ISSN 0555-2656

БИОНИКА ИНТЕЛЛЕКТА

ИНФОРМАЦИЯ, ЯЗЫК, ИНТЕЛЛЕКТ

№ 2 (76) **2011**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в октябре 1967 г.

Учредитель и издатель
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Периодичность издания – *3 раза в год*

Тематический выпуск
по материалам семинара
«МОЗГОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ»

Харьков • ХНУРЭ • 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал включен в список специальных изданий ВАК Украины:
по техническим наукам (постановление президиума ВАК Украины № 1-05/6 от 16.12.2009),
по физико-математическим наукам (постановление президиума ВАК Украины № 1-05/5 от 21.05.2011)

УДК 519.7

М. Ф. Бондаренко[1], Н. Е. Русакова[2], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[3]
[1-3]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

О МОЗГОПОДОБНЫХ СТРУКТУРАХ АКАДЕМИКА ВИКТОРА МИХАЙЛОВИЧА ГЛУШКОВА

Одним из перспективных направлений искусственного интеллекта являются мозгоподобные структуры, идею создания которых выдвинул В.М.Глушков. В связи с этим в статье рассматривается это понятие как усилитель интеллектуальных возможностей человека с изучением закономерностей работы мозга. Речь идет именно о мозгоподобных структурах, а не о точном копировании мозга, в котором эффективно распараллеливаются далеко не все операции.

МОЗГОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ, АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЛОГИКИ, РЕЛЯЦИОННЫЕ СЕТИ

Введение

Виктор Михайлович Глушков в 1957 году выдвинул идею создания мозгоподобных структур[1]. Он развивал и пропагандировал ее на протяжении всей своей последующей жизни (до 1982 года) как главное направление развития будущей вычислительной техники. Суть идеи состоит в следующем. Существует группа задач, связанных с поиском новых принципов построения электронных цифровых машин. Особое значение приобретает здесь задача детального изучения механизма высшей нервной деятельности, в частности процесса образования понятий и их связи с языком. Механизм действия современных цифровых машин с программным управлением весьма сильно отличается от работы человеческого мозга. Имеет огромное практическое значение глубокое проникновение в закономерности работы мозга.

Если предположить, что конструктор может объединить в систему не несколько тысяч логических элементов, как это было в эпоху электронно-ламповой техники, а многие десятки миллионов (причем на число соединений этих элементов практически не накладывается никаких ограничений), то лучшими архитектурными решениями для ЭВМ будут мозгоподобные структуры. Характерной особенностью их является слияние памяти с обработкой данных: данные обрабатываются одновременно по всей памяти с максимально возможной степенью распараллеливания всех операций. Речь идет именно о мозгоподобных структурах, а не о точном копировании мозга, в котором эффективно распараллеливаются далеко не все операции.

Мозгоподобные структуры с параллельными процессами, управляемыми многими потоками данных и команд, несомненно, представляют собой высший уровень развития архитектур ЭВМ. Однако на нынешнем этапе электронной технологии (1981 год) полная и бескомпромиссная их реализация является пока преждевременной. Переход к мозгоподобным структурам будущего должен осуществляться на основе разумного отступления от принципов фон Неймана.

1. Мозгоподобные структуры

Идея Глушкова о мозгоподобных структурах примыкает к области бионики интеллекта, которая призывает формально описывать механизмы и функции человеческого интеллекта с целью использования патентов Природы в деле усовершенствования вычислительной техники. При жизни В.М.Глушкова, как сам он об этом писал, его идею невозможно было в полной мере реализовать на практике[2]. К настоящему же времени радиоэлектроника создала, благодаря удешевлению, миниатюризации и повышению быстродействия средств вычислительной техники, достаточную материальную базу для практической реализации мозгоподобных структур. Со дня смерти В.М.Глушкова прошло почти 30 лет, и то, о чем он мечтал, теперь становится реальностью.

Сегодня уже появилась возможность создания вычислительных структур с производительностью, сравнимой с производительностью мозга человека. Максимально возможная производительность вычислительной аппаратуры продолжает стабильно экспоненциально расти в соответствии с законом Мура, приблизительно удваиваясь через каждые два года. Таким образом, время создания мозгоподобных структур сверхвысокой производительности настало. Задача создания мозгоподобных структур, называемых еще иначе мозгоподобными ЭВМ (по англ. – brainlike computer), завладела воображением специалистов. Мы оцениваем идею Глушкова как ключевую. Ее реализация может привести к значительному повышению производительности вычислительной техники и расширению сферы ее применения. Попытаемся оценить, во сколько раз увеличилась бы производительность современной вычислительной аппаратуры, если б она имела архитектуру мозга человека.

Мозг человека по сравнению с современной ЭВМ – тихоход. О его “тактовой частоте” можно судить по пропускной способности нервных волокон его нейронной сети. Известно, что каждое нервное волокно мозга человека может пропускать не более 10^3 импульсов в секунду. По проводникам же в нынешних ЭВМ передается порядка 10^9 импульсов в секунду. Следовательно, ЭВМ превосходит мозг человека по скорости работы решающих элементов в $10^9:10^3=10^6$ раз. Тем не менее, по своей производительности в целом мозг человека многократно превосходит любую современную ЭВМ. Это обусловлено тем, что мозг человека имеет в своем составе около 10^{15} решающих элементов (в роли которых принимаются синапсы – стыки между окончаниями волокон его 10^{11} нервных клеток). Все нервные клетки мозга человека и соединяющие их синапсы, как свидетельствуют нейрофизиологические данные, работают параллельно. В современных же ЭВМ (имеются в виду серийные машины последовательного действия) в любой момент времени одновременно работает лишь небольшое число решающих элементов. По самым льготным для машины оценкам в ней одновременно действует в среднем не более 10^3 решающих элементов. Таким образом, в смысле числа параллельно работающих элементов мозг превосходит машину в $10^{15}:10^3=10^{12}$ раз. В итоге, по своей производительности мозг превосходит современную вычислительную машину последовательного действия примерно в $10^{12}:10^6=10^6$ раз. Если б удалось создать ЭВМ параллельного действия, работающую по принципам мозга, которая имеет 10^{15} решающих элементов, то в результате была бы получена машина, превосходящая по производительности мозг человека в $10^9:10^3=10^6$ раз.

Итак, ЭВМ параллельного действия, работающая по принципам мозга и построенная на современной элементной базе, согласно вышеприведенным оценкам, в случае ее создания будет превосходить нынешние ЭВМ последовательного действия в 10^{12} раз, а мозг человека – в 10^6 раз.

2. Нейрокомпьютеры

Почему же специалисты по нейрокомпьютерам до сих пор не смогли построить мозгоподобную ЭВМ, несмотря на то, что занимаются они этой проблемой уже около полувека? Попытку ответа на этот вопрос можно найти в книге Хьюбела “Глаз, мозг, зрение” – Нобелевского лауреата, одного из крупнейших в мире специалистов в области анатомии и физиологии нейронных сетей головного мозга человека. Он пишет: “Иногда говорят, что нервная система содержит огромное число случайных межнейронных соединений. Хотя упорядоченность связей и в самом деле не всегда очевидна, я подозреваю, что те, кто говорит о случайных нейронных сетях, не утруждали себя ознакомлением с нейроанатомией. Даже беглый просмотр такой книги, как труд Кахала “Гистология нервной системы ”, достаточно убеждает кого угодно в том, что в чудовищной сложности нервной системы почти всегда можно усмотреть известную степень упорядоченности. Когда мы видим правильные ряды клеток в мозгу, впечатление создается такое же, как если б мы рассматривали телефонную станцию, печатный станок или внутренность телевизора, – становится несомненным, что упорядоченность служит какой-то цели.

Столкнувшись с тем или иным человеческим изобретением, мы едва ли усомнимся в том, что агрегат в целом, так же как и его отдельные части, обладает вполне постижимыми функциями. Чтобы понять их, нам нужно только прочесть ряд инструкций. В биологии появляется аналогичная вера в функциональную обоснованность и в конечном итоге даже в постижимость структур, которые не были изобретены кем-то, а совершенствовались на протяжении миллионов лет эволюции. Задача нейробиолога состоит в том, чтобы выяснить связь порядка и сложности с функцией”. Высказывание Хьюбела можно понять в том смысле, что технические нейронные сети – это не совсем то, а вернее – совсем не то, чем являются их биологические прототипы. Можно не согласиться с Хьюбелом лишь в одном: к такому положению привело не нежелание инженеров знакомиться с биологическими нейронными сетями, а вынужденное незнание ими принципов их функционирования. В то время как анатомия (то есть строение) нейроструктур на микроскопическом уровне в настоящее время хорошо изучена (выявление и классификация их основных типов были в основном завершены в начале XX века), исследование физиологии (то есть функции) этих структур, несмотря на отдельные достижения, до сих пор буксует. Поэтому инженерам приходится на свой риск и страх самим строить произвольные гипотезы о принципах действия нейронных структур. Хьюбел полагает, что достигнута лишь отдаленная аналогия известных ему видов технических нейронных сетей с биологическими нейронными сетями мозга человека. В нейронной сети мозга человека обнаруживаются правильные ряды клеток, как в телевизоре или в других технических устройствах, обрабатывающих информацию. Хьюбел отрицает вероятностный характер работы нейронных сетей. Он, сторонник детерминированности нейронных сетей, ссылается на Кахала – классика анатомии нейронных сетей, который создал свое учение на рубеже 19-го и 20-го столетий.

Роль Кахала примерно такова же, как Карла Линнея – систематизатора видов живых существ. Значительная часть анатомических структур в нейронной сети мозга была выявлена и расклассифицирована Кахалом уже к началу 20-го столетия. В последующее время было добавлено нейроанатомических знаний сравнительно немного. До настоящего времени пока крайне мало известно о функционировании (функциях) этих прочно выявленных и расклассифицированных нейро-анатомических структур. Поэтому инженерам приходится строить произвольные гипотезы о принципах построения технических нейронных сетей. Создается впечатление, что инженеры пока еще не разгадали принцип действия биологических нейронных сетей.

3. Математические структуры

Как определить понятие «мозгоподобная структура» в точных математических терминах? Его можно подвести под более общее понятие «математическая структура». Обращаемся к классическому определению этого понятия: «*Структура математическая* – родовое название, объединяющее понятия, общей чертой которых является то, что они применимы к множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить структуру, задают отношения, в которых находятся элементы множеств (типовая характеристика структуры), а затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям – аксиомам структуры». Мозгоподобные структуры, как и математические, могут быть конечными, счетными, континуальными и т.д. в зависимости от мощности множеств, к которым они применяются. Конечные мозгоподобные структуры уместно использовать в тех случаях, когда речь идет о проектах конкретных экземпляров вычислительной аппаратуры: мозгоподобные структуры, воспроизводящие техническими средствами процесс русского словоизменения. Счетные мозгоподобные структуры удобны при разработке принципов действия вновь создаваемых или совершенствуемых видов аппаратуры: мозгоподобные структуры, математически описывающие теорию и модель понятия натурального ряда чисел. Континуальные мозгоподобные структуры также могут оказаться полезными как удобное средство приближенного описания однородных конструкций с очень большим числом элементов: интегральная модель преобразования непрерывного спектра светового излучения в цвет зрительным анализатором человека.

Из определения понятия «математическая структура» явствует, что оно зиждется, во-первых, на понятии отношения, которое характеризует внутреннее строение структуры, и, во-вторых, на понятии системы условий-аксиом, характеризующих свойства структуры (или, иначе говоря, – системы законов внешнего поведения структуры). Условия-аксиомы записываются формулами на известном языке кванторов, применяемых к операциям над переменными предикатами. Конкретные же отношения выражаются в виде множеств наборов предметов, графов, графиков или таблиц без использования формул.

Возникает вопрос: а возможно ли вообще отношения выражать формулами? Поразительно, но факт: среди всевозможных способов непосредственного выражения отношений не обнаруживается ни одного формульного. Возникает подозрение, что отношения вообще не поддаются непосредственному описанию формулами.

В 70-х годах прошлого столетия двое из авторов этого доклада пытались проникнуть в структуру естественного языка человека, который, как известно, является системой отношений. При этом возникла настоятельная потребность формульного описания отношений. Столкнувшись с невозможностью непосредственного представления отношений формулами, мы воспользовались наличием взаимно однозначной связи отношений с предикатами и построили так называемую «алгебру предикатов». На языке этой алгебры можно формулами выразить любые конретные предикаты, соответствующие заданным отношениям, и выполнять их преобразования, получая из уже имеющихся предикатов новые. А при необходимости эти предикаты можно преобразовать обратно в соответствующие им отношения. Любое же отношение, когда это потребуется, можно преобразовать обратно в предикат. Таким образом, была решена задача косвенной формульной записи любых фиксированных отношений и их преобразования.

Как известно, отношения формально выражают мысли людей, а их преобразования соответствуют процессу мышления. Поэтому создание алгебры предикатов открывает возможность формульного описания и автоматизации мыслительной деятельности человека. Проверка созданной таким способом «алгебры предикатов» на «патентоспособность» показала, что эта алгебра никем ранее не была систематически описана. Однако еще в 1920 году Гильберт в своем геттингентском курсе лекций по основам теоретической логики описал идею такого косвенного представления отношений, но в дальнейшем ни он сам, ни другие авторы к этой идее больше не обращались [3].Последующий анализ свойств «алгебры предикатов» показал, что этот способ формульной записи и обработки отношений выходит за рамки классического определения понятия алгебры, так что первоначально присвоенное ей имя «алгебра предикатов» оказалось не вполне корректным. Точнее было бы ее называть «алгебраической системой предикатов», понимая термин «алгебраическая система» так, как его определяет академик А.И.Мальцев [4].

В настоящее время разработанная нами «алгебра предикатов» имеет вид алгебраической системы предикатов, состоящей из трех частей: 1) алгебры имен постоянных предикатов; 2) алгебры операций над переменными предикатами; 3) алгебраической модели, на языке которой записываются уравнения алгебры имен предикатов, выражающие постоянные отношения. На языке алгебры предикатных операций записываются условия-аксиомы (законы), определяющие наблюдаемое извне поведение математической структуры. На языке уравнений алгебры имен предикатов записываются конкретные отношения, удовлетворяющие условиям-аксиомам. Эти отношения характеризуют внутреннее строение математической структуры. Уравнения алгебры имен предикатов, связывают предметные переменные – аргументы заданных предикатов. Их можно решать относительно тех или иных наборов предметных переменных. Оказалось, что средств алгебры операций над переменными предикатами достаточно для отыскания всех корней любого уравнения алгебры имен конечных предикатов. Был найден универсальный метод решения уравнений алгебры имен предикатов и способ построения специальной логической сети, называемой реляционной, которая реализует этот метод. В процессе своей работы реляционная сеть воспроизводит поведение конечной модели любой заранее заданной математической структуры. Реализуя эту сеть в виде электронного устройства, можно получить параллельно действующую модель той или иной математической структуры.

Построена модель склонения полных непритяжательных имен прилагательных русского языка и ее действующая реляционная сеть для демонстрации понятия мозгоподобной структуры и способа ее технической реализации.

4. Реляционное программирование

Наличие способа искусственного воспроизведения мозгоподобных структур открывает возможность перехода к новому способу программирования ЭВМ, отступающему от принципов фон Неймана. Используемый в настоящее время способ программирования основан на последовательном выполнении огромного числа мельчайших операций. В начальный период развития вычислительной техники такой способ программирования был единственно возможным из-за малой производительности оборудования, содержащего порядка тысячи электромагнитных реле (МАРК-1) или тысячи электронных ламп (ЭНИАК).

