

**ЭВ
&
ЭС**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

6'2006

www.radiotec.ru/

т. 11

В НОМЕРЕ :

**Метод численного решения
задачи Неймана
для уравнения Лапласа
с подвижной границей**

**Эксперименты
по нетепловому воздействию
мощных электромагнитных импульсов
на золотосодержащую
горную породу**



Тел./факс: (495) 625-9241
E-mail: info@radiotec.ru
[Http://www.radiotec.ru/](http://www.radiotec.ru/)

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 71961 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

Р-функции, атомарные функции, вейвлеты, фракталы и хаос

УДК 621.372(075.8)

Преобразование Вигнера и атомарные функции в цифровой обработке сигналов

О. В. Вишневский, В. Ф. Кравченко, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор

Использовано преобразование Вигнера для анализа сигналов произвольной природы; рассмотрены свойства, особенности, достоинства и недостатки преобразования Вигнера; показано, что применение преобразования Вигнера полезно при анализе различных сигналов; произведено сравнение результатов расчетов преобразования Вигнера сигналов с результатами оконного преобразования Фурье этих же сигналов; в качестве примера проанализированы некоторые атомарные функции и окна Кравченко–Рвачева; отмечено, что преобразование Вигнера и оконное преобразование Фурье хорошо дополняют друг друга, поэтому рекомендовано совместное применение этих преобразований для анализа сигналов различной природы.

The application of Wigner distribution for analysis of the signals produced anyway is proposed. The properties, peculiarities, advantages and disadvantages of Wigner distribution are discussed. The Wigner distribution application for the different signal investigations is shown to be useful. The results calculated with using of the Wigner distribution are compared with same calculated with using of the short-time Fourier transform. As example, some atomic functions and Kravchenko-Rvachev windows are analyzed. The Wigner distribution is shown to be good addition to the Fourier transform. Because the simultaneously application of the Wigner distribution and Fourier transform is recommended.

Введение. В последние годы в различных областях науки и техники проявляется повышенный интерес к использованию новых видов сигналов (сверхширокополосных, фрактальных и т. п.). С одной стороны, новые виды сигналов наряду с традиционными методами анализа (различные типы преобразования Фурье) требуют использования новых методов (например, вейвлет-анализ), позволяющих повысить количество получаемых сведений об исследуемых сигналах. Одним из возможных направлений при этом может быть использование частотно-временных преобразований, в частности преобразования Вигнера.

С другой стороны, прием и обработка реальных сигналов всегда сопровождается влиянием помех. Внешние помехи чаще всего представляют собой случайную последовательность импульсов со случайными параметрами. Такие помехи не являются гауссовыми. Для них разномасштабные компоненты в разложении являются скоррелированными, что приводит к неэффективности линейных методов анализа (таких как Фурье-анализ, вейвлет-анализ и др.). В то же время преобразование Вигнера, являясь нелинейным, может повысить качественные показатели при нелинейной фильтрации помех.

Цель работы – рассмотрение возможности и целесообразности применения преобразования Вигнера для анализа сигналов различной природы, а также сравнение полученных результатов для модельных сигналов с результатами традиционного оконного преобразования Фурье.

Основы преобразования Вигнера. Впервые преобразование Вигнера было введено в 1932 г. в статье по квантовой термодинамике [1]. Несколько позднее (в 1948 г.) Дж. Вилль предложил использовать это преобразование при обработке сигналов для анализа частотно-временных структур [2]. По этой причине рассматриваемое преобразование в литературе иногда называют преобразованием (или распределением) Вигнера–Вилля [3]. Преобразование Вигнера относится к общему классу квадратичных частотно-временных распределений, введенному Л. Коэном в 1966 г. [4].

Преобразование Вигнера сигнала $f(t)$ задается следующим соотношением [3–5]:

$$P_V[f(t)] \equiv P_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt \quad (1)$$

и представляет собой преобразование Фурье от произведения $f(\tau + \frac{t}{2}) f^*(\tau - \frac{t}{2})$. Здесь символ «*» обозначает операцию комплексного сопряжения.

Преобразование Вигнера [3,4] обладает следующими свойствами.

Вещественность. Функция спектральной плотности (ФСП) $P_V f(\tau, \omega)$ является вещественной вследствие эрмитовой симметрии произведения $f(\tau + t/2)f^*(\tau - t/2)$ по t .

Симметрия аргументов. Из равенства Парсеваля следует, что время τ и частота ω симметричны, а потому ФСП $P_V(\tau, \omega)$ можно записать в виде

$$P_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^*\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) \exp(i\gamma\tau) d\gamma, \quad (2)$$

где $\hat{f}(\omega)$ – ФСП преобразования Фурье сигнала $f(t)$.

Частотно-временной носитель. Если энергия сигнала $f(t)$ хорошо локализована вблизи t_0 во временной области и вблизи ω_0 в частотной области, то $P_V f(\tau, \omega)$ имеет энергию, сконцентрированную в окрестности точки (t_0, ω_0) с протяженностью, равной частотной и временной протяженности самого сигнала f .

Сдвиг по фазе сигнала $f(t)$ на величину φ_0 не изменяет его ФСП $P_V f(\tau, \omega)$:

$$P_V [f(t) \exp(i\varphi_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \exp(i\varphi_0) f^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\varphi_0) \exp(-i\omega t) dt = P_V f(\tau, \omega).$$

Сдвиг по времени сигнала $f(t)$ на t_0 приводит к такому же смещению $P_V f(\tau, \omega)$ по оси времени:

$$P_V [f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau - t_0 + \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau - t_0 - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt = P_V f(\tau - t_0, \omega).$$

Сдвиг по частоте $\hat{f}(\omega)$ на ω_0 , приводящий к домножению $f(t)$ на $\exp(i\omega_0 t)$, вызывает такое же смещение $P_V f(\tau, \omega)$ по оси частот:

$$P_V [f(t) \exp(i\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \omega_0 + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^*\left(\omega - \omega_0 - \frac{\gamma}{2}\right) \exp(i\gamma\tau) d\gamma = P_V f(\tau, \omega - \omega_0).$$

Масштабирование по времени аргумента сигнала $f(t)$ на a приводит к масштабированию аргументов ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ на a и $1/a$ соответственно:

$$P_V \left[\frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\tau}{a} + \frac{t}{2a}\right) f^*\left(\frac{\tau}{a} - \frac{t}{2a}\right) \exp(-i\omega t) dt = P_V f\left(\frac{\tau}{a}, s\omega\right).$$

Множитель $1/\sqrt{a}$ появляется перед сигналом $f(t)$ из условия нормировки энергии сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.$$

Масштабирование по частоте аргумента ФСП сигнала $\hat{f}(\omega)$ на β приводит к масштабированию аргументов ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ на $1/\beta$ и β соответственно:

$$P_V \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \right] = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\beta} + \frac{\gamma}{2\beta}\right) \hat{f}^*\left(\frac{\omega}{\beta} - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \exp(i\gamma\tau) d\gamma = P_V f\left(\beta\tau, \frac{\omega}{\beta}\right).$$

Мгновенная частота сигнала $f(t)$ может быть вычислена как

$$\omega(t) = \phi'(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi P_V f_a(t, \xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} P_V f_a(t, \xi) d\xi},$$

если аналитическая часть $f_a(t)$ сигнала $f(t)$, полученная путем приравнивания к нулю $\hat{f}(\omega)$ для $\omega < 0$, может быть записана в виде $f_a(t) = a(t) \exp(i\phi(t))$.

Обращение по времени. Изменение знака аргумента сигнала $f(t)$ приводит к изменению знаков обоих аргументов ФСП $P_V f(\tau, \omega)$:

$$P_V[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau - \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \exp(i\omega t) d(-t) = P_V f(-\tau, -\omega).$$

Комплексное сопряжение. При замене сигнала $f(t)$ на комплексно-сопряженный ему сигнал $f^*(t)$ у ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ меняется знак перед вторым аргументом:

$$P_V[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt = P_V f(\tau, -\omega).$$

Из этого, в частности, следует, что для вещественного сигнала $f(t)$ ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ является четной функцией по второму аргументу.

Обращение. По ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ можно восстановить сигнал $f(t)$ с точностью до постоянной фазы с помощью соотношения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi f^*(t')} \int_{-\infty}^{\infty} P_V f\left(\frac{t+t'}{2}, \omega\right) \exp(i(t-t')\omega) d\omega,$$

где t' – произвольный момент времени.

