УДК 621.385.69

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА, ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО ОТРЕЗКОМ РЕБРИСТОГО ЦИЛИНДРА

ХМЕЛЬ С.И., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Приводится решение граничной электродинамической задачи для цилиндрического резонатора, перестраиваемого отрезком ребристого цилиндра, для случая m дисков на настроечном стержне.

1. Введение

Применение объемных электромагнитных резонаторов в СВЧ- и ускорительной технике общеизвестно [1–4]. В связи с этим представляет интерес найти поля и собственные частоты для диафрагмированных резонаторов цилиндрического и коаксиального типов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрический резонатор радиуса b и длины l с металлическим стержнем радиуса a, на котором расположены N колец с внутренним и внешним радиусами a и d соответственно. Частичные области внутри резонатора определяются интервалами, в которых изменяются радиальная и продольная координаты:

$$(0): d \le r \le b, \quad 0 \le z \le l;$$

$$(1): 0 \le r \le d, \quad 0 \le z \le l_1;$$

$$(2): a \le r \le d, \quad l_2 \le z \le l_3;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(N): a \le r \le d, \quad l_{2N} \le z \le l,$$

где $l_1, l_3, l_5, \dots, l_{2N-1}$ – расстояния от начала координат до левых кольцевых поверхностей; $l_2, l_4, l_6, \dots, l_{2N}$ – расстояния от начала координат до правых кольцевых поверхностей. Необходимо получить дисперсионное уравнение для определения собственных частот рассматриваемого резонатора.

3. Решение задачи

Компоненты электромагнитного поля для каждой из частичных областей определяются по формулам:

$$E_z^{(m)}(r,z) = \frac{1}{j\omega}\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi^{(m)}(r,z), \quad j = \sqrt{-1}; \tag{1}$$

$$H_\varphi^{(m)}(r,z) = -\frac{\partial \Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r}, \tag{2}$$

$$E_r^{(m)}(r,z) = \frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2 \Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r \partial z}, \tag{3}$$

$m = 0,1,2,\dots,2N+1$, если N нечетное;

$m = 0,1,2,\dots,2N$, если N четное.

Функции $\Pi^{(m)}(r,z)$ являются решениями скалярного уравнения Гельмгольца и для частичных областей резонатора определяются следующим образом:

$$\Pi^{(m)}(r,z) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)} Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r)\cos(k_{zi}^{(0)} z), \\ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(1)} Z_0^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r)\cos(k_{zi}^{(1)} z), \\ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(2)} Z_0^{(2)}(k_{ri}^{(2)} r)\cos(k_{zi}^{(2)} (z-l_2)), \\ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(3)} Z_0^{(3)}(k_{ri}^{(3)} r)\cos(k_{zi}^{(3)} (z-l_4)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m)} Z_0^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r)\cos(k_{zi}^{(m)} (z-l_m)), \end{cases} \tag{4}$$

где k – собственные числа; $k = \omega / c$; ω – круговая частота электромагнитного поля; c – скорость света;

$$k_{zi}^{(0)} = \frac{\pi i}{l}, \; k_{zi}^{(1)} = \frac{\pi i}{l_1}, \; k_{zi}^{(2)} = \frac{\pi i}{l_3 - l_2},$$

$$k_{zi}^{(3)} = \frac{\pi i}{l_5 - l_4}, \; k_{zi}^{(4)} = \frac{\pi i}{l_7 - l_6}, \; \dots,$$

$$k_{zi}^{(m)} = \frac{\pi i}{l_{2m-1} - l_{2m-2}}, \; k_{ri}^{(m)} = \sqrt{k^2 - \left(k_{zi}^{(m)}\right)^2}.$$

Подставляя в (1)-(3) функцию (4), найдем компоненты поля для всех частичных областей резонатора, перестраиваемого отрезком ребристого цилиндра:

область 0 –

$$E_z^{(0)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)} (k_{zi}^{(0)})^2 Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r)\cos(k_{zi}^{(0)} z), \tag{5}$$

$$E_r^{(0)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)} k_{ri}^{(0)} Z_1^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r) k_{zi}^{(0)} \sin(k_{zi}^{(0)} z), \tag{6}$$

$$H_\varphi^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)} k_{ri}^{(0)} Z_1^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r)\cos(k_{zi}^{(0)} z); \tag{7}$$

область 1 –

$$E_z^{(1)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(1)} (k_{zi}^{(1)})^2 Z_0^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r)\cos(k_{zi}^{(1)} z), \tag{8}$$

$$E_r^{(1)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(1)} k_{ri}^{(1)} Z_1^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r) k_{zi}^{(1)} \sin(k_{zi}^{(1)} z), \tag{9}$$

$$H_\varphi^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(1)} k_{ri}^{(1)} Z_1^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r)\cos(k_{zi}^{(1)} z)\,; \quad (10)$$

область 2 –

$$E_z^{(2)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(2)} (k_{zi}^{(2)})^2 Z_0^{(2)}(k_{ri}^{(2)} r)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2)), \quad (11)$$

$$E_r^{(2)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(2)} k_{ri}^{(2)} Z_1^{(2)}(k_{ri}^{(2)} r) k_{zi}^{(2)} \sin(k_{zi}^{(2)}(z-l_2)), \quad (12)$$

$$H_\varphi^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(2)} k_{ri}^{(2)} Z_1^{(2)}(k_{ri}^{(2)} r)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2))\,; \quad (13)$$

....

область m –

$$E_z^{(m)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m)} (k_{zi}^{(m)})^2 Z_0^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r)\cos(k_{zi}^{(m)}(z-l_m)), \quad (14)$$

$$E_r^{(m)} = \frac{1}{j\omega}\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m)} k_{ri}^{(m)} Z_1^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r) k_{zi}^{(m)} \sin(k_{zi}^{(m)}(z-l_m)), \quad (15)$$

$$H_\varphi^{(m)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m)} k_{ri}^{(m)} Z_1^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r)\cos(k_{zi}^{(m)}(z-l_m)). \quad (16)$$

На границе раздела частичных областей электрическое и магнитное поля должны быть непрерывны, касательные составляющие вектора электрического поля должны обращаться в нуль на металлических частях резонатора, т.е. необходимо выполнение следующих граничных условий при $r = d$:

$$E_z^{(0)} = \begin{cases} E_z^{(1)}, & 0 \le z \le l_1, \\ E_z^{(2)}, & l_2 \le z \le l_3, \\ E_z^{(3)}, & l_4 \le z \le l_5, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ E_z^{(m)}, & l_{2m-2} \le z \le l_{2m-1}, \end{cases} \quad (17)$$

$$E_z^{(0)} = 0\,,\; l_1 \le z \le l_2\,,\; l_3 \le z \le l_4, \dots, l_{2m-1} \le z \le l_{2m}, \quad (18)$$

$$H_\varphi^{(0)} = \begin{cases} H_\varphi^{(1)}, & 0 \le z \le l_1, \\ H_\varphi^{(2)}, & l_2 \le z \le l_3, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ H_\varphi^{(m)}, & l_{2m-2} \le z \le l_{2m-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Выражение (4) содержит функции $Z_0^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r)$. Для случая, когда $(k_{ri}^{(m)} r)^2 \ge 0$, они имеют вид

$$Z_s^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r) = J_s(k_{ri}^{(0)} r) N_s(k_{ri}^{(0)} b) - J_s(k_{ri}^{(0)} b) N_s(k_{ri}^{(0)} r), \quad (20)$$

$$Z_s^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r) = J_s(k_{ri}^{(1)} r)\,, \quad (21)$$

....

$$Z_s^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r) = J_s(k_{ri}^{(m)} r) N_s(k_{ri}^{(m)} a) - J_s(k_{ri}^{(m)} a) N_s(k_{ri}^{(m)} r). \quad (22)$$

