

УДК 681.3.07

А.В. Гороховатский, Е.П. Путятин

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Приведены результаты исследований по разработке методов для вычисления параметров геометрических искажений изображений с использованием интегрального преобразования Радона. Описаны и проанализированы модели и соответствующие алгоритмы для нахождения параметров смещений, поворота и масштаба.

1. Введение

Интегральные преобразования (Фурье, Меллина, Уолша и др.) широко используются в системах технического зрения для вычисления признаков изображений и оценки параметров объектов, содержащихся в изображениях [1]. Достоинствами этих преобразований являются высокая помехозащищенность, избирательные свойства к отдельным характеристикам сигналов [2], наличие быстрых алгоритмов для реализации этих преобразований [3]. Одним из важных направлений повышения эффективности и универсальности методов анализа изображений является использование преобразования Радона [4, 5]. В ряде применений, например, при распознавании электронных подписей с помощью преобразования Радона, удается получить эффективный набор признаков, обеспечивающий высокую вероятность распознавания [5], которую не могут гарантировать другие методы. Кроме того, спектр преобразования Радона естественным образом сочетает возможности анализа как локальных особенностей изображения (анализ вдоль прямых), так и учета его интегральных характеристик.

Цель работы — получение соотношений для параметров геометрических преобразований изображений на базе их радоновских образов, а также построение и анализ соответствующих вычислительных алгоритмов.

Задачи исследования — вывод аналитических зависимостей для оценки параметров преобразований изображений, применение преобразования Радона для решения задач нормализации, сравнение эффективности полученных методов с традиционными подходами, исследование помехозащищенности и вычислительных свойств алгоритмов.

2. Построение преобразования Радона и его свойства

В самом общем плане [6–8] преобразование Радона $R[f]$ определяется как интеграл от функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ в вещественном аффинном пространстве по гиперплоскости $p = (x, \xi)$, задаваемой в виде скалярного произведения

$$p = (x, \xi) = (\xi_1 x_1, \dots, \xi_n x_n),$$

и имеет вид

$$R[f] = \int f(x) \delta(p - (x, \xi)) dx, \quad (1)$$

где $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака [8], определяемая условием

$$\int_a^b f(z) \delta(z - v) dz = \begin{cases} 0, & \text{при } v < a \text{ или } v > b, \\ 1/2 f(v), & \text{при } v = a \text{ или } v = b, \\ f(v), & \text{при } a < v < b, \end{cases}$$

а интегрирование в (1) производится по всему пространству определения функции $f(x)$.

В результате функции $f(x)$ в n -мерном аффинном пространстве путем применения оператора $R[f]$ ставится в соответствие некоторая функция $R(p, \xi)$ величин p, ξ . Для существования интеграла (1) необходимо, чтобы исходная функция $f(x)$ была абсолютно интегрируемой по всему пространству [8]. Это условие всегда выполнено для изображений как функций, имеющих ограниченные значения во всей области определения.

Наиболее распространенное практическое применение получило двумерное преобразование Радона в задачах томографии — реконструкции изображений по проекциям [4, 7]. Для решения этой проблемы применяется параллельное проектирование функции яркости $B(x, y)$ на некоторую ось p вдоль заданного направления t . Этим задается поворот системы координат на некоторый угол θ , связанный с параметрами оси p . Преобразование Радона вычисляется путем интегрирования $B(x, y)$ на ось p (проектирования по направлению t , перпендикулярному оси) в соответствии с рис. 1.

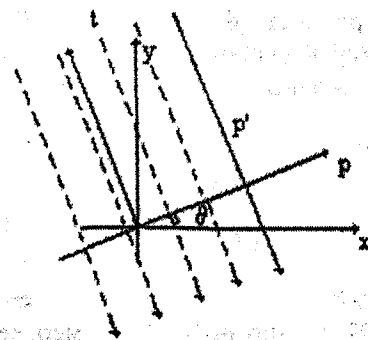


Рис. 1. Схематическая модель параллельного проектирования

Прямая p' , параллельная направлению интегрирования, представима в нормальном виде посредством параметров p и θ : $p' = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Тогда выражение (1) формулируется в следующем виде [4, 7]:

$$R(p, \theta) = \iint_{x, y} B(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (2)$$

