

Формируя лагранжиан

$$\begin{aligned}
L_t = & -I_t^{\text{PR}} + \rho(M\{\tilde{y}^2(t+d) | F_t\} - \tilde{Y}^2(t+d)) + \\
& + \mu(u^2(t) - \tilde{U}^2) = \\
= & -\varphi^T(t+d)P_\eta(t)\varphi(t+d) - (\varphi^T(t+d)H)^2\sigma_\xi^2 - \\
& - \sigma_{v_p}^2 + \rho((\varphi^T(t+d)\hat{\theta}(t+d))^2 + \\
& + \varphi^T(t+d)P_\eta(t)\varphi(t+d) + (\varphi^T(t+d)H)^2\sigma_\xi^2 + \\
& + \sigma_{v_p}^2 - \tilde{Y}^2(t+d)) + \mu(u^2(t) - \tilde{U}^2(t)) = \\
= & (\rho-1)(u^2(t)\tilde{P}_{m_0}(t) + 2u(t)\tilde{P}_{m_0}^T(t)\psi(t) + \\
& + \psi^T(t)\tilde{P}_1(t)\psi(t) + u^2(t)H_1^T\sigma_\xi^2 + \\
& + 2u(t)H_1H_2^T\psi(t)\sigma_\xi^2 + (H_2^T\psi(t))^2\sigma_\xi^2 + \sigma_{v_p}^2) + \\
& + \rho(u^2(t)\hat{m}_0^2(t+d) + 2u(t)\hat{m}_0(t+d) \times \\
& \times \hat{\ell}^T(t+d)\psi(t) + (\hat{\ell}^T(t+d)\psi(t))^2 - \\
& - \tilde{Y}^2(t+d)) + \mu(u^2(t) - \tilde{U}^2(t))
\end{aligned}$$

и оптимизируя его по $u(t)$ с помощью процедуры Эрроу - Гурвица - Удзавы, получаем закон управления

$$\begin{cases}
\tilde{u}^{\text{NST}}(t) = \\
= - \frac{(\rho(t)-1)(\tilde{P}_{m_0}^T(t) + \sigma_\xi^2 H_1 H_2^T) + \rho(t)\hat{m}_0(t+d)\hat{\ell}^T(t+d)}{(\rho(t)-1)(\tilde{P}_{m_0}(t) + \sigma_\xi^2 H_1^T) + \rho(t)\hat{m}_0^2(t+d) + \mu(t)} \psi(t), \\
\rho(t+1) = [\rho(t) + \Gamma_\rho(t+1)((\varphi^T(t+d)\hat{\theta}(t+d))^2 + \\
+ \varphi^T(t+d)P_\eta(t)\varphi(t+d) + (\varphi^T(t+d)H)^2\sigma_\xi^2 + \\
+ \sigma_{v_p}^2 - \tilde{Y}^2(t+d))]_+, \\
\mu(t+1) = [\mu(t) + \Gamma_\mu(t+1)(\tilde{u}^{\text{NST}}(t))^2 - \tilde{U}^2(t)]_+,
\end{cases}$$

совпадающий при $\lambda^{-1}(t) = \rho(t)$, $\mu(t) = 0$ с (12) и работающий при $\rho(t) = 0$ в режиме акселерации, $\rho(t) = 1$ — стохастической эквивалентности, $\rho(t) \rightarrow \infty$ — осторожности, поддерживая при этом ограничения на управляющий сигнал, благодаря настраиваемому параметру $\mu(t)$.

Таким образом, предлагаемый регулятор позволяет обеспечить активно-адаптивное управление существенно нестационарным стохастическим динамическим объектом, превосходя по качеству традиционные процедуры, основанные на стохастически эквивалентном подходе.

