днего, зависящая от tgd образца и подтверждаемая отдельными точками экспериментальных исследований.

Рассмотренный алгоритм может оказаться достаточно универсальным для резонаторных датчиков с емкостным характером измерительной апертуры. Численный алгоритм хорошо сходится при значительно меньшем порядке СЛАУ, чем в алгоритме по методу Галеркина. Однако трудности вычисления элементов определителей сопоставимы для обоих методов. Сам подход к полуобращению интегрального оператора, по-видимому, будет справедлив и при других характерах апертур.

Литература: 1. *Anlage S.M., Steinhauer D.E., Vlahacos C.P. et al.* Superconducting Material Diagnostics using a Scanning Near-Field Microwave Microscope // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. 1999. Vol. 9, N 2. P. 4127-4132. 2. *Неразрушающие* бесконтактные СВЧ - резонаторные методы локального контроля полупроводниковых материалов: Обзор / *Ахманаев В.Б., Детинко В.М., Медведев Н.В. и др.* // Дефектоскопия. 1986. №1. С.23-35. 3. *Гордиенко Ю.Е.* Резонансные измерительные преобразователи в диагностике микрослоистых структур // Радиотехника. 1996. Вып. 100. С. 253-266. 4. *Данилов Г.Н., Детинко М.В., Медведев Ю.В. и др.* СВЧ резонаторный метод измерения удельного сопротивления и толщины эпитаксиальных пленок // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ, Вып. 6(342), 1982. С. 16-19. 5. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с. 6. *Панченко Б.А.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей // Радиотехника. 1970. Вып. 15. С. 82-91. 7. *Chen-To Tai.* Dyadic Green's functions for a coaxial line // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1983. Vol. AP-31, N2. P. 355-358. 8. *Kisliuk M.* The dyadic Green's functions for cylindrical waveguides and cavities // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. 1980. Vol. MTT-28, N8. P. 894-898.

Поступила в редколлегию 06.04.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Айзацкий Н.И.

Гордиенко Юрий Емельянович, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХТУРЭ. Научные интересы: микроэлектроника, неразрушающий контроль материалов и изделий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-62.

Рябухин Алексей Александрович, аспирант кафедры микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХТУРЭ. Научные интересы: неразрушающий контроль материалов и изделий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-62.

УДК 621.317.799

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ПОТЕРЯМИ

ПАНЧЕНКО А.Ю.

Проводится обобщение волновых уравнений в неоднородной среде с потерями. Подробно рассматривается случай малых возмущений среды и малых потерь. Учитываются прямые и релаксационные потери. Представляется сравнительный анализ всех составляющих волновых уравнений для электромагнитных и акустических волн.

Постоянное совершенствование технических средств заставляет все более углубленно подходить к анализу известных физических явлений. В частности, развитие средств неразрушающего контроля вызвало практическую потребность более тщательного анализа волновых процессов в неоднородных средах с потерями.

Диагностика и неразрушающий контроль осуществляется с помощью электромагнитных и акустических волн. Целью данной работы является систематизация общих свойств и отличий между волновыми уравнениями для электромагнитных и акустических полей в материальных средах.

Для анализа электромагнитных процессов чаще используются уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Применяя к первому уравнению операцию rot, для левой части получаем:

$$\mathrm{rot\,rot}\vec{\mathrm{H}} = \mathrm{grad\,div}\vec{\mathrm{H}} - \nabla^2\vec{\mathrm{H}} . \quad (1)$$

Величину $\mathrm{div}\vec{\mathrm{H}}$ получим из четвертого уравнения:

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{H}} = -\left(\frac{\mathrm{grad}\mu}{\mu}\cdot\vec{\mathrm{H}}\right) . \quad (2)$$

Можно сразу отметить, что за исключением ряда задач, например распространения электромагнитных волн в плазме, скорость изменения параметров среды существенно меньше периода электромагнитных колебаний. Поэтому для тока смещения можно записать:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\vec{\mathrm{D}}}{\partial \mathrm{t}}\right) = \left[\mathrm{grad}\varepsilon\times\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}}\right] + \varepsilon\,\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}}\right). \quad (3)$$

Слагаемые, описывающие омические потери, в этом случае принимают вид:

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{j}} = \left[\mathrm{grad}\sigma\times\vec{\mathrm{E}}\right] + \sigma\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} . \quad (4)$$

Для того чтобы выразить в (3) и (4) поле $\vec{\mathrm{E}}$ через $\vec{\mathrm{H}}$, необходимо сделать допустимые приближения, в противном случае конечное выражение будет чрезмерно громоздким. Структура волновых уравнений сохраняется при малых потерях. Поэтому, ограничиваясь этим случаем, учтем релаксационные составляющие для полей $\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$, а также омические потери для электрического поля. Релаксационные составляющие можно представить так:

$$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon'\vec{\mathrm{E}} - \varepsilon'''\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}} , \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu'\vec{H} - \mu''' \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad (6)$$

где ε''' и μ''' — суммарные коэффициенты, включающие все релаксационные составляющие общих потерь.