где p — расстояние от центра координат до фиксированной линии, вдоль которой осуществляется проектирование, θ — угол поворота осей координат. Соотношение (2) получено из (1) подстановкой вектора $\xi = [\cos \theta \sin \theta]$. Интегрирование в (2) осуществляется по некоторой области $D = xy$, где определена функция $B(x, y)$. Считается, что вне области D выполняется условие $B(x, y) = 0$. Заметим, что величина расстояния p в (2) может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В то же время выражение (2) можно записать через проекцию на ось, полученную поворотом системы координат xy на угол θ [5, 6]:

$$R(x', \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x' \cos \theta - y' \sin \theta, x' \sin \theta + y' \cos \theta) dy', \quad (3)$$

где $R(x', \theta)$ — проекция двумерной функции $B(x, y)$ на ось x' . Здесь оси x' и y' задаются поворотом системы координат xy на угол θ против часовой стрелки, т. е.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\cos \theta \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Выражения (2), (3) непосредственно могут быть использованы для вычисления преобразования Радона. Интегрирование в (3) так же, как и в (2), осуществляется в пределах области D .

Преобразование Радона не накладывает никаких дополнительных ограничений на функцию изображения и может быть применено к произвольному сигналу из множества изображений [1, 7].

Рассмотрим теперь некоторые важные для нас свойства преобразования Радона.

1. Однородность [8].

Из формулы (1) непосредственно следует, что R есть четная однородная функция от величин ξ, p степени однородности, равной -1 . Это означает, что для любого вещественного числа $\alpha \neq 0$ справедливо следующее равенство

$$R(\alpha p, \alpha \xi) = |\alpha|^{-1} R(p, \xi).$$

Таким образом, чтобы найти все значения функции R , достаточно знать, например, ее значения при $p=1$ и при всех возможных ξ , т. е. функция R фактически зависит от того же числа переменных, что и исходная функция $f(x)$. Это свойство можно

использовать при вычислении произвольных значений $R(p, \xi)$ (или $R(p, \theta)$), имея в памяти лишь сравнительно небольшой фиксированный объем значений.

Свойство однородности можно выразить через параметр θ путем соответствующего масштабирования вектора $\xi = [\cos \theta \sin \theta]$.

2. Периодичность по параметру θ и ограниченность области определения $R(p, \theta)$ размерами области D [8]:

$$R(p, \theta) = R(-p, \theta + \pi) = R(p, \theta + 2\pi),$$

$R(p, \theta) = 0$, если $|p| \geq d$, где d — размер области D .

Это означает, что значения функции $R(p, \theta)$ полностью определяются ее значениями на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$, $-d \leq p \leq d$.

3. Связь преобразования Радона с преобразованием Фурье [8].

Преобразование Фурье в n -мерном пространстве сводится к преобразованию Радона и последующему одномерному преобразованию Фурье. Это утверждает известная «теорема о проекциях» [4, 8]. В частности, вычисление двумерного Фурье-преобразования сводится к преобразованию Радона, а затем к операции вычисления Фурье-образа по первой переменной [4]:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} R(p, v) e^{iup} dp.$$

Применяя к этому соотношению обратное одномерное преобразование Фурье, получаем выражение для преобразования Радона через преобразование Фурье:

$$R(p, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \theta) e^{-itp} dt.$$

Таким образом, в вещественном аффинном пространстве преобразование Радона функции $f(x)$ тесно связано с ее преобразованием Фурье, а именно, одно из другого получается одномерным преобразованием Фурье. Это дает возможность использовать свойства обоих преобразований совместно, а также применять отработанные алгоритмы для одного из преобразований с целью вычисления значений другого преобразования.

3. Компьютерная реализация преобразования

Выражения для преобразования Радона (1–3) сформулированы для непрерывных функций. Практическое же использование радоновских образов осуществляется в дискретном виде [4]. Здесь исходное изображение и его преобразование Радона представляются в виде матриц.

Вычисление преобразования Радона можно осуществить различными способами. Они определяются вариантами сканирования изображения,

дискретизацией параметров p , θ , D . Реальное применение ставит также некоторые дополнительные требования, такие как способ проектирования, технические возможности аппаратуры, способ дальнейшей обработки полученных значений преобразований и др. [4].

Один из подходов состоит в использовании однородности преобразования Радона, когда на базе некоторого набора значений преобразования вычисляется все множество значений. Второй способ состоит в последовательном построении линий интегрирования с определенным шагом для параметров θ или ξ . Третий путь заключается в вычислении преобразования Радона через преобразование Фурье.