Литература: 1. Адонин О.В., Бодянский Е.В., Котляревский С.В. Управление динамическими стохастическими нестационарными объектами в условиях неопределенности с активным накоплением информации. I. Достоверно-эквивалентный подход // Радиоэлектроника и информатика. 1999. N4. С. 76-81. 2. Адонин О.В., Бодянский Е.В., Котляревский С.В. Адаптивный регулятор с активным накоплением информации // Радиоэлектроника и информатика. 2000. N3. С. 57-60. 3. Chan S., Zarrop M. A suboptimal dual controller for stochastic systems with unknown parameters // Int.J.Contr. 1985. 41. N2. P.507-524. 4. Ishihara J., Abe K., Takeda H. Active adaptive control based on ARX model with randomly varying coefficients // Trans. Soc. Instrum. 1985. 21. N7. P.698-705. 5. Катковник В.Я., Хейсин В.Е. Итеративные алгоритмы оптимизации для отслеживания дрейфа экстремума // Автоматика и вычислительная техника. 1976. N6. С.34-40. 6. Бодянский Е.В. Адаптивное оценивание параметров нестационарных объектов // Автоматика. 1989. N1. С.63-74. 7. Бодянский Е.В., Котляревский С.В. Адаптивное управление динамическим существенно нестационарным объектом // Автоматика и телемеханика. 1995. N6. С. 111-116.

Поступила в редколлегию 10.10.2000

Рецензент: проф. Любчик Л. М.

Адонин Олег Валерьевич, аспирант кафедры искусственного интеллекта ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 40-98-90

Бодянский Евгений Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры искусственного интеллекта ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы, искусственные нейронные сети. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 40-98-90.

E-mail: bodya@kture.kharkov.ua

Котляревский Сергей Владимирович, канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник ПНИЛ АСУ ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 40-98-90

УДК 517.21

СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВЛИЯНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ФАКТОРОВ

ГЕРАСИН С.Н., ГИБКИНА Н.В., ЛИЗГИН В.А.

Рассматривается вопрос о приведении вероятностей состояний неоднородной марковской системы к заранее заданным значениям при воздействии на переходные характеристики системы непрерывно распределенных стабилизирующих возмущений

Как известно, стабилизация вероятностей состояний процесса обычно возникает из-за воздействия на него быстро изменяющихся факторов, локализованных на малых промежутках времени [1]. В модельной ситуации таким возмущениям подвергаются элементы переходной или инфинитезимальной матрицы системы. Довольно часто бывает, что эти факторы многократно воздействуют на процесс в течение некоторого промежутка времени и всякий раз вызывают сильные возмущения параметров процесса. Такое многократное повторение возмущений приводит к появлению на интервале времени множества точек стабилизации [2]. На практике приходится иметь дело с такими факторами, которые, непрерывно воздействуя на процесс, приводят к появлению на нем точек стабилизации, распределенных почти непрерывно, напри-

мер, при производстве различных фармакологических препаратов. Перемешивание ингредиентов лекарственного сырья осуществляется путем вибраций, которые можно считать непрерывно действующими возмущениями. Такие факторы будем называть стабилизирующими. В этом случае для любого интервала времени $[t_1, t_2) \subset [a, b]$ можно ввести меру стабилизации (процесс изучается на интервале $[a, b]$). Обозначим через $\mu(t_1, t_2)$ меру стабилизации:

$$\mu(t_1, t_2) = \sup_j \{R_j(t_1, t_2) - r_j(t_1, t_2)\},$$

$$R_j(t_1, t_2) = \sup_i p_{ij}(t_1, t_2), \quad r_j(t_1, t_2) = \inf_i p_{ij}(t_1, t_2),$$

$P = (p_{ij}(t_1, t_2))_{i,j=1}^{\infty}$ — матрица переходных вероятностей процесса.

Величина $\mu(t_1, t_2)$ определяет суммарный стабилизирующий эффект, возникающий за счет всех точек стабилизации, “размазанных” на $[t_1, t_2)$ [1].