В настоящее же время, когда в наличии имеется электронная аппаратура, насчитывающая многие десятки миллионов параллельно работающих логических элементов, такой способ программирования выглядит как анахронизм. Переход к мозгоподобным структурам и реализующим их реляционным сетям позволяет перейти от мелкошаговой последовательной обработки информации к крупноблочной параллельной. Именно такой способ программирования практикуется людьми при их общении друг с другом. Они не пытаются собеседнику «передвигать ноги», а обращаются к нему с речью, составленной из предложений, передающей ему знания, а не длиннейшую последовательность мелких команд. Если бы человека «программировали» так, как он сегодня программирует вычислительную машину, то превратили бы его зомби. Такой бездуховной жизни человек не выдержал бы и недели, удавившись с тоски. Слово «программа», выражающее то, что требуется для мозгоподобных ЭВМ, характеризуется иным, чем прежде смыслом, который заключается в таких словосочетаниях как «программа курса лекций» или «предвыборная программа». Программирование этого вида называется реляционным, поскольку оно снабжает машину отношениями, то есть мыслями, а не длинными последовательностями команд, которые она выполняет бездумно, не осмысливая их.

Реляционное программирование, основанное на использовании мозгоподобных структур и реализующих их реляционных сетей, снабжает машину элементами настоящего интеллекта. Машина не вникает в смысл мелкошаговых программ, она их лишь бездумно по отдельным командам исполняет, не отдавая себе отчета в том, что же собственно она делает. Создается лишь видимость машинного интеллекта. Интеллект программиста, составившего программу, не становится достоянием машины.

5. Перспективы применения мозгоподобных структур

Мозгоподобная ЭВМ, в силу параллельности принципа ее действия, развивает чудовищную производительность. Поэтому возникает важная задача, чем же загрузить мозгоподобные ЭВМ. Следует учесть, что сегодня человек располагает ннтеллектом, производительность которого в миллион раз превосходит производительность машины. Поэтому он может пока не опасаться конкуренции машин.

Однако с появлением мозгоподобных ЭВМ положение может в обозримом будущем кардинально измениться: машина вырвется вперед, а ее производительность в миллион раз превзойдет производительность человеческого интеллекта. В отличие от нынешних ЭВМ, компьютеры нового типа будут не только имитировать интеллектуальную деятельность, но и по настоящему мыслить. Чтобы не утратить первенство, людям придется развивать не только машинный интеллект, но и совершенствовать свой собственный , чтобы постоянно быть впереди любой машины. Остановить же прогресс техники людям не удастся: слишком велика тяга человека к технике, заложенная в нем Природой.

Что же ожидает людей в свете перспективы создания мозгоподобных ЭВМ? Не загонит ли технический прогресс человечество в безысходный тупик? На этот вопрос лучше всех, на наш взгляд, ответил еще в 1968 году известный московский математик Г. Н. Поваров в предисловии к русскому изданию книги «Кибернетика» основателя кибернетики Норберта Винера. Он пишет: "Действительно, научно-технический прогресс ставит перед человечеством серьезные проблемы. Стремительное развитие науки и техники возлагает на нас колоссальную ответственность за разумное использование полученного нами могущества. «Кто живет в стеклянном доме, тот не должен бросать камней», – гласит старинная пословица. Человек стал настолько могущественным, что любое его нерассчитанное движение: с роботами, с атомной энергией, с химией – может иметь тяжелые непредвиденные последствия. Это парадокс могущества. Нельзя забывать, однако, что наука и техника не только возлагают новую ответственность на человека, но и доставляют ему новые средства справиться с нею. Это относится и к роботам. Альтернатива «человек или робот», «опасное развитие искусственного разума или своевременный отказ от него», чем ограничивается большинство авторов, имеет третье, более необычайное и, пожалуй, более вероятное решение, если только искусственный разум и искусственная жизнь вообще возможны. Человек, научившийся создавать искусственный разум и искусственную жизнь, не остановится перед коренной переделкой самого себя. Не роботы вместо людей, а новый человек вместо старого! Человек будущего вряд ли останется таким же «натуральным» существом, таким же теплокровным позвоночным, каким он вышел из горнила естественного отбора. Почти наверное, он будет искусственно развивать свой мозг и свое тело, будет по воле лепить и изменять свою физическую оболочку. Ему по силам быть впереди любого возможного робота. Это будет биологическая революция, и если смелые гипотезы оправдаются, она будет означать преобразование всего человеческого существования. Быть может, далекий смысл «безумной» винеровской идеи о передаче человека по телеграфу и есть достижение человеком перевоплощаемости? Позволим себе минуту фантазии: не станет ли тогда человек новым космическим существом, свободным от земных ограничений? Есть ли абсолютная граница могущества и сложности для человека и его творений, абсолютная граница могущества и сложности для саморазвивающихся систем вообще?... Впрочем, это вопросы для науки будущего, на которые она сумеет ответить лучше нас" [5].

В свете сказанного представляется, что следует несколько сместить акценты, сделав главным делом познание и совершенствование самого человека, а не противостоящих ему машин. Разумные же машины должны выполнять в этом деле роль главных помощников людей, а не их конкурентов. Совершенствование и практическое применение вычислительной техники должно находиться под строгим контролем людей для обеспечения их безопасности.

Роджер Шенк, известный специалист в области искусственного интеллекта, пишет: «Искусственный интеллект как область науки – это лишь малая часть грандиозной попытки постичь мышление. Мы считаем, что это основная цель данной области науки и здесь достигнуты немалые успехи. Программы, которые мы пишем, важны как эксперимент, а не как конечный результат. Главный интерес для нас составляет именно интеллект, а не его искусственное происхождение. Если мы достигнем успеха в этом направлении, то проложим путь для создания механических помощников человеку в его повседневных делах и заботах. Но не в этом главное. Самое важное, чего мы тогда добьемся, – более глубокого понимания самих себя, что, безусловно, гораздо ценнее, чем любая программа». К этому следует добавить, что познание интеллекта является не единственной целью. Оно служит еще и основой для дальнейшего совершенствования человека [6].

6. Познание психики человека

Чтобы безопасно и с пользой для людей распорядиться появляющейся на наших глазах вычислительной техникой сверхвысокой производительности, необходимо глубоко проникнуть в природу самого человека. Природа человека двойственна. При наблюдении извне человек предстает в виде объекта – то есть одной из физических систем, входящей в состав окружающего его мира. Воспринимая же себя изнутри, человек предстает перед самим собой в виде субъекта – то есть некой информационной системы, обладающей собственным внутренним миром мыслей, чувств, ощущений и намерений. Эти два мира принципиально отличаются друг от друга. Винер писал: «Информация есть информация, а не материя и не энергия». При познании интеллекта важна преимущественно именно информационная сторона человека. Хотя информация не существует без материального носителя, однако она безразлична к своему носителю. Носитель может быть любым, так что, в принципе, человека можно даже передавать на расстояние по телеграфу и воспроизводить в другом месте в ином воплощении.

Перед исследователем интеллекта возникает важная задача: научиться познавать не только материальную, физическую сторону человека, но также и его идеальную, психическую сторону. Первому удалось по-настоящему проникнуть во внутренний мир психики человека и описать с научной достоверностью некоторые обнаруживаемые в нем субъективные структуры Ньютона. Он открыл метод нулевого прибора, с помощью которого существенно продвинулся вперед в деле математического описания процесса преобразования светового излучения в цветовое ощущение, осуществляемое зрительной системой человека. Суть метода состоит в том, что в роли измерительного прибора, анализирующего субъективные состояния человека, используется само сознание человека, которое воспринимает на полях сравнния два цвета и определяет, равны ли они друг другу или нет. Поразительным оказалось то, что этой крайне бедной информации о цвете достаточно, чтобы исчерпывающим образом математически описать световое излучение, воспринимаемое глазом; цвет этого изучения, возникающий в сознании человека в ответ на это излучение; преобразование светового излучения в цвет, осуществляемое зрительной системой человека. В решение этой задачи впоследствии включились многие выдающиеся математики и физики, такие как Юнг, Максвелл, Грассман, Гельмгольц и Шредингер, которые общими усилиями к началу 20-го столетия полностью решили задачу, сформулированную Ньютоном. На протяжении 20-го столетия этот метод был развит далее, обобщен и применен ко многим другим информационным структурам, обнаруживаемым во внутреннем мире человека.

Так что путь к познанию интеллекта человека открыт. Получаемые этим методом математические описания допускают техническую реализацию в виде реляционных сетей мозгоподобных ЭВМ. В настоящее время эта область знания быстро развивается и поставляет ценные модели для практической реализации на мозгоподобных ЭВМ. Осуществляется продвижение в области изучения работы органов чувств, узнавания, понимания и оценивания. Постепенно развивается теория психологических измерений и вырастающая из нее общая аксиоматическая теория анализа и синтеза мозгоподобных структур. Предпринимаются усилия для представления найденных и успешно испытанных методов описания психических процессов в нейтральных математических терминах, что способствует их применению к решению ряда других родственных задач. Постепенно формируется совокупность простейших типовых математических структур, из которых слагаются более сложные мозгоподобные структуры. Множество таких типовых структур оказалось сравнительно небольшим. Оно включает в себя равенства, эквивалентности, дифункциональности, отношения порядка, декартовы произведения множеств, принадлежности элементов множествам, включения множеств, булевы и числовые структуры и некоторые другие.

Мы попытались каждую из этих структур представить в виде соответствующей ей реляционной сети. В результате получились конструкции, легко узнаваемые и различаемые на глаз. Случилось так, что образцы таких типовых реляционных сетей попались на глаза нейроанатомам. Оказалось, что они могут с уверенностью отождествить их с вполне определенными известными нейронными структурами мозга человека. Например, реляционная сеть трехмерной декартовой системы, связывающей координаты точек с самими точками пространства, имеет вид слоеного пирога достаточно сложно организованной структуры. Точно такую же структуру, причем совпадающую со своим прототипом буквально во всех деталях, имеют нейронные сети, обнаруживаемые в мозжечке человека. Какую функцию выполняют эти структуры, специалисты по нейронным сетям до этого не знали. Но теперь, опираясь на обнаруженное сходство логических и нейробиологических структур, можно с уверенностью заключить, что они производят обработку пространственной информации о наблюдаемых человеком объектах. Этот вывод находится в согласии с клиничекими наблюдениями. Известно, что при поражениях мозжечка наблюдаются сбои с пространственным восприятием объектов: пол кажется вогнутым, звук слышится не оттуда, где в действительности находится его источник, возникают головокружение и трудности с сохранением равновесия, человек промахивается пальцем мимо кончика носа при закрытых глазах и т.д. и т.п. Подобных примеров накопилось уже немало. В свете этих фактов представляется более чем вероятным, что мозг человека реализует именно мозгоподобные структуры В.М.Глушкова. Поскольку функции этих структур известны заранее, то открывается возможность надежной идентификации способа функционирования различных нейронных структур мозга.

Выводы

Теперь инженеры, наконец, смогут получить технические нейронные сети, воспроизводящие истинный принцип действия их биологического прототипа. Можно надеяться, что, строя модели и реляционные сети физических, психофизических и психологических процессов и сверяя их с нейронными сетями мозга человека, удастся более существенно продвинуться вперед в познании естетственного интеллекта и в технической реализации искуственного. Познав собственную природу, человек сможет взять свою судьбу в собственные руки и в дальнейшем сохранять свое существование и совершенствовать себя по своей воле, привлекая для самореконструкции достижения техники.

Что же может служить фундаментом при планировании людьми своего дальнейшего развития, когда исчерпается бионическая подсказка? Представляется, что такую подсказку ему сможет дать изучение механизма логики. Логика – это наука обо всем возможном, в ней в скрытом (потенциальном) виде содержатся любые структуры, которые могут понадобиться человеку при совершенствовании им самого себя. Нужно лишь научиться извлекать из массива всех имеющихся в логике математических структур нужные на каждом этапе саморазвития. Таким образом, освоение логики может стать тем маяком, который будет освещать людям путь в их поступательном движении вперед.

Еще в 19-ом веке все были убеждены в том, что логика, доставшаяся нам в наследство от Аристотеля, представляет собой полностью изученную область. Однако впоследствии это предубеждение было развеяно, и теперь стало очевидным, что человечество находится лишь на начальном этапе освоения математических структур, скрытых в системе логики.

Нами проводятся некоторые изыскания в этой области. Они основываются на процессе алгебраизации логики. Одно из направлений заключается в изучении иерархической структуры булевых алгебр. Логическая и числовая математика имеют много общего. Руководствуясь этой аналогией, было обнаружено, что логические пространства строятся по типу арифметических. В них обнаруживаются скаляры и векторы. Благодаря этому каждое логическое пространство разделяется на нижний скалярный слой и верхний векторный. При этом обнаруживаются три взаимосвязанные друг с другом булевы алгебры: нижняя скалярная, верхняя векторная и боковая скалярно-векторная. Векторы верхней алгебры можно рассматривать как скаляры булевой алгебры следующей ступени. Таким образом появляется бесконечная цепочка уходящих вверх булевых алгебр. Эта область называется теорией логических пространств. В булевых пространствах можно образовывать булевы уравнения разной ступени. Был найден универсальный метод решения таких уравнений. Обнаружилось, что этот метод может быть использован для построения саморазвивающихся реляционных сетей.

Получила развитие теория линейных логических операторов, являющаяся аналогом теории линейных интегральных операторов. Оказалось, что линейные логические операторы образуют основной механизм преобразования информации в ветвях реляционных сетей, а теория идентификации этих операторов открывает путь к построению самообучающихся реляционных сетей.

Теория иерархических булевых пространств открывает путь к построению многослойных реляционных сетей и к изучению способов связи между реляционными сетями различных ступеней. Особую область образует категорный анализ логики, выводящий на общую теорию реляционных сетей. Намечается синтез теории множеств, теории категорий и теории моделей, которые естественным образом связываются в единое целое алгебраической системой предикатов. За счет этого открываются дополнительные возможности развития учения об аксиоматических теориях и математических структурах.

Список литературы: 1. *Глушков, В.М.* О некоторых задачах вычислительной техники и связанных с ними задачах математики. С. 96 [Текст]/ В.М. Глушков // В кн.: В.М. Глушков. Избр. труды. Т.1. – К.: Наукова думка, 1990. – 262 с. **2.** *Глушков, В.М.* Основные архитектурные принципы повышения производительности ЭВМ [Текст]/ В.М. Глушков // В кн.: В.М. Глушков. Избр. труды. Т.2. – К.: Наукова думка, 1990. – 267 с. **3.** *Гильберт, Д.* Основы теоретической логики [Текст]/ Д. Гильберт, В. Аккерман – М.: ИЛ, 1947. – 302 с. **4.** *Мальцев, А.И.* Алгебраические системы [Текст] / А.И. Мальцев – М.: Наука. 1970. 392 с. **5.** *Винер, Н.* Кибернетика / Н. Винер – 2-е изд. М.: Сов. радио, 1968. 326 с. **6.** *Шенк Р.* Познать механизмы мышления[Текст]/ Р . Шенк , Л. Хантер // В кн.: Реальность и прогнозы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1987. 287 с.

Поступила в редколлегию 08.02.2011.

УДК 519.7

Про мозкоподібні структури академіка Віктора Михайловича Глушкова/ М. Ф. Бондаренко, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 3-9.

У статті розглядається поняття мозкоподібної структури як підсилювача інтелектуальних можливостей людини з вивченням закономірностей роботи мозку на відміну від точного копіювання мозку, в якому ефективно розпаралелюються далеко не всі операції.

Бібліогр.: 6 найм.

UDC 519.7

About the brainlike structures of academician V. M. Glushkova / M.F. Bondarenko, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 3-9.

In the article the concept of brainlike structures as strengthener of intellectual possibilities of man is examined with the study of conformities to law of cerebration, unlike the exact printing-down of brain.

Ref.: 6 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко[1], Н.Е. Русакова[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1-3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

О ПРЕДИКАТНОЙ КАТЕГОРИИ

В статье дано определение понятия предикатной категории и сформулирована задача разработки теории предикатных категорий, открывающей путь к построению высокопроизводительных мозгоподобных ЭВМ параллельного действия. Также рассмотрен принцип двойственности для категорий, благодаря положениям которого можно перейти от любой конкретной категории к двойственной ей категории.

КАТЕГОРИЯ, МОРФИЗМЫ, БЕЗОБЪЕКТНАЯ КАТЕГОРИЯ, КАТЕГОРНАЯ ДИАГРАММА, ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Введение

Понятие категории введено в 1945 году Маклейном и Эйленбергом. Как научная дисциплина теория категорий сформировалась к 60-м годам XX столетия. Она разрабатывает перспективные средства представления, анализа и синтеза математических структур произвольного вида. К 80-м годам была осознана важность теории категорий для компьютеризации и информатизации, в частности, — для автоматизации программирования.

