

УДК 519.7



ИНСТРУМЕНТАРИЙ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

М.Ф. Бондаренко¹, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко², Н.В. Шаронова³

^{1, 2} ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

³ ХПИ, г. Харьков, Украина

Развивается метод аксиоматического описания разума человека, — метод сравнения или метод компараторной идентификации. Он позволяет излагать теорию интеллекта дедуктивным способом, исходя исключительно из физически наблюдаемых фактов. Обнаруживаемые в экспериментах в соответствии с этим методом закономерности поведения испытуемого записываются в виде системы логических уравнений.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Данная статья является продолжением прежних работ авторов в области теории интеллекта. В предыдущих работах [1–3] дана характеристика теории интеллекта как новой научной области, разработаны математические и технические средства теории интеллекта, обсуждены проблемы и перспективы ее развития, описан метод теории интеллекта и дан обзор стоящих перед нею задач.

В данной статье мы приступаем к изложению конкретных достижений теории интеллекта. В качестве образца при разработке теории интеллекта мы принимаем современную физику, которая, подобно теории интеллекта, имеет две стороны — формальную и содержательную. Как формальное учение физика — это опытная наука, изучающая законы природы и выражающая их в виде уравнений.

Необходимость рассматривать теорию интеллекта как формальное учение обусловлена тем, что она нуждается в особом математическом языке, который недостаточно развит в имеющихся разделах математики. Поэтому теория интеллекта, наряду с содержательным изучением разума человека, вынуждена также разрабатывать необходимый ей формальный аппарат. В этом теория интеллекта не уникальна. Так, потребности небесной механики породили математический анализ, учение о логических способностях человека стимулировало развитие исчисления предикатов.

1. Компараторная идентификация — метод теории интеллекта

Возможность излагать теорию интеллекта дедуктивным способом, исходя исключительно из физически наблюдаемых фактов, основывается на развитом нами методе аксиоматического описания разума человека. Это метод — сравнения или метод компараторной идентификации. Сущность метода состоит в том, что испытуемый (человек, интеллект которого исследуется) в специально поставленных опытах своими физическими реакциями формирует значения некоторых предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$.

В этих опытах выявляются свойства предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$, которые формально записываются в виде логических уравнений, связывающих предикатные переменные $X_1, X_2, \dots, X_r$. Некоторые из этих уравнений используются в роли аксиом или исходных постулатов теории интеллекта. Из аксиом, как из уравнений, находятся значения предикатных переменных $X_1, X_2, \dots, X_r$, которыми являются соответственно предикаты $P_1, P_2, \dots, P_r$.

Внутренняя структура найденных предикатов характеризует те или иные детали механизма интеллекта человека.

Метод сравнения впервые использовал Ньютон [4] при физическом изучении цветового зрения человека. Действуя в роли испытуемого, он наблюдал на полях сравнения произвольные световые излучения x_1, x_2 и регистрировал равенство или неравенство их цвета. Формируемый таким способом предикат $P(x_1, x_2)$ впервые связал логическими уравнениями-аксиомами Грассман. Основываясь на постулатах (законах) Грассмана, Шредингер впервые построил дедуктивную теорию цветового зрения человека.

При изучении человеческого интеллекта методом сравнения исследователь воздействует на органы чувств испытуемого физическими сигналами (стимулами) $x_1, x_2, \dots, x_n$, порождающими в его сознании определенные субъективные переживания (состояния) $y_1, y_2, \dots, y_n$. Предполагается, что состояния $y_1, y_2, \dots, y_n$ однозначно зависят от соответствующих им стимулов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Это означает, что существуют функции

$$y_1 = f_1(x_1), y_2 = f_2(x_2), \dots, y_n = f_n(x_n).$$

В опытах на испытуемом стимулы $x_1, x_2, \dots, x_n$ берутся из четко очерченных исследователем множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$, так что всегда $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$.

Множества $A_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ исследователь выбирает произвольно, по своему усмотрению, исходя из тех научных задач, которые он перед собою ставит. Предполагается, что каждый из стимулов $x_i \in A_i$ порождает вполне определенное состояние y_i . Множество всех значений функции $y_i = f_i(x_i)$,

заданной на множестве A_i , обозначаем символом B_i . Таким образом, каждая из функций f_i представляет собою сюръекцию, отображающую множество A_i на множество B_i . Функции f_i характеризуют способность испытуемого реагировать на внешние предметы соответствующими им субъективными состояниями.

Исследователь дает испытуемому задание, которое тот должен выполнить в ходе опыта. В задании указывается некоторое отношение L , связывающее состояния $y_1 \in B_1, y_2 \in B_2, \dots, y_n \in B_n$. В каждом опыте исследователь формирует в сознании испытуемого определенные состояния $y_1, y_2, \dots, y_n$, предъявляя ему соответствующие им стимулы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если для этих состояний отношение L выполняется, то испытуемый должен отреагировав ответом $\xi = 1$, если не выполняется, то ответом $\xi = 0$. Исполняя задание, испытуемый реализует предикат $\xi = L(y_1, y_2, \dots, y_n)$, соответствующий отношению L . Предикат L характеризует действие механизма сознания испытуемого, сравнивающего состояния $y_1, y_2, \dots, y_n$ в соответствии с полученным заданием. Именно эта операция сравнения дает имя методу компараторной идентификации (от английского слова compare - сравнивать).

Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$ характеризует физически наблюдаемое поведение испытуемого, выполняющего задание исследователя и реагирующего на стимулы $x_1, x_2, \dots, x_n$ ответом $\xi = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Задача теории интеллекта состоит в том, чтобы из свойств предиката P , обнаруживаемых в опытах на испытуемом, извлечь внутреннюю структуру сигналов $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$; вид функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ и вид предиката L . Эта задача допускает обобщение на случай r предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$. В общем случае испытуемый получает r заданий, которые выполняет поочередно для различных наборов входных сигналов.

Обнаруживаемые в экспериментах закономерности поведения испытуемого записываются в виде системы логических уравнений (условий):

$$\begin{aligned} P_1(X_1, X_2, \dots, X_r) &= 1, \\ P_2(X_1, X_2, \dots, X_r) &= 1, \\ &\dots \\ P_r(X_1, X_2, \dots, X_r) &= 1, \end{aligned} \quad (1)$$

связывающих между собою предикатные переменные $X_1, X_2, \dots, X_r$. Символами $P_1, P_2, \dots, P_r$ обозначены предикаты от предикатов $X_1, X_2, \dots, X_r$. Предикат $X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) (j \in \{1, 2, \dots, r\})$ задан на декартовом произведении $A_{1j} \times A_{2j} \times \dots \times A_{nj}$. Имеется в виду, что решение $X_1 = P_1, X_2 = P_2, \dots, X_r = P_r$ удовлетворяет системе уравнений (1).