Рассмотрим наиболее типичные случаи, когда стабилизирующие факторы оказывают влияние на переходные характеристики процесса. Пусть неоднородный марковский процесс $\xi(t)$ определяется своей инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t) = \lambda_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$. Наблюдение за переходными характеристиками $\lambda_{ij}(t)$ ведется на промежутке времени $[0, 1]$. В течение этого времени на процесс, а значит и на параметры $\lambda_{ij}(t)$ действуют возмущения, определяемые матрицей возмущений $\Delta\Lambda(t)$. Рассмотрим, как ведут себя решения системы Колмогорова для вероятностей состояний

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \vec{p}(t) [\Lambda(t) + \Delta\Lambda(t)]$$

в случае стабилизирующих воздействий $\Delta\Lambda(t)$.

Для вычислительного эксперимента была выбрана следующая матрица $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 12t^4 & -16t^4 & 4t^4 \\ t^2 & 1,5t^2 & -2,5t^2 \end{bmatrix}.$$

Возмущения задаются так, что возмущенный процесс может быть описан инфинитезимальной матрицей

$$\Lambda(t) + \Delta\Lambda(t). \quad (1)$$

Возмущающая матрица $\Delta\Lambda(t)$ имеет следующий вид:

$$\Delta\Lambda(t) = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 8 \\ 14 & -19 & 5 \\ 8 & 10 & -18 \end{bmatrix} \cdot f(t),$$

где $f(t)$ — возмущение.

Будем оценивать величину отклонения значений вероятностей состояний процесса от их теоретических значений в точке $t_0 = 1$:

$$\sigma_i = |p_i^* - p_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь σ_i — i -я компонента вектора $\vec{\sigma}$ отклонений; p_i^* — i -я компонента нулевого левого собственного вектора $\vec{p}^*$ матрицы $\Delta\Lambda(t)$ в точке t_0 ; p_i — значение i -й компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в точке t_0 ; n — число состояний рассматриваемого марковского процесса.

Вычисления будем проводить для начального распределения $\vec{p}^0 = (0,7, 0,2, 0,1)$.

Для возмущенного процесса, описываемого матрицей (1), выполнены условия существования точек фокусировки и предельных вероятностей в этих точках, не зависящих от начального распределения вероятностей и момента времени, с которого начинается процесс [3].

Нулевой левый собственный вектор возмущающей матрицы $\Delta\Lambda(t)$ в точке t_0 имеет вид:

$$\vec{p}^* = (0,533821, 0,179159, 0,287020).$$

1. *Регулярные возмущения.* Рассмотрим возмущения, действие которых задано на частичных отрезках

как $\left[\frac{i}{2^z}, \frac{i+1}{2^z}\right)$, $i = 0, 1, \dots, 2^z - 1$. На каждом из них возмущения линейно нарастают от нуля до некоторого значения A . Характер возмущений представлен на рис. 1.

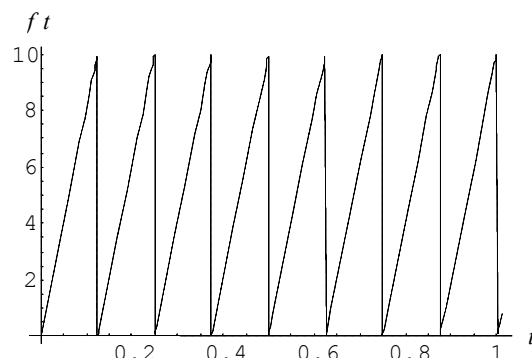


Рис. 1. Возмущение $f(t)$ при $z = 3$ и $A = 10$

На рис. 2 приведен график поведения первой компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова с возмущенной матрицей (1); пунктиром на графике показано теоретическое предельное значение вероятности.

