

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА НЕЗАМКНУТОМ КОНУСЕ

© 2001 г. В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко

Представлено академиком Ю.В. Гуляевым 07.12.2000 г.

Поступило 07.12.2000 г.

В [1] изложен метод решения стационарной задачи рассеяния волн на полубесконечном круговом конусе с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. В данной работе впервые предложен алгоритм построения нестационарной функции Грина для конуса с продольными щелями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматриваемая коническая структура представляет собой идеально проводящий полубесконечный тонкий конус с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями. Введем сферическую систему координат r, ϑ, φ с началом в вершине конуса, ось которого совпадает с oz декартовой прямоугольной системы (рис. 1). Обозначим через 2γ угол раствора конуса, $l = \frac{2\pi}{N}$ – период структуры, d – ширина щелей (d и l – величины двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конуса и ребра конических лент). В выбранной системе координат конус определяется множеством точек

$$\Sigma = \{(r, \vartheta, \varphi) \in R^3: r \in [0, +\infty), \vartheta = \gamma, \varphi \in L\},$$

где

$$L = \bigcup_{p=1}^N L_p, \quad L_p = \left((p-1)l + \frac{d}{2}, pl - \frac{d}{2} \right),$$

$$CL = [0, 2\pi) \setminus L.$$

Искомая функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0)$ удовлетворяет:

1) уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0);$$

Институт радиотехники и электроники
Российской Академии наук, Москва
Харьковский технический университет
радиоэлектроники, Харьков

2) краевому условию на лентах конуса

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0)|_{\Sigma} = 0;$$

3) начальным условием

$$G = \frac{\partial G}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < t_0.$$

Представим функцию G в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0),$$

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = \frac{\delta(\hat{t} - R/c)}{4\pi R}, \quad (1)$$

$$\hat{t} = t - t_0, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

где c – скорость света; функция G_1 обусловлена присутствием конической поверхности. Для

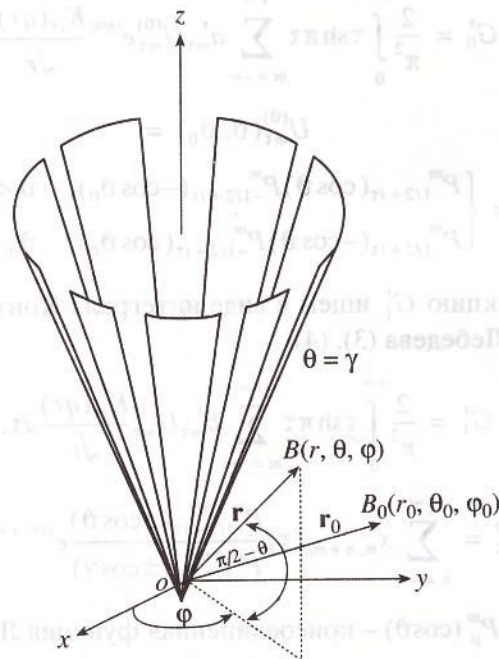


Рис. 1. Геометрия задачи.

нахождения G используем преобразование Лапласа

$$G^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t_0) = \int_0^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) e^{-st} dt, \quad s > 0, \quad (2)$$

где G^s – функция Грина для соответствующей стационарной краевой задачи. Эта функция удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца, первому краевому условию на ленте конуса, условию на бесконечности в пространстве и условию вблизи нерегулярностей границы (вершина конуса, ребра лент).