Значения аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$ в экспериментах выступают поначалу как абстрактные элементы, внутренняя структура

ра которых неизвестна. Эта структура извлекается дедуктивными приемами из условий (1). Из них же извлекается внутренняя структура предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$, которая складывается из внутренней структуры сигналов $y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}$, функций $f_{1j}, f_{2j}, \dots, f_{nj}$ и предиката L_j для каждого из предикатов

$$\begin{aligned} P_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &= L_j(f_{1j}(x_1), f_{2j}(x_2), \dots, f_{nj}(x_n)) = \\ &= L_j(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}). \end{aligned}$$

Теория интеллекта как формальное учение строится следующим образом. Имеется универсум элементов U , в роли которого используется совокупность всевозможных стимулов, которые исследователь может предъявить испытуемому. Из элементов универсума U исследователь образует множества $A_{1j} \times A_{2j} \times \dots \times A_{nj}$, сообразуясь с поставленной конкретной задачей изучения той или иной стороны интеллекта человека. На декартовых произведениях $A_{1j} \times A_{2j} \times \dots \times A_{nj}$ определены предикаты P_j , которые интерпретируются как поведение испытуемого, выполняющего те или иные задания исследователя.

Вводя предикатные переменные $X_1, X_2, \dots, X_r$, связываем их логическими уравнениями (1). Содержательно эти уравнения выступают в роли исходных постулатов теории интеллекта. Из них, как из аксиом, дедуктивно выводятся зависимости, характеризующие внутреннюю структуру элементов универсума U и предикатов $P_1, P_2, \dots, P_r$. Задачей теории интеллекта как содержательного учения является формулировка и экспериментальная проверка ее постулатов, в роли которых выступают уравнения (1).

2. Множества

Изложенную выше программу исследований невозможно выполнить без достаточно развитого математического языка. Прежде всего, необходим формальный язык, на котором можно было бы записывать предикаты, реализуемые испытуемым в экспериментах. Далее, надо располагать языком для записи уравнений, выражающих свойства этих предикатов. Кроме того, необходимо иметь формальные средства для описания внутренней структуры стимулов, предъявляемых испытуемому, и состояний, переживаемых им, а также внутренней структуры предикатов, реализуемых испытуемым. Наконец, необходимо располагать математическими средствами извлечения из свойств предикатов их внутренней структуры. Фундаментом для разработки искомого формального языка служат понятия множества и отношения, которые рассматриваются в этом и следующем параграфах.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — различные предметы. Их совокупность называется множеством. Множества обычно будем обозначать заглавными латинскими буквами. Предметы $a_1, a_2, \dots, a_k$, входящие в состав

множества, называются его элементами. Элементы, как правило, будут обозначаться нами строчными латинскими буквами. Множества могут отличаться друг от друга числом k и составом входящих в них элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$. Для записи множества будем использовать перечень всех его элементов, заключенный в фигурные скобки: $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Множества можно строить не только из элементов, но и из множеств, например $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$. Такие множества называются системами множеств.

Элементы в множестве неупорядочены, поэтому порядок перечисления элементов в записи множества не имеет значения. В записи множества допускается повторение одних и тех же элементов, однако от этого само множество не меняется, поскольку в нем нет одинаковых элементов. Если символы a и b обозначают один и тот же элемент, то говорят, что элементы a и b равны и пишут $a = b$. В противном случае пишут $a \neq b$. Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они равны, и пишут $A = B$. Если ложно, что $A = B$, то пишут $A \neq B$.

Только что рассмотренные множества называются конечными. Число элементов в них может принимать любое натуральное значение $k = 0, 1, 2, \dots$. При $k = 0$ получаем пустое множество $\emptyset$, не содержащее ни одного элемента. При $k = 1$ получаем одноэлементные множества. Можно также рассматривать бесконечные множества, для которых значение k не существует. Примерами бесконечных множеств могут служить счетное множество, составленное из всех натуральных чисел, и континуальное множество всех вещественных чисел. Мощность континуального множества больше мощности счетного множества. Существуют множества, мощность которых превышает мощность континуума, например, множество всех вещественных функций.

Для бесконечного множества роль числа его элементов выполняет мощность множества. Два множества A и B называются равномощными, если каждому элементу множества A можно поставить в соответствие свой элемент множества B и наоборот. Под мощностью конечного множества понимается число его элементов. Совокупность всех предметов, являющихся элементами всевозможных множеств, которые рассматриваются в конкретной задаче (рассуждении, исследовании, теории), называется универсальным множеством или универсумом этой задачи и обозначается символом U . Можно объединять в одном универсуме вместе с элементами также и множества, образованные из этих элементов. Полагают, что в таком универсуме множества отличаются от элементов, в частности $a \neq \{a\}$.

Если элемент a входит в состав множества A , то говорят, что a принадлежит A и пишут $a \in A$.

Запись $a \in A$ или $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A . Запись $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ означает, что $a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A$. В роли элементов множества можно использовать любые элементы универсума U . Каждый элемент любого множества, рассматриваемого в какой-либо задаче, должен быть элементом универсума этой задачи. Отношение $\in$ называется принадлежностью элемента множеству.

Отношения принадлежности элемента множеству и равенства элементов связаны законом Лейбница: для всех a и b $a = b$ в том и только в том случае, когда $a \in A$ равносильно $b \in A$ при любом A . Отношения принадлежности элемента множеству и равенства множеств связаны законом объемности или экстенциональности: для всех A и B $A = B$ в том и только в том случае, когда $a \in A$ равносильно $a \in B$ при любом a .

Множество A называется подмножеством или частью множества B , а множество B — надмножеством множества A , если каждый элемент множества A принадлежит также и множеству B . В этом случае говорят, что множество A включено в множество B и пишут $A \subseteq B$. В роли множеств элементов можно использовать любые подмножества универсума U . Каждое множество, рассматриваемое в какой-либо задаче, должно быть подмножеством универсума этой задачи: $A \subseteq U$ (2) для любого A . Каждый элемент, фигурирующий в задаче, должен принадлежать универсуму этой задачи:

$$a \in U \quad (3)$$

для любого a .

Пустое множество является подмножеством любого множества:

$$\emptyset \subseteq A \quad (4)$$

для любого A .

Отношение $\subseteq$ называется включением множеств. Оно рефлексивно:

$$A \subseteq A \quad (5)$$

для любого A ; антисимметрично: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ равносильно $A = B$ для любых A и B ; транзитивно: $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ влечет $A \subseteq C$ для любых A, B, C . Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называют собственным подмножеством или правильной частью множества B и пишут $A \subset B$. Отношение $\subset$ называется строгим включением множеств. Множества $\emptyset$ и A называются несобственными подмножествами множества A , все другие подмножества множества A — его собственными подмножествами.

Объединением или суммой $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B . Утверждение $a \in A \cup B$ равносильно утвержде-

нию $a \in A$ или $a \in B$ при любых a, A, B . Пересечением или общей частью $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех таких элементов, каждый из которых содержится как в множестве A , так и в множестве B . Утверждение $a \in A \cap B$ равносильно утверждению $a \in A$ и $a \in B$ при любых a, A, B .

Операции объединения и пересечения множеств идемпотентны: $A \cup A = A$ (6), $A \cap A = A$ (7) для любого A ; коммутативны: $A \cup B = B \cup A$ (8), $A \cap B = B \cap A$ (9) для любых A и B ; ассоциативны:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (10)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (11)$$

и дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (12)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (13)$$

любых A, B, C . Операции объединения и пересечения множеств подчиняются законам поглощения или элиминации:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad (14)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (15)$$

для любых A и B . В сочетании с универсальным и пустым множествами операции объединения и пересечения множеств обладают свойствами:

$$A \cup \emptyset = A, \quad (16)$$

$$A \cap U = A, \quad (17)$$

$$A \cup U = U, \quad (18)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (19)$$

при любом A .