При анализе неоднородных сред наиболее часто рассматривают случай слабых неоднородностей ($\Delta\varepsilon' << \varepsilon'$ и $\Delta\mu' << \mu'$). Для сильных неоднородностей используют разбиение объема на ряд частичных областей, в которых параметры среды можно считать постоянными. Таким образом, общая задача сводится к решению ряда локальных задач для однородной среды и сшивке полей на границах. Чтобы сохранить структуру волновых уравнений, радиус корреляции неоднородностей должен быть не менее длины волны электромагнитных колебаний — $|r_d| > \lambda_e$.

С учетом сказанного выше в (2) можно оставить только действительную составляющую магнитной проницаемости. Используя известное векторное тождество, преобразуем левую часть (2):

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \cdot \vec{E}\right) = \left(\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \cdot \nabla\right)\vec{E} + \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} +$$

$$+\left[\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \times \operatorname{rot}\vec{E}\right] + \left[\vec{E} \times \operatorname{rot}\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'}\right]. \qquad (7)$$

Все величины в этом выражении являются малыми. Оценить порядок малости каждого из слагаемых в правой части можно следующим образом:

$$\left(\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \cdot \nabla\right)\vec{E} \approx \frac{\Delta\mu'}{\mu' r_d} \cdot \frac{E}{\lambda_e}, \qquad (8)$$

$$\left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \approx E\frac{\Delta\mu'}{\mu' r_d^2}, \qquad (9)$$

$$\left[\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \times \operatorname{rot}\vec{E}\right] \approx \frac{\Delta\mu'}{\mu' r_d} \cdot \frac{E}{\lambda_e}. \qquad (10)$$

При сделанных предположениях эти слагаемые имеют первый порядок малости. Четвертое слагаемое будет существенно меньше, так как его второй сомножитель в первом приближении является ротором от градиента.

В правой части (3) можно исключить слагаемое, содержащее $\operatorname{grad}\varepsilon'''/\varepsilon'$. Тогда с учетом первого и второго уравнений Максвелла, в которых также оставлены только слагаемые первого порядка малости, получим:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \left[\frac{\operatorname{grad}\varepsilon'}{\varepsilon'} \times \operatorname{rot}\vec{H}\right] - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \varepsilon'''\mu'\frac{\partial^3 \vec{H}}{\partial t^3}. \qquad (11)$$

В правой части (4) останется только последнее слагаемое, причем для его преобразования также можно использовать второе уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{j} = -\sigma\mu'\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (12)$$

Собирая (1), (7), (11), (12) с учетом (8), (9), (10), окончательно получаем:

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\left[\left(\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} + \frac{\operatorname{grad}\varepsilon'}{\varepsilon'}\right) \times \operatorname{rot}\vec{H}\right] -$$

$$-\left(\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} \cdot \nabla\right)\vec{E} - \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'} +$$

$$+\sigma\mu'\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \left(\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} + \frac{\mu'''}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{H}. \qquad (13)$$

Аналогичные рассуждения для напряженности электрического поля при тех же предположениях приведут к следующему выражению:

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\left[\left(\frac{\operatorname{grad}\varepsilon'}{\varepsilon'} + \frac{\operatorname{grad}\mu'}{\mu'}\right) \times \operatorname{rot}\vec{E}\right] -$$

$$-\left(\frac{\operatorname{grad}\varepsilon'}{\varepsilon'} \cdot \nabla\right)\vec{H} - \left(\vec{H} \cdot \nabla\right)\frac{\operatorname{grad}\varepsilon'}{\varepsilon'} +$$

$$+\sigma\mu'\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \left(\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} + \frac{\mu'''}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{E}. \qquad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), можно отметить, что потери, как омические, так и релаксационные в них входят симметрично. Это соответствует физическим представлениям о взаимосвязи полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Слагаемые, которые определяют изменения полей на неоднородностях, будут отличаться даже для случая $\lambda_e << r_d$, что является следствием асимметрии уравнений Максвелла для полей в неоднородных средах.