Сохранение энергии (теорема Моаяля). Для любых функций $f(t)$ и $g(t)$ из $L^2(R)$ можно записать выражение

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \iint P_V f(\tau, \omega) P_V g(\tau, \omega) d\tau d\omega.$$

Отсюда следует, что энергию сигнала $f(t)$ можно вычислить как

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \iint P_V^2 f(\tau, \omega) d\tau d\omega}.$$

Маргинальные распределения. Для распределения Вигнера существуют маргинальные распределения, а следовательно выполняются соотношения [3, 4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_V f(\tau, \omega) d\tau = |\hat{f}(\omega)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_V f(\tau, \omega) d\omega = |f(t)|^2.$$

Интерференция. Поскольку преобразование Вигнера квадратично по $f(t)$, при его вычислении от суммы двух сигналов возникает интерференция:

$$P_V[f_1 + f_2] = P_V f_1 + P_V f_2 + P_V[f_1, f_2] + P_V[f_2, f_1],$$

где $P_V[f_1, f_2]$ – перекрестное преобразование Вигнера двух сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, которое имеет вид

$$P_V[f_1, f_2](\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f_2^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt.$$

Интерференционный член $I[f_1, f_2] = P_V[f_1, f_2] + P_V[f_2, f_1]$ является вещественной функцией переменных τ и ω и может оказаться отличным от нуля в областях, где $P_V f_1$ и $P_V f_2$ равны нулю. Последнее может привести к «обнаружению» исследователем несуществующих сигналов. Так, например, для двух локализованных частотно-временных структур (по терминологии [3] – частотно-временных атомов) интерференция возникает в средней частотно-временной точке между их частотно-временными центрами, имеет сложную структуру и носит колебательный характер, отличный от характера самих атомов.

Избавиться от интерференционных членов можно с помощью методов, основанных на усреднении ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ с различными частотно-временными ядрами $\theta(\tau, \tau', \omega, \omega')$, что, к сожалению, несколько ухудшает частотно-временное разрешение [4]. Показано [3], что спектрограмма оконного преобразования Фурье, скэйлограмма вейвлет-преобразования и вообще все квадратичные частотно-временные разложения могут быть записаны как частотно-временные усреднения преобразования Вигнера.

Кроме того, на основе преобразования Вигнера могут быть записаны его модификации:

$$LP_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^L\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f^{*L}\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt, \quad (3)$$

$$DLP_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^L\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^{*L}\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) \exp(i\gamma\tau) d\gamma, \quad (4)$$

получившие названия L -преобразования Вигнера и дуального L -преобразования Вигнера соответственно [5, 6] (здесь L – натуральное число). Очевидно, что при $L=1$ формулы (3) и (4) переходят в (1) и (2), а соответствующие преобразования – в обычное преобразование Вигнера. Поскольку при произвольном L преобразования (3) и (4) «более нелинейны», чем (1) и (2), то и влияние интерференционных членов в них оказывается более существенным. Тем не менее, как утверждается в [5, 6], на базе преобразований (3) и (4) построены модифицированные преобразования, в которых одновременно снижено влияние интерференции и имеется хорошее частотно-временное разрешение.

Следует отметить, что функцию $P_V f(\tau, \omega)$, в отличие от спектрограммы и скэйлограммы, можно называть функцией спектральной плотности лишь условно, поскольку она не обладает свойством положительности и, следовательно, не может являться совместной частотно-временной плотностью сигнала [3, 4]. Однако ее рассмотрение [4] оказывается полезным.

Практическое применение преобразования Вигнера, как и других время-частотных распределений, идет по трем направлениям [4]. Первое из них связано с расчетами, выполняемыми с целью выяснения возможности получения более полной информации, чем при использовании других средств, например, спектрограмм. Второе направление образуют применения, где используют отдельную особенность распределения, в которой нашло четкое отражение время-частотное содержание рассматриваемая особенность сигнала. К третьему направлению относятся применения, связанные с использованием распределения в качестве носителя информации некоторого сигнала без учета того, правильно или нет это распределение отображает время-частотную плотность энергии.

На сегодня преобразование Вигнера уже применяется при решении задач геофизической разведки [7], сейсмологии [8], для анализа микроструктуры температурного градиента в океане [9], для анализа нестационарных звуковых и акустических сигналов [10], при разработке приборов, предназначенных для генерации и излучения волн [11], в медицине [12], при решении задач распознавания образов [13], для анализа и распознавания речи [14], при решении задачи обнаружения сигнала на фоне аддитивного шума [15], в оптике – для исследования функций энергетической яркости и когерентности [16], в теории антенн [17], для исследования стохастических сигналов [18], при решении задачи неразрушающего контроля [19] и т.д.

Таким образом, несомненным достоинством преобразования Вигнера является его хорошее частотно-временное разрешение и инвариантность по отношению к сдвигам по фазе, времени и частоте. Недостатком его следует считать возникновение интерференции. Все сказанное выше позволяет предположить, что преобразование Вигнера может оказаться полезным при анализе различных сигналов и процессов, в том числе при дистанционном исследовании околоземного космического пространства.

Преобразование Вигнера модельных сигналов. Для ряда простейших сигналов можно получить аналитические выражения для ФСП преобразования Вигнера $P_V f(\tau, \omega)$. Запишем эти выражения и сравним их с соответствующими спектрограммами $P_S f(\tau, \omega) = |Sf(\tau, \omega)|^2$, где $Sf(\tau, \omega)$ – ФСП оконного преобразования Фурье этих же сигналов, задаваемая [3, 4] следующим соотношением:

$$Sf(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt, \quad (5)$$

где $w(t)$ – оконная функция.

Выражение 1: $f(t) = \delta(t - t_0)$, где $\delta(t)$ – функция Дирака. Оказывается, что $P_V f(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0)$, $Sf(\tau, \omega) = w(\tau - t_0) \exp(-i\omega t_0)$, $P_S f(\tau, \omega) = w^2(\tau - t_0)$. Это подтверждает тот факт, что преобразование Вигнера не увеличивает ширины носителя $f(t)$ во временной области. Действительно, $P_V f(\tau, \omega)$ (рис. 1, б) сохраняет нулевую ширину $f(t)$ (рис. 1, а) вдоль τ , тогда как для спектрограммы $P_S f(\tau, \omega)$ (рис. 1, в) ширина определяется свойствами $w(t)$, имеющей ненулевые размеры как в частотной, так и во временной областях.

Выражение 2: $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Для этой функции $P_V f(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0)$, $Sf(\tau, \omega) = \hat{w}(\omega - \omega_0) \exp(-i(\omega - \omega_0)\tau)$, $P_S f(\tau, \omega) = |\hat{w}(\omega - \omega_0)|^2$, где $\hat{w}(\omega)$ – ФСП преобразования Фурье оконной функции $w(t)$.

Здесь наблюдается сохранение нулевой ширины носителя $f(t)$ в частотной области для преобразования Вигнера и его уширение для спектрограммы. Характер возникающего уширения определяется видом $\hat{w}(\omega)$ (рис. 2).