Множества A и B называются непересекающимися, если $A \cap B = \emptyset$; в противном случае говорят, что эти множества пересекаются. Множество B называется дополнением множества A , если $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = U$. Для каждого множества A существует единственное дополнение $\bar{A}$. При любых a и A $a \in \bar{A}$ равносильно $a \notin A$. Операция дополнения $\bar{A}$ множества A подчиняется закону двойного дополнения: $\bar{\bar{A}} = A$ (20) для любого A ; законам де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (21)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (22)$$

для любых A и B . В сочетании с универсальным и пустым множествами операции объединения, пересечения и дополнения множеств обладают свойствами:

$$A \cup \bar{A} = U, \quad (23)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad (24)$$

для любого A ;

$$\bar{\emptyset} = U \quad (25)$$

$$\bar{U} = \emptyset \quad (26)$$

При любых A и B равенство $A \cup B = B$ равносильно включению $A \subseteq B$, справедливы включения

$$A \subseteq A \cup B, \quad (27)$$

$$A \cap B \subseteq B. \quad (28)$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} \quad (29)$$

Система всех подмножеств универсума U вместе с заданными на ней операциями дополнения, объединения и пересечения множеств, называется алгеброй множеств. Соотношения (2) – (26) называются основными тождествами алгебры множеств.

Любое множество M , содержащее элементы 0 и 1, на котором заданы две двухместные операции $+$ и $\cdot$ и одна одноместная $'$, удовлетворяющие при любых $a, b, c \in M$ равенствам

$$a + a = a, \quad (30)$$

$$a \cdot a = a, \quad (31)$$

$$a + b = b + a, \quad (32)$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (33)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (34)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad (35)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \quad (36)$$

$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c), \quad (37)$$

$$a + (a \cdot b) = a, \quad (38)$$

$$a \cdot (a + b) = a, \quad (39)$$

$$a + 0 = a, \quad (40)$$

$$a \cdot 1 = a, \quad (41)$$

$$a + 1 = 1, \quad (42)$$

$$a \cdot 0 = 0, \quad (43)$$

$$(a')' = a, \quad (44)$$

$$(a + b)' = a' \cdot b', \quad (45)$$

$$(a \cdot b)' = a' + b', \quad (46)$$

$$a + a' = 1, \quad (47)$$

$$a \cdot a' = 0, \quad (48)$$

$$\bar{0} = 1, \quad (49)$$

$$\bar{1} = 0 \quad (50)$$

называется булевой алгеброй. Соотношения (30) – (50) называются основными тождествами булевой алгебры.

Не все основные тождества булевой алгебры независимы друг от друга. Часть из них можно вывести из совокупности остальных. Так, из тождеств

$$\begin{aligned} a + a &= a, \\ a + b &= b + a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c), \\ (a')' &= a, \\ (a + b)' &= a' \cdot b', \\ a + (b \cdot b') &= a. \end{aligned} \quad (51)$$

выводятся все остальные основные тождества булевой алгебры. Тождество (51), отсутствующее в перечне основных тождеств булевой алгебры, вытекает из тождеств $a + 0 = a$ и $a \cdot a' = 0$. Только что приведенные семь тождеств (30), (32), (34), (36), (44), (46) и (51) логически независимы друг от друга, они называются аксиомами булевой алгебры. Любое непустое множество M , на котором заданы операции $+$, $\cdot$ и $'$, починающиеся этим аксиомам, является булевой алгеброй. Из аксиом булевой алгебры следует существование и единственность нуля $0 = a \cdot a'$ и единицы $1 = a + a'$.

Если в роли 0 принять множество $\emptyset$, в роли 1 — множество U , в роли операций $+$, $\cdot$, $'$ — соответственно операции $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ над множествами множества U , то булева алгебра превратится в одну из ее разновидностей — алгебру множеств. Операции $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ называют булевыми операциями над множествами. Аксиомы булевой алгебры теперь выполняют роль аксиом алгебры множеств, которые записываются в виде тождеств:

$$\begin{aligned} A \cup A &= B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \bar{\bar{A}} = A, \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, A \cup (B \cap \bar{B}) = A \end{aligned} \quad (52).$$

3. Отношения

Любая упорядоченная совокупность каких-либо элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется набором, кортежем или последовательностью. Элементы, образующие набор, называются его компонентами. Каждый компонент в наборе характеризуется своим местом, так что перемена местами различных элементов в наборе ведет к изменению всего набора. Наборы могут отличаться друг от друга числом компонентов n , а также составом или порядком расположения элементов в наборе. Для записи набора используется перечень всех его компонентов, заключенный в круглые скобки: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Наборы будем обозначать строчными латинскими буквами, например, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Места компонентов в наборе нумеруют слева направо. На разных местах в наборе могут стоять как различные, так и одинаковые элементы. Однокомпонентный набор называется унарным, двухкомпонентный — бинарным, трехкомпонентный — тернарным, n -компонентный — n -арным. Число компонентов в наборе называется его арностью. Бинарный набор называется упорядоченной парой или просто парой. Любой унарный набор (a) совпадает с элементом a . Если символы a и b обозначают один и тот же набор, то говорят, что наборы a и b равны и пишут $a = b$. Два набора $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ равны в том и только том случае, если $m = n$ и $a_i = b_i$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Наборы можно строить не только из элементов, но и из наборов по правилу

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2, \dots, a_m), (b_1, b_2, \dots, b_n)) &= \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned} \quad (52)$$

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — непустые подмножества универсума U . Образует набор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из элементов $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$. Множество $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ всех таких наборов называется декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. Можно говорить о принадлежности $a \in A$ набора a декартову произведению A . Если $n = 2$ и $A_1 = A_2 = A$, то декартово произведение называют декартовым квадратом или просто квадратом множества A и пишут $A \times A = A^2$. Декартово произведение $A \times A \times A = A^3$ называется кубом множества A . Декартово произведение $A \times A \times \dots \times A$, в записи которого множество A встречается n раз, называется n -й степенью множества A и записывается в виде A^n .

Операция $\times$ получения декартова произведения $A \times B$ из множества A и B ассоциативна:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad (54)$$

при любых A, B, C . В сочетании с операциями $\cup$, $\cap$ и $\bar{}$ операция декартова произведения множеств обладает свойствами:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D), \quad (55)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \quad (56)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad (57)$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \times (C \cup D) &= \\ &= (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D) \end{aligned} \quad (58)$$

для любых A, B, C, D . Отношения $\in$, $=$ и $\subseteq$ в сочетании с операциями $\times$, $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ обладают следующими свойствами: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ равносильно $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$; $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$ равносильно $A \times C \subseteq B \times D$; $A = B$ и $C = D$ равносильно

$A \times C = B \times D$; $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$; $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$ влечет $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$; $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ влечет $A = B = C = D$ для любых A, B, A, D .

Любое подмножество P декартова произведения A множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется отношением, заданным на $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Отношение $\emptyset$, не содержащее ни одного набора, называется пустым; отношение P , состоящее из всех наборов декартова произведения A , называется полным. Отношения, как и множества, будем обозначать заглавными латинскими буквами. При $n=1$ отношение называется унарным, при $n=2$ — бинарным, при $n=3$ — тернарным. При произвольном значении n отношение называется n -арным. Об n -арном отношении, заданном на A^n , для краткости говорят, что оно задано на A . Вместо выражения «отношение P , заданное на A » кратко говорят «отношение P на A ». Для задач, в которых фигурируют отношения на A , множество A играет роль универсума, а сами отношения — роль подмножеств этого универсума.

