

ФИЛЬТРАЦИЯ И ОТЛОЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

ВОВК А.В., ДИКАРЕВ В.А.

Рассматривается процесс фильтрации жидкости через объём, заполненный порошковой смесью. Исследуется образование фильтрационной корки на разделе суспензии и порошковой смеси. Выводятся коэффициенты отложения. Приводятся формулы, описывающие процесс образования корки и её изменения во времени, и формулы вычисления объёма жидкости профильтрованной через порошковую смесь. Устанавливается, что коэффициенты отложения можно считать постоянными.

1. Введение и постановка задачи

Исследуются процессы движения жидкостей в объёмах, заполненных многокомпонентными смесями [1-3].

Рассматриваются задачи с подвижными границами, возникающие при фильтрации через пористую среду жидкостей. Фильтрация происходит в случае, когда гидростатическое давление в рассматриваемом объёме, заполненном многокомпонентной смесью, становится больше давления жидкости, нагнетающейся в объём. Это приводит к оседанию на стенках объёма твёрдых частиц и образованию корки.

Фильтрационная корка, возникающая на пористой поверхности, сама является пористой и проницаемой. Её пористость и проницаемость зависят от перепада давления на корке; корки часто бывают сжимаемыми.

Если размер взвешенных частиц порошковой смеси меньше среднего размера пор на поверхности, на которой отлагается фильтрационная корка, то часть частиц будет проникать внутрь среды.

Целью работы является исследование процессов фильтрации жидкости через порошковые смеси.

Задача исследования состоит в выводе формул, описывающих процесс фильтрации жидкостей через порошковую смесь.

Общий объем суспензии, которая предполагается однородной, складывается из объема твердых частиц порошковой смеси V_{pm} и объема жидкости V_l . Доля объема, приходящаяся на твердые частицы, равна

$$f_{pm} = \frac{V_{pm}}{V_{pm} + V_l}. \quad (1)$$

Вследствие фильтрации и отложения частиц объем V_{pm} уменьшается за время dt на величину dV_{pm} . За это время объем жидкости V_l уменьшается на dV_l . Предположим, что состав суспензии при этом не меняется. Тогда величина f_{pm} остается постоянной.

Отсюда получаем, что

$$dV_{pm} = \frac{f_{pm}}{1 - f_{pm}} dV_l. \quad (2)$$

При реализации процесса фильтрации твердые частицы откладываются либо в порах внутри фильтрующей среды, либо в виде корки на ее наружной поверхности. Обозначим через δA элемент площади, на которой происходит отложение твердых частиц, а через dx_{cr} – приращение толщины слоя этих частиц за время dt . Если частицы откладываются внутри фильтрующей среды, то они могут занять только m -ю часть объема $\delta A dx_{cr}$. Здесь m – пористость фильтрующей среды. В этой части объема они образуют пористую структуру, пористость которой обозначим через m_{cr} . Объем отложившихся частиц равен

$$dV_{pm} = m(1 - m_{cr}) \delta A dx_{cr}. \quad (3)$$

За время dt через площадку δA протечет некоторый объем жидкости. Если обозначить нормальную к площадке δA составляющую объемного потока жидкости через \bar{v}_n , то получим:

$$dV_l = -\bar{v}_n \delta A dx_{cr}. \quad (4)$$

Предполагается, что нормаль к площадке δA направлена во внешнюю часть объема, в которую втекает жидкость. Из уравнений (2) - (4) получаем уравнение для скорости роста толщины корки:

$$\frac{dx_{cr}}{dt} = -\frac{f_{pm}}{m(1 - m_{cr})(1 - f_{pm})} \bar{v}_n. \quad (5)$$

Для фильтрационной корки, откладывающейся на наружной поверхности фильтрующей среды, получим такое же уравнение, в котором $m = 1$.

Множители

$$w_{int} = \frac{f_{pm}}{m(1 - m_{cr})(1 - f_{pm})}, \quad (6)$$

$$w_{out} = \frac{f_{pm}}{(1 - m_{cr})(1 - f_{pm})} \quad (7)$$

называются, соответственно, внутренним и наружным коэффициентами отложения. Так как в действительности корка всегда хоть и слабо, но сжимаема, то пористость корки изменяется с изменением перепада давления и, следовательно, коэффициенты отложения не являются величинами строго постоянными. Если же отложение происходит при постоянном перепаде давления, то коэффициенты w_{int} и w_{out} можно считать постоянными.