Выражение 3: $f(t) = \eta(t - t_0)$. Для функции Хэвисайда (рис. 3) $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ имеем

$$P_V f(\tau, \omega) = 2 \frac{\sin 2\omega(\tau - t_0)}{\omega}.$$

При использовании прямоугольного окна вида

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & |t| \leq L, \\ 0, & |t| > L, \end{cases}$$

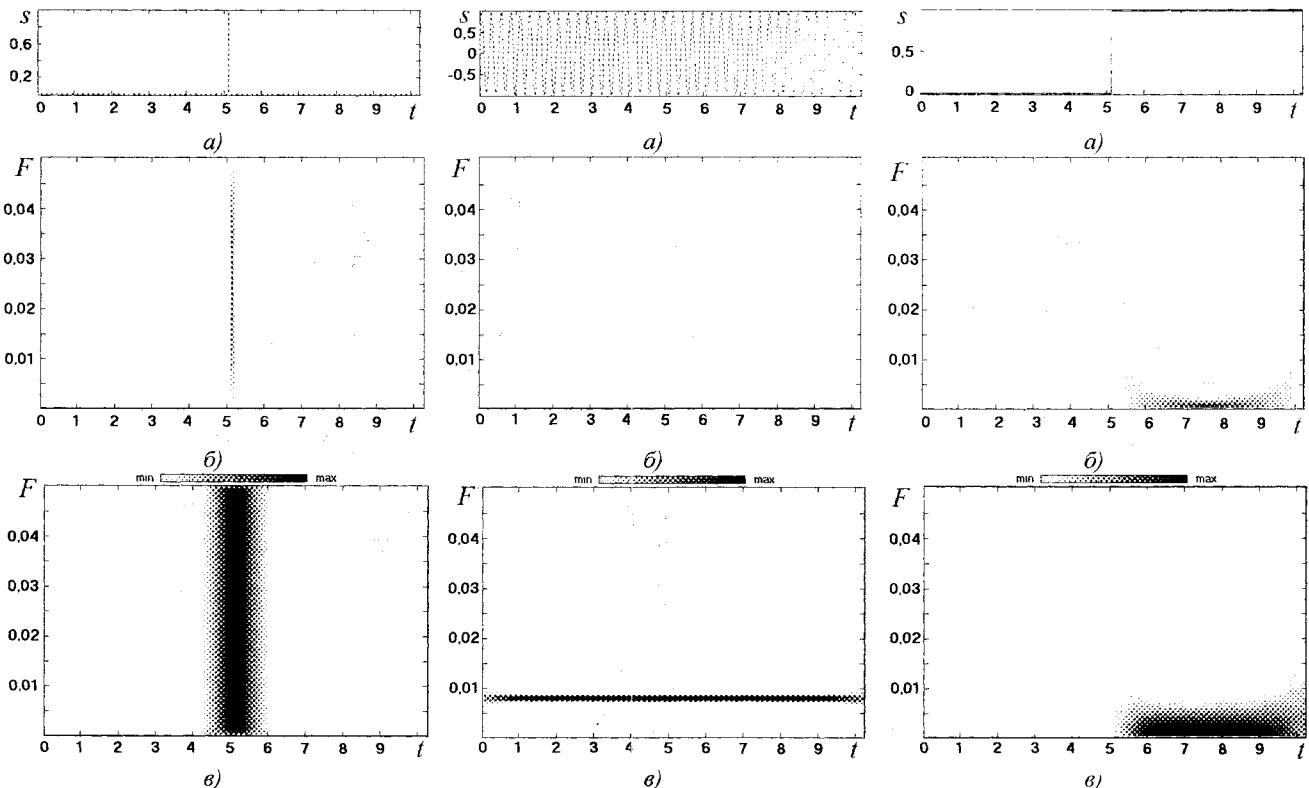


Рис. 1. Функция Дирака: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

Рис. 2. Синусоида $f(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

Рис. 3. Функция Хэвисайда: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

получаем выражения

$$Sf(\tau, \omega) = \begin{cases} 0, & \tau \leq t_0 - \frac{l}{2}; \\ \frac{i}{\omega\sqrt{l}} \exp(-i\omega t_0) (\exp(-i\omega(\tau - t_0 + l/2)) - 1), & t_0 - \frac{l}{2} < \tau \leq t_0 + \frac{l}{2}; \\ \frac{2}{\omega\sqrt{l}} \exp(-i\omega\tau) \sin \frac{\omega l}{2}, & \tau > t_0 + \frac{l}{2}; \end{cases}$$

$$P_S f(\tau, \omega) = \begin{cases} 0, & \tau \leq t_0 - \frac{l}{2}; \\ \frac{4}{\omega^2 l} \sin^2 \frac{(\tau - t_0 + l/2)\omega}{2}, & t_0 - \frac{l}{2} < \tau \leq t_0 + \frac{l}{2}; \\ \frac{4}{\omega^2 l} \sin^2 \frac{\omega l}{2}, & \tau > t_0 + \frac{l}{2}. \end{cases}$$

здесь l – ширина окна.

На примере функции Хевисайда подтверждается, что $P_V f(\tau, \omega)$, как уже отмечалось, может принимать и отрицательные значения.

В ы р а ж е н и е 4: $f(t) = \frac{d\delta}{dt}(t - t_0)$. Для такой функции получаем

$$P_V f(\tau, \omega) = \frac{d^2 \delta}{dt^2}(\tau - t_0) + 2i\omega \frac{d\delta}{dt}(\tau - t_0),$$

$$Sf(\tau, \omega) = \exp(-i(\omega t_0 - \pi)) \left(\frac{dw}{dt}(t_0 - \tau) + i\omega w(t_0 - \tau) \right),$$

$$P_S f(\tau, \omega) = \left(\frac{dw}{dt}(t_0 - \tau) \right)^2 + \omega^2 w^2(t_0 - \tau).$$

Этот пример (рис. 4) показывает, что заданный сигнал только по ФСП преобразования Вигнера сложно отличить от $\delta(t - t_0)$, а по спектрограмме, например, от сверхширокополосного сигнала. Вместе с тем, совместное рассмотрение $P_V f(\tau, \omega)$ и $P_S f(\tau, \omega)$ позволяет сделать правильный вывод о характере имеющегося сигнала.

В ы р а ж е н и е 5: $f(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$. Для него имеем

$$P_V f(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0) + \delta(\tau + t_0) + 2\delta(\tau) \cos(2\omega t_0),$$

$$Sf(\tau, \omega) = w(\tau - t_0) \exp(-i\omega t_0) + w(\tau + t_0) \exp(i\omega t_0),$$

$$P_S f(\tau, \omega) = w^2(\tau - t_0) + w^2(\tau + t_0) + 2w(\tau + t_0)w(\tau - t_0) \cos(2\omega t_0).$$

Здесь для суммы двух функций Дирака (рис. 5) в ФСП $P_V f(\tau, \omega)$ наблюдается интерференция, описываемая слагаемым $2\delta(\tau) \cos(2\omega t_0)$. Как и следовало ожидать, на частотно-временной плоскости ему соответствует локализованная по времени осциллирующая структура, располагающаяся точно посередине между образами двух исследуемых сигналов. В то же время для $P_S f(\tau, \omega)$ слагаемое $2w(\tau + t_0)w(\tau - t_0) \cos(2\omega t_0)$ отлично от нуля лишь при перекрытии двух частотно-временных структур, соответствующих каждому из сигналов (при $2t_0 < l$). Если перекрытия нет, то интерференции не возникает. Компенсацией за отсутствие интерференции является уширение носителей δ -функций во временной области.

Если перекрытие возникает (рис. 6), то по спектрограмме $P_S f(\tau, \omega)$ ничего нельзя сказать о виде исследуемого сигнала. В то же время на плоскости $P_V f(\tau, \omega)$ (рис. 6, б) сохраняется картина, аналогичная той, что приведена на рис. 5, б.