Можно говорить о принадлежности набора отношению, равенстве и включении отношений на A , а также об их объединении, пересечении и дополнении. Таким образом, на множестве всех отношений задана алгебра, являющаяся разновидностью булевой алгебры. Объединение отношений называют их дизъюнкцией, пересечение — конъюнкцией, дополнение — отрицанием отношения. Можно говорить о декартовом произведении $P \times Q$ отношений P и Q . Утверждение $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in P$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in Q$ равносильно утверждению $(a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n) \in P \times Q$ при любых $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_m \in A_m, b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, \dots, b_n \in B_n, P \subseteq A, Q \subseteq B$, где $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ и $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$.

Если набор принадлежит отношению P , то он называется веткором отношения P . Для бинарных отношений, кроме записи $(a, b) \in P$, употребляется равносильная ей запись U . Если $(a, b) \notin P$, то пишут $\bar{U}$. Бинарное отношение U , составленное из всех пар вида (a, a) , где $a \in U$, называется равенством или диагональным отношением, заданным на универсуме U . Для обозначения отношения D используется также символ $=$. Пары вида (a, a) называются диагональными. Отношение равенства рефлексивно: $a = a$ (59) для любого a ; симметрично: $a = b$ влечет $b = a$ для любых a, b ; транзитивно: $a = b$ и $b = c$ влечет $a = c$ для любых a, b, c . Отношение равенства можно задать не только на универсуме U , но и на любом его подмножестве A . В этом случае говорят о равенстве на A .

Отношение F , заданное на $A \times B$, называется функциональным, если оно удовлетворяет условию однозначности: для любых $a \in A$ и $b, c \in B$ aFb и aFc влечет $b = c$. Говорят, что функциональное

отношение F , заданное на $A \times B$, определяет соответствующую ему функцию или операцию f , действующую из множества A в множество B . Функции будем обозначать строчными латинскими или греческими буквами. Если для $a \in A$ найдется элемент $b \in B$ такой, что aFb , то функция f ставит в соответствие элементу a единственный элемент b . Этот факт записывают следующим образом: $b = f(a)$ или $b = fa$. Если же для $a \in A$ не существует элемента $b \in B$ такого, что aFb , то функция f не ставит в соответствие элементу a никакого элемента из множества B . В этом случае говорят, что функция f для элемента $a \in A$ не определена.

Функцию f можно определить, указывая соответствующее ей отношение F . Чтобы определение функции было логически безупречным (корректным), нужно доказать, что отношение F подчиняется условию однозначности. Такое доказательство называется проверкой корректности определения функции f . Отношение равенства D на A определяет функцию d , называемую тождественной. Она характеризуется свойством:

$$a = d(a) \quad (60)$$

для всех $a \in A$.

Если $b = f(a)$, то элемент $b \in B$ называется образом элемента $a \in A$, а элемент a — прообразом элемента b относительно функции f . Совокупность всех прообразов элемента b относительно функции f , содержащихся в множестве A , называется полным прообразом элемента b в A относительно функции f . Множество A называется областью отправления функции f , множество B — ее областью прибытия. Множество всех элементов $a \in A$, для каждого из которых существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $b = f(a)$, называется областью определения функции f . Множество всех элементов $b \in B$, для каждого из которых существует элемент $a \in A$, удовлетворяющий условию $b = f(a)$, называется областью значений функции f . Если область отправления функции f представляет собой декартово произведение $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, то говорят, что функция f n -местна.

Функция называется всюду определенной, если ее область определения совпадает с областью отправления, в противном случае она называется частичной. Будем говорить, что всюду определенная функция f заданная на $A \times B$, отображает множество A в множество B , и писать $f: A \rightarrow B$. Иногда для краткости всюду определенную функцию называют просто функцией. Всюду определенная функция называется сюръекцией, если ее область значений совпадает с областью прибытия. Будем говорить, что сюръекция, заданная на $A \times B$, отображает множество A на множество B . Гово-

рят, что сюръекция $f: A \rightarrow A$ отображает множество A на себя.

Всюду определенная функция f , заданная на $A \times B$ называется инъекцией, если для каждого $b \in B$ не существует более одного элемента $a \in A$, удовлетворяющего условию $b = f(a)$. Сюръективная и инъективная функция называется биекцией. Говорят, что биективная функция на $A \times B$ взаимно однозначно отображает множество A на множество B . Конечные области отправления и прибытия биекции состоят из одинакового числа элементов, а бесконечные — равномощны.

Бинарное отношение E на A называется эквивалентностью, если оно рефлексивно: aEa для любого $a \in A$; симметрично: aEb влечет bEa для любых $a, b \in A$; транзитивно: aEb и bEc влечет aEc для любых $a, b, c \in A$. Отношение равенства D является эквивалентностью. Разбиением S множества A называется любая система непустых подмножеств множества A , таких что каждый элемент множества A принадлежит только одному из них. Множества, принадлежащие разбиению S , называются слоями или смежными классами разбиения S .

Каждой эквивалентности E на A можно поставить во взаимно однозначное соответствие разбиение S множества A , и наоборот, по следующему правилу: если aEb , то a и b помещаем в один слой разбиения S , если же $a \bar{E} b$, то в разные. Так, связанные эквивалентность E и разбиение S называются соответствующими друг другу. Равенству D на A соответствует разбиение множества A , состоящее из одноэлементных слоев.

Разбиение S , соответствующее эквивалентности E на A , называется фактор-множеством от A по E и обозначается $A \setminus E$. Сюръекция $f_E: A \rightarrow A \setminus E$, которая каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие содержащий его слой разбиения S , называется каноническим отображением A на $A \setminus E$. Каноническое отображение $f_E: A \rightarrow A \setminus E$ будет биекцией в том и только том случае, когда эквивалентность E совпадает с равенством D .

Пусть f — сюръекция, отображающая A на B . Определим на A эквивалентность E , полагая aEb в том и только той случае, когда $f(a) = f(b)$. Слои разбиения S , соответствующего эквивалентности E , представляют собой полные прообразы в A элементов множества B . Ставя в соответствие каждому элементу множества B его полный прообраз в A , получаем биекцию, отображающую B на $A \setminus E$. Эта биекция называется каноническим отображением B на $A \setminus E$. Эквивалентность E называется ядерной для функции f .

Бинарное отношение на множестве A называется квазипорядком, если оно рефлексивно и транзитивно. Частичным порядком называется

квазипорядок P , удовлетворяющий условию антисимметричности: aPb и bPa влечет $a = b$ для всех $a, b \in A$. Для частичного порядка будем использовать специальное обозначение $\leq$. Если $a \leq b$ и $a \neq b$, то будем писать $a < b$ и говорить, что a меньше b . Запись $a \leq b$ означает, что a меньше или равно b . Элемент $a \in A$ называется наибольшим в A относительно частичного порядка $\leq$ на A , если $b \leq a$ для всех $b \in A$; наименьшим — если $a \leq b$. Элементы a и b множества A называются сравнимыми относительно частичного порядка $\leq$ на A , если $a \leq b$ или $b \leq a$. Частичный порядок $\leq$ на A называется линейным порядком на A , если любые $a, b \in A$ сравнимы относительно $\leq$. Множество, на котором задан частичный порядок, называется частично упорядоченным; линейный — линейно упорядоченным или цепью.