Для случая $(k_{ri}^{(m)} r)^2 < 0$ имеет место соотношение $k_{ri}^{(m)} = -jk_{ri}'^{(m)} = -j\sqrt{(k_{zi}^{(m)})^2 - k^2}$, и Z_s представляются модифицированными функциями Бесселя:

$$Z_s^{(0)}(k_{ri}^{(0)} r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-js\pi/2)\times$$
$$\times[I_s(k_{ri}'^{(0)} r) K_0(k_{ri}'^{(0)} b) - (-1)^s I_0(k_{ri}'^{(0)} b) K_s(k_{ri}'^{(0)} r)], \quad (23)$$

$$Z_s^{(1)}(k_{ri}^{(1)} r) = (-1)^s \exp(js\pi/2) I_s(k_{ri}'^{(1)} r)\,, \quad (24)$$

$$Z_s^{(2)}(k_{ri}^{(2)} r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-js\pi/2)\times$$
$$\times[I_s(k_{ri}'^{(2)} r) K_0(k_{ri}'^{(2)} a) - (-1)^s I_0(k_{ri}'^{(2)} a) K_s(k_{ri}'^{(2)} r)], \quad (25)$$

....

$$Z_s^{(m)}(k_{ri}^{(m)} r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-js\pi/2)\times$$
$$\times[I_s(k_{ri}'^{(m)} r) K_0(k_{ri}'^{(m)} a) - (-1)^s I_0(k_{ri}'^{(m)} a) K_s(k_{ri}'^{(2)} r)]. \quad (26)$$

Подставив компоненты электромагнитного поля (5)-(16) в граничные условия (17)-(19), получим систему функциональных уравнений, из которой следуют такие уравнения:

$$(1+\delta_{j0})\frac{l}{2}(x_j^{(0)})^2 Z_0^{(0)}(x_j^{(0)}) A_j^{(0)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(1)} (x_i^{(1)})^2 Z_0^{(1)}(x_i^{(1)}) i_1(j,i) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(2)} (x_i^{(2)})^2 Z_0^{(2)}(x_i^{(2)}) i_2(j,i) +$$

....

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(m)} (x_i^{(m)})^2 Z_0^{(m)}(x_i^{(m)}) i_m(j,i)\,, \quad (27)$$

$$(1+\delta_{i0}) l_1 x_j^{(1)} Z_1^{(1)}(x_j^{(1)}) A_j^{(1)} =$$
$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)} x_i^{(0)} Z_1^{(0)}(x_i^{(0)}) i_1(j,i)\,, \quad (28)$$

$$(1+\delta_{j0})(l_3-l_2)x_j^{(2)}Z_1^{(2)}(x_j^{(2)})A_j^{(2)} =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_1^{(0)}(x_i^{(0)})i_2(j,i), \qquad (29)$$

$$(1+\delta_{j0})(l_5-l_4)x_j^{(3)}Z_1^{(3)}(x_j^{(3)})A_j^{(3)} =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_1^{(0)}(x_i^{(0)})i_3(i,j), \qquad (30)$$

....

$$(1+\delta_{j0})(l_{2m-1}-l_{2m-2})x_j^{(m)}Z_1^{(m)}(x_j^{(m)})A_j^{(m)} =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_1^{(0)}(x_i^{(0)})i_m(j,i), \qquad (31)$$

$$j = 0,1,2,...;\ x_j^{(m)} = k_{rj}^{(m)}d,$$

$$i_1(j,i) = \int_0^{l_1} \cos(k_{zj}^{(0)}z)\cos(k_{zi}^{(1)}z)dz,$$

$$i_2(j,i) = \int_{l_2}^{l_3} \cos(k_{zj}^{(0)}z)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2))dz,$$

$$i_3(j,i) = \int_{l_4}^{l_5} \cos(k_{zj}^{(0)}z)\cos(k_{zi}^{(3)}(z-l_4))dz,$$

....