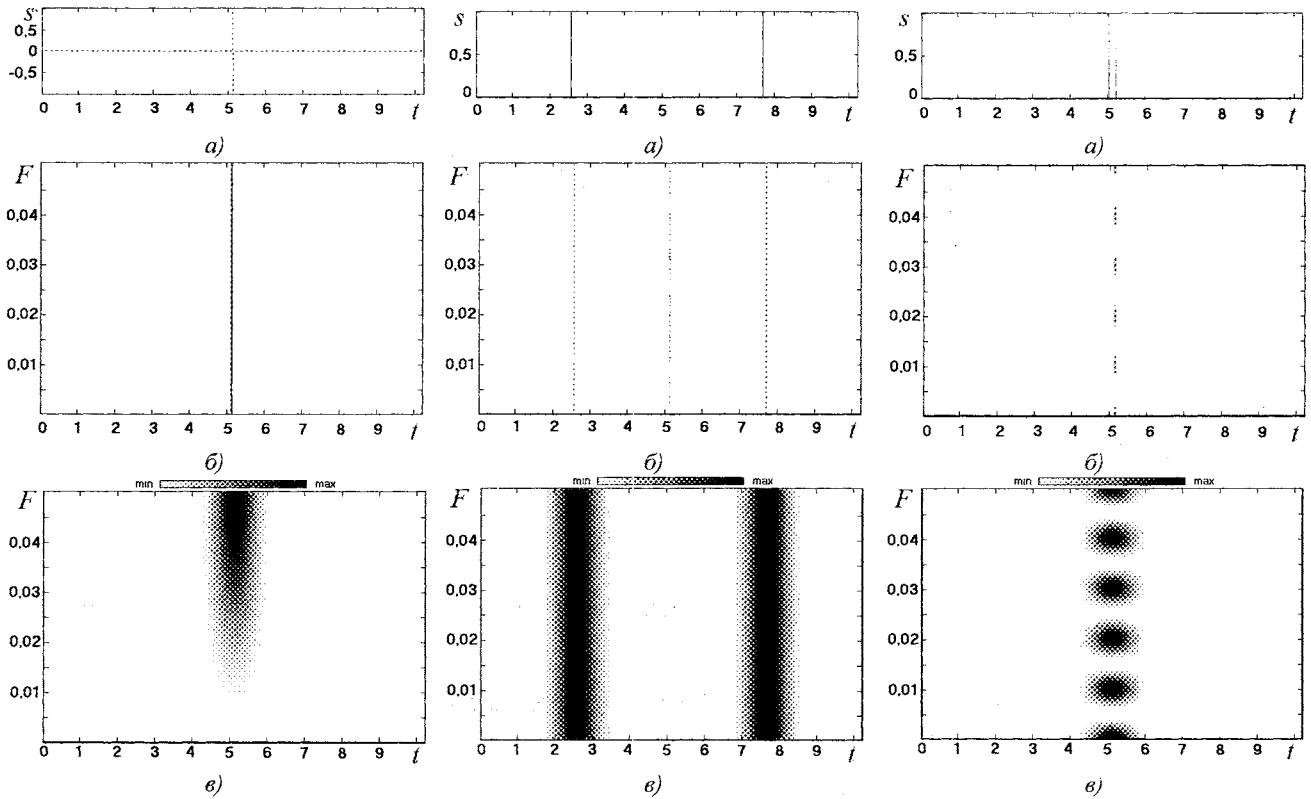


Рис. 4. Производная функции Дирака: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

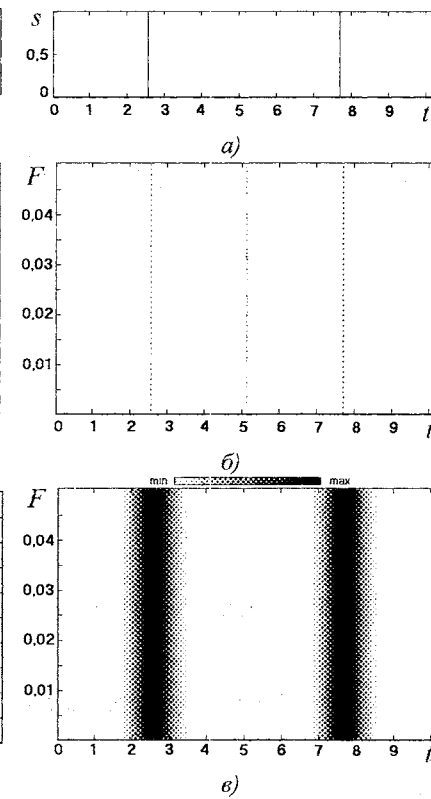


Рис. 5. Сумма двух функций Дирака: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

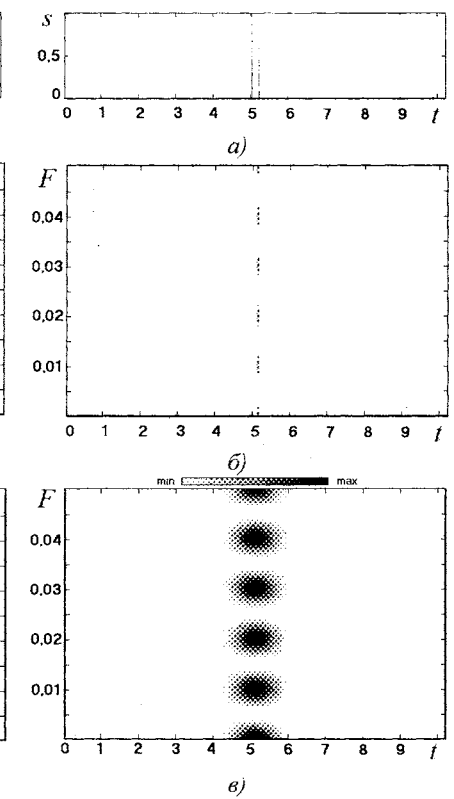


Рис. 6. Сумма двух близко лежащих функций Дирака: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

В ы р а ж е н и е 6 : $f(t) = \exp(i\omega_0 t) + \exp(i\omega_1 t)$. Для него получим

$$P_V f(\tau, \omega) = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_1) + 2\delta\left(\omega - \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\right) \cos[(\omega_0 - \omega_1)\tau],$$

$$Sf(\tau, \omega) = \exp(-i\omega\tau) (\hat{w}(\omega - \omega_0) \exp(i\omega_0\tau) + \hat{w}(\omega - \omega_1) \exp(i\omega_1\tau)),$$

$$P_S f(\tau, \omega) = |\hat{w}(\omega - \omega_0)|^2 + |\hat{w}(\omega - \omega_1)|^2 + \\ + 2\operatorname{Re}(\hat{w}(\omega - \omega_0) \exp(i\omega_0\tau)) \operatorname{Re}(\hat{w}(\omega - \omega_1) \exp(i\omega_1\tau)) + \\ + 2\operatorname{Im}(\hat{w}(\omega - \omega_0) \exp(i\omega_0\tau)) \operatorname{Im}(\hat{w}(\omega - \omega_1) \exp(i\omega_1\tau)).$$

Здесь интересно наблюдать за изменением вида $P_V f(\tau, \omega)$ и $P_S f(\tau, \omega)$ в зависимости от величин частот ω_0 и ω_1 . Различные варианты возникающей интерференционной картины представлены на рис. 7 – 9. Отсюда видно, что частотно-временное разрешение преобразования Вигнера действительно оказывается выше, чем у оконного преобразования Фурье, но оно имеет предел. Последнее иллюстрирует рис. 9, где две синусоиды с очень близкими частотами ($2(\omega_1 - \omega_0)/(\omega_1 + \omega_0) \approx 0,02$) оказываются неразличимыми даже при использовании преобразования Вигнера.

В ы р а ж е н и е 7 : $f(t) = \delta(t - t_0) + \exp(i\omega_0 t)$. Для него запишем следующее:

$$P_V f(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0) + \delta(\omega - \omega_0) + 4\cos[2(\tau - t_0)(\omega - \omega_0) - \omega_0 t_0],$$

$$Sf(\tau, \omega) = w(\tau - t_0) \exp(-i\omega t_0) + \hat{w}(\omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)\tau],$$

$$P_S f(\tau, \omega) = w^2(\tau - t_0) + |\hat{w}(\omega - \omega_0)|^2 + \\ + 2w(\tau - t_0)(\cos(\omega t_0) \operatorname{Re}(\hat{w}(\omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)\tau]) - \\ - \sin(\omega t_0) \operatorname{Im}(\hat{w}(\omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)\tau])).$$