Течение жидкости в области отложения твердых частиц подчиняется закону Дарси [4]. В наружной корке проницаемость равна проницаемости корки K_{cr} . В случае внутреннего отложения проницаемость меньше этой величины. Приблизительно ее можно принять равной mK_{cr} . Из-за сжимаемости корки проницаемость K_{cr} тоже зависит от перепада давления.

2. Анализ процесса фильтрации

Объем, заполненный многокомпонентной смесью, можно представить как вертикальный цилиндрический сосуд с пористым дном, в который налита суспензия.

Предположим, что происходит только наружное отложение и что фильтрат и фильтрационная корка несжимаемы. Запишем закон Дарси:

$$q = -\frac{K_{cr} A}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right) \quad (8)$$

Здесь A – площадь дна; ρ и μ – плотность и вязкость фильтрата; q – объемный расход фильтрата в направлении положительной оси x (предполагаем, что жидкость течёт вниз). Уравнение (8) (с заменой K_{cr} на K) имеет место для жидкости в пористом дне.

Жидкость считается несжимаемой. Поэтому уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, всюду

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения и соответствующие граничные условия имеют вид:

$$p = ax + b, \quad -x_{cr} < x < 0, \\ p = a'x + b', \quad 0 < x < L, \quad (11)$$

$$p(-x_{cr}) = p_a + \rho_s gh, \\ p'(0) = p(0), \quad p'(L) = 0,$$

$$-K_{cr} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right)_{x=0} = -K \left(\frac{\partial p'}{\partial x} - \rho g \right)_{x=0}. \quad (12)$$

Здесь p_a – давление воздуха над суспензией; h – высота столба суспензии над уровнем корки; ρ_s – плотность суспензии.

При помощи граничных условий (12) можно определить постоянные a , b , a' и b' из (11).

В результате получим:

$$p = -\frac{p_a + \rho_s gh + \left(1 - \frac{K_{cr}}{K}\right) \rho g l}{x_{cr} + \frac{K_{cr}}{K} L} x + b. \quad (13)$$

Из формул (8)-(13) находим

$$q = \frac{K_{cr} A}{\mu} \left(\frac{p_a + \rho_s gh + \rho g(L + x_k)}{x_{cr} + \frac{K_{cr}}{K} L} \right). \quad (14)$$

Пусть начало корки находится в точке $x = -x_{cr}$. Тогда из уравнений (5) и (14) получаем

$$\frac{dx_{cr}}{dt} = \frac{K_{cr}}{\mu} \left(\frac{p_a + \rho_s gh + \rho g(L + x_k)}{x_{cr} + \frac{K_{cr}}{K} L} \right) \times \frac{f_{pm}}{(1 - m_{cr})(1 - f_{pm})}. \quad (15)$$

Из определения h и f_{pm} следует, что

$$h = h_0 - x_{cr} - \frac{Q}{A(1 - f_{pm})}. \quad (16)$$

Здесь

$$Q = \int_0^t q dt \quad (17)$$

есть полный объем жидкости, профильтровавшейся к моменту t ; h_0 – начальное значение h .

Интегрируя уравнение (5), при $t = 0$ находим

$$Q = \frac{A(1 - f_{pm})(1 - m_{cr})}{f_{pm}} x_{cr}. \quad (18)$$

Подставим Q из (18) в уравнение (16); полученное выражение для h подставим в уравнение (15). Проинтегрируем (15) для случая $p_a = \text{const}$. Предположив, что давление p_a велико, получим равенство

$$\frac{dx_{cr}}{dt} \approx \frac{K_{cr} p_a w_{out}}{\mu \left(x_{cr} + \frac{K_{cr}}{K} L \right)}. \quad (19)$$

Интегрируя это равенство при условии $x_{cr} = 0$ в момент $t = 0$, получаем

$$x_{cr} = -\frac{K_{cr}}{K} L + \sqrt{\left(\frac{K_{cr}}{K} L \right)^2 + \frac{2K_{cr} p_a w_{out}}{\mu} t}. \quad (20)$$

Если величины Q и x_{cr} брать в один и тот же момент времени t , то из уравнения (18) можно найти выражение для w_{out} :

$$w_{out} = \frac{Q}{A x_{cr}}. \quad (21)$$

Зная величину w_{out} и величины L , p_a , K , μ , x_{cr} , t , можно, используя (20), найти K_{cr} по формуле

$$K_{cr} = \frac{x_{cr}^2 \mu K}{2(p_a K w_{out} t - \mu x_{cr} L)}. \quad (22)$$

Отметим, что величина Q состоит не только из фильтра, протекшего через пористое дно, но и из объема фильтра, насыщающего дно.

