
Науковий керівник – к.ф.-м.н., проф. Колосова С. В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057)702-14-36)
e-mail: vladyslav.yukhymenko@nure.ua

The paper deals with the question of the existence, uniqueness and the possibility of constructing successive approximations to the solution of one problem on the choice of population migration model in genetics, the mathematical model of which is the Dirichlet boundary value problem for a nonlinear elliptic equation. To solve this problem, the Green's quasifunction method is used, which allows one to find approximate solutions. Conditions are obtained that must satisfy the parameters included in the statement of the problem so that it is possible to construct successive approximations to a positive solution.

Розглянемо задачу про вибір моделі міграції популяції у генетиці, математичною моделлю якої є наступна крайова задача:

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q \ \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$
$$u > 0, u\big|_{\partial\Omega} = 0\ (\lambda > 0).$$

Параметр q може бути додатним або від'ємним [1].

Задачі (1) у класі функцій $C(\Omega)$ відповідає еквівалентне нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x) = \lambda \int_\Omega G(x,s) f(s,u(s))ds, \qquad (2)$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω, $x = (x_1,...,x_n)$, $s = (s_1,...,s_n)$ [2]. Однак, побудова функцій Гріна у замкненому вигляді можлива лише деяких достатньо простих областей. Якщо функція Гріна невідома або має складний вигляд, пропонуємо застосувати метод квазіфункцій Гріна [3], який дозволяє відшукати наближений розв'язок задачі (1). Вихідну задачу (1) на класі функцій $W_2^1(\Omega)$ зводимо до інтегрального рівняння

$$u(x) = \lambda \int_\Omega G(x,s) f(s,u(s))ds + \int_\Omega u(s) K(x,s)ds, \qquad (3)$$

де для випадку $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ маємо $G_{кв}(x,s) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\ln\dfrac{1}{r} - q(x,s)\right]$,

$$q(x,s) = -\frac{1}{2}\ln\left[r^2 + 4\omega(x)\omega(s)\right],\ r = |x-s| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - s_i)^2},$$

$$K(x,s) = -\frac{1}{2\pi}\triangle_s q(x,s),$$

$\omega = 0$ - нормалізоване до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$, $\omega > 0$ $\forall x \in \Omega$, $\omega = 0$ на $\partial\Omega$, $W_2^1(\Omega)$ - простір функцій, що дорівнюють нулю на межі та мають квадратично сумовні в Ω узагальнені похідні першого порядку. Застосовуючи до рівняння (3) метод послідовних наближень [4], зведемо його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь

$$u_m(x) - \int_\Omega u_m(s) K(x,s)\,ds = \int_\Omega G_{\kappa e}(x,s) f\left(s, u_{m-1}(s)\right) ds, \tag{4}$$

$$m = 2,3,\ldots .$$

Наближений розв'язок кожного з рівнянь (4) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна [4,5] шукаємо у вигляді

$$u_{mk}(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i^{(m)} \varphi_i(x), \tag{5}$$

$\varphi_i(x)$ - координатні функції, $C_i^{(m)}$, $i = 1,2,\ldots,k$, $m = 2,3,\ldots$- розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k} C_i^{(2)} \left[\int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx - \int_\Omega\int_\Omega K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)\,dxds \right] =$$

$$= \int_\Omega\int_\Omega G\ (x,s) f\left[s, u_1,(s)\right] \varphi_j(s)\,dxds,\ j = 1,2,\ldots,\ m = 3,4,\ldots .$$

В якості першого наближення $u_1(x)$ можна взяти будь-яку сталу, наприклад, $u_1(x) = 0{,}05$.

Список використаних джерел:

1. G. A. Afrouzi, S. Khademloo. «Some numerical result on a convex nonlinear elliptic problem». Applied Mathematicies and Computation. 175(2006). P. 456-471
2. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: ГИФЛМ, 1962. – 394 с.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. -552 с.
4. Свирский И. В. Методы типа Бубнова-Галёркина и последовательных приближений. – М.: Наука, 1968. -199 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. -512 с.