$$i_m(j,i) = \int_{l_{2m}}^{l} \cos(k_{zj}^{(0)}z)\cos(k_{zi}^{(m)}(z-l_{2m}))dz,$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Из уравнений (27)-(31) следует бесконечная однородная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_i^{(0)}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_1^{(0)}(x_i^{(0)}) \times$$

$$\times\left[\delta_{ij}(1+\delta_{j0})\frac{l}{2}x_j^{(0)}\frac{Z_0^{(0)}(x_j^{(0)})}{Z_1^{(0)}(x_j^{(0)})} - \right.$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_1(j,k)i_1(i,k)}{(1+\delta_{k0})l_1}x_k^{(1)}\frac{Z_0^{(1)}(x_k^{(1)})}{Z_1^{(1)}(x_k^{(1)})} -$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_2(j,k)i_2(i,k)}{(1+\delta_{k0})(l_3-l_2)}x_k^{(2)}\frac{Z_0^{(2)}(x_k^{(2)})}{Z_1^{(2)}(x_k^{(2)})} -$$

....

$$\left. -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_m(j,k)i_m(i,k)}{(1+\delta_{k0})(l-l_{2m})}x_k^{(m)}\frac{Z_0^{(m)}(x_k^{(m)})}{Z_1^{(m)}(x_k^{(m)})}\right] = 0, \qquad (32)$$

$j = 0,1,2,...$.

Условием существования и единственности решения системы уравнений (32) является равенство нулю ее определителя:

$$\det\left\{ x_i^{(0)}Z_1^{(0)}(x_i^{(0)}) \times \right.$$

$$\times\left[\delta_{ij}(1+\delta_{j0})\frac{l}{2}x_j^{(0)}\frac{Z_0^{(0)}(x_j^{(0)})}{Z_1^{(0)}(x_j^{(0)})} - \right.$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_1(j,k)i_1(i,k)}{(1+\delta_{k0})l_1}x_k^{(1)}\frac{Z_0^{(1)}(x_k^{(1)})}{Z_1^{(1)}(x_k^{(1)})} -$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_2(j,k)i_2(i,k)}{(1+\delta_{k0})(l_3-l_2)}x_k^{(2)}\frac{Z_0^{(2)}(x_k^{(2)})}{Z_1^{(2)}(x_k^{(2)})} -$$

....

$$\left.\left. -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_m(j,k)i_m(i,k)}{(1+\delta_{k0})(l-l_{2m})}x_k^{(m)}\frac{Z_0^{(m)}(x_k^{(m)})}{Z_1^{(m)}(x_k^{(m)})}\right]\right\} = 0. \qquad (33)$$

Вычисленные с помощью ЭВМ корни определителя (33) являются собственными частотами цилиндрического резонатора, перестраиваемого отрезком ребристого цилиндра.

Литература: 1. *Лупандин О.С., Ковпак Н.Е., Баранов Л.Н., Хижняк Н.А.* Исследование электродинамических свойств резонаторов с патрубками. Харьков: ХФТИ. Препринт 70/34. 1970. 15с. 2. *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* Коаксиальные резонаторы//Радиотехника и электроника. 1973. Т.18. Вып.9. С.1777-1784. 3. *Кириленко А.А., Масалов С.А., Шестопалов В.П., Шинкаренко В.Ф.* Исследование спектра собственных частот магнитных типов колебаний в цилиндрическом резонаторе с коаксиальным кольцевым выступом. Харьков: Институт радиофизики и электроники АН УССР. Препринт. 1974. №37. 53 с. 4. *Руженцев И.В., Хмель С.И., Чумаченко С.В.* Дисперсионное уравнение цилиндрического диафрагмированного резонатора. I // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4. С. 8-10.

Поступила в редколлегию 23.06.2001

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

Хмель Сергей Иванович, соискатель кафедры МИТ ХНУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 14-08-02.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.