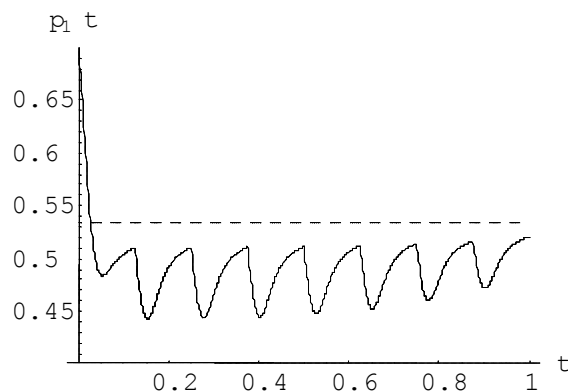


Рис. 2. Поведение первой компоненты

Вектор значений решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в точке t_0 имеет вид:

$$\bar{p} = (0,520381, 0,180503, 0,299115).$$

Вектор $\bar{\sigma} = (0,013439, 0,001344, 0,012095)$.

Замечено, что при увеличении числа всплесков с сохранением суммарной площади под кривой возмущения наблюдается более раннее приближение компонент решения системы к теоретическим предельным значениям. На рис. 3,а показано поведение первой компоненты решения для случая, когда количество возмущений увеличено в два раза по сравнению со случаем, изображенным на рис. 1, и равно шестнадцати. Компоненты вектора $\bar{\sigma}$ в этом случае незначительно увеличиваются:

$$\bar{\sigma} = (0,014217, 0,001705, 0,012513).$$

Увеличением мощности возмущения A также можно добиться более быстрого приближения вероятностей состояний к заданным значениям. На рис. 3,б приведен график поведения первой компоненты решения при увеличении мощности возмущения в 10 раз по сравнению со случаем, изображенным на рис. 1. Кроме того, здесь можно существенно уменьшить величину отклонения $\bar{\sigma}$. В рассматриваемом случае компоненты вектора $\bar{\sigma}$ уменьшились приблизительно в 10 раз, вектор $\bar{\sigma} = (0,001346, 0,000131, 0,001216)$.

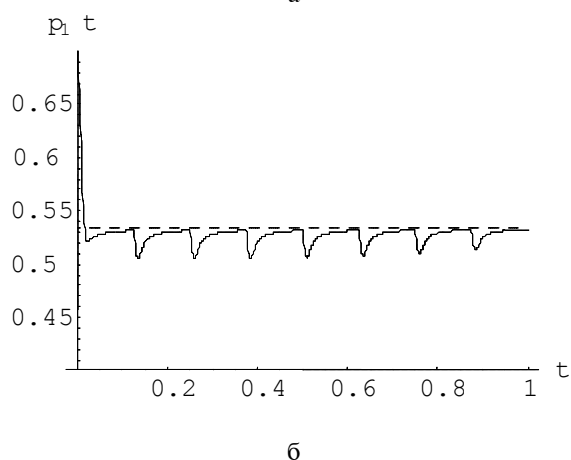
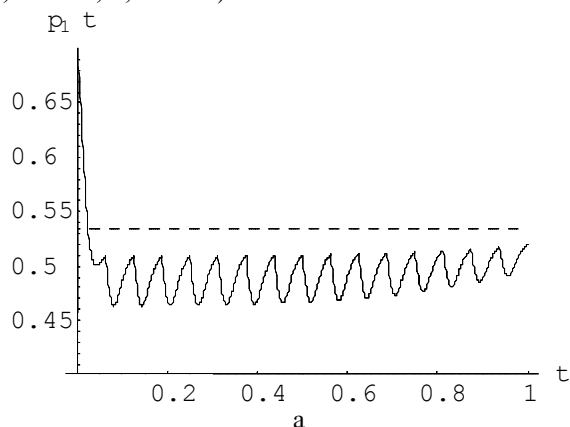


Рис. 3. Графики поведения первой компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова с возмущенной матрицей при $z = 4$ и $A = 10$ (а) и при $z = 3$ и $A = 100$ (б)

Далее рассмотрим регулярные возмущения, действующие, как и ранее, на частичных отрезках $\left[\frac{i}{2^z}, \frac{i+1}{2^z}\right)$, $i = 0, 1, \dots, 2^z - 1$ и изменяющиеся на каждом из этих отрезков по степенному закону

$$f(t) = at^4, \quad t \in \left[\frac{i}{2^z}, \frac{i+1}{2^z}\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^z - 1.$$

Характер возмущений представлен на рис. 4.