В соответствии с (1)

$$G^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = G_0^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) + G_1^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0),$$

$$G_0^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t, t_0) = e^{-st_0} \frac{e^{-qR}}{4\pi R}, \quad q = \frac{s}{c}.$$

Для решения стационарной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Конторовича–Лебедева

$$F(\tau) = \int_0^{+\infty} f(r) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (3)$$

$$f(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau F(\tau) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (4)$$

Здесь $K_\mu(z)$ – функция Макдональда. Принимая во внимание представление

$$G_0^s = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^s U_{m\tau}^{(0)} e^{im\varphi} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

$$U_{m\tau}^{(0)}(\vartheta, \vartheta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta_0), & \vartheta < \vartheta_0, \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta_0), & \vartheta_0 < \vartheta, \end{cases}$$

функцию G_1^s ищем в виде интеграла Конторовича–Лебедева (3), (4):

$$G_1^s = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m\tau}^s U_{m\tau}^{(1)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (5)$$

$$U_{m\tau}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \vartheta_0)} e^{i(m+nN)\varphi}, \quad (6)$$

где $P_\mu^m(\cos \vartheta)$ – присоединенная функция Лежандра 1-го рода; $a_{v\tau}^s, b_{v\tau}^s$ – известные, а $x_{m,n}$ – неизвестные коэффициенты; верхние знаки у аргумен-

тов функций Лежандра в (6) соответствуют области $0 < \vartheta < \gamma$, а нижние $-\gamma < \vartheta < \pi$, $\frac{m}{N} = v + m_0, -\frac{1}{2} \leq v < \frac{1}{2}$,

m_0 – ближайшее целое число к $\frac{m}{N}$. В результате

использования краевого условия, условия сопряжения для G_1^s в щелях и метода полуобращения [1] стационарная задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа относительно коэффициентов $y_{m,n}$, связанных с $x_{m,n}$:

$$A_v(u) y_{m,0} = V^{m_0}(u) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{|p|}{p} \varepsilon_{m,p} V^p(u) y_{m,p}, \quad (7)$$

$$y_{m,n} = V_{n-1}^{m_0-1}(u) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{|p|}{p} \varepsilon_{m,p} y_{m,p} V_{n-1}^{p-1}(u) + y_{m,0} P_n(u), \quad n \neq 0, \quad (8)$$

$$y_{m,n} = (-1)^{n-m_0} \frac{n+v}{m_0+v} \frac{|n|}{n} \frac{x_{m,n}}{1-\varepsilon_{m,n}},$$

$$A_v(u) = \frac{2P_{v-1}(-u)}{v(P_{v-1}(-u) + P_v(-u))},$$

$$u = \cos \delta, \quad \delta = \frac{l-d}{d} \pi,$$

где $V^m(u)$ и $V_{n-1}^{p-1}(u)$ – известные функции [1]. Для матричных элементов системы $\varepsilon_{m,n}$ имеет место оценка при $N(n+v) \gg 1$:

$$\varepsilon_{m,n} = O\left(\frac{\sin^2 \gamma}{N^2(n+v)^2}\right).$$

Следует отметить, что искомые коэффициенты $y_{m,n}$ (а следовательно, и $x_{m,n}$) не зависят от параметра q , что существенно для процедуры обращения и решения нестационарной задачи. Решение системы (7), (8) существует и единственно, а для произвольных параметров задачи может быть получено методом редукции. В случае полупрозрачного конуса, конуса с узкими щелями и узкого конуса норма матричного оператора системы меньше единицы, что позволяет для ее решения применить метод последовательных приближений. Используя процедуру обращения стационарной задачи для сплошного конуса [2],

получаем представления для функции Грина G_1 в случае конуса с продольными щелями:

$$G_1 = \frac{c}{4\pi r r_0} \eta\left(\hat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \times \\ \times \int_0^{+\infty} g_{m\tau} U_{m\tau}^{(1)} P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}b) d\tau, \quad \gamma < \vartheta_0, \quad (9)$$

где

$$g_{m\tau} = (-1)^{m+1} e^{-im\varphi_0} \tau \text{th} \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma), \\ \text{ch}b(\hat{t}) = \frac{\hat{t}^2 c^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}, \quad \eta(x) - \text{функция Хевисайда}, \\ \Gamma(z) - \text{гамма-функция}.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Полупрозрачный конус. В случае полупрозрачного конуса, который определяется существованием предела

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ d/l \rightarrow 1 \\ (\delta \rightarrow 0)}} \left[\frac{2}{N} \ln \frac{2}{\delta} \right] = Q > 0,$$