Вначале кратко охарактеризуем *классическую категорию* [1], после чего осуществим ее *предикатную интерпретацию*. В результате получаем *предикатную категорию* – один из частных случаев классической категории. Сперва рассмотрим наиболее общее определение понятия классической категории – *классическую безобъектную категорию* [2, с. 44]. Его называют также *классической абстрактной категорией*. Оно ценно тем, что в нем удачно схвачена суть интуитивного понимания категории и, вместе с тем, в нем нет ничего сверх этого. Если исключить хотя бы одну из черт, указанных в этом определении, то от понятия категории ничего не остается. После такого исключения категория превращается в одну из известных алгебраических структур, охватывающих понятие категории.

1. Понятие категории

Охарактеризуем понятие классической безобъектной категории. Текст определения этого понятия выделен жирным шрифтом. **Пусть M – какое-нибудь множество. Его элементы, обозначаемые символами $f, g, h, \ldots$, называются *морфизмами*. Пусть, кроме того, задано однозначное, вообще говоря, частичное соответствие $fg = h$ с областью отправления $M \times M$ и областью прибытия M. Оно называется *умножением* морфизмов f и g. Морфизм h называется *произведением* морфизмов f и g. Умножение морфизмов *ассоциативно*: при любых $f, g, h \in M$, для которых существуют произведения $(fg)h$, $f(gh) \in M$, справедливо равенство $(fg)h = f(gh)$. Пусть E – *множество всех единичных морфизмов* ($E \subseteq M$). Любой морфизм $e \in M$ называется *единичным* (или *тождественным* или просто *единицей*), если он удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для каждой единицы $e \in E$ существует ее произведение; 2) при любых морфизмах $f, g \in M$ и любых единицах $e, e' \in E$, для которых существуют произведения $fe, e'g \in M$, выполняются равенства $fe = f$ и $e'g = g$. Множество морфизмов M с единицами, удовлетворяющими перечисленным выше условиям, взятое вместе с умножением морфизмов, удовлетворяющим вышеуказанным условиям, называется *классической безобъектной категорией* K.** Пишут $M = MorK$, $f \in M$, $f \in MorK$. $MorK$ – это множество всех морфизмов категории K. Если $f \in MorK$, то говорят, что морфизм f является K*-морфизмом*.

Этим определением молчаливо допускается существование в категории многих единиц. Именно наличие многих единиц (и только это) отличает категорию (понимаемую в наиболее общем смысле) от других известных математических структур. Со школьной скамьи все мы привыкли к тому, что единица всегда одна. И она была бы одна, если б на множестве M умножение было принято не частичным, а всюду определенным. Существование многих единиц в категории и требование всюду определенности умножения морфизмов находятся относительно друг друга в непримиримом противоречии. Но если ослабить требования к категорному умножению морфизмов и принять его частичным, то уже только за счет этого появляется возможность введения в категории многих единиц. Единицы e и e' называются соответственно *правой* и *левой* для морфизма $f \in M$, если $fe = f$ и $e'f = f$. Из определения понятия категории логически следует, что для любого $e \in E$ справедливо равенство $ee = e$, и что для любого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая и единственная левая единицы (которые могут отличаться друг от друга). Последнее утверждение называется *категорным законом тождества*. Таким образом, для каждого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая единица e и единственная левая единица e', такие, что $fe = e'f = f$. Вместе с тем, для каждой единицы $e \in E$ найдутся такие морфизмы f и g (не обязательно единственные), что для них выполнятся равенства $fe = f$ и $eg = g$. Для любой единицы $e \in E$ в роли таких морфизмов можно взять $f = g = e$.

Так, определенную категорию можно рассматривать как некую разновидность алгебры. В роли ее носителя выступает множество морфизмов M, роль базисных элементов в этой алгебре выполняют единицы, а в роли единственной базисной операции (точнее — однозначного соответствия) выступает частичное умножение морфизмов. Любую алгебру, удовлетворяющую всем перечисленным выше требованиям, будем рассматривать как безобъектную классическую категорию. Таким образом определенная категория представляет собой неполную алгебру. Не в каждой такой категории, действуя в различной последовательности умножением на единицы, можно получать любые морфизмы, имеющиеся в ее носителе. Неполные алгебры можно по-разному достраивать (доопределять), получая из каждой такой алгебры целое семейство различных полных алгебр. Описываемый здесь вариант определения классической категории — это самый общий (то есть самый бедный свойствами) из всех известных нам. Несколько позже, кроме морфизмов, мы введем в классической категории еще и объекты, но пока они в ней отсутствуют. Именно поэтому только что рассмотренная категория названа безобъектной.

Оговорка о существовании произведений $(fg)h$ и $f(gh)$ в формулировке ассоциативности умножения морфизмов была бы излишней, если б умножение морфизмов было всюду определено. Но в определении понятия категории основателями теории категорий оно принято частичным. В классической категории произведение fg морфизмов f и g существует в том и только том случае, когда правая единица морфизма f совпадает с левой единицей морфизма g. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования произведения fg морфизмов f и g является наличие такой единицы e, для которой $fe = f$ и $eg = g$. Приведенные здесь свойства классической безобъектной категории, которые не были вынесены в ее определение, могут быть из него логически выведены. Объекты категории взаимно однозначно связаны с ее единицами. Поэтому в категории с одной единицей можно ввести лишь один объект. Однако информатизация нуждается в таком варианте теории категорий, в рамках которого можно было бы одновременно рассматривать сразу много объектов. Ввиду этого появляется необходимость введения в алгебре, ориентированной на нужды информатизации (то есть в теории категорий), многих единиц.

Рассмотрим, какое место занимает безобъектная классическая категория в иерархии алгебр, сложившейся к настоящему времени в математике. На вершине этой иерархии располагается *группоид* — алгебра на носителе M со всюду определенным умножением $fg = h\ (f, g, h \in M)$. Под ним располагается *полугруппа*, которая определяется как группоид с умножением, обладающим для любых $f, g, h \in M$ свойством ассоциативности $(fg)h = f(gh)$. Ниже находится *моноид*, определяемый как полугруппа с единственным базисным элементом $e \in M$, который называется *единицей*. Последняя характеризуется свойством: для любого $f \in M$ $ef = fe = f$ (кстати, из него вытекает еще одно важное свойство единицы — $ee = e$, которое получаем, полагая $f = e$). Еще ниже располагается *группа*, определяемая как моноид с одноместной *операцией обращения* $f^{-1} = g$, которая характеризуется свойством: $ff^{-1} = f^{-1}f = e$ для любого $f \in M$.

Классическую безобъектную категорию можно рассматривать как одно из возможных обобщений понятия моноида. В ней вместо операции (то есть всюду определенного и однозначного соответствия) умножения, фигурирующей в определении моноида, использовано соответствие более общего вида — *частичное умножение*, с него свойство всюду определенности снято. Для некоторых пар $f, g \in M$ произведение fg в классической безобъектной категории может и не существовать. Требование единственности единицы тоже снято. Единиц в категории может быть много. **Единицы классической безобъектной категории можно определить следующими двумя свойствами: 1) для любой единицы $e \in E$ $ee = e$; 2) при любых $f, g \in M$ и любых $e, e' \in E$, для которых существуют произведения fe, $e'g \in M$, выполняются равенства $fe = f$ и $e'g = g$.** Если дополнительно потребовать, чтобы умножение морфизмов было всюду определено, то категория превратится в моноид. Действительно, предположим, что умножение в категории всюду определено и, вместе с тем, в ней имеются две отличающиеся друг от друга единицы e и $e' (e \neq e')$. Тогда должно существовать произведение $e'e$. Согласно равенству $fe = f$ получаем произведение $e'e = e'$. Согласно же равенству $e'f = f$ приходим к иному результату $e'e = e$. Но это невозможно, поскольку принято, что умножение обладает свойством однозначности для своих значений. Мы пришли к противоречию. Это значит, что при наличии по крайней мере двух единиц в некоторой категории она не может иметь всюду определенного умножения.

Категория беднее свойствами, чем моноид, поэтому она представляет собой обобщение понятия моноида. Ее естественно называть еще и *квазимоноидом*. Если б мы сняли требование всюду определенности умножения также и с группоида, полугруппы и группы, то получили бы обобщения и этих алгебр (назовем их соответственно *квазигруппоидом*, *квазиполугруппой* и *квазигруппой*). Алгебры с частичным базисным умножением в современной математике широко не используются, так что введение понятия классической категории с частичным умножением морфизмов представляет собой уход в сторону с магистрального пути развития математики. Рис. 1 иллюстрирует сказанное.

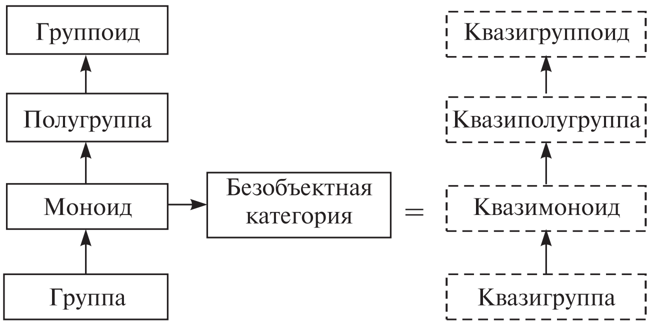


Рис. 1

Итак, если мы хотим обобщить понятие моноида до понятия категории так, чтобы в нем вместо одной единицы могло появиться большее их число, и, вместе с тем, сохранить все свойства единицы, указанные в определении категории, то, переходя от моноида к категории, будем вынуждены ослабить требования к умножению морфизмов и сделать его частичным. Но, может быть, переходя от понятия моноида к понятию категории, следовало бы отказаться от многих единиц? Нет, так делать не следует. Это не имеет смысла, ибо тогда мы “с водой выплеснем и ребенка”: пришлось бы возвратиться к понятию моноида. Это значит, что понятие категории не состоялось бы: ведь в нем в таком случае не появилось бы ничего нового по сравнению с уже имеющимся понятием моноида. Волей-неволей приходится отказаться от требования всюду определенности умножения.

В приведенном выше определении классической безобъектной категории морфизмы были представлены пока очень схематично – лишь как бесструктурные элементы некоторого множества. Немного можно извлечь из такого, очень бедного, понятия категории. Такое общее понятие категории полезно разве что только при уяснении места понятия категории в иерархии существующих алгебр. Теперь понятия категории и морфизма мы конкретизируем. В процессе конкретизации ранее введенное понятие безобъектной категории обрастает дополнительными деталями и свойствами и в результате превращается в *категорию с объектами* [2, с. 50]. К морфизмам безобъектной категории K присоединяем *объекты*. Множество всех объектов категории K записываем в виде Ob в K или в виде ObK. Объекты обозначаем буквами $A, B, C, \ldots$. Если $A \in ObK$, то говорят, что A является K*-объектом*. Говорят, что f есть морфизм из объекта A в объект B, и пишут $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Объект A называется *началом* морфизма f, а объект B – его *концом*. Вместо термина «морфизм» также используется слово *стрелка*.

Как конкретно понимать термин «объект»? Пока – никак. Здесь объекты выражают просто какие-то бесструктурные элементы множества ObK – и больше ничего. Но все же всегда имеется невысказанная мотивировка введения понятия «объект». Ее можно обнаружить, если обратиться к какой-нибудь естественной интерпретации понятия объекта. Строго говоря, при принятом нами изложении теории категорий так делать нежелательно, ввиду того что при этом теряется весьма ценное качество предельной абстрактности термина «объект». Но без какой бы то ни было интерпретации трудно понять мотивировку введения понятия «объект». А это понимание очень важно для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации. Приведем одну из наиболее употребительных интерпретаций понятия «объект». Важно подчеркнуть, что такая интерпретация вовсе не обязательна. Возможны и иные варианты интерпретации термина «объект». Прелесть абстрактной теории как раз в том и состоит, что она допускает множество разных способов практического использования, но сама до них не снисходит. Но если мы не выявим мотивировку введения абстрактной теории, то такая теория будет восприниматься просто как бессодержательная словесная эквилибристика, как «абстрактная чепуха», и стремление к ее практическому применению пропадет. Каждый морфизм $f \in MorK$ будем конкретно представлять в виде некоторой функции $f : A \to B$, отображающей множество A в множество B. Подчеркнем еще раз, что такой способ интерпретации понятия морфизма вовсе не обязателен, можно понимать его и иначе. Множество A понимаем как область определения морфизма f, множество B – как область значений морфизма f. Однако в другой интерпретации понятия категории объекты $A, B, C\ldots$ не обязательно понимать как множества.

Каждой паре (A, B) объектов $A, B \in ObK$ ставится в соответствие некоторое, быть может, и пустое множество $H_K(A, B)$ морфизмов категории K. Возможен случай, когда многим разным морфизмам, например, f, g, h поставлена в соответствие одна и та же пара объектов (A, B), то есть $f, g, h : A \to B$. Такие морфизмы называются *параллельными*. А для какой-то другой пары объектов (C, D) в категории K вообще может не найтись ни одного морфизма f, такого что $f : C \to D$. Вместо записи $H_K(A, B)$ также используются обозначения $Hom_K(A, B)$, $Mor_K(A, B)$, $K(A, B)$, а если это не приводит к двусмысленности, – то и более лаконичные записи $H(A, B)$, $Hom(A, B)$, $Mor(A, B)$. Вместо записи

$f \in H_K(A, B)$ иначе пишут $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Вместо выражений «объект $A \in ObK$» и «морфизм $f \in MorK$» пишут «объект $A \in K$» и «морфизм $f \in K$» или еще проще: «K-объект A» и «K-морфизм f». Для каждого морфизма $f \in MorK$ существует единственная пара объектов *A* и *B*, такая что $A, B \in ObK$ и $f \in H_K(A, B)$. Приписывание этого свойства морфизмам мотивируется тем, что при их интерпретации для каждой функции f естественно указывать ее область определения *A* и область значений *B*, иначе определение функции будет незавершенным. Пишут $A = domf$ (начало морфизма; в принятой нами интерпретации – его область определения), $B = codf$ (конец морфизма; в нашей интерпретации – его область значений).

Запишем определение классической категории с объектами. Оно выделено жирным шрифтом. ***Категория с объектами*** K **состоит из множества морфизмов** $MorK$ **и** ***множества объектов*** ObK **. Предполагается, что множества** $MorK$ **и** ObK **не пересекаются. Категория с объектами** K **характеризуется следующими пятью свойствами: 1) Каждой паре** K **-объектов** A, B **соответствует множество** $H_K(A, B)$ **морфизмов (быть может, даже пустое), включенное в** $MorK$ **. 2) Для каждого морфизма** $f \in MorK$ **существует единственная пара** A, B K **-объектов, такая что** $f \in H_K(A, B)$ **. 3) В множестве** $MorK$ **определено, вообще говоря частичное, однозначное соответствие –** ***умножение морфизмов*****;** ***произведение*** fg ***морфизмов*** $f : A \to B$ ***и*** $g : C \to D$ **определено лишь в тех случаях, когда** $B = C$ **, то есть когда конец морфизма** f **совпадает с началом морфизма** g **.** В этом случае произведение fg есть K-морфизм из объекта *A* в объект *D*. Иначе говорят, что для объектов $A, B, C \in K$ определено отображение $H_K(A, B) \times H_K(B, C) \to H_K(A, C)$. Знак $\times$ в данном случае обозначает декартово произведение множеств морфизмов. Морфизмы f, g категории K вида $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называются *последовательными*, а вида $f : A \to B$ и $g : A \to B$ – *параллельными*. **4) Умножение морфизмов** ***ассоциативно*** $(fg)h = f(gh)$ **всякий раз, когда морфизмы** $(fg)h$ **и** $f(gh)$ **существуют.** Иными словами, ассоциативность справедлива всякий раз, когда $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Таким образом, ассоциативность выполняется во всех тех случаях, когда она имеет смысл. Равенство $(fg)h = f(gh)$ выражает *категорный закон ассоциативности.*

Закон ассоциативности можно наглядно выразить графически в виде *категорной диаграммы*, изображенной на рис. 2.