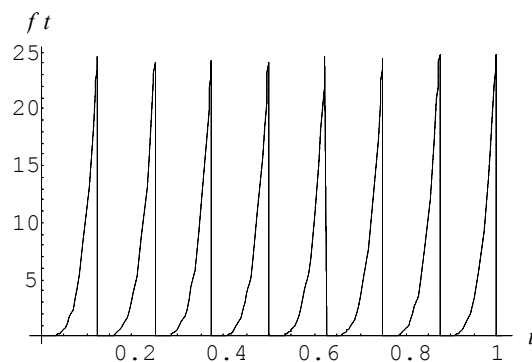


Рис. 4. Характер возмущения $f(t)$

График, отображающий поведение первой компоненты, приведен на рис. 5; как и ранее, пунктиром на графике показано теоретическое предельное значение вероятности.

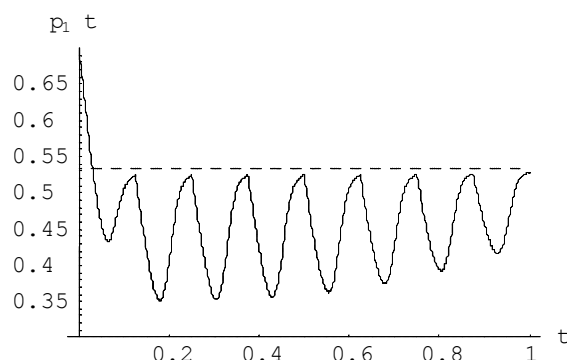


Рис. 5. График поведения первой компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова с возмущенной матрицей (1)

Вектор значений решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в точке t_0 имеет вид: $\bar{p} = (0,528132, 0,179811, 0,292057)$. Вектор $\bar{\sigma} = (0,005689, 0,000652, 0,005036)$.

Из полученных результатов видно, что возмущениям, возрастающим по степенному закону, соответствует более широкая полоса локализации вероятностей состояний, чем в случае линейных возмущений, однако величина $\bar{\sigma}$ по сравнению с линейными возмущениями для степенных возмущений в 2-2,5 раза меньше. Это можно объяснить тем, что при степенных возмущениях основное воздействие приходится на конец каждого из частичных отрезков, когда сила возмущения становится достаточно большой.

2. Возмущения, сгущающиеся к точке t_0 . Действие возмущений задается на частичных отрезках $\left[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)$, $i = 0, 1, 2, \dots, z$, центры которых с ростом i (здесь i - номер частичного отрезка) стремятся к точке t_0 . На каждом из частичных отрезков возмущение линейно нарастает (начиная с нуля); площади под всеми возмущениями совпадают. Характер возмущений представлен на рис. 6.

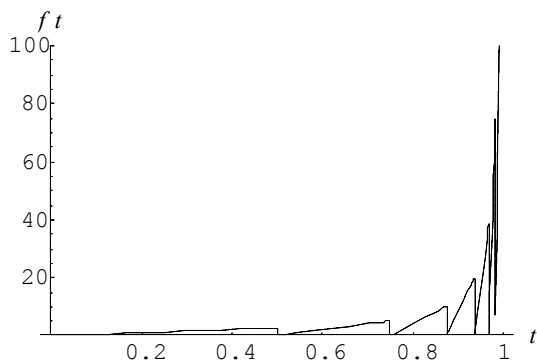


Рис. 6. Сгущающиеся к точке t_0 возмущения $f(t)$

На рис. 7 изображено поведение первой компоненты; пунктиром на графике показано теоретическое предельное значение вероятности.