получаем из (9) интегральные представления для нестационарной функции Грина

$$G_1 = \frac{c}{4\pi r r_0} \eta\left(\hat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} w_{m\tau} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}b) d\tau, \quad 0 < \vartheta < \gamma, \quad (10)$$

$$G_1 = \frac{c}{4\pi r r_0} \eta\left(\hat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} w_{m\tau} \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}b) d\tau, \\ \gamma < \vartheta < \pi, \quad (11)$$

$$w_{m\tau} = \frac{(1 - \varepsilon_{m,0}) g_{m\tau}}{(1 - \varepsilon_{m,0}) + 2mQ}.$$

Если источник расположен на оси конуса ($\vartheta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$; $m = 0$), то выражения (10), (11) упрощаются:

$$G_1 = -\frac{c}{4\pi r r_0} \eta\left(\hat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{th} \pi \tau}{D_{i\tau}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}b) d\tau, \\ 0 < \vartheta < \gamma, \quad (12)$$

$$G_1 = -\frac{c}{4\pi r r_0} \eta\left(\hat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{th} \pi \tau}{D_{i\tau}} [P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma)]^2 \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}b) d\tau, \quad \gamma < \vartheta < \pi, \\ D_{i\tau} = \pi P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) + 2Q \text{ch} \pi \tau.$$

Переходя в (12) к интегрированию по мнимой оси ($\mu = i\tau$) и используя основную теорему о вычетах, получаем представление для G_1 в виде ряда

$$G_1 = \frac{c}{2\pi r r_0} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mu_j}{d\mu} P_{-1/2+\mu_j}(\cos \gamma) \times \\ \times P_{-1/2+\mu_j}(-\cos \gamma) P_{-1/2+\mu_j}(\cos \vartheta) Q_{-1/2+\mu_j}(\text{ch}b), \quad (13) \\ 0 < \vartheta < \gamma, \quad \hat{c}t > r + r_0, \quad D_{\mu_j} = 0,$$

где $Q_\zeta(z)$ – функция Лежандра второго рода. Спектр нестационарной краевой задачи такой, как у соответствующей стационарной, и зависит от угловых параметров конической структуры [1]. В частном случае в полупрозрачном конусе ($Q \gg 1$) спектр определяется множеством $\{\mu_j\}_0^{+\infty}$:

$$\mu_j = \frac{1}{2} + j + \frac{1}{2Q} [P_j(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}), \\ j = 0, 1, 2, \dots$$

В установившемся режиме ($\hat{t} \gg 1$) можно ограничиться приближением для G_1 (13):

$$G_1 \sim \frac{c}{2\pi r r_0} \frac{\mu_0}{d\mu} P_{-1/2+\mu_0}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu_0}(-\cos \gamma) \times \\ \times P_{-1/2+\mu_0}(\cos \vartheta) Q_{-1/2+\mu_0}\left(\frac{\hat{t}^2 c^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}\right).$$

Для полупрозрачного конуса с параметром заполнения $Q \gg 1$ и $\hat{t} \gg 1$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2Q} + O(Q^{-2}), \quad G_1 \sim -\frac{c}{4\pi^2 Q} (\hat{t}c)^{-2}, \\ 0 < \vartheta < \gamma,$$

при условии, что $\frac{1}{Q} |\ln(0.5 \sin \gamma)| \ll 1$.

Узкие щели. В случае конуса с узкими щелями ($\frac{d}{l} \ll 1$; $1 + u \ll 1$) асимптотическое разложение функции Грина по параметру $1 + u$, кото-