Большее предпочтение с точки зрения простоты вычислений и минимизации ошибок дискретизации имеет следующий подход, который заключается в проведении линий интегрирования параллельно оси x или y , последующем пошаговом вращении изображения и снятии показаний с этих линий. Дискретизация по оси p проводится с шагом, равным Δp . Для учета полной информации о дискретном изображении естественно взять $\Delta p = 1$, хотя возможны и другие варианты. При этом изображение на каждом шаге поворачивается на величину шага $\Delta\theta$. При этих предположениях для изображения размера $N \times N$ пикселей получаем $180^\circ/\Delta\theta$ значений для угла θ и N значений для расстояния p . На основании этого строим матрицу преобразования Радона, где значения параметров p и θ расположены в соответствии с рис. 2. Нечетность значения N , которая очевидно предполагается в матрице преобразования, здесь не является принципиальной.

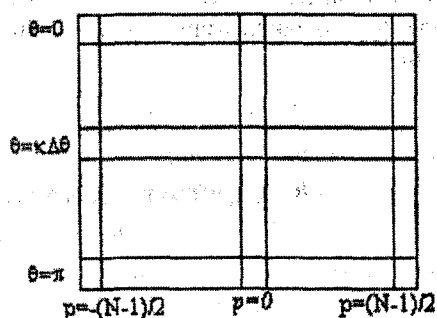


Рис. 2. Вид матрицы преобразования Радона

Возможны и другие варианты построения вычислительных схем для формирования значений преобразования Радона, а также разнообразные комбинации вышеприведенных способов.

4. Определение параметров геометрических искажений

Рассмотрим методы определения параметров для следующих геометрических преобразований

изображений на базе преобразования Радона: a_1, a_2 — смещения по координатным осям, φ — угол поворота, α_1, α_2 — параметры изменения масштаба. Считается, что геометрические преобразования не выводят функцию яркости изображения за пределы области D ее определения [1].

1. Смещение изображения осуществляется путем изменения координат:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (2)

$$R(p, \theta, a_1, a_2) = \iint_{x,y} B(x + a_1, y + a_2) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

и учитывая, что изменение изображения под влиянием геометрических преобразований осуществляются внутри области D , делаем замену переменных и получаем следующий вид для радоновского образа:

$$R(p, \theta, a_1, a_2) = \iint_{x',y'} B(x', y') \delta(p - x' \cos \theta - y' \sin \theta + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) dx' dy'. \quad (4)$$

Из соотношения (4) имеем зависимость радоновского образа от смещений изображения в виде

$$R(p, \theta, a_1, a_2) = R(p + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta, \theta).$$

Таким образом, смещение изображения приводит к следующему изменению в системе координат (p, θ) :

$$p = p + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta. \quad (5)$$

Значение параметра θ при этом не изменяется.

В соотношении (5) при условии $\theta = 0^\circ$ имеем $p = p + a_1$, а при $\theta = 90^\circ$ получаем $p = p + a_2$.

Таким образом, значения смещений a_1, a_2 можно определить путем сопоставления значений функции $R(p, \theta, a_1, a_2)$ при фиксированных $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ с соответствующими значениями $R(p, \theta)$ для эталона. Алгоритмы для осуществления этого анализа будут рассмотрены далее.

2. Поворот изображения на угол φ определяется соотношениями:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

Угол φ считается положительным при повороте против часовой стрелки. После подстановки в (2) и замены переменных имеем:

$$R(p, \theta, \varphi) = \iint_{x',y'} B(x', y') \delta(p - y' \sin(\theta - \varphi) - x' \cos(\theta - \varphi)) dx' dy'. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что поворот исходного изображения на угол φ приводит к повороту на угол $-\varphi$ его радоновского образа. Это можно было бы предположить, исходя из природы построения преобразования Радона путем поворота оси проектирования. Для определения величины угла φ нужно сравнивать значения преобразований Радона для исходного и повернутого изображений при фиксированном параметре p . С учетом свойства периодичности преобразования Радона при повороте происходит циклическое смещение значений по параметру θ на величину $(-\varphi)$ в каждом столбце преобразования (p фиксировано). Алгоритмы вычисления значения поворота близки к алгоритмам для определения смещения.

3. Изменение масштаба α_1 и α_2 по осям абсцисс и ординат.