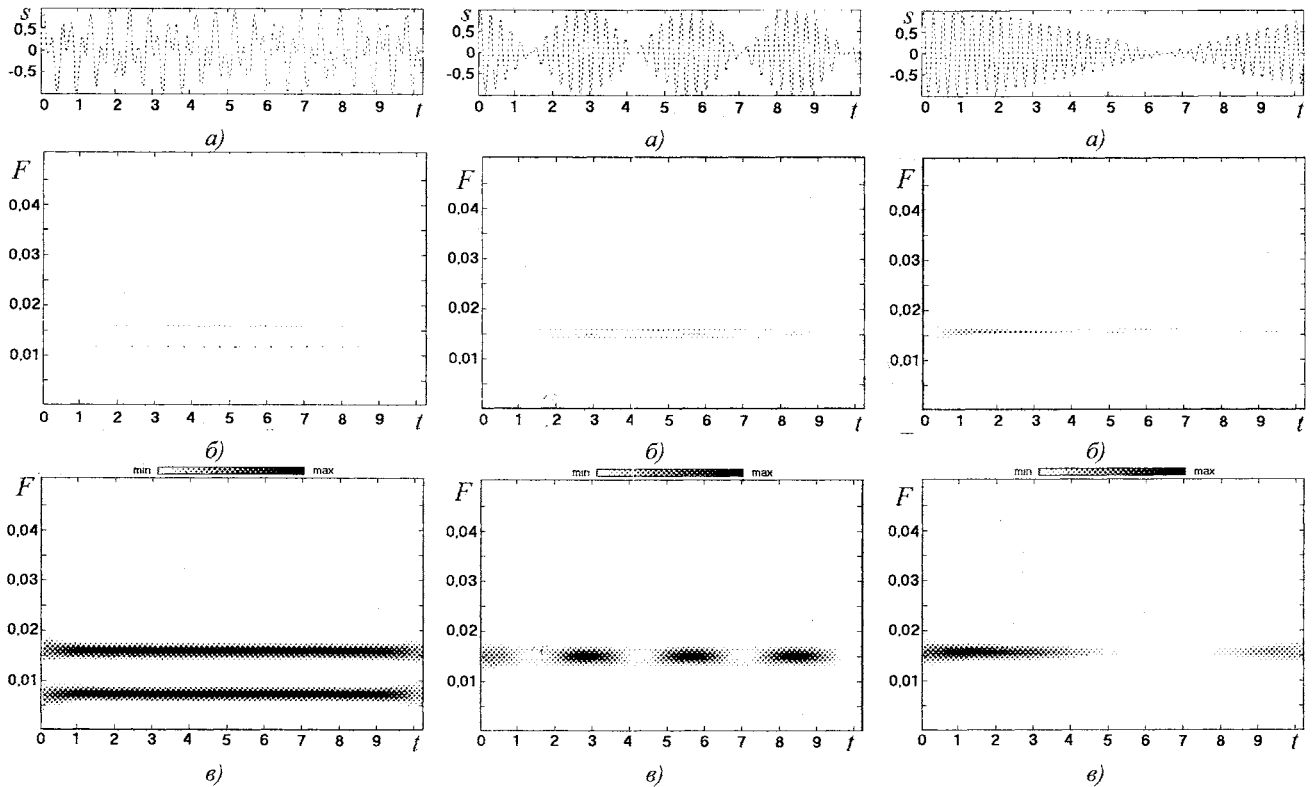


Рис. 7. Сумма двух синусоид: *а* – во временной области; *б* – ФСП преобразования Вигнера; *в* – спектрограмма

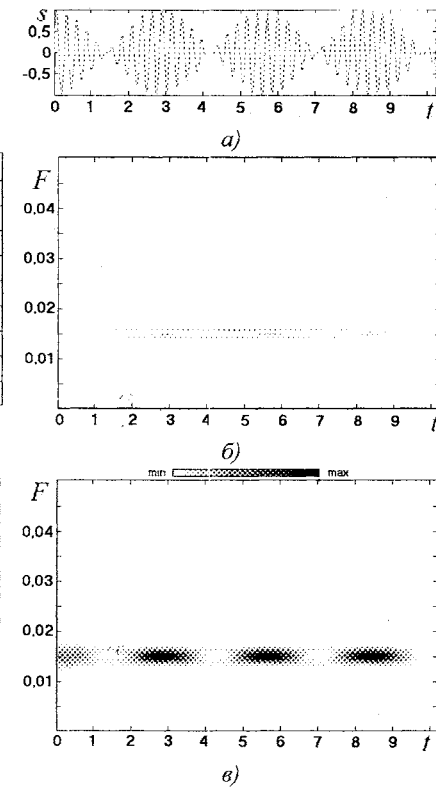


Рис. 8. Сумма двух синусоид с близкими частотами: *а* – во временной области; *б* – ФСП преобразования Вигнера; *в* – спектрограмма

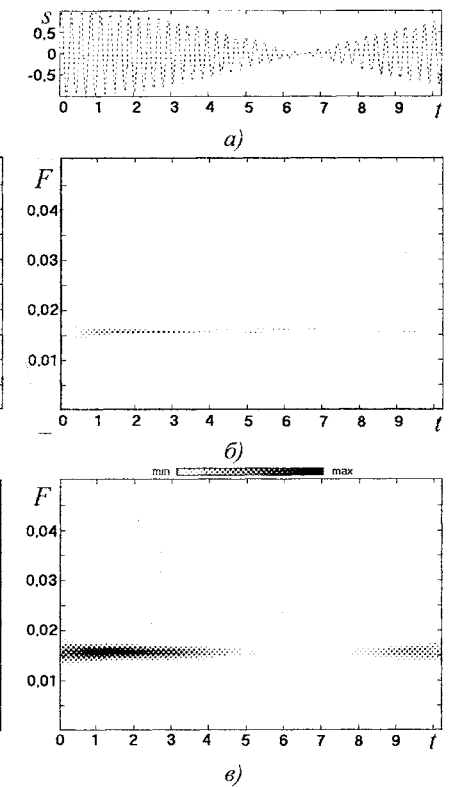


Рис. 9. Сумма двух синусоид с очень близкими частотами: *а* – во временной области; *б* – ФСП преобразования Вигнера; *в* – спектрограмма

Наглядной демонстрацией частотно-временных свойств рассматриваемых преобразований является тот пример, где одновременно проанализированы функция Дирака и синусоида (рис. 10). На ФСП преобразования Вигнера они присутствуют обе, а на спектрограмме (по крайней мере, с использованием данного окна – окно Натола) наблюдается только синусоида. Интерференция на плоскости $P_V f(\tau, \omega)$ почти не заметна, поскольку интерференционный член имеет сравнительно малую интенсивность.

В то же время при анализе синусоиды и функции Хевисайда хорошо наблюдаются обе компоненты как на ФСП преобразования Вигнера, так и на спектрограмме (рис. 11). Традиционно у ФСП преобразования Вигнера лучше частотно-временное разрешение, а на спектрограмме отсутствуют интерференционные члены. Здесь следует отметить, что на плоскости $P_V f(\tau, \omega)$ хорошо наблюдается синусоида и ее интерференция с функцией Хевисайда, а сама функ-

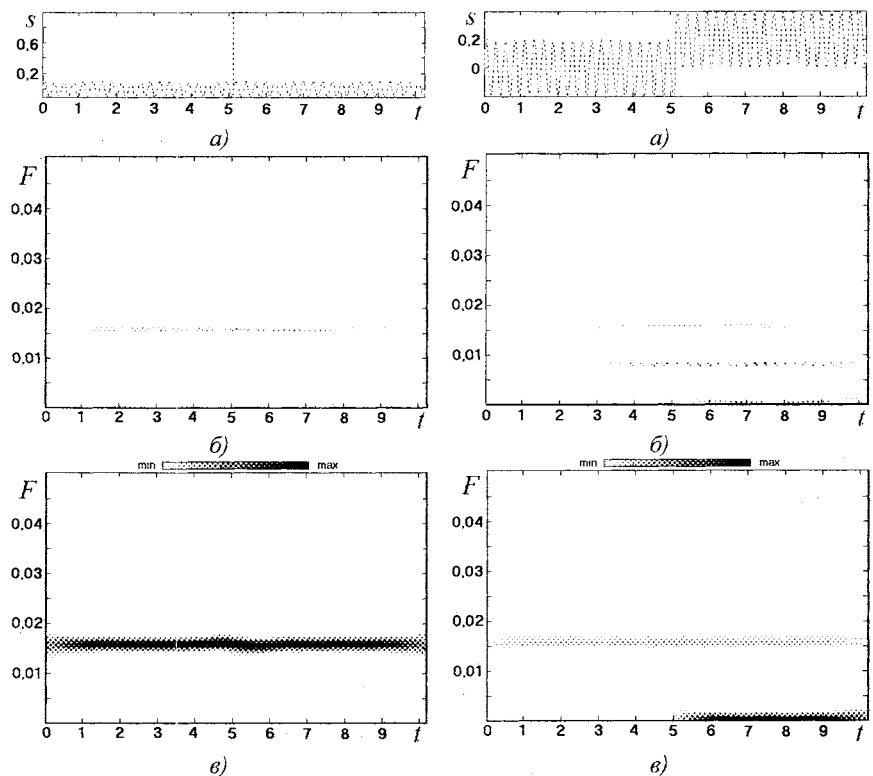


Рис. 10. Сумма синусоиды и функции Дирака: *а* – во временной области; *б* – ФСП преобразования Вигнера; *в* – спектрограмма