Любая категорная диаграмма образуется из объектов и стрелок (морфизмов), она представляет собой ориентированный граф с раскрашенными вершинами и дугами. В роли вершин графа в категорной диаграмме выступают объекты категории, а в роли дуг – ее морфизмы. Такого вида диаграммы широко используются в теории категорий. Они – главное средство наглядного представления внутреннего строения и свойств математических структур, связей между ними. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, характеризует связи между любыми объектами *A, B, C, D* и морфизмами f, g, h. Эти связи выражают существо закона ассоциативности. В данном случае с помощью категорной диаграммы мы выразили один из законов теории категорий.

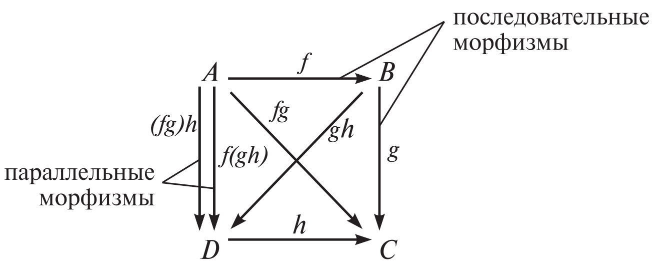


Рис. 2

Категорные диаграммы делятся на *замкнутые* и *разомкнутые*. Разомкнутые диаграммы выражают формулы категорной алгебры, замкнутые – ее равенства. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, относится к числу замкнутых. Замкнутые диаграммы называются иначе *коммутативными*. Коммутативные диаграммы характеризуются тем, что результат действия морфизмов при их последовательном выполнении, указанном на диаграмме, получается одинаковым при движении по всевозможным путям диаграммы, если мы отправляемся от одной и той же точки диаграммы и приходим снова к одной и той же другой точке диаграммы. На языке коммутативных диаграмм выражаются общие связи между объектами и морфизмами. С помощью коммутативных диаграмм можно выражать свойства любых математических структур, даже *законы* самой *теории категорий*. Категорные диаграммы делятся на *общие* и *частные*. Общие диаграммы коммутативны для всех объектов и морфизмов данной категории. Общими коммутативными диаграммами выражаются свойства какой-либо конкретной категории. Частные категорные диаграммы относятся к конкретным объектам и морфизмам данной категории. Они выражают связи между ними и могут быть как замкнутыми, так и разомкнутыми. На рис. 3 приведен пример разомкнутой категорной диаграммы.

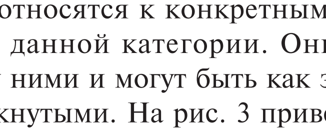


Рис. 3

В последние годы приобрело большую популярность *объектное моделирование*, в котором в качестве основного инструмента используются *диаграммы*, похожие на частные категорные диаграммы. Они тоже строятся из объектов и стрелок. С их помощью описывается *архитектура информационных систем*. Частным категорным диаграммам противостоят *общие*, с их помощью описываются *закономерности функционирования информационных систем*. На рис. 4 приведен пример диаграммы работы банковской системы [3, с. 12].

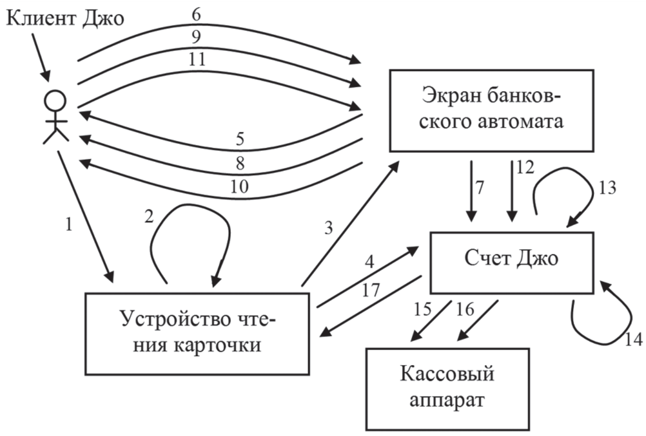


Рис. 4

Стрелки выражают следующие операции: 1) получение карточки устройством чтения; 2) чтение номера карточки; 3) инициализация экрана; 4) открытие счета; 5) запрос регистрационного номера; 6) ввод регистрационного номера; 7) проверка регистрационного номера; 8) запрос транзакции (какую финансовую операцию выполнить?); 9) выбор транзакции (снять деньги); 10) запрос требуемой суммы денег; 11) ввод суммы денег ($20); 12) снятие денег со счета ($20); 13) проверка суммы ($20); 14) вычет снятой суммы денег из счета ($20); 15) выдача наличности ($20); 16) выдача чека.

На теорию категорий можно смотреть как на учение о *категорной алгебре*, которая задана на носителе $MorK$. На нем введены базисные элементы в виде тождественных морфизмов и базисные операции – умножение морфизмов. Категорная алгебра определена не полностью. В ней выделены лишь самые главные черты, а дорисовать ее можно различными способами. Категорная алгебра в этом похожа на булеву алгебру: это не одна, а целое семейство различных экземпляров категорных алгебр. Диаграмма, составленная из объектов и морфизмов некоторой категории, называется *коммутативной*, если произведение морфизмов вдоль любого пути по стрелкам диаграммы зависит только от начала и конца пути. Можно говорить о формулах, тождествах и уравнениях категорной алгебры, с помощью которых можно аналитически описывать категорные диаграммы. Замкнутые категорные диаграммы бывают двух видов – общие и частные. Общие описываются тождествами категорной алгебры, а частные – ее уравнениями. Примером общей замкнутой категорной диаграммы может служить диаграмма, выражающая закон ассоциативности $(fg)h = f(gh)$. Слева и справа от знака равенства стоят формулы категорной алгебры. Примером уравнения категорной алгебры может служить равенство $fx = f$, где f – фиксированный морфизм. Этому уравнению удовлетворяет лишь один из единичных морфизмов $x = e$ данной категории $(fe = f)$. Разомкнутым категорным диаграммам соответствуют формулы категорной алгебры или системы таких формул. Например, диаграмме, изображенной на рис. 3, соответствует система формул *fg* и *fh*.

5) Для каждого объекта $B \in K$ существует морфизм $e_B : B \to B$, называемый *единичным* или *тождественным морфизмом* объекта B, такой что $fe_B = f$ и $e_B g = g$ для любых морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тождества $fe_B = f$ и $e_B g = g$ называются *категорными законами тождества*. Они выражаются следующей *коммутативной диаграммой тождества* (рис. 5).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "e_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

Рис. 5

Для морфизмов $f, g \in MorK$ произведение *fg* существует в том и только том случае, когда f, g – последовательные морфизмы категории K.

2. Предикаты

Далее кратко охарактеризуем алгебру предикатов [4], то есть именно ту алгебру, в терминах которой мы будем в дальнейшем интерпретировать понятие категории. Возьмем какое-нибудь непустое множество *U*, элементы которого называются *предметами*. Само же множество *U* называется *универсумом предметов*. Возьмем, далее, набор из m каких-нибудь необязательно различных подмножеств $A_1, A_2,..., A_m$ универсума *U*. Декартово произведение $S=A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2,..., A_m$ называется *предметным пространством S с координатными предметными осями* $A_1, A_2,..., A_m$ над универсумом *U*. Число осей *m* называется *размерностью* пространства *S*. Вводим множество $V = \{x_1, x_2,..., x_m\}$ различных переменных $x_1, x_2,..., x_m$, которые называются *предметными переменными* пространства *S*. Множество *V* называется *универсумом переменных* пространства *S*. Значениями переменной x_i $(i=\overline{1,m})$ служат элементы множества A_i, так что $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2,..., x_m \in A_m$.

Множества $A_1, A_2,..., A_m$ называются *областями изменения* переменных $x_1, x_2,..., x_m$.

Если

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2,..., a_m \in A_m$$

$$\text{и } x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2,..., x_m = a_m ,$$

то пишут $(a_1, a_2,..., a_m) \in S$ и говорят, что *предметный вектор* $(a_1, a_2,..., a_m)$ *принадлежит* пространству $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Элементы $a_1, a_2,..., a_m$ вектора $(a_1, a_2,..., a_m)$ называются его *компонентами* (первым, вторым,..., m-ным). Предметное пространство S можно рассматривать как совокупность всех векторов вида $(x_1, x_2,..., x_m)$, компоненты которых удовлетворяют условию $x_1 \in A_1, \quad x_2 \in A_2,..., x_m \in A_m$. Любое подмножество пространства S называется *отношением*, образованным в (или иначе: заданным на) пространстве S. Отношение имеет размерность m. Говорят, что оно m*-местно*. Отношения, заданные на одном и том же пространстве S, называются *однотипными*. *Тип* отношения определяется набором переменных $x_1, x_2,..., x_m$ и набором множеств $A_1, A_2,..., A_m$. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного вектора, называется *пустым*, отношение S, в котором имеются всевозможные векторы, — *полным*.

Предикатом, заданным на декартовом произведении $A_1, A_2,..., A_m$, называется любая функция $P(x_1, x_2,..., x_m) = \xi$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2,..., A_m$ в множество $\Sigma = \{0,1\}$. Символы 0 и 1 называются *булевыми элементами*, Σ — множество всех булевых элементов. Переменная $\xi = \{0, 1\}$, являющаяся значением предиката P, называется *булевой*. Предикат $P(x_1, x_2,..., x_m)$ на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ называется *конечным*, если все множества $A_1, A_2,..., A_m$ конечны, и *бесконечным* — в противном случае. Эта же терминология переносится и на отношения, соответствующие предикатам. Переменные $x_1, x_2,..., x_m$ называются *аргументами* предиката P.

Пусть L — множество всех отношений на S, M — множество всех предикатов на S. Между всеми отношениями множества L и всеми предикатами множества M, заданными на S, существует взаимно однозначное соответствие. Отношение Р из L и предикат P из M называются *соответствующими* друг другу, если при любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2,..., x_m \in A_m$

$$P(x_1, x_2,..., x_m) = \begin{cases} 1, \text{если } (x_1, x_2,..., x_m) \in \mathrm{P}, \\ 0, \text{если } (x_1, x_2,..., x_m) \notin \mathrm{P}. \end{cases}$$

Обратный переход от предиката P к отношению Р осуществляется по правилу:

если $P(x_1, x_2,..., x_m) = 1$, то $(x_1, x_2,..., x_m) \in \mathrm{P}$;

если $P(x_1, x_2,..., x_m) = 0$, то $(x_1, x_2,..., x_m) \notin \mathrm{P}$.

Множество всех векторов $(x_1, x_2,..., x_m)$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2,..., x_m) = 1$, образует отношение Р, которое называется *областью истинности* предиката P. Предикат $P \in M$ называется *характеристической функцией* отношения Р$\in L$. *Алгеброй предикатов* называется любая алгебра, заданная над носителем M. *Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предикатами* определяются следующими равенствами: для любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2,..., x_m \in A_m$

$$(P \vee Q)(x_1, x_2,..., x_m) = P(x_1, x_2,..., x_m) \vee Q(x_1, x_2,..., x_m);$$

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2,..., x_m) = P(x_1, x_2,..., x_m) \wedge Q(x_1, x_2,..., x_m);$$

$$(\neg P)(x_1, x_2,..., x_m) = \neg(P(x_1, x_2,..., x_m)).$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знака равенства, означают операции над предикатами, справа — операции над значениями предикатов, то есть над булевыми элементами.

Предикаты любого типа можно записывать в виде формул. Тип конечных предикатов задаем, указывая множества $V = \{x_1, x_2,..., x_m\}$ и $A_i = \{a_{1i}, a_{2i},..., a_{k_i i}\}$, $i = \overline{1, m}$, k_i — число элементов в множестве A_i. Над носителем M вводим *дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов*. В роли *базисных элементов* этой алгебры используем предикаты 0 и 1, а также *предикаты* x_i^a *узнавания предмета* a *по переменной* $x_i, i = \overline{1, m}, a \in A_i$

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{если } x_i = a, \\ 0, \text{если } x_i \neq a. \end{cases}$$

Символ a в записи предиката x_i^a называется его *показателем*. В роли *базисных операций* в дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре предикатов используются дизъюнкция и конъюнкция предикатов. Любой предикат $P(x_1, x_2,..., x_m)$ в этой алгебре можно записать формулой в виде его *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* (*СДНФ*)

$$P(x_1, x_2,..., x_m) = \bigvee_{(a_1, a_2,..., a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}.$$

Выражения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$ называются *конституэнтами единицы* предиката P. Запись $(a_1, a_2,..., a_m) \in$Р под знаком $\vee$ означает, что берётся дизъюнкция всех конституэнт единицы $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$, показатели сомножителей которой удовлетворяют условию $(a_1, a_2,..., a_m) \in$Р, где Р — отношение, соответствующее предикату $P(x_1, x_2,..., x_m)$. Это означает, что дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна, то есть что формулами этой алгебры можно записать любой предикат, а следовательно, можно выразить аналитически любое отношение произвольного типа.

3. Предикатная интерпретация категории

Выше мы рассмотрели понятия классической категории и предиката. Теперь обратимся к предикатной интерпретации классической категории. Получаемую в результате такой интерпретации категорию будем называть *предикатной* и снабдим ее именем $Pred$. Выберем какой-нибудь *универсум предметов U.* В роли *объектов* $A,\ B,\ C,...$ категории $Pred$ используем произвольные подмножества универсума *U.* В роли множества *Ob* категории $Pred$ берем систему всех подмножеств универсума *U.* В роли морфизмов вида $f: A \to B$ категории $Pred$ используем *линейные логические операторы* вида $F_f(P) = Q$. Каждый такой оператор преобразует одноместные предикаты *P* в одноместные предикаты *Q.* и выражается в виде:

$$\exists x \in A(K_f(x,\ y)P(x)) = Q(y)\,. \qquad (1)$$

В равенстве (1) предикаты *P* и *Q* – переменные. Предикат *P(x)* задан на множестве *A*, предикат $Q(y)$ – на множестве *B*. Предикат *P(x)* на *A* рассматриваем как *экземпляр* объекта *A*, предикат $Q(y)$ на *B* – как экземпляр объекта *B*. Таким образом, морфизм $f: A \to B$ преобразует экземпляры объекта *A* в экземпляры объекта *B*. Естественнее было бы в роли объектов брать не множества $A,\ B,\ C...$ элементов универсума, а множества всех предикатов $P(x),\ Q(y),\ R(z),\ ...,$ заданных соответственно на множествах $A,\ B,\ C...$, но это не обязательно. Поскольку между такими множествами существует взаимно однозначное соответствие, то они взаимозаменяемы. Взяв множества предикатов в роли объектов, мы могли бы элементы этих множеств брать в роли экземпляров объектов. Недостаток такой интерпретации заключается в том, что конструкция объектов в предикатной категории без необходимости переусложняется.

Предикат $K_f(x,\ y)$ называется *ядром линейного логического оператора,* он полностью определяет вид преобразования (1). Предикат $K_f(x,\ y)$ фиксирован, он задан на $A \times B$. Морфизм *f* вида (1) полностью определяется предикатом $K_f(x,\ y)$. В роли множества $Mor(A,\ B)$ всех морфизмов вида $f: A \to B$ берем систему всевозможных операций вида (1). В категории $Pred$ каждому морфизму $f \in Pred$ взаимно однозначно соответствует ядро $K_f(x,\ y)$ преобразования (1). Каждый морфизм $f: A \to B$ категории $Pred$ можно задать, указав соответствующий ему предикат $K_f(x,\ y)$ на $A \times B$. Множество $Mor(\mathrm{P}red)$ получаем объединением всех множеств вида $Mor_{\mathrm{P}red}(A,\ B)$, где $(A,\ B)$ – всевозможные пары множеств $A,\ B \subseteq U$, или же как совокупность преобразований вида (1) со всевозможными ядрами $K(x,\ y)$, заданными на всевозможных декартовых произведениях $A \times B$ множеств $A,\ B \subseteq U$.