После подстановки в (2) формул масштабирования

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x \\ y' = \alpha_2 y \end{cases}$$

получаем выражение для преобразования Радона в зависимости от значений параметров масштаба:

$$R(p, \theta, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \iint f(x', y') \delta(p - \frac{x'}{\alpha_1} \cos \theta - \frac{y'}{\alpha_2} \sin \theta) dx' dy'. \quad (7)$$

При однородном масштабировании, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, выражение (7) упрощается к виду

$$R(p, \theta, \alpha) = \frac{1}{\alpha^2} R(p, \frac{1}{\alpha} \theta). \quad (8)$$

Это означает масштабирование эталона по параметру θ с величиной $1/\alpha$ и последующим умножением значения масштабированного преобразования на коэффициент $1/\alpha^2$. Здесь параметр α можно найти, воспользовавшись, например, одномерным вариантом функционала «площади» $\Phi = \int f(u) du$ [1]. Вычислив значение Φ для эталона и радоновского образа при $p = 0$, получаем выражение для однородного масштаба $\alpha = \Phi_\alpha / \Phi_0$, где в числителе стоит значение функционала для строки преобразования от изображения, в знаменателе — от эталона. Для других значений p значение α будет аналогичным.

Другим вариантом нормализации остается корреляционный метод, который сводится к перебору всевозможных значений масштаба для одномерных функций радоновского образа.

Более сложным для теоретического анализа представляется вариант неоднородного масштабирования, т. е. при $\alpha_1 \neq \alpha_2$. В этой ситуации для определения масштабов нужно сформировать и ре-

шить систему как минимум двух нелинейных уравнений.

Анализ выражения (7) показывает, что при $\theta = 0$ его можно преобразовать к виду

$$R(p, 0, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \iint f(x', y') \delta(\frac{\alpha_1 p - x'}{\alpha_1}) dx' dy',$$

где, используя свойство однородности дельта-функции [8] $\delta(\beta x) = \frac{1}{|\beta|} \delta(x)$, $\beta > 0$, получаем

$$R(p, 0, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_2} \iint f(x', y') \delta(\alpha_1 p - x') dx' dy'. \quad (9)$$

Соотношение (9) используем как базовое при определении масштабов. С этой целью наряду с функционалом Φ для построения системы уравнений можно применить другие известные функционалы, например, $\Psi = \int x f(x) dx$. Анализ показал, что одного функционала Φ даже для разных углов $\theta \neq 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ недостаточно, т. к. получаются зависимые между собой уравнения. Применяя интегрирование по переменной p в (9) с целью формирования значений функционалов для образа эталона Ψ_0, Φ_0 и для масштабированного образа Ψ_α, Φ_α , имеем соотношения для величин масштаба в следующем виде:

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_\alpha^2 \Psi_0}{\Phi_0^2 \Psi_\alpha}, \quad \alpha_2 = \frac{\Phi_0 \Psi_\alpha}{\Phi_\alpha \Psi_0}. \quad (10)$$

Соотношения, аналогичные (10), можно получить и на основании интегрирования выражения $R(p, 90^\circ, \alpha_1, \alpha_2)$, которое имеет вид (9) с заменой α_1 на α_2 .

Кроме описанного подхода, для определения масштабов можно также использовать полный перебор их значений.

5. Алгоритмы

1. Вычисление параметров смещений.

Пусть $R(p, \theta) = R[B(x, y)]$ — преобразование Радона для эталона, а $R(p, \theta, a_1, a_2) = R[B(x + a_1, y + a_2)]$ — для смещенного изображения.

Если помехи отсутствуют или отношение сигнал/шум достаточно велико, то изображение можно представить в бинарном виде, когда информационные точки кодируются значением 1, а точки фона как 0. Для этой идеальной ситуации применяют нормализацию смещений на базе функционалов центра тяжести [1]. Находим центры тяжести векторов $R(p, 0)$ и $R(p, 0, a_1, a_2)$. Их разность дает значение параметра a_1 . Аналогично разность центров тяжести векторов $R(p, 90^\circ)$ и $R(p, 90^\circ, a_1, a_2)$ дает значение параметра a_2 .

При наличии сложного фона или помех лучше применять корреляционный подход [1]. Пусть предполагаемые смещения находятся в диапазоне $a_1, a_2 \in [-L, L]$. Дополним значение вектора $R(p, 0, a_1, a_2)$ L точками в начале и в конце. В результате получим рабочий вектор размером $N + 2L + 1$ точек, по которому и будем осуществлять сканирование вектором $R(p, 0)$ размером N элементов. Для каждого положения сканирования вычисляем некоторую меру сходства двух векторов функций проекций, например, в виде $\mu(a) = \sum_{k=1}^N |R_0(k) - R_1(k)|$, где $R_0(k)$ — вектор эталона, $R_1(k)$ — рабочий вектор. Значение a , при котором величина μ достигает минимума, принимается в качестве смещения a_1 . Аналогичные операции проводим с векторами $R(p, 90^\circ)$ и $R(p, 90^\circ, a_1, a_2)$, в результате находим параметр a_2 .