Бинарное отношение Q на $B \times A$ называется обратным к отношению P на $A \times B$, если оно удовлетворяет условию: aPb равносильно bQa для всех $a \in A$ и $b \in B$. Операция $*$, которая ставит в соответствие каждому отношению P на $A \times B$ обратное ему отношение P^* на $B \times A$, называется обращением отношения P . Произведением отношений P на $A \times B$ и Q на $B \times C$ называется отношение R на $A \times C$, удовлетворяющее условию: для любых $a \in A$ и $c \in C$ утверждение «существует $b \in B$, такое, что aPb и bQc » равносильно утверждению aRc . Операция $\circ$, которая ставит в соответствие отношениям P на $A \times B$ и Q на $B \times C$ их произведение $P \circ Q$ на $A \times C$, называется умножением отношений. Произведение $H = F \circ G$ функциональных отношений F и G соответствует функции $h = gf$, называемая суперпозицией функций f и g , соответствующих отношениям F и G . Если $xF \circ Gy$, то пишут $y = g(f(x)) = gf(x)$.

Алгеброй отношений на A называется множество всех бинарных отношений на A с заданными на нем операциями $\cup$, $\cap$, $\bar{}$, $\circ$ и $*$. В алгебре отношений справедливы все основные тождества булевой алгебры. Роль операций $+$, $\cdot$ и $'$ в алгебре отношений выполняют соответственно операции объединения, пересечения и дополнения отношений. Операции $\circ$ и $*$ подчиняются следующим тождествам:

$$(P^*)^* = P, \quad (61)$$

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R), \quad (62)$$

$$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*, \quad (63)$$

$$\overline{P^*} = (\overline{P})^*, \quad (64)$$

$$(P \cup Q)^* = P^* \cup Q^*, \quad (65)$$

$$(P \cap Q)^* = P^* \cap Q^*, \quad (66)$$

$$P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R), \quad (67)$$

$$(P \cup Q) \circ R = (P \circ R) \cup (Q \circ R), \quad (68)$$

которые, вместе с основными тождествами булевой алгебры, считаются основным тождествами в алгебре отношений. Аналог двух последних тождеств для операции $\cap$ неверен, вместо них имеют место включения

$$P \circ (Q \cap R) \subseteq (P \circ Q) \cap (P \circ R), \quad (69)$$

$$(P \cap Q) \circ R \subseteq (P \circ R) \cap (Q \circ R). \quad (70)$$

Символ P , Q и R обозначают произвольные бинарные отношения на A .

4. Предикаты

В этом подразделе описывается формальный язык — алгебра предикатов, с помощью которого можно математически выражать предикаты, реализуемые испытуемым (см. п. 1). Вначале рассмотрим алгебру логики, которую приходится использовать при введении алгебры предикатов. Введем множество $\Sigma = \{0, 1\}$. Символы 0 и 1 называются булевыми элементами. Символ 0 называется нулем или ложью, символ 1 — единицей или истиной. Переменная, заданная на множестве Σ , называется булевой. Булевы переменные будем обозначать строчными буквами греческого алфавита.

Одноместная операция $\beta = \bar{\alpha}$, отображающая множество Σ на себя и определяемая равенствами

$$\bar{0} = 1, \quad (71)$$

и

$$\bar{1} = 0, \quad (72)$$

называется булевым отрицанием. Двухместная операция $\sum = \{0, 1\}$, отображающая Σ^2 на Σ и определяемая равенствами

$$0 \vee 0 = 0, \quad (73)$$

$$0 \vee 1 = 1, \quad (74)$$

$$1 \vee 0 = 1, \quad (75)$$

$$1 \vee 1 = 1, \quad (76)$$

называется булевой дизъюнкцией или булевым сложением. Двухместная операция $\gamma = \alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, отображающая Σ^2 на Σ и определяемая равенствами

$$0 \wedge 0 = 0, \quad (77)$$

$$0 \wedge 1 = 0, \quad (78)$$

$$1 \wedge 0 = 0, \quad (79)$$

$$1 \wedge 1 = 1, \quad (80)$$

называется булевой конъюнкцией или булевым умножением.

Множество Σ , вместе с заданными на нем операциями $\bar{}$, $\vee$ и $\wedge$, называется алгеброй логики. Алгебра логики является разновидностью булевой алгебры. Роль операций $+$, $\cdot$ и $'$ в алгебре логики

выполняют соответственно операции $\vee$, $\wedge$ и $\bar{}$. В алгебре логики справедливы все основные тождества булевой алгебры. Функции, получаемые суперпозицией операций $\bar{}$, $\vee$ и $\wedge$, называются булевыми функциями. Булева функция

$$\alpha \supset \beta = \alpha \vee \bar{\beta} \quad (81)$$

называется импликацией, булева функция

$$\alpha \sim \beta = (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha) - \quad (82)$$

равнозначностью.

Предикатом P , заданным на U^n , называется любая функция $\zeta = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отображающая множество U^n в множество Σ . Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются предметными, а их значения — предметами. Если $n = 1$, то предикат P называется унарным, если $n = 2$ — бинарным, если $n = 3$ — тернарным. При произвольной значении n предикат называется n -арным. Если множество U конечно, то предикат P называется конечным, в противном случае — бесконечным. Предикат, равный единице для всех наборов значений своих аргументов, называется тождественно истинным; равный нулю — тождественно ложным. Обозначаем эти предикаты символами 1 и 0.

Дизъюнкцией или логическим сложением предикатов P и Q называется предикат $P \vee Q$, значения которого при любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$ определяются по формуле

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (83)$$

Конъюнкцией или логическим сложением предикатов $\sum = \{0, 1\}$ и Q называется предикат $\sum = \{0, 1\}$ со значениями

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (84)$$

Отрицанием предиката P называется предикат $\bar{P}$ со значениями

$$(\bar{P})(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (85)$$

В правой части равенств (83) и (85) знаки $\vee$, $\wedge$, $\bar{}$ обозначают булевы дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. В левой части тех же равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\bar{}$ обозначают операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов.

Множество всех n -арных предикатов, заданных на U^n , на котором определены операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, предикатов называется алгеброй n -арных предикатов на U . Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов называются базисными для алгебры предикатов. Алгебра предикатов при любом значении n является разновидностью булевой алгебры. В ней выполняются все основные тождества булевой алгебры. В алгебре предикатов роль элементов

0, 1 и операций $+$, $\bullet$ и $'$ выполняют соответственно тождественно ложный и тождественно истинный предикаты и операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов.

Предикат вида:

$$x_i^a = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = a, \\ 0, & \text{если } x_i \neq a \end{cases} \quad (86)$$

называются базисными для алгебры предикатов. Здесь $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a — любой элемент универсума U . Если универсум конечен и состоит из k элементов, то всего имеется kn различных базисных элементов. Алгебра предикатов полна в том смысле, что любой ее предикат можно представить в виде некоторой суперпозиции базисных операций, примененных к базисным элементам. Предикат x_i^a называется узнаванием предмета a по переменной x_i .