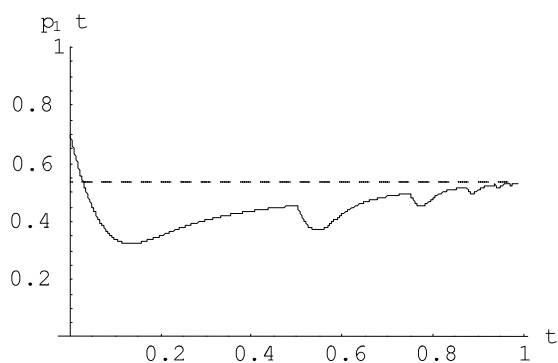


Рис. 7. График поведения первой компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова с возмущенной матрицей (1)

Вектор значений решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в точке t_0 имеет вид: $\vec{p} = (0,529686, 0,179292, 0,291022)$. Вектор $\vec{\sigma} = (0,004135, 0,000133, 0,004001)$.

Сравнивая результаты, полученные в пунктах 1 и 2, можно сделать вывод о том, что при сгущающейся последовательности точек σ -фокусировки величина $\vec{\sigma}$ уменьшается, а полоса локализации вероятностей состояний сужается. Однако в этом случае вероятности состояний позже попадают в σ -окрестность предельного распределения. Это объясняется тем, что из-за уменьшения времени действия при одинаковых площадях под каждым всплеском сила воздействия на процесс в конце каждого частичного отрезка постоянно возрастает.

3. Возмущения, действующие в случайные моменты времени. Предположим, что в случайные моменты времени на рассматриваемый процесс действуют возмущения в виде прямоугольных импульсов. Площади под всеми импульсами одинаковы, однако из-за случайности времени действия эти импульсы имеют разную высоту; суммарная площадь возмущений такая же, как и в случаях 1, 2. Пример действия импульсов представлен на рис. 8.

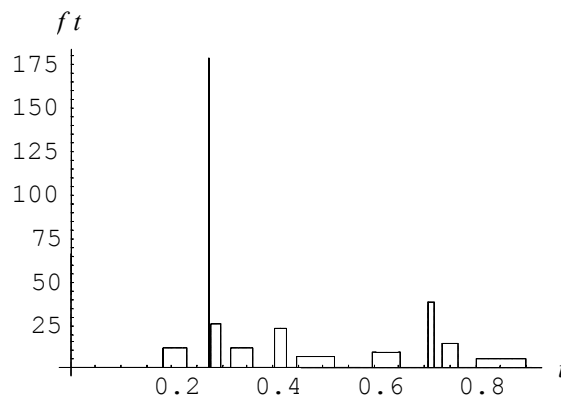


Рис. 8. Характер возмущений $f(t)$

График сходимости первой компоненты показан на рис. 9; пунктиром на графике показано теоретическое предельное значение вероятности.

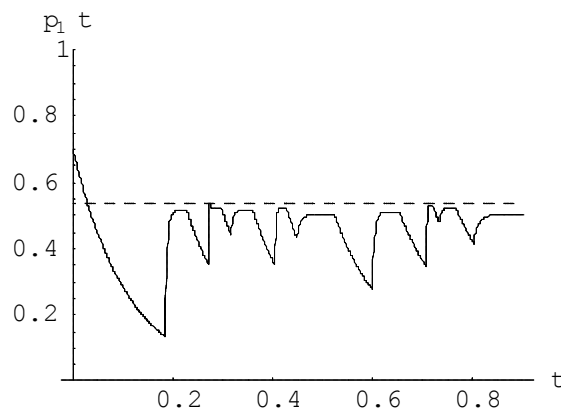


Рис. 9. График сходимости первой компоненты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова с возмущенной матрицей (1)

Вектор значений решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в точке t_0 имеет вид: $\vec{p} = (0,503711, 0,188284, 0,308005)$. Вектор $\vec{\sigma} = (0,030110, 0,009125, 0,020985)$.

Из графиков видно, что в этом случае сходимость к предельному распределению имеет скачкообразный характер из-за нерегулярного действия возмущений и разной их силы. Поведение вероятностей состояний во многом определяется картиной распределения случайных воздействий на исследуемом интервале, поэтому для различных распределений величина $\vec{\sigma}$ может быть как больше, так и меньше, чем в случаях 1, 2.

