

УДК 530.1+612

Л.А. Аверьянова, В.М. Головенко, О.И. Скляр

АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ БИОЖИДКОСТИ ПО КАНАЛУ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

Введение

Одной из наиболее важных задач математической биологии является описание пространственно-временных процессов транспорта биожидкости по трубчатому каналу (кровеносному сосуду, мочеточнику, уретре и т. п.).

Структурно-функциональные нарушения, возникающие в организме, приводят к изменению динамики физиологических процессов. Определение характера изменения диагностически важных физических параметров организма при различных типах патологии является крайне важной медицинской задачей, требующей адекватного физико-математического толкования.

Одной из наиболее актуальных проблем урологии является изучение нарушений функции нижнего мочевого тракта человека. Это нарушение во многих случаях связано с сужением мочевыводящего канала, которое проявляется чаще всего в таких заболеваниях, как доброкачественная гиперплазия предстательной железы (аденома). При раннем диагностировании это заболевание проявляется через нарушение функции микции (мочеиспускания). Наиболее просто и в то же время достаточно точно нарушения микции могут быть выявлены при уродинамических исследованиях [1].

Основой правильного клинического толкования информации о состоянии нижних мочевых путей, получаемой с помощью уродинамических исследований (урофлоуметрия), следует считать знание теоретических основ и особенностей движения жидкости в нижних мочевых путях. В связи с этим аналитическое исследование задачи транспорта мочи по мочевыводящему каналу является актуальной медико-физической задачей.

Вопросы физико-математического моделирования нижнего мочевого тракта изучаются уже достаточно длительное время [2], но до настоящего времени не получено адекватное аналитическое описание функциональной зависимости изменения объемного потока мочи во времени.

Транспорт мочи по мочевым путям не имеет аналогий в технике, поэтому при описании процессов, лежащих в его основе, уравнения и формулы, применяемые в гидродинамике, могут быть использованы лишь с определенным приближением [2].

Одним из подходов к математическому описанию процесса транспорта мочи по мочевыводяще-

му каналу (уретре) может быть использование технической гидродинамической задачи И.С. Громека [3]. В этой задаче рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости по круглой цилиндрической трубе под действием перепада давления бесконечной длительности. Предполагается, что давления P_1 и P_2 приложены в двух нормальных сечениях трубы, находящихся на расстоянии l (рис. 1).

Цель исследования

Целью данного исследования является аналитическое описание процесса транспорта мочи по идеальному уретральному каналу под действием импульса давления и получение функциональной зависимости, описывающей динамику изменения объемного потока мочи.

Материалы и методы

В качестве физической модели уретры рассматривается цилиндрическая трубка с жесткими стенками радиусом a и длиной l (рис. 1).

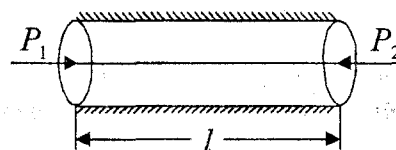


Рис. 1. Трубка тока жидкости протяженностью l и радиусом a , к которой приложен градиент давления ($P_1 - P_2$)

В первом приближении при моделировании уретры рассматривается как объект с жесткими стенками, хотя на самом деле они эластичны.

Предполагается, что моча является ньютоновской жидкостью с плотностью ρ и коэффициентом кинематической вязкости ν , которые постоянны.

Транспорт мочи рассматривается как ламинарное движение жидкости по трубе с линейной скоростью $u(r, \varphi, z, t)$ под действием импульса давления $P(t)$.

Определяется объемный расход биожидкости Q в единицу времени.

Сила, которая заставляет мочу двигаться по мочевыводящим путям, зависит от соотношения давлений, создаваемых с одной стороны мышцами мочевого пузыря (детрузора), давлением окружающих органов и тканей (абдоминальным) и с другой стороны атмосферным давлением. Когда суммар-

ное давление детрузора и абдоминальное давление P_1 превышают атмосферное давление P_2 , может начаться процесс микции, а когда в процессе мочеиспускания давление P_1 становится меньше P_2 , процесс микции прекращается.

В данном случае под понятием импульсного воздействия давления будем понимать именно разницу давлений P_1 и P_2 . При этом надо иметь в виду, что каждое из этих давлений равномерно приложено по площади соответствующего сечения трубки и создает поле давления.

Это поле давления будет определять поле скоростей $u(r, \varphi, z, t)$ потока жидкости в цилиндрической трубе, которое может быть охарактеризовано различными компонентами скорости потока.

С математической точки зрения для описания общей задачи течения вязкой несжимаемой жидкости под действием давления используется уравнение Навье – Стокса и уравнение непрерывности потока жидкости [4]. Система этих уравнений в частных производных имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = \\ = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta u_r, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = \\ = F_\varphi - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \Delta u_\varphi, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты скорости движения вдоль координат r, φ, z ; F_x, F_y, F_z – внешние силы; p – давление; ν – коэффициент кинематической вязкости; Δ – дифференциальный оператор Лапласа; ρ – плотность жидкости.