Примером ядра морфизма категории $Pred$ может служить предикат

$$K(x,\ y) = (x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3\,, \qquad (а)$$

заданный на декартовом произведении $A \times B$ множеств $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. На рис. 6 изображен двудольный граф предиката $K(x,\ y)$. Линейный логический оператор с этим ядром запишется в виде:

$$Q(y) = \exists x \in \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)P(x))\,. \qquad (б)$$

Определим, к примеру, реакцию $Q(y)$ морфизма (б) на предикат

$$P(x) = x^a \vee x^b \vee x^e\,. \qquad (в)$$

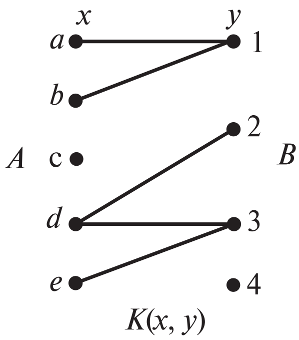


Рис. 6

По формуле (б) находим:

$$Q(y) = \exists x \in \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}\ (((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee$$

$$\vee y^3) \vee x^e y^3)(x^a \vee x^b \vee x^e)) = y^1 \vee y^3 \qquad (г)$$

Этот же результат можно получить также и графически (рис. 7). Для получения множества *Q* собираем вместе все те элементы *y*, которые связаны ребрами графа $K(x,\ y)$ с элементами *x*, образующими множество P. В итоге получаем $Q\{1,\ 3\}$. Таким образом, морфизм (б) преобразует множество $P = \{a,\ b,\ e\}$ в множество $Q\{1,\ 3\}$.

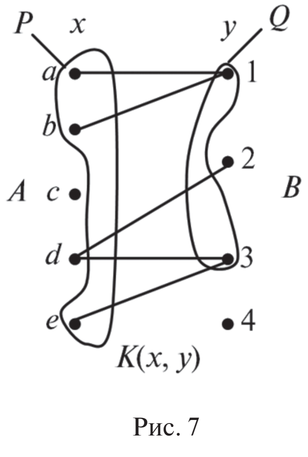


Рис. 7

Переходим теперь к предикатной интерпретации произведения морфизмов. Определим морфизм $f{:}A{\to}B$ как операцию (1) $F_f(P)=Q$, а морфизм $g:B\to C$ – как операцию $F_g(Q)=R$, определяемую равенством:

$$\exists y\in B(K_g(y,\ z)Q(y))=R(z)\ . \qquad (2)$$

Переменный предикат $R(z)$ задан на множестве C, а фиксированный предикат $K_g(y,\ z)$ – на $B\times C$. Образуем операцию $F_h(P)=R$ посредством суперпозиции операций $F_f(P)=Q$ и $F_g(Q)=R$: $F_h(P)= =F_g(F_f(P))=R$. Подставляя (1) в (2), получаем выражение для преобразования F_h:

$$\exists y\in B(K_g(y,\ z)(\exists x\in A(K_f(x,\ y)P(x))))=R(z)\ , \quad (3)$$

которое превращает предикат $P(x)$ на A в предикат $R(z)$ на C. После тождественных преобразований равенство (3) приобретает вид:

$$\exists x\in A((\exists y\in B(K_f(x,\ y)(K_g(y,\ z)))P(x))=R(z) \quad (4)$$

Равенство (3) представляет собой линейный логический оператор. В роли его ядра выступает предикат

$$K_h(x,\ z)=\exists y\in B(K_f(x,\ y)K_g(y,\ z)) \qquad (5)$$

на $A\times C$ с аргументами $x\in A$ и $z\in C$. Теперь преобразование (3) можно записать более кратко:

$$\exists x\in A(K_h(x,\ z)P(x))=R(z)\ . \qquad (6)$$

Преобразование (6) будем понимать как морфизм $h:A\to C$ категории $Pred$. Его мы принимаем в роли произведения fg морфизмов f и g. Таким, образом, $fg=h$.

Найдем, к примеру, произведение каких-нибудь двух морфизмов категории $Pred$. Находим $K_h(x,\ z)$ *графически* (рис. 8):

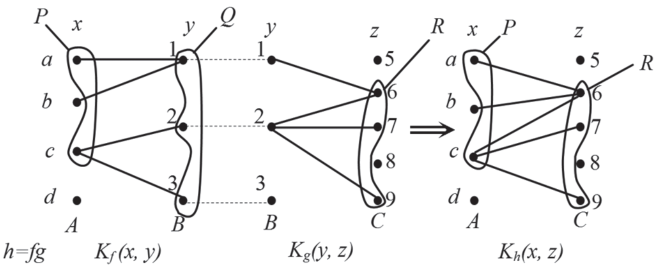


Рис. 8

Двудольные графы ядер $K_f(x,\ y)$ и $K_g(y,\ z)$ морфизмов f и g изображены на рис. 8 слева. Они могут быть преобразованы в двудольный граф ядра $K_h(x,\ z)$ произведения fg морфизмов f и g следующим образом. На первом этапе вводим горизонтальные связи (прочерчены пунктиром) между одноименными точками одинаковых множеств B, расположенных рядом в соседних графах $K_f(x,\ y)$ и $K_g(y,\ z)$. На втором этапе превращаем пару графов $K_f(x,\ y)$ и $K_g(y,\ z)$, которые мы соединили последовательно, в равносильный им один граф $K_h(x,\ z)$. Для формирования ребер графа $K_h(x,\ z)$ выявляем все пути от точек множества A к точкам множества C в цепочке графов $K_f(x,\ y)$ и $K_g(y,\ z)$. Каждому из таких путей ставим в соответствие ребро графа $K_h(x,\ z)$. Полученный в результате этих действий граф $K_h(x,\ z)$ изображен на рис. 8 справа.

То же самое ядро $K_h(x,\ z)$ морфизма h можно получить для рассматриваемого примера также и *аналитически*, производя вычисления по формуле (5). Имеем: $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$; $B=\{1,\ 2,\ 3\}$; $C=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$;

$$K_f(x,\ y)=(x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee y^3)\ ; \qquad (д)$$

$$K_g(y,\ z)=y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9)\ . \qquad (е)$$

Отыскиваем предикат K_h:

$$K_h(x,\ z)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee$$

$$\vee y^3))(y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9)))=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee$$

$$\vee z^7\vee z^9)\vee x^c\cdot 0=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee z^7\vee z^9). \quad (ж)$$

Мы получили то же самое ядро $K_h(x,\ z)$, которое изображено на рис. 8 в виде двудольного графа.

Определим теперь реакцию рассмотренных в вышеприведенном примере произведения мофизмов fg и равносильного ему морфизма h. Пусть, к примеру, $P(x)=x^a\vee x^a$. Сначала находим реакцию морфизма fg на предикат $P(x)$. Вычисляем реакцию $Q(y)$ морфизма f на предикат $P(x)$ по формуле (1):

$$Q(y)=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(K_f(x,\ y)P(x))=$$

$$=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^A(y^2\vee y^3))(x^a\vee x^c)=$$

$$y^1\cdot 1\vee y^1\cdot 0\vee(y^2\vee y^3)\cdot 1\vee 0\cdot 0=y^1\vee y^2\vee y^3=Q(y). \quad (з)$$

Вычисляем реакцию $R(z)$ морфизма g на предикат

$$Q(y)=y^1\vee y^2\vee y^3 \qquad (и)$$

по формуле (3):

$$R(z)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}(K_g(y,\ z)Q(y))=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}$$

$$((y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9))(y^1\vee y^2\vee y^3))=$$

$$=z^6\cdot 1\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\cdot 1\vee 0\cdot 1=z^6\vee z^7\vee z^9\ . \qquad (к)$$

Итак:

$$R(z)=z^6\vee z^7\vee z^9\ . \qquad (л)$$

Теперь вычислим реакцию $R(z)$ морфизма h по формуле (6):

$$R(z)=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(K_h(x,\ z)P(x))=\exists x\in\{a,\ b,$$

$$c,\ d\}(((x^a\vee x^b)z^6\vee x^A(z^6\vee z^7\vee z^9))(x^a\vee x^c)= \quad (м)$$

$$=z^6\cdot 1\vee z^6\cdot 0\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\cdot 1\vee 0\cdot 0=z^6\vee z^7\vee z^9\ .$$

Получили совпадение реакций морфизмов fg и h, демонстрирующее их тождественность.

Введем, далее, тождественные морфизмы в категории $Pred$. В роли ядра тождественного морфизма $e_A : A \to A$ в категории $Pred$ принимаем предикат равенства $D_A(x, y)$ на $A \times A$:

$$D_A(x, y) = \underset{a \in A}{\vee} x^a y^a \tag{7}$$

Приведем пример тождественного морфизма в категории $Pred$. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. По формуле (7) находим:

$$D_A(x, y) = x^1 y^1 \vee x^2 y^2 \vee x^3 y^3 . \tag{н}$$

Тождественных морфизмов в предикатной категории много. Их столько же, сколько предикатов равенства $D_A(x, y)$. Каждому подмножеству A универсума U соответствует свой тождественный морфизм $e_A : A \to A$. Для каждого морфизма $f : A \to B$ категории $Pred$ существует единственный правый тождественный морфизм e и единственный левый тождественный морфизм e', такие, что $fe = f$ и $e'f = f$, причем $e = e_B$ и $e' = e_A$. Любой тождественный морфизм e предикатной категории обладает свойством $ee = e$. Произведение fg морфизмов $f : A \to B$ и $f : B \to C$ в категории $Pred$ всегда существует, причем $domf = A$ и $codf = C$. Закон ассоциативности для умножения морфизмов в предикатной категории выполняется. Его справедливость можно наглядно продемонстрировать на двудольных графах. Присоединяем справа второй двудольный граф к первому, а затем к полученной цепочке графов справа присоединяем третий граф. В результате получаем некоторый двудольный граф. Точно такой же граф получится, если присоединить справа ко второму графу третий, а затем полученную цепочку графов присоединить справа к первому графу. Остановимся на схемной реализации предикатных морфизмов.

Произвольное отображение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = y (y \in N, N =$$

$$= (b_1, b_2, ..., b_k)) \ M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to N$$

ставит в соответствие набору значений аргументов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ множество $B \subseteq N$, равное $B = \{y \mid F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 1\}$, где F – предикат, соответствующий отображению f. Пусть $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ – координаты множества B. Тогда:

$$\beta_1 = F(x_1, x_2, ..., x_n, b_1);$$
$$\beta_2 = F(x_1, x_2, ..., x_n, b_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_k == F(x_1, x_2, ..., x_n, b_k).$$

Набор $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ характеризует множество B.

Построим, к примеру, схему, реализующую какое-нибудь отображение. Берем предикат, связывающий буквы некоторых окончаний имен прилагательных (двухбуквенных):

$$F(x, y) = x^{\text{а}} y^{\text{я}} \vee x^{\text{я}} y^{\text{я}} \vee x^{\text{у}} y^{\text{ю}} \vee x^{\text{ю}} y^{\text{ю}} \vee x^{\text{о}} y^{\text{ю}} \vee x^{\text{е}} y^{\text{ю}} \vee$$

$$\vee x^{\text{ы}} y^{\text{е}} \vee x^{\text{и}} y^{\text{е}} \vee x^{\text{о}} y^{\text{е}} \vee x^{\text{е}} y^{\text{е}}.$$

Строим соответствующее ему отображение $f(x) = y$. Принимаем $N = \{\text{я, ю, е}\}$. Имеем:

$$\beta_{\text{я}} = x^{\text{а}} \vee y^{\text{я}}; \ \beta_{\text{ю}} = x^{\text{у}} \vee x^{\text{ю}} \vee x^{\text{о}} \vee x^{\text{е}};$$
$$\beta_{\text{е}} = x^{\text{ы}} \vee x^{\text{и}} \vee x^{\text{о}} \vee x^{\text{е}}.$$

Схема, реализующая отображение *f*, имеет вид (рис. 9):

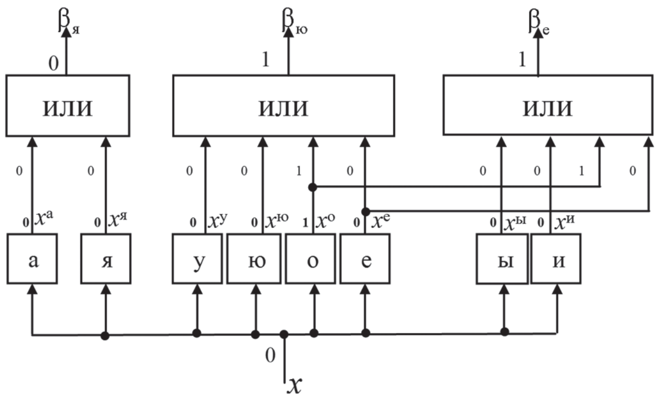


Рис. 9

Переключательную цепь легко строить по двудольному графу (рис. 10). Узлы на выходе графа заменяются элементами разделения. Узлы на входе графа заменяются разветвлением проводов. При переходе от исходной схемы к схеме, действующей в обратную сторону, элементы разделения заменяются разветвлениями проводов, а разветвления проводов – элементами разделения. Узлы на выходе графа превращаются в узловые точки схемы.

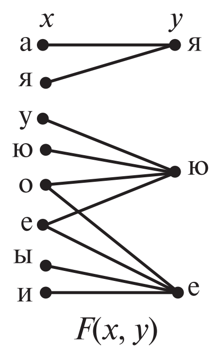


Рис. 10

Отыщем полный образ какого-нибудь предмета по схеме данного отображения. Дано: $x = 0$. Имеем: $\beta_{\text{я}} = 0, \ \beta_{\text{ю}} = 1, \ \beta_{\text{е}} = 1; \ y \in \{\text{ю, у}\}; \ \{\text{у} = \text{ю}\}$ или $\{\text{е}\}$. То есть {ою} или {ое}.

Построим схему, отыскивающую образ множества относительно некоторого отображения. В предыдущем примере заменяем $x^{\text{а}}, x^{\text{я}}, ..., x^{\text{ы}}, x^{\text{и}}$ на

$\alpha_а, \alpha_я, ..., \alpha_ы, \alpha_и$. Элементы узнавания предмета убираем. В результате получаем следующую схему (рис. 11):

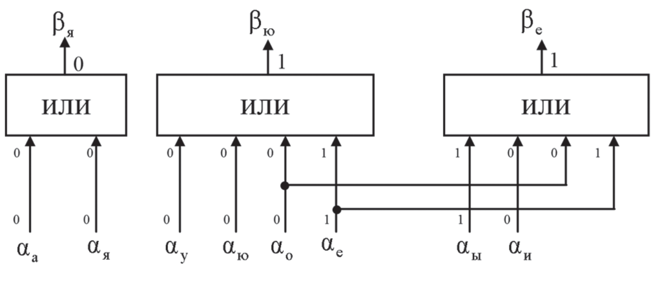


Рис. 11

Отыщем образ какого-нибудь множества по схеме полученного отображения. Берем множество окончаний с первой буквой {е} и {ы}. Схема порождает множество возможных вторых букв окончаний: {е, ы} $\to$ {ю, е}. Схема порождает не только реальные окончания {ею}, {ее}, {ые}, но и фиктивные {ыю}.

Строим схему, реализующую отображение, обратное заданному (рис. 12):

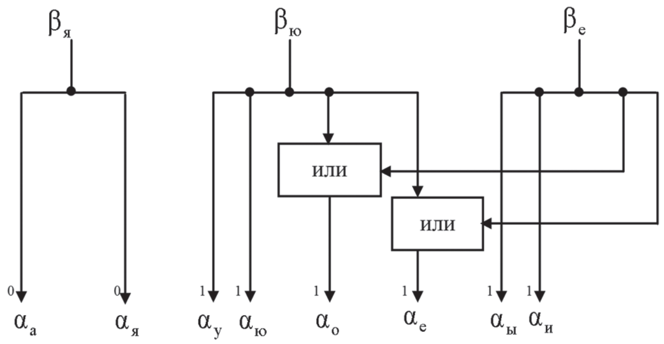


Рис. 12

Возвращаясь назад, получаем иной прообраз. Последние два вида схем (туда и обратно) очень важны. Так реализуются линейные логические операторы преобразования (морфизмы). Объекты – это множества. Наконец, построим схему, реализующую произведение каких-нибудь морфизмов категории *Pred* (рис.13).