2. Вычисление параметра поворота.

Пусть $R(p, \theta)$ — преобразование Радона для эталона, а $R(p, \theta - \varphi)$ — для повернутого изображения.

Как и в случае смещений, параметр поворота можно определить по неполному представлению преобразования. Если для смещений необходимы были значения векторов $R(p, 0, a_1, a_2)$ и $R(p, 90^\circ, a_1, a_2)$, то здесь достаточно одного вектора при фиксированном значении p .

Для простых ситуаций применяем функционалы центров тяжести, а в более сложных ситуациях необходимо применение корреляционного метода, связанного либо со сканированием внутри столбца, либо с перебором строк изображения и сопоставления их с одной из строк эталона.

3. Вычисление параметров масштаба.

При однородном масштабировании при значении $p=0$ параметр находится из соотношения $\alpha = \Phi_\alpha / \Phi_0$. Другие столбцы путем усреднения можно использовать для повышения надежности оценки в условиях помех.

При неоднородном масштабе параметры находятся из соотношений (10) или по аналогичным функционалам, построенным на функции $R(p, 90^\circ, \alpha_1, \alpha_2)$. При значительном уровне помех или повышенным требованиям по точности определения параметров следует применять корреляционный метод.

6. Сравнительный анализ быстродействия

Как видим, для вычисления параметров геометрических преобразований достаточно ограниченной информации о радоновском образе изображения и эталоне в виде отдельных строк или столбцов матрицы преобразования Радона, что сводит двумерную задачу к одномерной обработке.

Проанализируем быстродействие и эффективность предложенных и известных методов на примере нахождения параметров смещений. Считаем,

что допустимые значения смещений находятся в интервале $a_1, a_2 \in [-L, L]$, а размер изображения — $N \times N$ пикселей. Общее количество шагов при использовании корреляционного метода в результате будет равно $(2L + 1)^2$.

Для классического корреляционного метода количество вычислений (без учета времени построения текущего изображения) составляет $T_k = (2L + 1)^2 N^2 4t_c$, где t_c — время сложения.

Для классического метода нормализации на базе «центров тяжести», где используются функционалы Φ, Ψ , количество вычислений можно оценить величиной $T_n = 10N^2 t_c$, где для упрощения считается, что время умножения примерно равно величине $3t_c$.

Для метода с использованием преобразования Радона на базе «центров тяжести» количество вычислений составляет

$$T_{pn} = 2N^2 t_c + 10N t_c = 2N t_c (N + 5),$$

где $2N^2 t_c$ — время вычисления двух строк преобразования Радона.

Для корреляционного метода с использованием преобразования Радона время вычислений равно $T_{pk} = 2N^2 t_c + 2(2L + 1)N 4t_c = 2N t_c (N + 8L + 4)$. Конкретно для $L=10$, $N=115$ имеем $T_k = 23328900 t_c$, $T_n = 132250 t_c$, $T_{pn} = 27600 t_c$, $T_{pk} = 45770 t_c$.

Как видим, нормализация с применением преобразования Радона имеет существенные преимущества по скорости вычислений по сравнению с классическими подходами. Для конкретных данных при корреляционном подходе имеем выигрыш более чем в 500 раз, а при нормализации по центрам тяжести — в 4 раза. При этом для радоновских образов время корреляционного метода лишь в 1,5 раза больше, чем для соответствующего метода центров тяжести. В то же время в исходном пространстве изображений это соотношение равно 170. Это дает возможность применять более помехозащищенный корреляционный метод в пространствах Радона без особого усложнения вычислительных проблем.

Использование полной информации о матрице преобразования Радона позволит в дальнейшем усиливать помехозащищенность оценок параметров путем накопления измерений.

7. Эксперименты

На рис. 3 в качестве примера приведено изображение буквы «п» и полученное для него преобразование Радона. Исходное бинарное изображение имеет размеры 115×115 , яркость сигнала равна 0, яркость фона — 255. Центр координат изображения размещен в точке матрицы с координатами [57, 57]. Значения функции преобразования при этом находятся в пределах 0 до 162×255 и пред-