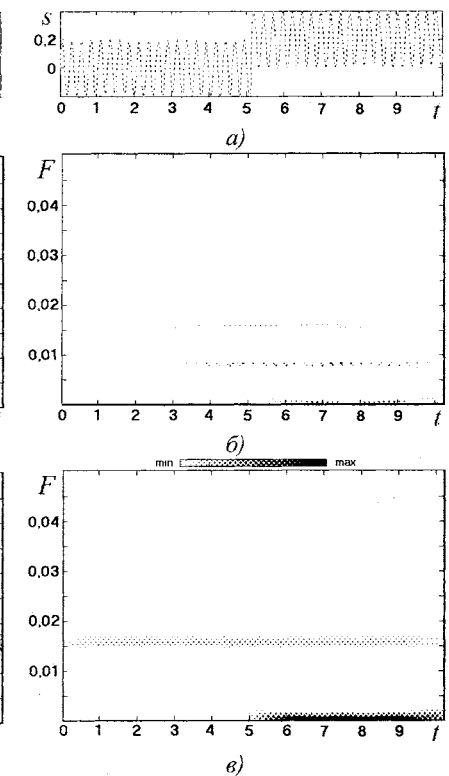


Рис. 11. Сумма синусоиды и функции Хевисайда: *а* – во временной области; *б* – ФСП преобразования Вигнера; *в* – спектрограмма

ция Хевисайда просматривается слабо. Этот пример также свидетельствует о целесообразности одновременного применения рассматриваемых преобразований.

Применение преобразования Вигнера к исследованию атомарных функций. К сожалению, получение аналитических выражений для ФСП преобразования Вигнера $P_V f(\tau, \omega)$ возможно лишь в простейших случаях, подобных описанным выше. Как и для вейвлет-преобразования [3], основным способом проведения преобразования Вигнера являются численные расчеты с помощью систем компьютерной математики (СКМ). В данной работе использовались СКМ MathCad 2003 [20] и MATLAB 6.5 [21, 22], а также пакет расширения последней СКМ WaveLab 8.02 [3]. В качестве сигналов, к которым будет применено преобразование Вигнера, выберем атомарные функции (АФ) [23 – 25]. Как и вейвлеты, АФ хорошо локализованы в частотной и временной областях. Именно это обстоятельство их объединяет. Из большого числа существующих на сегодня АФ в качестве примера используем некоторые из них.

Материнская функция $\text{up}(t)$ [23] является решением уравнения $f'(t) = 2f(2t+1) - 2f(2t-1)$ и на интервале $t \in [-1, 1]$ имеет следующее представление на основе преобразования Фурье:

$$\text{up}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du.$$

Атомарная функция $\text{fup}_N(t)$, полученная интегральной сверткой сплайна $\theta_{N-1}(t)$ и материнской функции $\text{up}(t)$ и определенная на интервале $t \in [-(N+2)/2, (N+2)/2]$, имеет вид

$$\text{fup}_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^N \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du.$$

Очевидно, что $\text{fup}_0(t) = \text{up}(t)$.

Атомарная функция $h_a(t)$, являющаяся финитным решением уравнения $y'(t) = \frac{a^2}{2}(y(at+1) - y(at-1))$, может быть записана так:

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot a^{-k})}{u \cdot a^{-k}} du, \quad a > 1.$$

Легко показать, что $h_2(t) = \text{up}(t)$.

Атомарная функция $\Xi_n(t)$, являющаяся решением уравнения

$$y^{(n)}(t) = a \sum_{k=0}^n C_k^n (-1)^k \mathcal{Y}[(n+1)t + n - 2k]$$

и финитная для $t \in [-1, 1]$, имеет вид

$$\Xi_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(u(n+1)^{-k})}{u(n+1)^{-k}} \right)^n du.$$

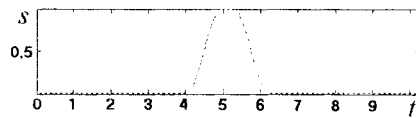
Ясно, что $\Xi_1(t) = \text{up}(t)$.

Результаты анализа некоторых АФ и окон Кравченко–Рвачева, построенных на их основе [23–25], приведены на рис. 12 – 15.

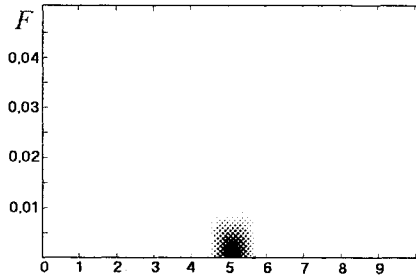
Как следует из анализа рис. 12, ФСП преобразования Вигнера «материнской функции» $\text{up}(t)$ имеет характерный вид с «провалом» внутри. На спектрограмме такого «провала» нет. У окна Кравченко–Рвачева $w_2(t)$, построенного на основе этой же функции $\text{up}(t)$: $w_2(t) = \text{up}(t) + 0,01 \text{up}''(t)$, характерный «провал» в $P_V f(\tau, \omega)$ также сохраняется (рис. 13).

Для первой производной функции $\text{up}(t)$ на ФСП преобразования Вигнера хорошо видно два таких же характерных, как и у $\text{up}(t)$, локализованных образования (рис. 14). Посередине имеет место максимум, появившийся в результате интерференции между этими образованиями.

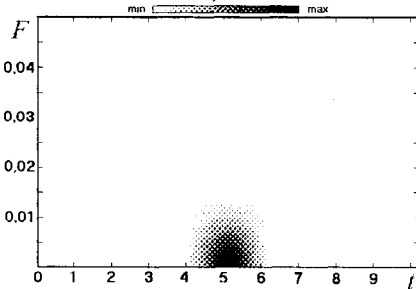
Более сложную структуру имеет ФСП преобразования Вигнера второй производной функции $\text{up}(t)$. Результаты ее анализа приведены на рис. 15. Также был проанализирован и ряд других АФ. В качестве примеров приведены результаты для $\text{fup}_1(t)$, $\text{fup}_2(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$, $\Xi_2(t)$ и $\Xi_3(t)$ соответственно на рис. 16 – 21.



а)

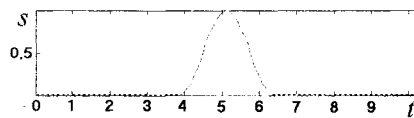


б)

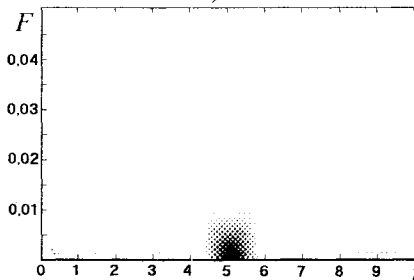


в)

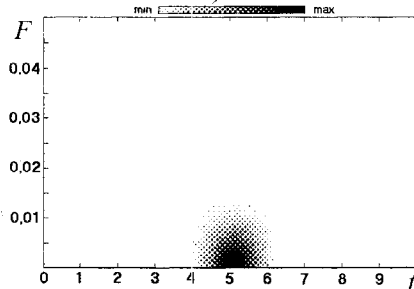
Рис. 12. Атомарная функция $ur(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)

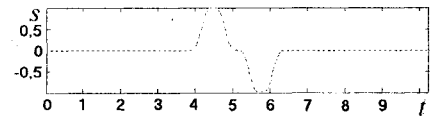


б)

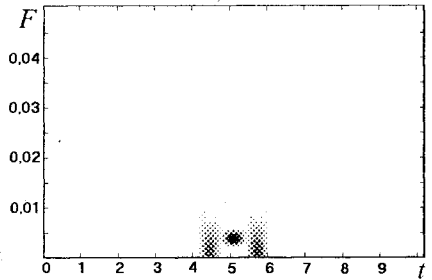


в)

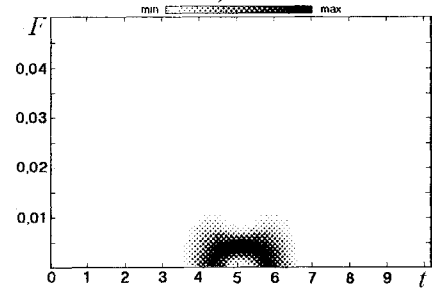
Рис. 13. Окно Кравченко-Рвачева $w_2(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)

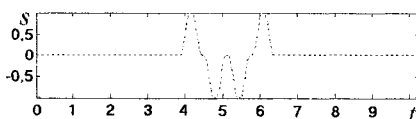


б)