Заметим также, что для малых значений L обе величины x_{cr} и Q возрастают пропорционально \sqrt{t} .

Некоторые типичные результаты, полученные выше, приведены на рис. 1 и 2.

На них изображены графики зависимости величин K_{cr} и w_{out} от перепада давления для двух кварцевых суспензий. Одна из суспензий состоит из кварца, воды и 12% алюминия [2]. В другой содержится 25% алюминия.

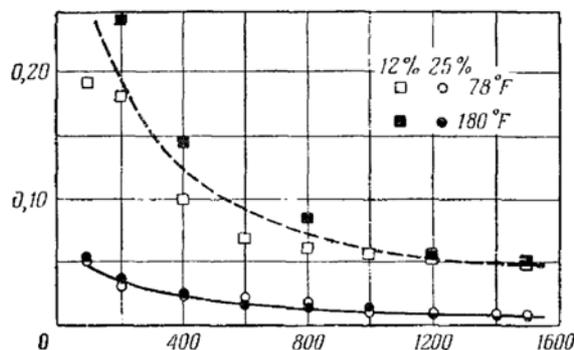


Рис. 1. Зависимость проницаемости фильтрационной корки от перепада давления: по оси абсцисс – перепад давления (кг/см²); по оси ординат – K_{cr} (мд)

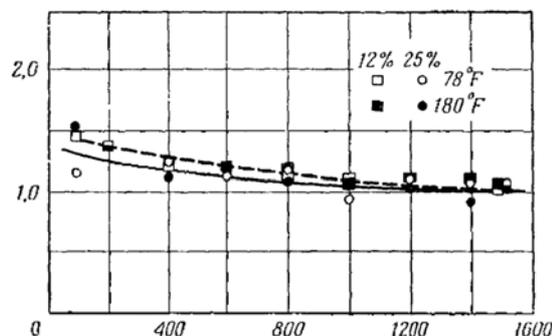


Рис. 2. Зависимость наружного коэффициента отложения от перепада давления: по оси абсцисс – перепад давления (кг/см²); по оси ординат – w_{out}

Из графиков видно, что, хотя проницаемость K_{cr} сильно изменяется с изменением перепада давления,

коэффициент w_{out} остается практически постоянным.

В общей многомерной задаче об отложении граничное условие на границе фильтрационной корки и суспензии имеет вид

$$\frac{ds}{dt} = -w_{out} \vartheta n. \quad (23)$$

Здесь $\frac{ds}{dt}$ – скорость продвижения границы корки по

направлению нормали к границе; ϑ – объемный поток фильтрата через границу; n – единичный вектор внешней нормали к границе. Следовательно, можно найти продвижение границы фильтрационной корки любой формы.

3. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Приведены формулы, описывающие процесс фильтрации жидкости через порошковую смесь. Выведены формулы, описывающие образование фильтрационной корки на границе суспензии и порошковой смеси, а также изменение характеристик корки во времени.

Практическая ценность работы заключается в том, что рассмотренная математическая модель достаточно точно описывает процессы фильтрации жидкостей с различными химическими характеристиками через порошковые смеси.

Литература: 1. *Вовк А.В.* Процесс формирования порошковых масс в объеме активной смеси // Радиозлектроника и информатика. 2007. Ч.2. С. 141-144. 2. *Вовк А.В.* Использование следящих сетей при исследовании жидких смесей // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 142. С. 43-47. 3. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-И.: РХД, 2004. 628с.

Поступила в редколлегию 11.06.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Вовк Александр Владимирович, аспирант кафедры «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61100, Харьков, пр. Маршала Жукова, 45, кв. 16, тел. 716-16-88.

Дикарев Вадим Анатолиевич, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 343-57-03.