рое справедливо вдали от щелей, имеет вид ($\vartheta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$)

$$G_1 = -\frac{c}{4\pi r r_0} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau [P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma)]^2}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{1}{\Omega_\tau} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) d\tau + \frac{c}{8\pi r r_0} \frac{1+u}{N} \times \\ \times \sum_{n \neq 0} e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{\widehat{W}_\tau P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma)}{\Phi_\tau} \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) d\tau + \\ + O((1+u)^2 \ln(1+u)), \\ \gamma < \vartheta < \pi,$$

$$\Omega_\tau = B_\tau - \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2}, \quad \Phi_\tau = \widehat{W}_\tau + \frac{1}{N} \frac{1+u}{2} (B_\tau + \widehat{W}_\tau),$$

$$B_\tau = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma),$$

$$\widehat{W}_\tau = \frac{1 - \varepsilon_{0,n}}{N|n|\varepsilon_{0,n}}.$$

Аналогичное представление имеет место и для $0 < \vartheta < \gamma$. Спектр собственных значений определяется корнями уравнения с малой правой частью

$$\frac{\pi}{\cos \pi \mu} P_{-1/2+\mu}^+(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^+(-\cos \gamma) = \frac{1}{N} \ln \frac{1-u}{2},$$

где

$$\mu_k^\pm = \alpha_k^\pm - \frac{1+u}{2N} \times \\ \times \frac{\cos \pi \mu}{\pi \frac{d}{d\mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma)]|_{\mu=\alpha_k^\pm}} + \\ + O((1+u)^2),$$

$$P_{-1/2+\alpha_k^+}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{-1/2+\alpha_k^-}(-\cos \gamma) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

В предельном случае исчезновения щелей ($d \rightarrow 0$; $u \rightarrow -1$) полученные соотношения совпадают с результатами для сплошного конуса [2].

Узкий конус. В случае узкого конуса ($\gamma \ll 1$) асимптотическое представление для G_1 имеет вид ($\vartheta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$)

$$G_1 = G_1^{istr} + G_1^{slt} + O\left(\ln^{-3}\left(\frac{2}{\gamma}\right)\right), \quad \gamma < \vartheta < \pi. \quad (14)$$

Здесь

$$G_1^{istr} = \frac{c}{8\pi r r_0 \ln(2/\gamma)} \eta\left(\widehat{t} - \frac{r+r_0}{c}\right) \times \\ \times \left[\frac{1}{\pi(\operatorname{ch} b - \cos \vartheta)} - \Phi_1(\widehat{t}, r, r_0, \vartheta) \right]$$

есть асимптотика функции Грина для сплошного конуса,

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \left[\Psi\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right) + C - \frac{1}{2} \pi i \operatorname{th} \pi \tau \right] \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) d\tau,$$

где $\Psi(z)$ – пси-функция, C – постоянная Эйлера, а слагаемое

$$G_1^{slt} = -\frac{c}{8\pi r r_0 \ln^2(2/\gamma)} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1-u}{2}\right) \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \tau - \cos \vartheta}$$

характеризует влияние щелей. Представление для G_1 (14) справедливо вдали от щелей и вершины конуса.

ВЫВОДЫ

Предложен и обоснован алгоритм построения нестационарной функции Грина первой краевой задачи для полубесконечного кругового конуса с периодическими продольными щелями. Задача о нахождении функции Грина для волнового уравнения свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье искомой функции. В случае полупрозрачного конуса, конуса с узкими щелями и узкого конуса получены интегральные представления в виде ряда для функции Грина. Показано, что спектр нестационарной первой краевой задачи такой же, как и для соответствующей стационарной. Предложенный алгоритм может быть использован при решении краевых задач с более сложной конической геометрией.

Результаты работы частично доложены на 2-й Международной конференции “Актуальные проблемы в вычислительной физике” (24–29 июля 2000 г., Дубна, Россия) [3].

Авторы выражают благодарность акад. Ю.В. Гуляеву, чл.-корр. РАН В.И. Пустовойту, проф. Е.Г. Зелкину и проф. Я.С. Шифрину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. // ДАН. 2000. Т. 375. № 5. С. 611–614.
2. Chan K.-K., Felsen L.B. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1977. V. AP-25. № 6. P. 802–806.
3. Doroshenko V.A. // Intern. Conf. Modern Trends in Computational Physics. Abstrs. 24–29 July 2000. Dubna, 2000. P. 60.