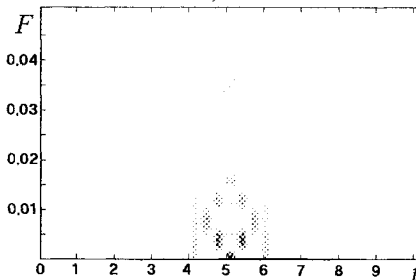


в)

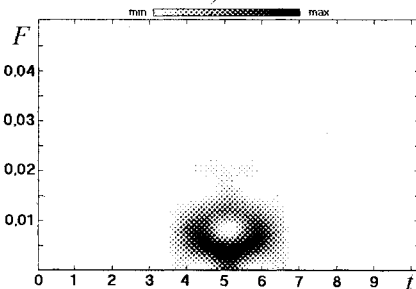
Рис. 14. Первая производная атомарной функции $ur(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)

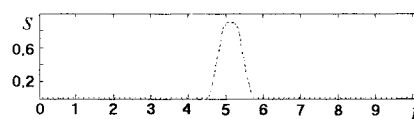


б)

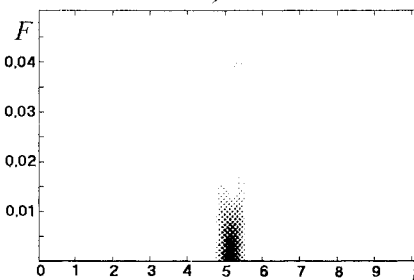


в)

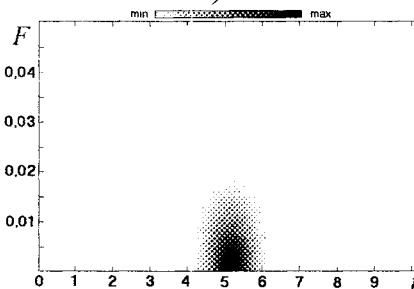
Рис. 15. Вторая производная атомарной функции $ur(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)

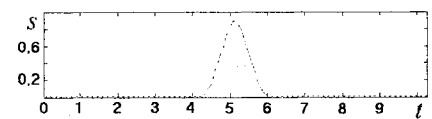


б)

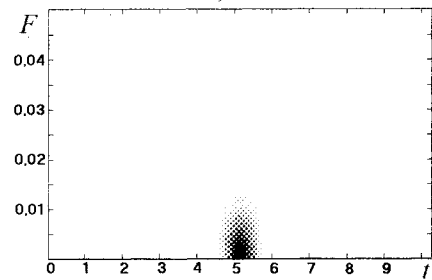


в)

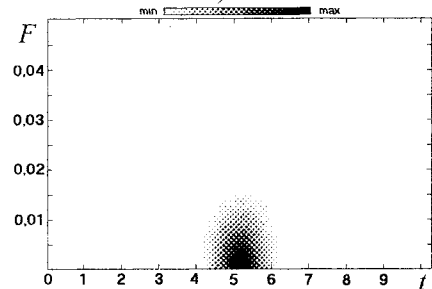
Рис. 16. Атомарная функция $fur_1(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)

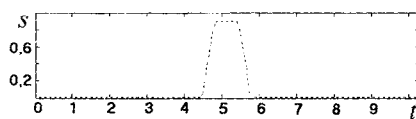


б)

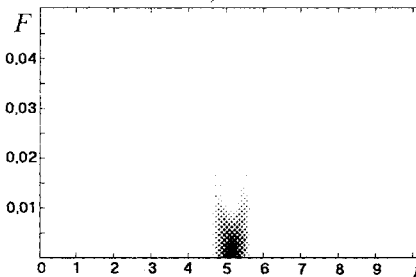


в)

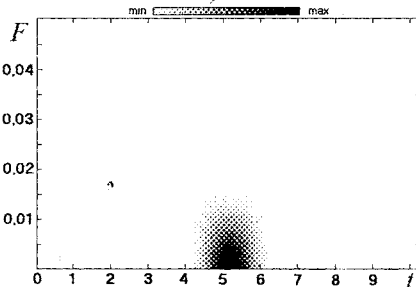
Рис. 17. Атомарная функция $fur_2(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



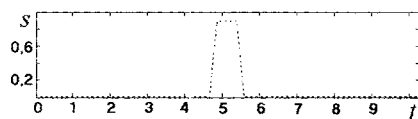
а)



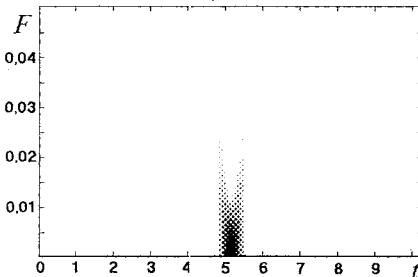
б)



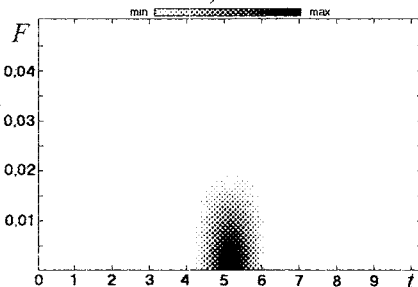
в)



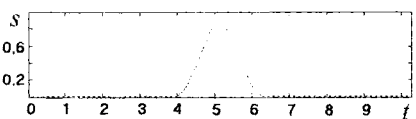
а)



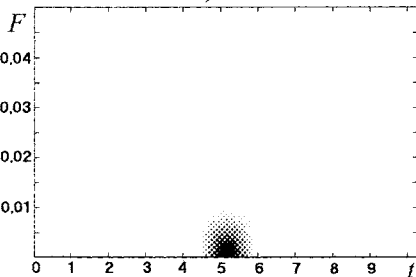
б)



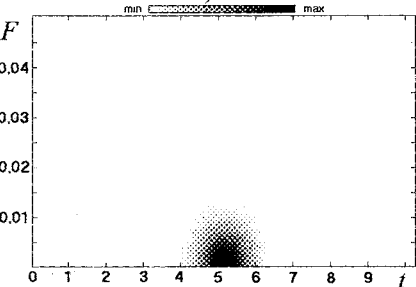
в)



а)



б)

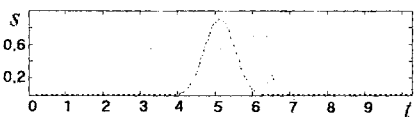


в)

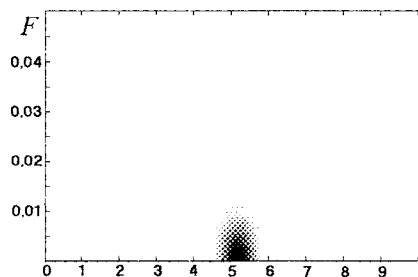
Рис. 18. Атомарная функция $h_3(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

Рис. 19. Атомарная функция $h_4(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

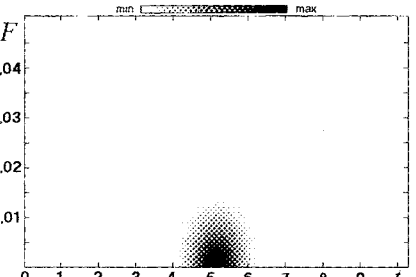
Рис. 20. Атомарная функция $\Xi_2(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма



а)



б)



в)

Рис. 21. Атомарная функция $\Xi_3(t)$: а – во временной области; б – ФСП преобразования Вигнера; в – спектрограмма

Обсуждение результатов. Проведенные исследования и полученные результаты позволяют отметить следующее. Преобразование Вигнера, являясь одним из частотно-временных преобразований, относящихся к классу Козна, обладает рядом достоинств: хорошее частотно-временное разрешение, инвариантность относительно сдвигов по фазе, частоте и времени, а также наличие маргинальных распределений. Кроме того, необходимо обратить внимание на то, что преобразование Вигнера, будучи квадратичным по исследуемому сигналу, является одним из возможных методов нелинейной обработки сигналов, которая получает все большее распространение. Это справедливо, например, при наличии помех, статистика которых заметно отличается от нормальной и линейная обработка оказывается неэффективной из-за скоррелированности составляющих в разложениях. Однако нелинейность преобразования Вигнера может стать недостатком из-за возникновения интерференции между сигналами, а также между сигналом и помехой.