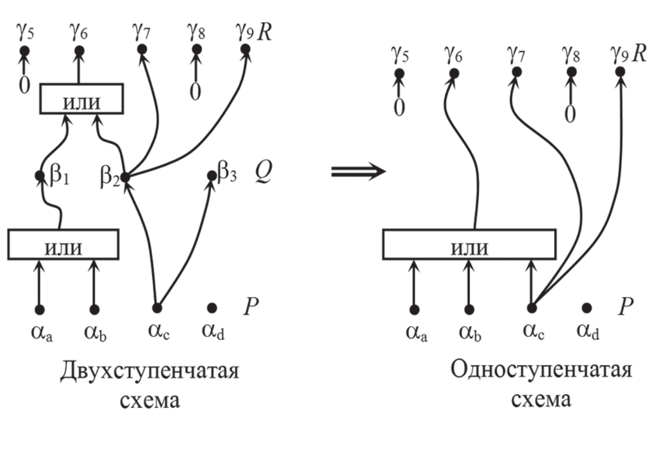


Рис. 13

4. Принцип двойственности

Принцип двойственности (*дуальности*) гласит: для каждой категории K существует *двойственная ей* (*дуальная*) *категория* K^*. Двойственная категория K^* строится по исходной категории K с помощью т.н. *двойственных высказываний*. Определим понятие двойственного высказывания. Пусть Σ – высказывание о категории K , Σ^* – высказывание о категории K^*. Высказывание Σ^* называется *двойственным (дуальным)* высказыванию Σ, если оно получается из высказывания Σ заменой в нем всех вхождений имени K исходной категории на имя K^* двойственной категории; заменой всех записей *dom* на запись *cod* и наоборот – *cod* на *dom* ;

Это значит, что

$$codf^* = domf\ ;\ domf^* = codf\ ;$$

$$A \xrightarrow{f} B \Leftrightarrow A \xleftarrow{f^*} B \Leftrightarrow B \xrightarrow{f^*} A\ .$$

Поворачиваем стрелку в обратную сторону. На выход морфизма f смотрим теперь как на вход морфизма f^* и наоборот. Вход морфизма f делаем выходом морфизма f^* и наоборот.

Заменяем имена f, g, h, ... морфизмов категории K на имена f^*, g^*, h^*, ... *двойственных морфизмов* категории K^*, а также заменяем произведения морфизмов $f \cdot g$ категории K на *двойственные произведения морфизмов* $g^* \circ f^*$ категории K^*.

Точка $\cdot$ обозначает умножение морфизмов в категории K, кружок $\circ$ – двойственное умножение в категории K^*. Изменение порядка умножения морфизмов является следствием поворота стрелок в обратную сторону.

$$A \xrightarrow{f} BC \xrightarrow{g} D \Leftrightarrow A \xleftarrow{f^*} BC \xleftarrow{g^*} D \Leftrightarrow D \xrightarrow{g^*} CB \xrightarrow{f^*} A$$

В паре *BC* объекты *B* и *C* меняются местами. f обменивается с f^*, g – с g^*, *A* с *D* и *D* с *A*, если мы хотим сохранить то же направление стрелок. Если *B*=*C*, то *BC* заменяется на *BB*, для краткости *BB* заменяем на *B*.

$$A \xrightarrow{f} BB \xrightarrow{g} C \Leftrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \Leftrightarrow A \xrightarrow{f^*} B \xleftarrow{g^*} C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C \xrightarrow{g^*} B \xrightarrow{f^*} A \Leftrightarrow C \xrightarrow{g^*} B \xrightarrow{f^*} A\ .$$

Больше никаких изменений в высказывании Σ не производится. Так что все изменения сводятся лишь к обращению стрелок.

В остальном содержание высказывания Σ без каких-либо изменений переходит в высказывание Σ^*.Принцип двойственности также гласит: каждому истинному высказыванию Σ о категории K соответствует двойственное ему истинное высказывание Σ^* о категории K^*.

Этих положений, содержащихся в принципе двойственности оказывается достаточно, чтобы от любой конкретной категории перейти к двойственной ей категории. Некоторые переходы можно совершать на уровне общего понятия категорий, но в других случаях надо обращаться к определению конкретной категории, чтобы перейти к двойственной ей категории. Рассмотрим примеры перехода от высказываний, понятий и структур категории K к двойственным высказываниям, понятиям и структурам категории K^* на общем уровне (т.е. без обращения к конкретным экземплярам категорий).

Пусть фраза «А есть объект категории K » – истинное высказывание о категории K . Тогда фраза «А есть объект категории K^* » будет истинным двойственным высказыванием о категории K^* .

Точно так же устанавливаем, что если объект A не является объектом категории K , то он также и не будет объектом категории K^* . Отсюда следует, что множество всех объектов категории K^* совпадает с множеством всех объектов категории K , то есть: O в $K^* = O$ в K .

Можно также доказать, что множество всех морфизмов категории K^* совпадает с множеством всех морфизмов категории K : $MorK^* = MorK$.

Доказывается также, что категория K^{**} двойственная категории K^* , совпадает с категорией K : $K^{**} = K$.

То же относится и к морфизмам: $f^{**} = f$, а также и к любым другим высказываниям, понятиям и структурам категорий K и K^{**} .

Пусть верно, что $h = f \cdot g$. Тогда, переходя к двойственному высказыванию, получаем $h^* = g^* \circ f^*$. Отсюда следует: $(f \cdot g)^* = g^* \circ f^*$.

Найти морфизм f^* , двойственный морфизму f , на уровне общего понятия категории невозможно, поскольку в общем понятии категории определение морфизма не дается, перечисляются лишь общие для всех категорий свойства морфизмов. Определение морфизма (и объекта – тоже) в каждой конкретной категории, мы находим по морфизму f морфизм f^* . Мы такой переход совершим ниже для предикатной категории.

Каждой диаграмме категории K соответствует *двойственная* ей *диаграмма* категории K^* , которая получается заменой исходных морфизмов двойственными и изменением направления стрелок на противоположное.

К примеру, для какой-нибудь конкретной диаграммы некоторой категории построим соответствующую ей диаграмму двойственной категории. Имеем:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$\Downarrow$$

$$A \xleftarrow{f^*} B \xleftarrow{g^*} C.$$

Закону ассоциативности $(fg)h = f(gh)$, который является высказыванием о категории K, соответствует двойственное высказывание $h^* \circ (g^* \circ f^*) = (h^* \circ g^*) \circ f^*$ о категории K^* . Ему отвечает следующая диаграмма, двойственная к ранее приведенной диаграмме (рис. 14):

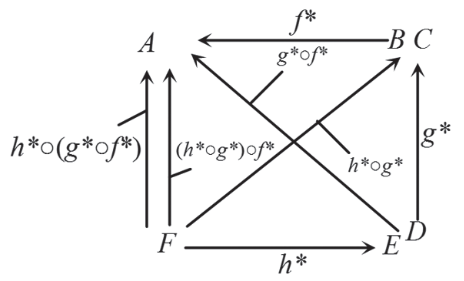


Рис. 14

Начало и конец каждой стрелки меняются местами:

$$A \xrightarrow{f} B \Rightarrow B \xrightarrow{f^*} A \text{, и т.д.}$$

Найдем свойства, двойственные свойствам тождественных морфизмов:

а) $e_B \cdot e_B = e_B \Leftrightarrow e_{B^*} \circ e_{B^*} = e_{B^*}$;

б) $f \cdot e_B = f \Leftrightarrow e_{B^*} \circ f^* = f^*$;

в) $e_B \cdot g = g \Leftrightarrow g^* \circ e_{B^*} = g^*$.

для любых морфизмов $f^* : A \to B$ и $g^* : C \to B$ категории K^* .

Получили такие же три свойства, однако свойства б) и в) теперь поменялись местами. Приведенной ранее диаграмме, выражающей свойства б) и в) тождественных морфизмов категории K , теперь соответствует двойственная диаграмма (рис. 15):

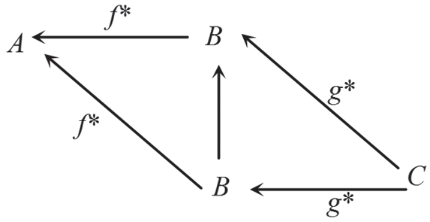


Рис. 15

Возьмем морфизм $f \in MorK$, ему соответствует морфизм $f^* \in MorK^*$. Поскольку $MorK = MorK^*$, то морфизм f^* имеется также и в категории K , то есть $f^* \in MorK$. Морфизмы f и f^* из K называются *двойственными морфизмами* категории K . Точно так же любому понятию категории K соответствует двойственное ему понятие в этой же категории. Таким образом, с помощью принципа двойственности мы можем посредством чисто механической процедуры для каждой категории K построить новую категорию K^* и для каждого понятия категории K построить новое двойственное ему понятие в той же категории и сформулировать его свойства. Любому утверждению категории K соответствует двойственное утверждение в той же категории K. Таким образом, за счет использования принципа двойственности, можно удвоить число категорий, а также число понятий и утверждений в одной и той же категории.

Теперь мы построим с помощью принципа двойственности категорию $Pred^*$, двойственную рассмотренной нами ранее предикатной категории $Pred$. Начиная с этого пункта, мы оставляем в покое классический вариант теории категорий и будем развивать только модифицированный вариант.

Объектами и морфизмами в категории $Pred^*$ будут те же объекты и морфизмы, что и в категории $Pred$.

Объектами в категории $Pred^*$ являются подмножества универсума U. В категории $Pred$ морфизм $f: A \to B$ определяется формулой:

$$\exists x \in A(K_f(x, y) \cdot P(x)) = Q(y). \qquad (8)$$

Здесь $x \in A$, $y \in B$, $K_f(x, y)$ – ядро морфизма f. $P(x)$ – предикат на A, $Q(y)$ – предикат на B, $K_f(x, y)$ – предикат на Ax.

Пользуясь принципом двойственности, отыскиваем морфизм f^* категории $Pred^*$, двойственный морфизму f категории $Pred$. Строим высказывание Σ^*, двойственное высказыванию Σ. В роли Σ берем равенство (8), так как именно оно определяет вид морфизма f. Заменяем f на f^*, а также обмениваем местами объекты A и B, то есть меняем местами начало и конец морфизма f. Вместе с A и B приходится обменивать местами также и переменные x и y, поскольку они подчинены множествам A и $B(x \in A,\ y \in B)$. Приходится также обменивать местами и предикаты $P(x)$ и A и $Q(y)$ на B, которые тоже подчинены множествам A и B, так как они заданы на A и B и выполняют роль экземпляров объектов A и B. В результате получаем высказывание Σ, т.е. определение морфизма f^*:

$$\exists y \in B(K_{f^*}(y, x) \cdot Q(y)) = P'(x). \qquad (9)$$

При предикате P приходится ставить отметку $'$, так как если мы этого не сделаем, то получится, что морфизм $f^* = f^{-1}$, то есть, что он является обратным по отношению к морфизму f, так как возвращает нас к исходному предикату P. Но так может и не получиться. По этому из осторожности надо указать P', давая понять, что морфизм f^* может и не возвратить нас к прежнему предикату P. В равенстве (9) остается неясным, что понимать под ядром $K_{f^*}(y, x)$ морфизма f^*. В правиле перехода от Σ к Σ на этот счет ничего не говорится. Но в принципе двойственности сказано, что все, что мы не поменяли должно остаться неизменным. Ядро $K_f(x, y)$ задает связь между переменными x и y для морфизма f, а ядро $K_{f^*}(y, x)$ – связь (то есть отношение) между теми же переменными для морфизма f^*. Эта связь должна остаться прежней. А это значит, что предикаты $K_f(x, y)$ и $K_{f^*}(y, x)$ должны совпадать.

Таким образом, пишем

$$K_{f^*}(y, x) \overset{x,\,y}{=} K_f(x, y).$$

Окончательно, получаем определение для морфизма f^*:

$$\exists y \in B(K_f(x, y) \cdot Q(y)) = P'(x). \qquad (10)$$

К примеру, для некоторого морфизма какой-нибудь предикатной категории найдем двойственный морфизм.

Морфизм f задаем двудольным графом (рис. 16):

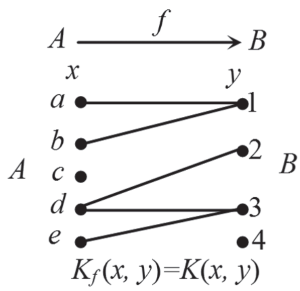
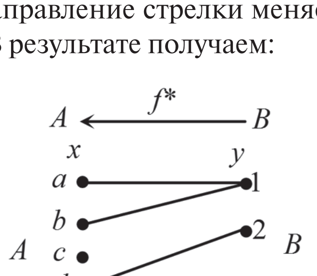


Рис. 16

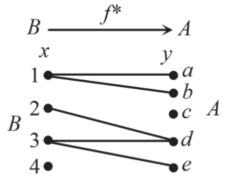
Двойственный морфизм f^* задаем тем же графом, но направление стрелки меняем на обратное (рис. 17). В результате получаем:



$$K_{f^*}(y, x) = K_f(x, y) = K(x, y)$$

Рис. 17

Можно изобразить двойственный морфизм и иначе (рис. 18):



$$K_{f^*}(y,\,x) = K^*(x,\,y) = K(x,\,y)$$

Рис. 18

Запишем формулой двойственный морфизм предикатной категории по формуле исходного морфизма.

В качестве исходного берем морфизм:

$$Q(y) = \exists x \in \{a,\ b,\ c,\ d\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)P(x)).$$

Двойственный морфизм имеет вид:

$$P'(x) = \exists y \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)Q(y)).$$

К примеру, вычислим значение двойственного морфизма, сравнив его с исходным предикатом первоначального морфизма.

Графически (рис. 19):

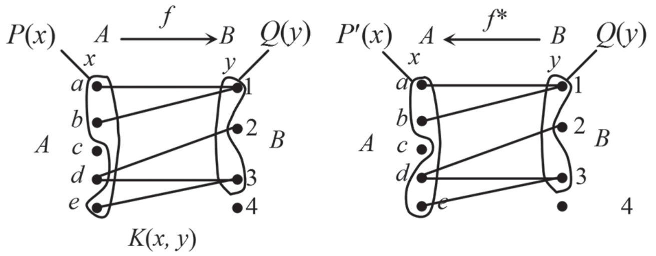


Рис. 19

Мы видим, что $P' \neq P$.

Аналитически:

$$P'(x) = \exists y \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee$$

$$\vee x^e y^3)(y^1 \vee y^3)) = (x^a \vee x^b) \vee x^d \vee x^e = x^a \vee x^b \vee x^d \vee x^e.$$

Нам осталось рассмотреть, как в категории $Pred^*$ выражается двойственное произведение морфизмов. Напомним, что ядро произведения $h = fg$ морфизмов f и g в исходной категории $Pred$ определяется равенством:

$$K_h(x,\,z) = \exists y \in B \cap C(K_f(x,\,y) \wedge K_g(y,\,z)) \qquad (11)$$

Здесь $K_f(x,\,y)$ – предикат на $A \times B$; $K_g(y,\,z)$ – предикат на $C \times D$; $K_h(x,\,z)$ – предикат на $A \times D$.