Решения системы уравнений (1) в общем виде до настоящего времени не существует.

Для отдельного случая с наложенными ограничениями (осесимметричное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в трубе при отсутствии внешних сил F_i) задача была решена И.С. Громека, а дальнейшее развитие получила в работах Н.А. Слезкина [3]. Ими рассмотрен случай нестационарного движения потока жидкости в жесткой цилиндрической трубе под действием бесконечной единичной ступеньки перепада давления, а также определены радиальные компоненты скорости перемещения жидкости и ее расход.

При решении этой задачи накладывалось условие, что искомые функции скоростей движения вязкой жидкости были непрерывны и ограничены, а на неподвижных стенках, ограничивающих протекающую жидкость, искомые функции скорости движения жидкости обращались в нуль: $u_r|_{r=a} = 0$, $u_\varphi|_{r=a} = 0$, $u_z|_{r=a} = 0$. На свободных торцах объема осевая составляющая давления p_z равна либо постоянной величине, либо некоторой функции времени, а радиально-угловая составляющая давления обращается в нуль. К тому же в момент времени $t=0$ при неустановившемся движении искомые функции скорости удовлетворяют и начальным условиям $u_r = u_{r0}(r, \varphi, z, 0)$, $u_\varphi = u_{\varphi0}(r, \varphi, z, 0)$, $u_z = u_{z0}(r, \varphi, z, 0)$. Таким образом, если поток направить вдоль оси трубы Oz (рис. 1), то из трех компонент скорости u_r, u_φ, u_z остается лишь одна u_z (остальные две равны нулю); изменение этой осевой компоненты при нестационарном движении учитывается локальным ускорением $\frac{\partial u_z}{\partial t}$. Если пренебречь радиальными компонентами давления, то система уравнений (1) сводится к одному уравнению:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2)$$

В (2) левая часть равенства зависит только от переменной t , а правая только от r, φ, z ; равенство может выполняться в случае, когда каждая из частей является постоянной.

Результаты исследований

Рассмотрим применение задачи И.С. Громека для описания процесса микции.

В процессе мочеиспускания имеет место создание не просто перепада давления (как в задаче И.С. Громека), а импульса давления, то есть если рассматривать применение решения этой задачи для моделирования процесса микции, то оно должно быть дополнено рассмотрением реакции системы на снятие перепада давления.

Предположим, что градиент приложенного давления вдоль трубы изменяется по линейному закону.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P}{l}. \quad (3)$$

Поскольку движение жидкости осесимметрично, то можно пренебречь угловой составляющей.

Перепад давления, который вызывает движение биожидкости по каналу, записывается в виде:

$$P(t) = P_1(t) - P_2 = P_0 \cdot 1(t), \quad (4)$$

где P_1 – амплитуда суммарного давления детрузора и абдоминального; $1(t)$ – функция Хевисайда; $P_2 = \text{const}$ – атмосферное давление.

Тогда уравнение (2) с учетом (3), (4) приобретает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = - \frac{P(t)}{v \rho l}. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5), в случае когда $P(t) = \text{const} = P_0$, с учетом вышеприведенных начальных и граничных условий представлено бесконечным рядом вида [3]:

$$u_z(r, t) = a^2 \frac{P_0}{4\nu\rho l} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8 \sum e^{-\frac{\lambda_k^2 t}{a^2}} * \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{a}\right)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)} \right], \quad (6)$$

где λ_k — корни уравнения $J_0(\lambda_k) = 0$; J_0 и J_1 — бесселевы функции нулевого и первого порядка.

Объемный расход жидкости в единицу времени в плоскости S , перпендикулярной направлению движения жидкости, определяется как:

$$Q(r, t) = \int_S u_z(r, t) dS. \quad (7)$$

В результате решения уравнения (7) Н.А. Слезкиным [3] получено выражение для определения расхода жидкости через сечение цилиндрической трубы:

$$Q(r, t) = \frac{\pi P_0 a^4}{8\nu \rho l} \left[1 - 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_k^2 t}{a^2}}}{\lambda_k^4} \right]. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно представить в виде:

$$Q(r, t) = P_0 \cdot H(r, t),$$

где $H(r, t)$ — переходная характеристика функции объемного тока жидкости при единичном перепаде давления:

$$H(r, t)|_{r=a} = \frac{\pi a^4}{8\nu\rho l} \left[1 - 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_k^2 t}{a^2}}}{\lambda_k^4} \right]. \quad (9)$$

В описанном выше решении учитывалось действие единичной ступеньки перепада давления. При моделировании процесса микции задача может быть аналогично решена для случая снятия давления от P_1 до P_2 .