Для узнаваний предметов при любом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливы следующие тождества: закон истинности —

$$\bigvee_{a \in U} x_i^a = 1, \quad (87)$$

закон отрицания — для любого $a \in U$

$$\overline{x_i^a} = \bigvee_{\substack{b \in U \\ b \neq a}} x_i^b \quad (88)$$

закон ложности — для любых $a, b \in U$, если $a \neq b$, то

$$x_i^a x_i^b = 0 \quad (89)$$

Запись $\bigvee_{a \in U}$ обозначает операцию логического суммирования, выполняемую для всех a , принадлежащих универсуму U .

Если универсум конечен $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то только что приведенные тождества можно переписать в виде:

закон истинности — для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \dots \vee x_i^{a_k} = 1, \quad (90)$$

закон отрицания — для любых $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\overline{x_i^{a_j}} = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \dots \vee x_i^{a_{j-1}} \vee x_i^{a_{j+1}} \vee \dots \vee x_i^{a_k}, \quad (91)$$

закон ложности — для любых $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j, l \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $j \neq l$

$$x_i^{a_j} x_i^{a_l} = 0. \quad (92)$$

Пусть P — отношение, заданное на U^n . Предикат P , значения которого вычисляются по правилу

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin P \end{cases} \quad (93)$$

называется предикатом, соответствующим отношению P . Каждому отношению P на U^n соответствует свой предикат P на U^n и наоборот. Наличие такого взаимно однозначного соответствия между отношениями и предикатами дает возможность математически записывать любое отношение в виде некоторой формулы алгебры предикатов, по которой могут быть вычислены значения предиката, соответствующего этому отношению.

Например, отношению

$$P = \{(n, a, n, a), (m, a, m, a)\}$$

соответствует предикат P , значения которого определяется формулой $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^a x_4^a (x_1^n x_3^n \vee x_1^m x_3^m)$. Переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , фигурирующие в формуле, можно содержательно интерпретировать как имена первого, второго, третьего и четвертого мест элементов в наборах, образующих отношение P (считая слева направо). Запись $x_1 = n$, $x_2 = a$, $x_3 = n$, $x_4 = a$ означает, что в данном случае речь идет о наборе (п, а, п, а), на первом и третьем местах которого стоит буква п, а на втором и четвертом — буква а.

Любой предикат P , заданный на U^n , можно выразить следующей формулой алгебры предикатов

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad (94)$$

называемой совершенной дизъюнктивной нормальной формой предиката P (сокращенно СДНФ предиката). Запись в правой части равенства (94) означает, что ведется логическое суммирование по всем наборам предметов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, входящим в состав отношения P , соответствующего предикату P .

Декартову произведению $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq U$ соответствует предикат $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, значения которого определяются формулой

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1(x_1) A_2(x_2) \dots A_n(x_n). \quad (95)$$

Здесь A_i — предикат, соответствующий множеству A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), стоящему на i -м месте в декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n$. Его значения отыскиваются по формуле

$$A_i(x_i) = \bigvee_{a \in A_i} x_i^a \quad (96)$$

Если множество A_i конечно ($A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$), то значения соответствующего ему предиката определяются формулой

$$A_i(x_i) = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \dots \vee x_i^{a_k} \quad (97)$$

Выражение множеств A_i формулами (96) и (97) выявляет следующий важный факт: оказывается, что предикат $A_i(x_i)$, соответствующий множес-

тву A_i , описывает не только само это множество, но и его место в декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n$. Это место представлено переменной x_i . Таким образом, выражение множества A_i предикатом $A_i(x_i) = x_i^{a_1} \vee x_i^{a_2} \vee \dots \vee x_i^{a_k}$ характеризует множество более полно, чем запись $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Рассмотрим, к примеру, декартово произведение $A = M \times M$, где $M = \{a, b\}$. Множеству M , стоящему на первом месте в A , согласно (97) соответствует предикат $M(x_1) = x_1^a \vee x_1^b$. Множеству же M , стоящему на втором месте в A и имеющему то же число и тот же состав элементов, соответствует иной предикат $M(x_2) = x_2^a \vee x_2^b$.

Пусть P — отношение, заданное на декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n \in U$. Отношение P можно формально выразить любым предикатом P , заданным на U^n , который удовлетворяет условию: $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$; $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \setminus P$. За пределами области $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ значения предиката P можно выбрать произвольно. Факт задания отношения P на декартовом произведении A формально выражается системой уравнений $A_1(x_1) = 1, A_2(x_2) = 1, \dots, A_n(x_n) = 1$, ограничивающих значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ множествами $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пытаясь описать на языке алгебры предикатов отношение равенства D , заданное на U , мы обнаруживаем, что этому отношению соответствует не один предикат D , а целое семейство предикатов $D(x_i, x_j)$ ($i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$), зависящих от всевозможных пар аргументов. Таким образом, мы вынуждены различать отношения равенства в зависимости от того, на каких местах в n -компонентном наборе стоят элементы, связываемые данным отношением равенства.

Отношению равенства D , связывающему элементы, стоящие в n -компонентном наборе на D -м и D -м местах, соответствует предикат D , значения которого определяются формулой:

$$D(x_i, x_j) = \bigvee_{a \in U} x_i^a x_j^a. \quad (98)$$

Если универсум конечен ($U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$), то формулу (98) можно записать в виде

$$D(x_i, x_j) = x_i^{a_1} x_j^{a_1} \vee x_i^{a_2} x_j^{a_2} \vee \dots \vee x_i^{a_k} x_j^{a_k}. \quad (99)$$

Назовем множества однотипными, если соответствующие им предикаты зависят от одной и той же переменной. Пусть однотипным множествам A и B соответствуют предикаты $A(x_i)$ и $B(x_i)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Тогда объединению $A \cup B$ этих множеств соответствует предикат

$$(A \cup B)(x_i) = A(x_i) \vee B(x_i). \quad (100)$$

Пересечению $A \cap B$ множеств A и B соответствует предикат

$$(A \cap B)(x_i) = A(x_i) \wedge B(x_i). \quad (101)$$

Дополнению $\tilde{A}$ множества A соответствует предикат

$$(\tilde{A})(x_i) = \overline{A(x_i)}. \quad (102)$$

Мы видим, что объединение, пересечение и дополнение предикатов совпадает соответственно с их дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием (см. (83)-(85)). Точно так же объединению, пересечению и дополнению отношений отвечает дизъюнкция, конъюнкция и отрицание предикатов, соответствующих этим отношениям. Можно показать, что при таком определении операций $\cup$, $\cap$ и $\sim$ для множеств и отношений они будут удовлетворять всем основным тождествам булевой алгебры. Заметим, что пустому множеству $\emptyset$ соответствует предикат $\emptyset(x_i) = 0$ (103) для всех $x_i \in U$. Универсальному множеству U соответствует предикат $U(x_i) = 1$ (104) для всех $x_i \in U$. Точно так же пустому и полному отношениям соответствуют предикаты тождественно ложный и тождественно истинный.