Вычисления во всех случаях были проведены для различных начальных распределений, заданных в точке $s_0 = 0$. Заметим, что выбор начального распределения в точке s_0 не влияет на значения предельных вероятностей исследуемого процесса [3].

В таблице приведены значения вектора $\vec{\sigma}$ для различных видов возмущений.

Характер возмущения	σ_1	σ_2	σ_3
Линейные	0,013439	0,001344	0,012095
Степенные	0,005689	0,000652	0,005036
Сгущающиеся к точке t_0	0,004135	0,000133	0,004001
Возникающие в случайные моменты времени	0,030110	0,009125	0,020985

Анализируя результаты, полученные в пунктах 1-3, можно сделать следующие выводы. Наименьшие значения вектора отклонений $\vec{\sigma}$ были получены при сгущающихся к концу исследуемого интервала возмущениях. Этому же случаю соответствует самая узкая полоса локализации вероятностей состояний, при этом они изменяются наиболее плавно, однако позже, чем для регулярных возмущений, попадают в σ -окрестность предельного распределения. Хорошие результаты также дает стабилизация процесса регулярными степенными возмущениями. Возмущениям, возникающим в случайные моменты времени, соответствует наихудший вектор $\vec{\sigma}$.

Как видно, каждый из рассмотренных видов возмущений имеет и достоинства, и недостатки. Выбирая на практике способ стабилизации процесса,

нужно исходить из того, какую цель желает достичь исследователь: получить в точке t_0 минимальное отклонение вероятностей состояний от теоретических значений или же быстрее “загнать” вероятности состояний процесса в σ -окрестность предельного распределения.

Все вычисления были проведены с помощью пакета программ, разработанного авторами в системе символьной математики Mathematica 4©.

Литература: 1. Дикарев В.А. Фокусирующие факторы. Базисы фокусировки и стабилизации // Радиоэлектроника и информатика. 1998. №2(3). С.50-53. 2. Басманов А.Е., Дикарев В.А. Стабилизация марковского процесса в окрестности распределения, заданного на конечном временном промежутке // Доп. НАН України, 1999. №8. С.69-73. 3. Герасин С.Н. Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем. Харьков. Изд-во ХТУРЭ, 1999. 212 с.

Поступила в редколлегию 15.12.2000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: hm@kture.ua, тел: (0572)40-93-72 (раб.), (0572)72-12-38 (дом.).

Гибкина Надежда Валентиновна, инженер-стажер кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14.

Лизгин Валерий Анатольевич, начальник отдела АСУ АО “Меркурий”. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория неоднородных структур, программирование. Адрес: Россия, 357100, Карачаево-Черкесская республика, г. Черкесск, ул. Кавказская, 126, тел.: (87822)511-51.

УДК 514.753

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ ЗАЩИТЫ

АНТОШКИН А.А., КОМЯК В.М.,
РОМАНОВА Т.Е., ШЕХОВЦОВ С.Б.

Исследуются особенности размещения пожарных извещателей в защищаемом помещении. Рассматриваемая прикладная задача сводится к задаче покрытия произвольной двумерной области кругами заданного радиуса. На основании анализа технологических ограничений задачи строится ее математическая модель.

Эффективность решения задач оптимального управления в технических системах непосредственно связана с разработкой математических методов, позволяющих осуществить выбор рациональной, с точки зрения используемого критерия оптимальности, структуры технической системы. Задачи синтеза оптимальных структур возникают при разработке систем обнаружения и оповещения, одним из классов которых являются системы автоматической противопожарной защиты.

При решении таких задач необходимо учитывать реальные геометрические особенности элементов систем, их тип, количество, параметры размещения и т.п. Поэтому целесообразно преобразование информации о различных по своей физической природе составных элементах технических систем в единый вид геометрической информации. Это позволяет осуществить формализацию и решение