В реальной уродинамической системе характер нарастания и спада давления $P(t)$ обусловлен физиологическим состоянием детрузора и окружающих органов и имеет сложную форму.

В общем случае процесс микции может быть интерпретирован как переходный процесс, вызван-

ный изменением давления, поэтому возможно применить некоторые подходы теории переходных процессов к описанию процесса транспорта биожидкости.

При микции функция нарастания и спада давления является непериодической и кусочно-непрерывной функцией времени. Для решения такого класса задач применяется метод интеграла Дюамеля, который предполагает, что если уравнение, описывающее поведение системы, линейно, и если известна переходная характеристика функции на приложенное воздействие, то можно определить реакцию системы на любое приложенное воздействие $f(t)$ [5]. Таким образом, в нашем случае функция объемного расхода жидкости с помощью интеграла Дюамеля может быть определена следующим образом:

$$Q(r, t) = \int_0^t f'(\tau) H(r, t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

где $H(r, t)$ — переходная характеристика функции на приложенное воздействие $f(t)$; τ — длительность приложенного воздействия.

Рассмотрим выражение (10) для простейшего случая, когда импульс действия будет прямоугольным длительностью τ .

В этом случае приложенное давление описывается функцией вида:

$$P = P(t) = f(t) = \begin{cases} P_0 & \text{для } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{для } t > \tau \end{cases}, \quad (11)$$

где P_0 — амплитудное значение приложенного давления.

Функцию (11) можно представить в виде суперпозиции двух функций скачка:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0 \\ P_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \end{cases}, \quad (12)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} P_0 & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau \end{cases}.$$

Очевидно, что $f_1(t) = -f_2(t)$.

Выражение (10) для функции действия (11) при подстановке функций (12) примет вид:

$$Q(r, t)|_{0 \leq t \leq \tau} = f_1(0) H(r, t) + \int_0^t f_1'(\tau) H(r, t - \tau) d\tau, \quad (13)$$

$$Q(r, t)|_{t > \tau} = f_1(0) H(r, t) + \int_0^t f_1'(\tau) H(r, t - \tau) d\tau - [f_1(\tau) - f_2(\tau)] H(r, t - \tau) + \int_{\tau}^t f_2'(\tau) H(r, t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

В качестве переходной характеристики воспользуемся выражением (9), полученным из решения Н.А. Слезкина (8).

Подставив значения $f_1(t)$, $f_2(t)$, $H(r,t)$, $H(r,t-\tau)$ в (13), (14) получим:

$$Q_{t \leq \tau}(r,t) = \frac{\pi a^4 P_0}{8 \nu \rho l} \left[1 - 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu \lambda_k^2 t}{a^2}}}{\lambda_k^4} \right], \quad (15)$$

$$Q_{t > \tau}(r,t) = \frac{4 \pi a^4 P_0}{\nu \rho l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu \lambda_k^2 t}{a^2}} \left(e^{\frac{\nu \lambda_k^2 \tau}{a^2}} - 1 \right)}{\lambda_k^4}. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) также можно представить в виде:

$$Q_{t \leq \tau}(t) = P_0 \cdot H_1(r,t), \quad (17)$$

$$Q_{t > \tau}(t) = P_0 \cdot H_2(r,t), \quad (18)$$

где $H_1(r,t)$, $H_2(r,t)$ — переходные характеристики функции объемного течения жидкости при единичном импульсе давления, которые по сути являются переходными характеристиками нарастания и спада импульса действия.

Анализируя выражения (17), (18), видим, что форма распределения функции расхода во времени определяется только формой функций $H_1(r,t)$ и $H_2(r,t)$, а величина P_0 определяет лишь амплитуду этих функций, поэтому достаточно рассмотреть поведение переходных характеристик функции расхода. На рис. 2 показана зависимость объемного тока выделяемой жидкости при импульсном действии перепада давления P_0 для различных значений радиуса трубки. Как видно, чем больше радиус трубки, тем выше объемный расход биожидкости в единицу времени, причем эта зависимость резко нелинейная (приблизительно пропорционально a^4).

Полученные выражения для объемного расхода биожидкости (15), (16) позволяют определить объем биожидкости V , выделенный при микции:

$$V(t) = \int_0^t Q(r,t) dt. \quad (19)$$

На рис. 3 показана, теоретически рассчитанная по (19), кривая накопления биожидкости.

Эта кривая достаточно адекватно отражает изменение объема выделенной мочи. Она отличается от реальной урофлоутграммы здорового человека лишь на начальном участке и на участке достижения максимального значения накопленного объема мочи. Сравнения проводились на основе данных [1].