5. Операции над предикатами

Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный предикат, заданный на U^n . Утверждение «Для всех x_i выполняется равенство $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1$ » связывает предикат некоторым унарным отношением, которое формально можно записать в виде равенства

$$\bigwedge_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1. \quad (105)$$

Здесь $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Выражение, стоящее в левой части равенства (105) можно понимать как некую операцию, отображающую множество всех предикатов, заданных на U^n , в себя. Называется эта операция квантором общности по переменной x_i и записывается в виде $\forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n))$. Символ $\forall$ читается «для всех». Таким образом:

$$\begin{aligned} \forall x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)) &= \\ &= \bigwedge_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (106)$$

Утверждение «Существует x_i , для которого выполняется равенство $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1$ » связывает предикат P другим отношением, которое формально выражается равенством

$$\bigvee_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1. \quad (107)$$

Операция, стоящая в левой части равенства (107) и отображающая множество всех предикатов, заданных на U^n , в себя, называется квантором су-

существования по переменной x_i . Она записывается в виде $\exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n))$. Символ $\exists$ читается «существует». Имеем:

$$\begin{aligned} \exists x_i (P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)) &= \\ = \bigvee_{x_i \in U} P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= 1. \end{aligned} \quad (108)$$

Кванторы общности и существования используются для формальной записи различных математических высказываний. При переводе на формальный язык слова “для всех” (или “для каждого”, “при любом” и т.п.) заменяются символом $\forall$, слова “существует” (“найдется”) — символом $\exists$; отношения, фигурирующие в высказывании, заменяются соответствующими им предикатами; слова “или”, “и” (запятая), “не” (“ложно, что”, “неверно, что”), “влечет” (“если — то”, “когда — тогда”), “равносильно” (“если и только если — то”, “тогда и только тогда — когда”, “в том и только том случае — если”) заменяются булевыми операциями $\vee, \wedge, \neg, \supset, \sim$.

Далее приведены примеры перевода математических утверждений на формальный язык:

1) «При любых

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

в том и только том случае, если

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n \text{ »:}$$

$$\begin{aligned} \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n ((A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \\ \sim A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n)); \end{aligned}$$

2) «Для каждого $a \quad a = a$ »: $\forall a D(a, a)$;

3) « $a = b$ равносильно $b = a$ для любых a, b »:

$$\forall a \forall b (D(a, b) \sim D(b, a));$$

4) « aEb и bEc влечет aEc для любых a, b, c »:

$$\forall a \forall b \forall c (E(a, b) E(b, c) \supset E(a, c));$$

5) «Для всех $a, b, c \quad aFb$ и aFc влечёт $b = c$ »:

$$\forall a \forall b \forall c (F(a, b) F(a, c) \supset D(b, c));$$

6) «Существует x такое, что для любого $y \quad xFy$ »:

$\exists x \forall y F(x, y)$. В целях сокращения числа скобок в формальных выражениях операция $\wedge$ принимается старшей по отношению к операции $\vee$, а операция $\vee$ — старшей по отношению к операциям $\supset$ и $\sim$. Аргумент квантора не заключается в скобки, если это не нарушает правильности понимания структуры формулы.

В математических текстах часто встречаются утверждения вида: «Для всех $x_i \in A \quad U$ » и «Существует $x_i \in A$ такой, что U ». Первое из них переводится на формальный язык следующим образом: $\forall x_i (A(x_i) \supset P(x_1, x_2, \dots, x_n))$, второе — $\exists x_i (A(x_i) \wedge P(x_1, x_2, \dots, x_n))$. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \forall x_i \in A P(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ = \forall x_i (A(x_i) \supset P(x_1, x_2, \dots, x_n)), \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \exists x_i \in A P(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ = \exists x_i (A(x_i) \wedge P(x_1, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (110)$$

Примеры перевода:

1) «Для любых $a \in A$ и $b, c \in B \quad aFb$ и aFc влечёт $b = c$ »:

$$\forall a \forall b \forall c (A(a), B(b) B(c) \supset (F(a, b) F(a, c) \supset D(b, c)));$$

2) « aEa для всех $a \in A$ »: $\forall a (A(a) \supset E(a, a))$;

3) «Для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такое, что aFb »: $\forall a \exists b (A(a) \supset B(b) F(a, b))$.

Перечислим наиболее употребительные тождества для кванторов: при любых A и B

$$\forall x \forall x A(x) = \forall x A(x), \quad (111)$$

$$\exists x \exists x A(x) = \exists x A(x), \quad (112)$$

$$\exists x \forall x A(x) = \forall x A(x), \quad (113)$$

$$\forall x \exists x A(x) = \exists x A(x), \quad (114)$$

$$\forall x A(x) = \forall y A(y), \quad (115)$$

$$\exists x A(x) = \exists y A(y), \quad (116)$$

$$\forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y), \quad (117)$$

$$\exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y), \quad (118)$$

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x), \quad (119)$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x), \quad (120)$$

$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}, \quad (121)$$

$$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}, \quad (122)$$

$$\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}, \quad (123)$$

$$\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}, \quad (124)$$

$$\forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) = \forall x A(x) \vee \forall y B(y), \quad (125)$$

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) = \exists x A(x) \wedge \exists y B(y). \quad (126)$$

В только что приведенных записях имеется в виду, что предикаты A и B — n -арные, и что их значения зависят от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для краткости записи символами x и y из общего перечня переменных указываются только переменные x_i и y_i при произвольно фиксированных $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Переменная x_i предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ называется фиктивной или несущественной, если значения предиката P не зависят от значений этой переменной. Формально понятие фиктивности переменной x_i предиката P определяется следующим условием:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{i-1} \forall x'_i \forall x''_i \forall x_{i+1} \dots \forall x_n \left(P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \sim P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right). \quad (127)$$

Действуя квантором общности или существования по переменной x_i на любой предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получаем в результате предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, у которого переменная x_i фиктивна. Если у предиката P переменная x_i фиктивна, то применение к P квантора $\forall x_i$ или $\exists x_i$ этот предикат не меняет. Если переменная x у предиката B фиктивна, то для любых A и B

$$\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B, \quad (128)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B. \quad (129).$$

Кванторы общности и существования можно брать не только по предметам, но и по предикатным переменным. Такая возможность основывается на следующих соображениях. Когда предикат P переменный, то равенство $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ можно рассматривать как $m+1$ -арное отношение $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in P$, связывающее предметные переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ с переменным n -арным отношением P , соответствующим предикату P . Здесь $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($m < n$) — существенные переменные предиката P . Несущественные переменные в записи предиката P опущены. Выражаясь более точно, следовало бы сказать, что P — это переменная, заданная на множестве имён всевозможных m -арных отношений. Обозначим предикат, соответствующий отношению $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in P$, через $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m, P)$. Здесь Π — имя постоянного предиката, соответствующего постоянному отношению с именем $\in$.

Если в формуле, которая содержит предикат, стоящий под знаком кванторной операции, всюду заменить выражение $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ выражением $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m, P)$, то переменный предикат P в этой формуле исчезнет, а вместо него появится ещё одна предметная переменная P , заданная на множестве имён всевозможных n -арных предикатов. Так что, беря квантор по переменному предикату P , мы фактически берём его по предметной переменной P , заданной на некотором подмножестве универсума. Имена предикатов не входят в множество U всех предметов. Поэтому множество U теперь нельзя считать универсумом задачи. Необходимо более широкий универсум, получаемый объединением множества U и множества имён всех предикатов. Таким образом, получается, что теперь предметные переменные заданы не на универсуме, а на одном из его подмножеств.