На коммутативной диаграмме (рис. 20) связь морфизмов f, g, h выражается так:

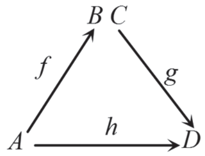


Рис. 20

Поворачивая стрелки в этой диаграмме, получаем двойственную диаграмму (рис. 21), характеризующую связь морфизмов f^*, g^*, h^*:

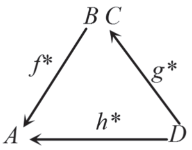


Рис. 21

Для записи равенства, двойственного равенству (11), заменяем в (11) предикат $K_f(x,\,y)$ на $A \times B$ предикатом $K_{f^*}(y,\,x)$ на $B \times A$; предикат $K_g(y,\,z)$ на $C \times D$ предикатом $K_{g^*}(z,\,y)$ на $D \times C$; предикат $K_h(x,\,z)$ на $A \times D$ предикатом $K_{h^*}(z,\,x)$ на $D \times A$. Кроме того, в выражении $\exists y \in B \cap C$ обмениваем местами B и C, а также обмениваем местами K_{f^*} и K_{g^*}. В результате получаем:

$$K_{h^*}(z,\,x) = \exists y \in B \cap C(K_{g^*}(z,\,y) \wedge K_{f^*}(y,\,x)). \qquad (12)$$

Мы знаем, что

$$K_{g^*}(z,\,y) = K_g(y,\,z), \quad K_{f^*}(y,\,x) = K_f(x,\,y).$$

Подставляя в (12), получаем:

$$K_{h^*}(z,\,x) = \exists y \in C \cap B(K_g(y,\,z) \wedge K_f(x,\,y)) =$$

$$= \exists y \in B \cap C(K_f(x,\,y) \wedge K_g(y,\,z)) = K_h(x,\,z).$$

Так, что операции умножения в категориях $Pred$ и $Pred^*$ согласуются друг с другом. Произведение морфизмов в категории $Pred^*$ можно без вычисления найти по соответствующему произведению двойственных морфизмов категории $Pred$ одним только поворотом стрелок.

Выводы

За счет использования принципа двойственности, можно удвоить число категорий, а также число понятий и утверждений в одной и той же категории. Часто такие двойственные категории, а также двойственные понятия и утверждения одной и той же категории бывают мало похожими друг на друга. Таким образом, принцип двойственности оказывается мощным средством получения новых результатов в теории категорий. Казалось бы, переход к двойственным (дуальным) структурам – это чисто механическая процедура, и ее можно было бы поручить вычислительной машине. Но, как мы видим, на практике такой переход совершается не очень просто. Принцип двойственности требует сохранения содержания высказывания Σ (высказывание о категории K) в высказывании Σ^* (высказывание о категории K^*), за исключением всего того, что связано с поворотом стрелок. Чтобы такой перенос содержания совершить, необходимо глубоко проникнуть в содержание высказывания Σ, ЭВМ такую работу пока не способна выполнять. Простое посимвольное преобразование высказывания Σ в высказывание Σ^* не получается.

Список литературы: 1. *Голдблатт.* Топосы. Категорный анализ логики [Текст]/ *Голдблатт* – М.: Мир, 1983. 486 с. **2.** *Маклейн, С.* Гомология [Текст]/ *С. Маклейн* – М.: Мир, 1966. 543 с. **3.** *Боггс, У., Боггс М.* UML и Rational Rose [Текст]/ *У. Боггс*, *М. Боггс* – М.: ЛОРИ, 2001. 590 с.

Поступила в редколлегию 10.02.2011.

УДК 519.7

Про предикатну категорію / М. Ф. Бондаренко, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 10-23.

У статті розглянуто принцип подвійності для категорій, завдяки положенням якого можна перейти від будь-якої конкретної категорії до подвійної їй категорії.

Іл. 21. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

About predicate category / M. F. Bondarenko, N. E. Rusakova, Yu. P. Shabanov-Kushnarenko, // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 10-23.

In the article principle of duality is considered for categories, due to positions of which it is possible to pass from any concrete category to the ambivalent it category.

Fig. 21. Ref.: 3 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], Н.Е. Русакова[3], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1-4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СУБЪЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ

В статье обсуждаются новые обстоятельства в области интроспекции, которые возникают в процессе развития теории интеллекта. Рассматривается природа интроспекции и корректируется постановка одной из задач теории интеллекта с целью приведения ее решения в соответствие с интроспективными данными на примере изучения механизма цветового зрения человека. Сформулирован принцип тождества, согласно которому субъективное и соответствующее ему объективное – это один и тот же предмет или процесс, рассматриваемый с разных сторон.

ИНТРОСПЕКЦИЯ, ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ, СУБЪЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ, ПРИНЦИП ТОЖДЕСТВА

Введение

О значении для теории интеллекта интроспекции и получаемых с ее помощью сведений о психофизических процессах и субъективных состояниях испытуемого уже говорилось в работе [1]. Однако, в процессе дальнейшего развития теории интеллекта в этой области обнаруживаются новые важные обстоятельства. Некоторые из них обсуждаются в этой статье. По мере продвижения вглубь механизма интеллекта исследователь обнаруживает, что сложность формулировок постулатов, характеризующих физически наблюдаемое интеллектуальное поведение испытуемого, катастрофически растет. Если же эти постулаты записывать не в объективных, а в субъективных терминах, тогда, как свидетельствует уже накопленный опыт исследований, сложность формулировок постулатов непомерно не растет и всегда остается в приемлемых пределах.

Необходимость записи постулатов в субъективных терминах существенно усложняет работу исследователя. Как и прежде, он обязан на каждом шаге своей деятельности обеспечить безупречную объективность изучения интеллекта. Это означает, что все термины, используемые для формулировки очередного постулата, он должен однозначно выразить через понятия, опирающиеся исключительно на сведения о поведении испытуемого, получаемые в объективном эксперименте. Связь этих терминов, задаваемая постулатом, должна подтверждаться физическими опытами. Но теперь исследователь дополнительно должен относительно каждого вновь вводимого понятия и каждой связи доказывать, что они согласуются также и с интроспективным свидетельством испытуемого. Чтобы этого достичь, испытуемый должен тщательно сличить все детали введенного объективного понятия с элементами своего субъективного опыта. Кроме того, он должен убедиться в том, что его субъективные состояния связаны друг с другом именно так, как этого требует формулировка постулата. Результат сличения будет удовлетворительным лишь в том случае, если испытуемый при максимуме внимания и старания не сможет обнаружить отличия между данными своего субъективного опыта и содержанием логической конструкции объективных понятий и составленного из них постулата.

Если же такого тщательного сличения объективного и субъективного не делать, то очень скоро, по мере продвижения вглубь механизма интеллекта, объективно вводимые понятия перестанут соответствовать субъективным состояниям испытуемого. Вследствие этого исследователь рано или поздно почувствует зыбкость почвы, на которой он строит здание теории интеллекта, и утратит возможность опираться на субъективный опыт испытуемого при постановке новых задач исследования. Отказавшись от услуг лоцмана-интроспекции, исследователь потеряет ориентировку и утонет в сложности психики человека, не зная, в какую сторону двигаться дальше, чтобы обеспечить успех физического изучения интеллекта. Таким образом, интроспекция нужна для того, чтобы не заблудиться в лабиринте возможных постановок задач физического исследования интеллекта. Только немногие пути в этом лабиринте ведут к успеху, остальные – в тупики непреодолимой сложности формулировок свойств поведения испытуемого. Для преодоления этой сложности найден пока единственный прием – свертывание объективной формулировки постулатов в субъективную.

Хотелось бы получше узнать, что собой представляет интроспекция – этот уникальный источник сведений о субъективных состояниях, от которого столь сильно зависит успех исследований человеческого интеллекта. Кажется, что в механизме интроспекции есть что-то физически невозможное. С одной стороны, нельзя усомниться в том, что субъект действительно ощущает, чувствует, переживает. С другой, не удается ясно представить принцип действия прибора, способного генерировать субъективные состояния. Очень трудно человеку поверить в то, что чувствовать может не только он сам, но также и система искусственного интеллекта. Столь же трудно ему представить наличие субъективных состояний у других людей. Однако нельзя не согласиться и с тем, что у каждого человека есть свой внутренний мир. Перед лицом этих трудностей и противоречий легко прийти к мысли, что чувствует не тело, а отличная от него душа. Но и это не помогает делу. Говорить так – значит просто откладывать объяснение феномена интроспекции: ведь всегда можно спросить, а как же тогда удается чувствовать душе. Можно ответить: сверхъестественным образом. Но тот, кто так утверждает, просто уклоняется от научного объяснения факта наличия субъективных состояний у людей.

1. О природе интроспекции

Нам представляется, что не следует относиться слишком серьезно к тем противоречиям (несомненно, мнимым), которые возникают при попытке проникнуть в структуру механизма интроспекции методом самонаблюдения, и делать из них выводы нигилистического или мистического характера. Многочисленные факты говорят о том, что сведения, доставляемые нашим внутренним зрением, будучи ложно истолкованы, часто ведут к ошибкам. Примерами этого могут служить разнообразные обманы чувств. Особенно же осторожно надо относиться к свидетельствам интроспекции о самой себе. Когда кажется, что показания наших чувств противоречат прочно установленным законам физики, следует решительно стать на сторону физики и считать, что такие показания нуждаются в более удачной интерпретации. Например, испытуемый помещает левую руку в горячую воду, а правую – в холодную и держит их там несколько минут. Затем окунает обе руки в теплую воду. Теперь он ясно чувствует, что одна и та же вода и холодна (по показаниям левой руки) и горяча (по показаниям правой). Однако с физической точки зрения – это абсурд, и поэтому при оценке температуры воды такие показания наших чувств мы просто игнорируем, вопреки их кажущейся очевидности и непреложности.

Но можно ли полагаться на интроспективные данные при формулировке задач теории интеллекта, если они нас обманывают? Мы полагаем, что можно, только делать это надо достаточно осторожно и осмотрительно, по принципу «доверяй, но проверяй». Взятые сами по себе чувства никогда не лгут. Если под действием воды одной и той же температуры левой рукой я чувствую, что вода холодна, а правой – что она горяча, то этот факт моего сознания непреложен. Рассматриваемый вне связи с вызвавшим его внешним воздействием он не может противоречить каким бы то ни было физическим данным. Факт чувствования не может быть оспорен. Противоречие между объективным и субъективным появляется лишь тогда, когда человек пытается судить о воспринимаемом внешнем физическом объекте по своему субъективному состоянию (в нашем примере – о температуре воды по ощущению тепла или холода). Но так ли уж непреодолимо это противоречие? Когда физик видит, что его термометры показывают различную температуру одного и того же тела, он не спешит объявлять о наличии неразрешимого противоречия или сверхъестественных эффектов. Быть может, термометры имеют разные шкалы. С подобной меркой можно подойти и к оценке разнобоя в показаниях температурных анализаторов человека. Известно, что температурный анализатор человека (как впрочем и все другие его анализаторы) снабжен механизмом адаптации, меняющим масштаб шкалы в зависимости от уровня измеряемой температуры.

2. Корректировка постановки задач

Рассмотрим пример корректировки постановки одной из задач теории интеллекта с целью приведения ее решения в соответствие с интроспективными данными. Речь идет о задаче изучения механизма цветового зрения человека, описанной в работе [1]. Испытуемый воспринимает два произвольно выбранных исследователем световых излучения на расположенных рядом небольших тест-полях. Он сличает цвета излучений и устанавливает их равенство или неравенство. Оказывается, что результат сличения цветов ни от каких побочных факторов не зависит. Не зависит он, в частности, и от фона, окружающего тест-поля. Убедившись в рефлексивности, симметричности, транзитивности, аддитивности, трехмерности и непрерывности предиката, реализуемого испытуемым, исследователь дедуктивно выводит из этих свойств-постулатов модель цветового зрения, то есть конкретный вид преобразования излучения в его цвет.

Все сделано безупречно, и теперь, казалось бы, можно с помощью этого преобразования предсказать заранее, будут ли два произвольно взятые световые излучения восприниматься испытуемым в виде одинаковых цветов или нет вне зависимости от того, в каких условиях они ему предъявлены. Рекомендация теории проста: если физическая характеристика цветов совпадет (а именно: должны совпасть две тройки чисел – координаты этих цветов), то цвета будут одинаковыми, если же не совпадет, значит, они должны оказаться различными. Однако существует простое интроспективное наблюдение, которое противоречит такого рода предсказаниям. Оно демонстрируется следующим «опровергающим экспериментом». Сформируем на небольшом тест-поле некоторое цветовое излучение и окружим его обширным синим фоном. Подберем спектр излучения тест-поля таким, чтобы оно воспринималось испытуемым в виде серого цвета. Далее, сохраняя неизменным излучение тест-поля, заменим синий фон на желтый. Испытуемый видит, что цвет тест-поля после замены фона меняется, превращаясь из серого в голубой. Читатель может легко убедиться в справедливости этого наблюдения. Итак, данные интроспекции явно противоречат выводам физической теории, когда она утверждает, что цвет однозначно определяется вызвавшим его световым излучением.

Означает ли это, что физическая теория цвета ошибочна? Отнюдь нет. Ведь в ней под термином «цвет» понимается объективно определяемое понятие, а именно – класс всех световых излучений, равных по цвету в экспериментах со сравнением двух рядом расположенных полей, а это не совсем тот цвет, который мы субъективно переживаем. Если взять два световых излучения, равных по цвету на окруженных каким-либо фоном соседних полях, то при любой перемене фона цветовое равенство сохранится, но сами цвета могут меняться. Значит субъективно переживаемый испытуемым цвет каждого тест-поля определяется не только породившим его излучением, но также и фоном, окружающим поля. Получается, что субъективный цвет излучения – это не класс всех метамерных излучений, а нечто такое, что при фиксированном фоне связано с ним взаимно однозначной зависимостью. Причем сама эта зависимость меняется с изменением фона. Итак, физическая теория цвета верна, но она отвечает не совсем на тот вопрос, который мотивирован данными интроспекции. Она ведет не совсем туда, куда указывает содержимое нашего внутреннего мира. То, что называется в колориметрии цветом, не всегда можно интерпретировать как психологическую реакцию испытуемого на световое излучение. Таким образом, колориметрическое понятие цвета не всегда согласуется с ощущением цвета. Объективное и субъективное в данном случае вступают в противоречие друг с другом, следовательно, постановка задачи о цвете нуждается в усовершенствовании, если целью является познание природы цвета как субъективного состояния человека.

Как же изменить формулировку задачи, чтобы ее решение давало не только описание поведения испытуемого при сравнении двух световых излучений по цвету, но также и описание преобразования светового излучения в его цвет, субъективно переживаемый испытуемым? Простейший ответ состоит в том, чтобы раз и навсегда зафиксировать фон, окружающий тест-поля. Например, все опыты делать только на черном фоне. Тогда будет устранена причина (изменение фона), которая нарушает взаимно однозначное соответствие между цветом физическим и цветом психологическим. Такая постановка задачи выглядит не вполне естественной по физическим соображениям: незачем фиксировать фон, если он не влияет на результаты эксперимента. Неудовлетворительна она и по психологическим соображениям, так как не снимает ранее выдвинутого возражения: существует такая ситуация, при которой упомянутая выше модель цветового зрения дает результат, расходящийся с субъективным опытом испытуемого. Чтобы исправить положение, нужно фон включать в характеристику входного сигнала наряду со спектром предъявляемого излучения. Тогда опыты можно будет поставить таким образом, чтобы охватить ими и «опровергающий эксперимент».

Задача изучения цветового зрения человека формулируется следующим образом. Берем маленькое тест-поле (теперь уже не два соседних поля, а вместо них только одно), на котором испытуемому предъявляются произвольные световые излучения. Тест-поле окружено некоторым фоном, который заполняет всю остальную часть поля зрения. Фон может выбираться произвольно. Испытуемый в течение некоторого времени наблюдает на тест-поле цвет предъявленного излучения в присутствии заданного фона. Затем излучение на тест-поле и фон, его окружающий, произвольно меняются, и испытуемый наблюдает новый цвет на тест-поле, сравнивая его по памяти с исходным цветом. В случае равенства цветов испытуемый должен отреагировать положительным ответом, в случае неравенства – отрицательным. Ясно, что такие опыты включают в себя, как частный случай, и ранее рассмотренный «опровергающий эксперимент». Его мы получим, если для первого и второго предъявлений на тест-поле используем одно и то же излучение, фоны же должны быть взяты разными.

