



НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЛІНІЇ НА ГЛАДКІЙ ПОВЕРХНІ ПИЛИПАКИ-КРЕМЕЦЯ

Табаківа І.С., ст. викл., кафедра МСТ ХНУРЕ

Розглянуто метод наближеного знаходження геодезичної лінії на гладкій поверхні. Запропонований метод визначення геодезичних ліній базується на використанні символів Кристоффеля.

Вважатимемо, що у рівнянні поверхні $x=x(u(t),v(t))$; $y=y(u(t),v(t))$; $z=z(u(t),v(t))$ змінні u і v залежать від параметра t . Тоді маємо систему диференціальних рівнянь опису геодезичних у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

З врахуванням початкових умов $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$, $u'(0)=du_0$, $v'(0)=dv_0$ система (1) має єдиний розв'язок. Тому через кожну точку поверхні у заданому напрямку проходить одна геодезична. Вирази Γ_{ij}^k називаються символами Кристоффеля; їх записують через коефіцієнти першої квадратичної форми.

В якості приклада оберемо [2] поверхню, задану рівняннями:

$$x = \frac{\cos u \cos v}{4}, \quad y = \frac{\cos u \sin v}{4}, \quad z = \sin\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right). \quad (2)$$

Особливість поверхні обертання (2), описаної у роботі [2], полягає у тому, що всі геодезичні лінії на ній є замкнутими і мають однакову довжину.

У середовищі пакету *maple* було розроблено програму для складання системи рівнянь типу (1). У випадку поверхні (2) система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{8} \cos(u(t)) \sin(u(t)) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{2}u(t)\right)^2 + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{2}u(t)\right)^2 \right) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2}{\frac{5}{16} - \frac{1}{16} \cos(u(t))^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}u(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}u(t)\right)} + \\ + \frac{1}{16} \frac{\cos(u(t)) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}{\frac{5}{16} - \frac{1}{16} \cos(u(t))^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}u(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}u(t)\right)} = 0; \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + \frac{2 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)}{\cos(u(t))} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$



Для розв'язання системи рівнянь при $t = 0 \dots T$ було обрано такі початкові умови: $u_{start} = 1.6$, $u_{end} = 5$, $v_{start} = 0$, $v_{end} = 2\pi$, $u_0 = 3$, $v_0 = 0$. Напрямок вильоту задавався вектором $du_0 = 0.7$, $dv_0 = 1$, $T = 15$. Кількість точок, що складають геодезичну лінію, обрано $N = 100$.

На рис. 2. наведено зображення поверхні (2) з побудованою на ній геодезичною лінією. Замкнутість одержаної геодезичної лінії вказує на коректність виконання розробленого алгоритму, що погоджується з теоретично доведеним [2] положенням, що довільна геодезична на зазначеній поверхні буде замкненою. В процесі складання системи диференціальних рівнянь було одержано вирази для першої квадратичної форми поверхні, що визначають метрику поверхні:

$$E = \frac{5}{16} - \frac{1}{16} \cos(u)^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right), \quad G = \frac{1}{16} \cos(u)^2, \quad F = 0. \quad (4)$$

На рисунку 1 наведено кадри анімацій геодезичних ліній на поверхні (2).

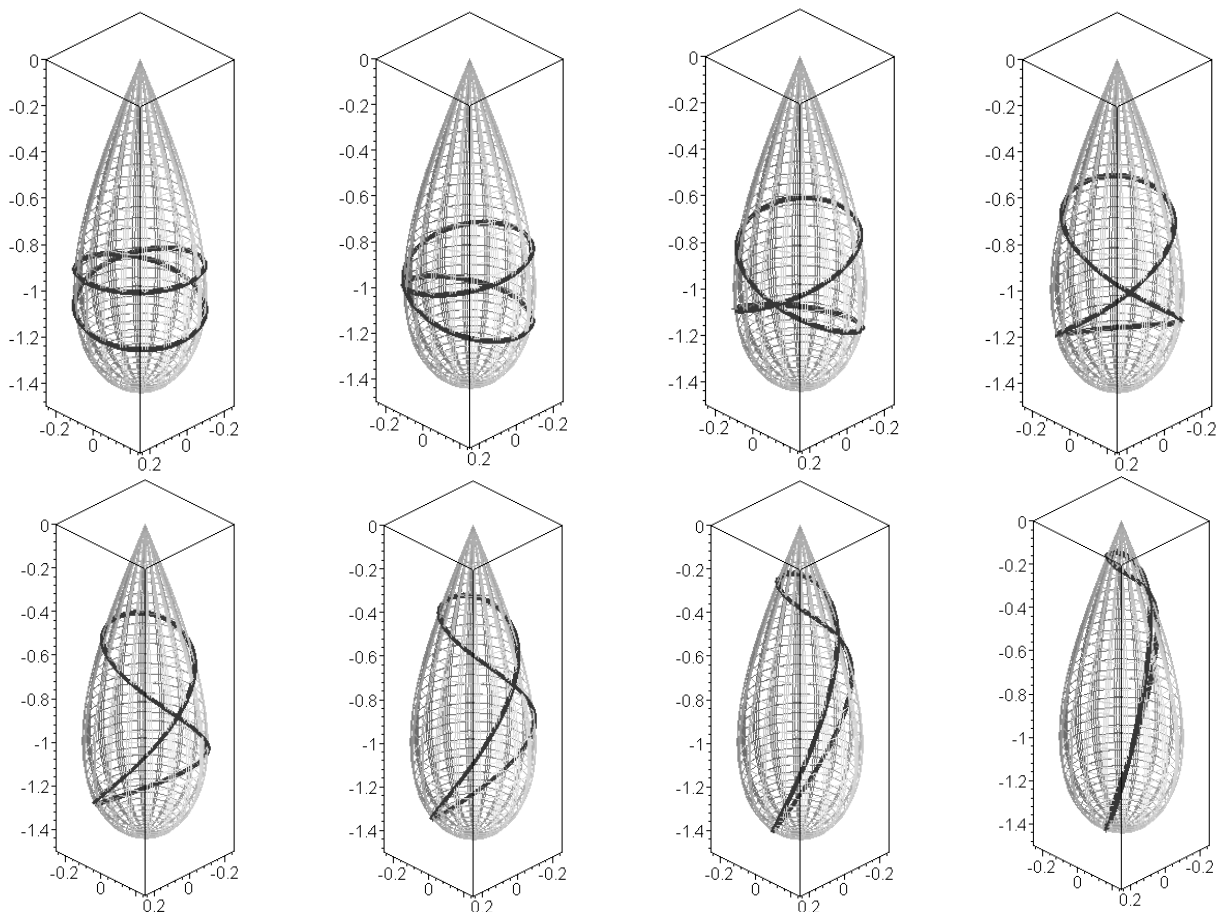


Рисунок 1 – Анімаційні зображення геодезичної лінії на поверхні (2)

Список літератури

1. David Mah. – Режим доступа: <http://wooj.files.wordpress.com/2012/06/vb-workshop-harvard-gsd-spring-2012.pdf> – 20.03.2016. – Загол. з екрану.
2. Кремець, Я.С. Поверхня обертання, всі геодезичні лінії якої є замкненими і мають однакову довжину / Я.С. Кремець // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк : ЛНТУ, 2015. Вип.19. – С. 104-108.