Представляет интерес сравнение возможностей преобразования Вигнера с оконным преобразованием Фурье, а также спектрограммой оконного преобразования Фурье. С одной стороны, оконное преобразование Фурье является линейным преобразованием сигнала, но в отличие от преобразования Вигнера не обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени. К тому же частотно-временное разрешение оконного преобразования Фурье определяется характеристиками спектрального окна и оказывается хуже, чем у преобразования Вигнера. Платой за последнее является наличие интерфе-

ренции в ФСП преобразования Вигнера. С другой стороны, спектрограмма оконного преобразования Фурье, называемая обычно просто спектрограммой, как и преобразование Вигнера, обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени. Но в отличие от последнего, она не имеет маргинальных распределений и обладает худшим частотно-временным разрешением.

Следовательно, при совместном использовании преобразования Вигнера и оконного преобразования Фурье первое может позволить достаточно точно определить частотно-временную локализацию исследуемого сигнала, а второе отсеять ложные «сигналы», возникающие из-за интерференции в ФСП преобразования Вигнера. Преобразование Вигнера, обладающее хорошим частотно-временным разрешением, перспективно применять для анализа новых классов сигналов [26 – 28], основанных, например, на АФ, окнах Кравченко–Рвачева, R-функциях, вейвлетах, поскольку такие сигналы, в отличие от классических узкополосных и широкополосных сигналов, являются достаточно хорошо локализованными во временной области.

Таким образом, на простых примерах рассмотрены основные особенности преобразования Вигнера и проведено сравнение с традиционным оконным преобразованием Фурье. Имея характерные достоинства и недостатки, оба преобразования хорошо дополняют друг друга, поэтому их рекомендуется использовать совместно для цифровой обработки сигналов.

Выводы. Преобразование Вигнера является одним из квадратичных частотно-временных распределений, относящихся к классу Коэна.

Основные достоинства преобразования Вигнера состоят в хорошей частотно-временной локализации и инвариантности относительно сдвигов фазы, времени и частоты. Его возможности по выявлению частотно-временной локализации сигналов превосходят возможности оконного преобразования Фурье.

Есть основания считать, что квадратичность преобразования Вигнера может обеспечить повышение эффективности нелинейных методов фильтрации сигнала на фоне негауссовых помех (помех с ненулевыми высшими моментами распределений).

Недостатком преобразования Вигнера является возникновение интерференции при анализе суммы нескольких сигналов, приводящей к появлению в ФСП ложных экстремумов. Основным методом борьбы с этим недостатком – усреднение с различными ядрами.

Преобразование Вигнера предлагается использовать совместно с оконным преобразованием Фурье для анализа детерминированных, случайных и фрактальных сигналов различной физической природы.

Применение преобразования Вигнера перспективно для анализа новых классов сигналов, в частности основанных на АФ, окнах Кравченко и Кравченко–Рвачева, R-функциях, вейвлетах.

Литература

1. Wigner, E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. – Phys. Rev., 1932, vol. 40, pp. 749 – 759.
2. Ville, J. Theorie et applications de la notion de signal analytique. – Cables. et Transm., 1948, vol. 2A, pp. 61 – 74.
3. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005.
4. Коэн Л. Время-частотные распределения. – ТИИЭР, 1989, т. 77, №16, с. 72 – 120.
5. Stankovich, L. A methode for improved concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution. – IEEE Transactions on signal processing, 1995, vol. 43, no. 5, pp. 1262 – 1268.
6. Zetic, R. Dual version of L-Wigner distribution. – The 4th International conference “DSP 99”, Slovakia, 1999, pp. 66 – 69.
7. Boashash, B., Lowell, B., and Whitehouse, H. J. High-resolution time-frequency signal analysis by parametric modeling of the Wigner-Ville distribution. – In Proc. IASTED Int. Symp. Signal Processing and Its Application (Brisbane, Australia, 1987), pp. 297 – 301.
8. Boashash, B. and Whitehouse, H. J. Seismic application of the Wigner-Ville distribution. – In Proc. IEEE Int. Conf. Systems and Circuits, 1986, pp. 34 – 37.
9. Imberger, J. and Boashash, B. Application of the Wigner-Ville distribution to temperature gradient microstructure: a new technique to study small-scale variations. – J. Phys. Oceanog., 1986, vol. 16, pp. 1997 – 2012.
10. Janse, C. P. and Kaizer, J. M. Time-frequency distributions of loudspeakers: the application of the Wigner distribution. – J. Audio Eng. Soc., vol. 31, 1983, pp. 198 – 233.
11. Marinovich, N. M. and Smith, W. A. Application of joint time-frequency distributions to ultrasonic transducers. – In Proc. 1986 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, 1986, pp. 50 – 54.
12. Barry, D. T., Cole, N. M. Muscle sounds are emitted at the resonant frequency of skeletal muscle. – IEEE Trans. Biomed. Eng., 1989, pp. 32 – 38.
13. Marinovich, N. M. and Eichmann, G. An expansion of Wigner distribution and its applications. – In Proc. 1985 IEEE ICASSP 85, 1985, pp. 1021 – 1024.
14. Chester, D., Taylor, F. J., and Doyle, M. The Wigner Distribution in speech processing application. – J. Franklin Inst., 1984, vol. 318, pp. 415 – 430.
15. Kumar, B. V. and Carroll, W. C. Effects of sampling of signal detection using the cross-Wigner distribution function. – Appl. Opt., 1984, vol. 23, pp. 4090 – 4094.

16. *Kenny, O. and Boashash, B.* An optical signal processor for time-frequency signal analysis using the Wigner-Ville distribution. – J. Elec. Electron. Eng (Australia), 1988, pp. 152 – 158.
17. *Breed, B. R. and Posch, T. E.* A range and azimuth estimator based on forming the spatial Wigner distribution. – In Proc. IEEE ICASSP 84, 1984, pp. 41B/9.1-9.2.
18. *White, L. B. and Boashash, B.* On estimating the instantaneous frequency of a Gaussian random signal by the use of the Wigner-Ville distribution. – IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, 1988, vol. ASSP-36, pp. 417 – 420.
19. *Zetic, R., Sachs, J., and Schneegast, B.* Non-destructive testing with imaging radar: first experience with a laboratory equipment. – Proceeding IWK-98, Ilmenau, 1998, pp. 23–28.
20. *Херхагер М., Партоль Х.* Mathcad 2000. – Киев: Изд. группа BHV, 2000.
21. *Дьяконов В.* MATLAB 6. – СПб.: Питер, 2001.
22. *Дьяконов В. П., Абраменкова И. В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002.
23. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003.
24. *Кравченко В. Ф., Басараб М. А.* Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. – М.: Физматлит, 2004.
25. *Зелкин Е. Ф., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И.* Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. – М.: Сайнс-Пресс, 2005.
26. *Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф.* Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2004, т. 9, № 9 – 10, с. 31 – 62.
27. *Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф.* Фрактальные сверхширокополосные сигналы. – Радиофизика и радиоастрономия, 2005, т. 10, № 1, с. 62 – 84.
28. *Кравченко В. Ф., Смирнов Д. В.* Широкополосные сигналы на основе временных атомарных функций в сложных антенных системах. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2005, т. 10, № 4, с. 21 – 26.

Поступила 15 декабря 2005 г.

Вишневский Олег Вадимович (1981 г. р.) – аспирант Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Область научных интересов: радиофизические исследования процессов в геокосмосе, математическое моделирование динамических процессов, методы анализа сигналов и процессов.

Кравченко Виктор Филиппович (1939 г. р.) – заслуженный деятель науки РФ, доктор физ.-мат. наук, проф., гл. научн. сотр. ИРЭ РАН, Москва.

Область научных интересов: R-функции, атомарные функции, численные методы.

Лазоренко Олег Валерьевич (1970 г. р.) – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Харьковского национального университета радиоэлектроники, ст. научн. сотр. каф. космической радиофизики радиофизического факультета Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.

Область научных интересов: радиофизические исследования геокосмической плазмы, математическое моделирование динамических процессов, сверхширокополосные и фрактальные сигналы и процессы.

Черногор Леонид Феофистович (1950 г. р.) – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. космической радиофизики радиофизического факультета Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.

Область научных интересов: космическая радиофизика, физика и экология геокосмоса, космическая погода.