Запишем формулы для вычисления кванторов в случае наличия в подкванторном выражении как предметных, так и предикатных переменных. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$; $P_1, P_2, \dots, P_r \subseteq U^n$,

$R(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_r)$ — произвольный предикат. Кванторы по предметной переменной x_i определяются формулами

$$\forall x_i R(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_r) = \bigwedge_{x_i \in U} R(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_r), \quad (130)$$

$$\exists x_i R(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_r) = \bigvee_{x_i \in U} R(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_r). \quad (131)$$

Кванторы по предикатной переменной P_j ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$) вычисляются по формулам:

$$\forall P_j R(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_r) = \bigwedge_{P_j \subseteq U^n} R(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_r), \quad (132)$$

$$\exists P_j R(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_r) = \bigvee_{P_j \subseteq U^n} R(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_r). \quad (133)$$

Аналогичным способом можно определить операцию взятия кванторов по предикатным переменным второго и более высокого порядков.

Приводим примеры перевода на формальный язык математических утверждений с участием кванторов по предикатным переменным:

1) «Для всех a и b $a = b$ в том и только том случае, когда $a \in A$ равносильно $b \in A$ при любом A »:

$$\forall A \forall a \forall b (D(a, b) \sim (A(a) \sim A(b)));$$

2) «Для всех A и B $A = B$ в том и только том случае, когда $a \in A$ равносильно $a \in B$ при любом a »:

$$\forall A \forall B \forall a (D(A, B) \sim (A(a) \sim B(a)));$$

3) «Существует множество M такое, что для всех x $x \in M$ »: $\exists M \forall x M(x)$. Заметим, что предикат равенства от предикатов первого порядка определяется формулой

$$D(P_i, P_j) = \bigvee_{A \subseteq U^n} P_i^A P_j^A, \quad (134)$$

аналогичной выражению (93).

Мы рассмотрели ряд операций над предикатами, отображающих множество всех предикатов, заданных на U^n , в себя. Это — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание предикатов, а также кванторы общности и существования по переменным x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Введём ещё семейство всех предикатов, соответствующих отношениям $A \subseteq U^n$, каждый из которых рассматривается как константная операция A , принимающая на всех наборах предикатов одно и то же значение A . Введём также операцию узнавания предиката A по предикатной переменной P_j ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$), определяемую следующим образом:

$$P_j^A = \begin{cases} 1, & \text{если } P_j = A, \\ 0, & \text{если } P_j \neq A. \end{cases} \quad (135)$$

Здесь символы 1 и 0 обозначают тождественно истинный и тождественно ложный предикаты.

Любую t -местную операцию F над предикатами $P_1, P_2, \dots, P_t$ можно следующим образом выразить в виде суперпозиции уже введенных операций:

$$F(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigvee_{A_1, A_2, \dots, A_t \in U^n} B(A_1, A_2, \dots, A_t) P_1^{A_1} P_2^{A_2} \dots P_t^{A_t} \quad (136).$$

Здесь $B(A_1, A_2, \dots, A_t) = F(A_1, A_2, \dots, A_t)$ — фиксированный предикат, представляющий собой значение операции F на наборе предикатов $(A_1, A_2, \dots, A_t)$. Таким образом, система операций, состоящая из дизъюнкции, конъюнкции, узнаваний всевозможных предикатов по переменным $P_1, P_2, \dots, P_t$ и всех константных операций, полна.

Узнавание каждого предиката A по любой из предикатных переменных $P_j (j=1, 2, \dots, t)$ выражается в виде следующей суперпозиции кванторов общности, операции равнозначности предикатов и фиксированного (индивидуального) предиката A :

$$P_j^A = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (P_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim A(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (137)$$

Операция равнозначности предикатов

$$P \sim Q = \bar{P}\bar{Q} \vee PQ \quad (138)$$

выражается через дизъюнцию, конъюнцию и отрицание предикатов. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — набор предметных переменных. Квантором общности по набору x назовем операцию

$$\forall x P(x) = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n P(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (139)$$

Мы видим, что любую операцию над предикатами можно выразить суперпозицией операций $\forall x$, $\vee$, $\wedge$, $\bar{}$ и всех константных операций (т.е. индивидуальных предикатов). Такая система операций несократима.

Операции над предикатами, которые принимают значения только из множества $0, 1$, называются предикатами от предикатов. Каждому предикату T от предикатов $P_1, P_2, \dots, P_t$ соответствует некоторое отношение T , связывающее отношения $P_1, P_2, \dots, P_t$. Любой t -арный предикат T от предикатов $P_1, P_2, \dots, P_t$ можно выразить формулой вида:

$$T(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigvee_{(A_1, A_2, \dots, A_t) \in T} P_1^{A_1} P_2^{A_2} \dots P_t^{A_t} \quad (140)$$

Выводы

Мы видим, что система всех узнаваний предикатов, вместе с операциями дизъюнкции и конъюнкции предикатов, полна при выражении с ее помощью любого предиката от предикатов. Если желательно обойтись без узнаваний предикатов, то для выражения любых предикатов от предикатов можно воспользоваться описанной в предыдущем абзаце системой, состоящей из операций $\vee$, $\wedge$, $\bar{}$, $\forall x$ и всех константных операций.

Предикаты от предикатов используются для формальной записи математических утверждений. Если предикат от предикатов принимает значение 1, то ему соответствует истинное утверждение, если 0 — ложное. Приводим примеры перевода истинных и ложных утверждений на формальный язык:

1) “Для любого множества M существует элемент x такой, что $x \in M$ ”: $\forall M \exists x M(x)$;

2) “Для любых отношений A и B

$$A \cup B = B \cup A$$
”: $\forall A \forall B D(A \vee B, B \vee A)$

Утверждение 1) ложно, утверждение 2) истинно. Если в формуле, выражающей предикатную операцию, присутствует квантор $\forall x_i$ или квантор $\exists x_i$, то говорят, что переменная x_i в этой формуле связана. В противном случае переменная в формуле называется свободной. Формула, у которой все переменные связаны, называется замкнутой. Замкнутые формулы всегда истинны или ложны.

Литература: 1. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. — 144 с. 2. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Технические средства [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. — 136 с. 3. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Проблемы и перспективы [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко - Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. — 159 с. 4. Ньютон И. Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. Пер. с англ. 2-е изд. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 365 с.

Поступила в редколлегию 02.04.2010

УДК 519.7

Інструментарій компараторної ідентифікації / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Н.В. Шаронова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2010. — № 2 (73). — С. 74–86.

Теорія інтелекту розглядається як формальне вчення. Така необхідність обумовлена тим, що теорія інтелекту має потребу в особливій математичній мові, що недостатньо розвинена в наявних розділах математики. Тому поряд зі змістовним вивченням розуму людини необхідно також розробляти відповідний формальний апарат.

Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra interpretations / M.F. Bondarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko, N.V. Sharonova // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2010. — № 2 (73). — С. 74–86.

The intelligence theory is considered as the formal doctrine. Such necessity is caused by that the intelligence theory requires special mathematical language which is insufficiently developed in available sections of mathematics. Therefore along with substantial studying of the person reason it is necessary to develop the corresponding formal device also.

Ref.: 5 items.