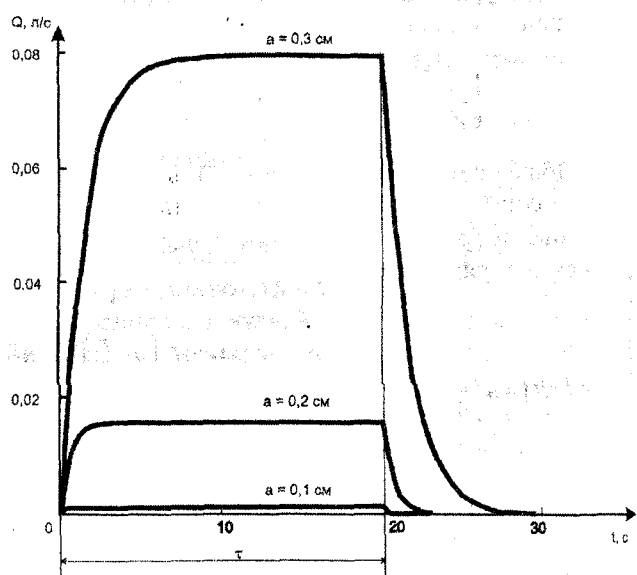


Рис. 2. Семейство характеристик объемного расхода жидкости $Q(r,t)$ при импульсном действии перепада давления P_0 для различных значений радиуса трубки a

Можно предположить, что эти отличия объясняются тем, что в используемой модели рассматривалась трубка с жесткими стенками.

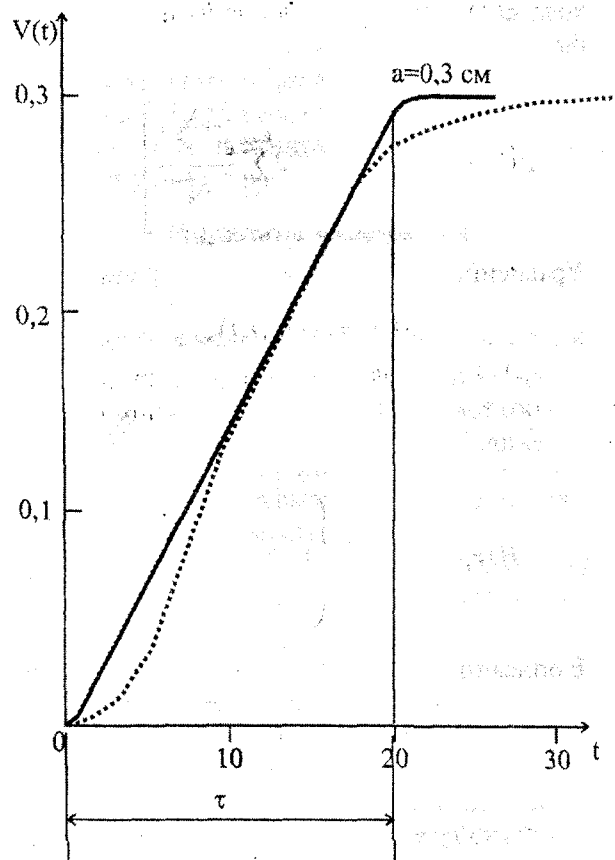


Рис. 3. График накопления биожидкости при импульсном давлении P_0 прямоугольной формы для заданного радиуса канала. Сплошная линия — расчетная кривая, пунктирная — реальная кривая [1]

Анализируя выражения (17)–(19), видим, что при одном и том же импульсе действия P_0 и одном и том же объеме накопленной мочи V , но при разном радиусе уретры время мочеиспускания будет существенно отличаться, то есть по объему накопленной мочи и времени микции можно в первом приближении судить о состоянии мочевыводящих путей, в частности о размере просвета уретры.

Выводы

Задача о течении биожидкости по каналу развита для идеального случая действующего импульса давления прямоугольной формы.

Использование решения задачи И.С. Громека позволило получить аналитические выражения, описывающие объемный расход биожидкости через переходные характеристики процесса при воздействии импульсного давления прямоугольной формы.

Характер нарастания и спада давления при процессе микции обусловлен физиологическим состоянием детрузора и окружающих органов и напря-

мую зависит от формы приложенного перепада давления, которое определяет форму уродинамической кривой.

Предложенный подход может быть полезным при решении обратной задачи — по форме уродинамической кривой определить форму приложенного давления.

Результаты могут быть использованы при интерпретации результатов клинических уродинамических исследований.

Список литературы: 1. *Пытель Ю.А., Борисов В.В.* Физиология человека. Мочевые пути. М.: Высшая школа, 1986. 260 с. 2. *J.Kren, M.Horak, F.Zatura, M.Rosenberg.* Mathematical model of the male urinary tract//Biomed. Papers. 2001, 145(2). Р. 91-96. 3. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с. 4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Уч. пособие в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 4-е изд., стер. М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1988. 736 с. 5. *Г.Корн, Т.Корн.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 832 с.

Поступила в редколлегию 06.06.2005