Анализ акустических полей проведем для случая неподвижной среды и малых возмущений плотности, что соответствует сделанным выше предположениям для электромагнитных волн. Более того, для большинства задач акустики можно считать $\lambda_s << r_d$. Для составления волновых уравнений воспользуемся линеаризированной системой гидродинамики [1]:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\vec{v}_s + \left(\operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v}_s\right) = 0, \qquad (15)$$

$$\rho\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \operatorname{grad} p_s = \vec{f}_n. \qquad (16)$$

Здесь индексом s обозначены переменные, относящиеся к акустическому возмущению, без индекса — относящиеся к основному потоку. При анализе потерь будем учитывать вязкое трение, теплопередачу за счет теплопроводности и излучения, а также релаксационный процесс перераспределения энергии по степеням свободы молекул газа. Вязкое трение определяется поперечными производными акустической скорости $\vec{v}_s$. При заданных граничных условиях и отсутствии бифуркаций суммарный эффект от сил вязкого трения пропорционален $\vec{v}_s$. Тогда для $\vec{f}_n$ в (16) можно записать:

$$\vec{f}_n = \xi \vec{v}_s \ , \qquad (17)$$

где ξ – коэффициент, учитывающий вязкость и распределение поля $\vec{v}_s$ в пространстве.

С учетом релаксационных механизмов связь между сжатием и давлением можно выразить следующей пропорцией:

$$p_s \approx \left(\rho_s + \chi \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \right) . \qquad (18)$$

Тогда с учетом (18) уравнение состояния будет иметь вид [2]:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \left(\operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v}_s \right) + \eta \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} -$$

$$- \frac{\rho}{\gamma p} \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + \left(\operatorname{grad} p \cdot \vec{v}_s \right) \right] = 0 \ , \qquad (19)$$

здесь η – коэффициент, учитывающий действие всех релаксационных механизмов.

С учетом (17) и (19) уравнения акустики принимают вид:

$$\frac{1}{c_a^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v}_s = \frac{\eta}{c_a^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} \ , \qquad (20)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \operatorname{grad} p_s = \xi \vec{v}_s \ , \qquad (21)$$

где $\frac{1}{c_a^2} = \frac{\rho}{\gamma p}$.

На основании системы (20), (21) получим волновые уравнения для p_s и $\vec{v}_s$:

$$\nabla^2 p_s - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = - \frac{\eta}{c_s^2} \frac{\partial^3 p_s}{\partial t^3} - \frac{\xi}{\rho c_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} -$$

$$- \left(\frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} \cdot \operatorname{grad} p_s \right), \qquad (22)$$

$$\nabla^2 \vec{v}_s - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_s}{\partial t^2} = - \frac{\eta}{c_s^2} \frac{\partial^3 \vec{v}_s}{\partial t^3} - \frac{\xi}{\rho c_s^2} \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} -$$

$$- \frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} \operatorname{div} \vec{v}_s + \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{grad} \rho \cdot \nabla \right) \vec{v}_s \ . \qquad (23)$$

В этих уравнениях, также как и в уравнениях для электромагнитных полей, потери входят симметрично. Влияние неоднородности плотности среды – асимметрично, что соответствует влияниям неоднородностей ε' и μ' в уравнениях для электромагнитных волн. Можно отметить, что учет флуктуаций скорости основного потока приведет к еще большей асимметрии.

Потери представлены в конечных выражениях, как слагаемые, содержащие производные по времени, что является следствием исходных посылок, предполагающих уменьшение амплитуды свободных колебаний в поглощающей среде. Неоднородности включаются в слагаемые, содержащие производные по пространственным координатам. Неоднородности определяют изменение локального значения волнового числа и внутренние отражения от перепада скорости распространения волн, как для акустических, так и для электромагнитных полей. Поэтому уравнения Гельмгольца для неоднородных сред будут содержать следующие составляющие:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + k^2 \right) u = 0 \ , \qquad (24)$$

где k – волновое число.

Для сред с потерями волновые уравнения будут содержать дополнительные слагаемые с производными по времени:

$$\nabla^2 u + \varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \psi \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ , \qquad (25)$$

здесь φ и ψ – коэффициенты, учитывающие все механизмы прямых и релаксационных потерь.

Для сред с малыми неоднородностями и малыми потерями анализ можно производить раздельно. Необходимость использования совместного анализа определяется величиной неоднородностей.

Литература: **1.** *Лойянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с. **2.** *Панченко А.Ю.* Уравнение состояния в системе уравнений акустики для неоднородной движущейся среды // Радиотехника. 1997. Вып. 103. С. 169-174.

Поступила в редколлегию 28.03.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Довбня А.Н.

Панченко Александр Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика, микроэлектроника, неразрушающий контроль материалов и изделий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 409-362.