На основе этих опытов должна быть построена скорректированная модель цветового зрения человека в виде зависимости субъективного цвета x от порождающих его светового излучения X и фона Y. Обозначим зависимость колориметрического цвета x от излучения X, получаемую при решении задачи в исходной постановке, символом f, тогда $f(X)=x$. В новой постановке решение задачи будет иметь вид $h=g(f(X), Y)$. Здесь g – зависимость субъективного цвета x от колориметрического цвета $x=f(X)$ и фона Y. Теперь h – это психологический цвет. Мы использовали колориметрический цвет $f(X)$ вместо излучения X в роли первого аргумента функции g на том основании, что на любом фоне субъективный цвет x не меняется при замене излучения X на любое метамерное ему излучение. Об этом свидетельствует упоминавшийся ранее факт, что равенство колориметрических цветов сохраняется при любом изменении фона, окружающего тест-поля.

Приведенный выше пример корректировки одной из психофизических задач теории интеллекта наглядно демонстрирует, как под натиском интроспективных данных исследователь интеллекта вынужден расширять постановку решаемой им физической задачи. При фиксированном фоне колориметрическое решение задачи о цветовом зрении человека безупречно как с физической, так и с психологической точек зрения. Но как только ограничение на фиксацию фона снимается, психологические данные сразу же вступают в противоречие с колориметрической моделью цветового зрения. Чтобы это противоречие устранить, приходится сам фон включать в характеристику входного сигнала, предъявляемого испытуемому. При этом происходит расширение постановки исходной физической задачи. Важно отметить, что после решения задачи в новой, более широкой, постановке ранее полученные результаты не обесцениваются, поскольку старая модель вливается в новую, становясь ее частью. Нечто подобное происходит и в физике: при появлении более общей теории старая теория обычно не сходит со сцены, но по-прежнему успешно используется в рамках, очерченных новой теорией. Итак, мы видим, что интроспекция снабжает исследователя ценной информацией, которую тот может использовать для прокладывания маршрута движения вглубь механизма интеллекта при его познании. Математические модели различных сторон механизма интеллекта человека строит и обосновывает физика. На вопрос же, какие именно стороны интеллекта надо изучать на данном этапе его исследования, ответ дает психология.

Создаваемые физикой теории относительны в том смысле, что новые теории уточняют и обобщают уже имеющиеся теории. И нет ни одной такой физической теории, которая была бы застрахована от пересмотра. Видимо, подобное положение со временем возникнет и в психофизической части теории интеллекта. Во всяком случае, уже сейчас ясно, что теория цветового зрения, учитывающая фон, может быть еще более обобщена. Об этом свидетельствует наличие таких интроспективных данных, которые вступают с ней в противоречие. Оказывается, что благодаря цветовой адаптации, на субъективный цвет влияет не только фон, окружающий тест-поле, но и то, что видел испытуемый на тест-поле и вокруг него до момента предъявления светового стимула, порождающего этот цвет. Субъективный цвет несколько меняется также под действием звуковых, осязательных и других ощущений. Цвет можно изменить, надавливая на глазное яблоко, а также воздействуя на сетчатку глаза или на кору затылочных долей мозга испытуемого электрическим током. Кроме того, при исследовании цветового зрения разных лиц даже при одинаковой постановке задачи могут получаться различные модели (индивидуальные различия функций спектральной чувствительности зрения, зрение дальтоников (дихроматов различных типов, ахроматов, цветаномалов)). Так что перед исследователем открываются поистине неограниченные возможности для дальнейшего обобщения и усовершенствования модели цветового зрения. То же относится и к моделям любых других психофизических процессов.

3. Проблема природы субъективных состояний

Выше на конкретном примере исследования цветовых ощущений был продемонстрирован относительный характер физических знаний о субъективных состояниях испытуемого. В процессе углубления наших знаний о цветовом ощущении в нем открываются все новые и новые свойства. Вместе с тем, сама природа цвета, а именно – его способность быть синим, желтым и т.п. (и в этом качестве непосредственно переживаться испытуемым) всегда остается за пределами физической характеристики цвета. Мы чувствуем цвет таким, каков он есть на самом деле, мы не сомневаемся в том, что цвет, взятый сам по себе (как «вещь в себе»), именно таков, каким он является перед нашим сознанием. И оказывается, что эта непосредственно воспринимаемая нами сущность цвета (например, его синева) не выражается в объективно наблюдаемых свойствах цвета.

В связи со сказанным напрашивается еще одна аналогия теории интеллекта с физикой. Широко известен афоризм: «Материя исчезла, остались одни уравнения». Здесь имеется в виду, что любая физическая теория описывает лишь свойства предметов, но не их субстанцию, природу, не сами предметы как «вещи в себе». Исследователь интеллекта тоже может с полным основанием сказать: «Ощущение исчезло, остались одни уравнения». Ощущение как «вещь в себе», как субъективное состояние испытуемого, реально им переживаемое, не извлекается из объективно наблюдаемого поведения испытуемого. Физик имеет доступ лишь к свойствам ощущений, которые он выражает в виде уравнений. Само же ощущение испытуемого, как его личное переживание, находится вне пределов описательных возможностей физики.

Но вправе ли мы при таком положении дела допускать возможность создания полноценного искусственного разума на базе достижений теории интеллекта? Вопрос этот далеко не праздный, ибо от него зависит сфера практического применения теории интеллекта. Если бы описание природы субъективных состояний человека было возможно, тогда можно надеяться, что искусственное воспроизведение полученных моделей приведет к тому, что техническое устройство будет на самом деле переживать свои состояния в том виде, в каком их переживает человек, отдавая себе отчет о них. Если же это принципиально недостижимо, тогда не исключено, что такое устройство будет лишь чисто внешне имитировать интеллектуальную деятельность человека, оставаясь, по существу, всего лишь бесчувственным, бездушным автоматом.

Человек субъективно переживает каждый цвет (например, синий) как нечто совершенно конкретное, вполне определенное, абсолютное, как бы данное извне, существующее само по себе. Переживаемый цвет – это некая субстанция, она обладает характерным качеством синевы, причем это не имя синевы, а она сама. Эта синева предметна, она переживается принудительно, ее нельзя изменить усилием воли, она не зависит от точки зрения субъекта, от того, чем она сопровождается, с чем сравнивается. Каждый человек незыблемо верит, что другие люди переживают цвета точно такими же, какими переживает их он сам, хотя проверить, так ли это на самом деле, объективными методами он не может. Субъективный цвет (как и все другие психологические состояния человека) очень похож на Кантову «вещь в себе», природа которой тоже недоступна для физического описания.

В противоположность цвету субъективному цвет колориметрический есть всего лишь математическая абстракция, он задается с точностью до обозначений, его конкретное представление зависит от воли исследователя. Колориметрический синий цвет – это всего лишь конкретная тройка чисел, он не субстанционален, в нем нет субъективно переживаемого качества синевы. В одной системе обозначений он будет представлен одной тройкой чисел, в другой – совсем иной тройкой чисел. Если бы субъективно переживаемые цвета вдруг поменялись своими качествами (например, синий цвет стал зеленым, зеленый – желтым и т.д.), то физик, изучающий лишь внешние реакции испытуемого, не смог бы заметить этой подмены. Он продолжал бы называть синим тот цвет, который уже изменился на зеленый, характеризуя его тройкой чисел, предназначавшейся ранее для описания синего цвета.

Синева, как органически присущее субъективному цвету качество, не попадает в число характеристик, фигурирующих в колориметрическом цвете, она ускользает от математического описания. Поэтому даже в том случае, когда построенные для двух испытуемых математические модели цветового зрения оказываются совершенно одинаковыми (в колориметрическом варианте для этого требуется совпадение всех трех функций спектральной чувствительности зрения), нет достаточных оснований для вывода из этого факта, что такие испытуемые реагируют одинаковыми субъективными цветами на идентичные световые излучения. Теоретически не исключено (хотя это кажется невероятным с точки зрения здравого смысла), что существуют люди, реагирующие на световые излучения ощущениями, которые для других людей являются слуховыми или обонятельными, или же такими ощущениями, которые другим людям совершенно неизвестны.

Итак, мы видим, что субъективное качество переживания цвета не улавливается колориметрической моделью цветового зрения человека. Очевидно, что оно не может быть выражено никакой другой, более общей или более совершенной, моделью. Ясно также, что этот вывод в равной мере относится и ко всем другим субъективным состояниям человека. Выходит, что в каждом субъективном состоянии человека есть нечто непознаваемое, причем как раз то, что придает им качество субъективности, что обеспечивает причастность этих состояний к нашему собственному «я».

Не подрывает ли этот вывод ценности теории интеллекта как средства искусственного воспроизведения субъективной стороны человеческого разума? Если мы не в состоянии описать синеву ощущения такой, какой она есть сама по себе, то как же тогда можно надеяться, что удастся изготовить искусственно полноценное ощущение цвета, которое автоматически действующее мыслящее устройство могло бы субъективно переживать? Мы можем ответить на эти вопросы следующим образом. Приходится признать, что субстанция ощущения, которая делает его субъективным переживанием, не может быть описана в научных терминах. Тем не менее, это ограничение не является препятствием для искусственного воспроизведения феномена личного переживания ощущений и вообще – любых субъективных состояний. Попытаемся обосновать последнее утверждение.

Предположим на минутку, что по достаточно обширным математическим описаниям теории интеллекта (которые, как мы надеемся, она разработает в будущем) построена полноценная в смысле разумности физических реакций копия испытуемого в виде некоторого действующего технического устройства. Судя по результатам наблюдений за внешними действиями такой копии испытуемого, в ней обитает некий дух, личность, субъект. Последний утверждает, что он переживает различные психологические состояния, в том числе и ощущения цвета с характерными для них качествами синевы, желтизны и т.п. Так ли это на самом деле или нет, внешний наблюдатель проверить не может. Похожи ли ощущения, переживаемые копией испытуемого (если таковые вообще возникают), на ощущения самого испытуемого, никто сказать не в состоянии.

В копии испытуемого можно обследовать то место в механизме ее устройства, в котором разыгрываются образы световых излучений, воспринимаемых ею. Найти это место не составит особого труда, поскольку подразумевается, что копия испытуемого создана людьми, а, следовательно, ее устройство и функционирование полностью им известны. Отыскать же точное место возникновения зрительных образов в организме испытуемого было бы делом гораздо более сложным и вряд ли выполнимым при современном уровне знаний об анатомии и физиологии мозга человека. Именно по этой причине мы обращаемся в данном рассуждении не непосредственно к испытуемому, а к его гипотетической искусственно созданной копии.

Зададимся вопросом: какая материальная субстанция служит носителем образа светового излучения, воспроизведенного в копии испытуемого? Отвечая на него, мы можем сказать, что это, к примеру, – магнитное поле, которое в каждой своей точке характеризуется направлением и плотностью силовых линий и т.п. Но все это – не более чем слова, коды чисел и другие символы. Никакие описания не смогут охарактеризовать носитель образа таким, каков он есть сам по себе, т.е. как «вещь в себе». Если мы перейдем к другим единицам измерения или к иной координатной системе, то получим иное описание того же самого физического объекта. Как видим, свойства физического объекта с успехом описываются, однако сам объект, его природа, субстанция ускользает от описания точно так же, как ранее ускользала от описания природа субъективного ощущения. Получается, что физический объект, как и ощущение, можно описать только с точностью до обозначений.

4. Принцип тождества

Таким образом, природа физических процессов как «вещей в себе» и природа соответствующих им субъективных состояний человека, рассматриваемых как существующие сами по себе, сходна в том смысле, что и та и другая не поддается научному описанию. По этой причине мы не знаем, чем же природа объективного и соответствующего ему субъективного отличается, и, весьма вероятно, что знать этого не можем. Никто не сомневается в том, что субъективное и соответствующее ему объективное состояния существуют реально, но сверх этого ничего об их природе сказать не удается. Вместе с тем, в силу психофизического параллелизма, все физически наблюдаемые свойства субъективных и соответствующих им объективных состояний совпадают. Следовательно, все, что известно (а возможно, и все, что можно узнать) о физических процессах и соответствующих им субъективных состояниях, идентично. Ничто не мешает нам сделать еще один шаг и предположить, что не только свойства, но и природа, субстанция физических и соответствующих им психических состояний совпадают. Такое утверждение недоказуемо и неопровержимо, но оно существенно упрощает картину мира. Основываясь на сказанном, мы считаем возможным сформулировать следующий **принцип тождества:** *природа физических процессов - носителей субъективных состояний и природа самих субъективных состояний одна и та же.*

Согласно принципу тождества, субъективное и соответствующее ему объективное – это две стороны одной и той же медали (лучше было бы сказать: две стороны одной плоскости), это один и тот же предмет или процесс, рассматриваемый с разных сторон. На самом деле есть только один предмет, но до сих пор предполагалось, что их два. Возьмем, к примеру, субъективное зрительное ощущение, которое разыгрывается в поле зрения. Его можно рассматривать как поле точек, в каждой из которых имеется некоторый цвет, меняющийся во времени. Этому ощущению в организме человека соответствует (по современным представлениям - в коре затылочных долей головного мозга) объективное поле физических состояний некоторой природы, меняющееся во времени синхронно со зрительным ощущением. Принцип тождества в данном случае гласит, что в случае равенства цветов в произвольно взятых двух точках поля зрения должны совпадать также и физические состояния в соответствующих точках коры головного мозга. Если же цвета не совпадают, то обязательно должны различаться и соответствующие им физические состояния.

Если принять принцип тождества, то самые темные и трудные (они же и ключевые) проблемы теории интеллекта легко и естественно решаются. Будет ли машина – копия испытуемого, созданная по математическим описаниям теории интеллекта, обладать собственной психикой, субъективно переживать свои внутренние состояния? Да, будет, потому что воспроизведенные в ней физические состояния, играющие роль образов физических процессов, как раз и являются, согласно принципу тождества, такими субъективными переживаниями. Можно ли субъективные состояния человека изучать физическими методами? Да, можно, поскольку, согласно принципу тождества, любое субъективное состояние есть также и состояние физическое. Не будут ли ущербными описания субъективных состояний человека, даваемые теорией интеллекта, из-за того, что природа субъективности психологических состояний ими не улавливается? Нет, не будут, поскольку, согласно принципу тождества, описать природу субъективности переживания – это то же самое, что узнать, каков физический объект сам по себе. Последнего физика достичь не может, но из-за этого никакого ущерба она не терпит.

Мы видим, что принцип тождества играет роль «подпорки» при решении теорией интеллекта важнейших проблем. В связи с этим он заслуживает самого тщательного обсуждения. Прежде всего возникает вопрос, можно ли принцип тождества обосновать методами физики. Ответ отрицателен уже хотя бы потому, что в принципе тождества идет речь о физических процессах и субъективных состояниях как о «вещах в себе». И те и другие с этой стороны не представляется возможным наблюдать физически. Нельзя обосновать физическими методами тождество природы субъективных и соответствующих им объективных состояний, поскольку эту природу невозможно воспринять физическими приборами. Однако в этом отрицательном ответе содержится и нечто положительное: если тождество природы субъективного и соответствующего ему объективного физическими методами не может быть доказано, то оно, вместе с тем, не может быть ими и опровергнуто. Поэтому авторы могут не опасаться за судьбу сформулированного ими «принципа тождества», ибо последний неуязвим для критики со стороны физики. Вместе с тем, принцип тождества, как мы только что видели, не является бесполезным утверждением. Видимо, не все важные для физики утверждения могут быть ею доказаны. Некоторые из них приходится принимать как априорные. Принцип тождества относится к числу именно таких утверждений.

Как же могло случиться, что принцип тождества, будучи, по существу, искусственно придуманным утверждением, не имеющим опоры в опыте, все же помогает решать важные проблемы теории интеллекта? В науке такого рода принципы не являются новостью. Физики их хорошо знают и с пользой применяют в своих исследованиях. Например, таким принципом является так называемая «бритва Оккама». Формулируется он следующим образом: «сущностей не следует умножать без необходимости». Иными словами, если в какой-нибудь науке все можно объяснить без допущения той или иной гипотетической сущности, то и не следует ее вводить. Известный философ, логик и исследователь интеллекта Бертран Рассел пишет: «Я лично убедился в необычайной плодотворности этого принципа» [2, с. 491].

К принципу тождества можно прийти, применяя «бритву Оккама». Есть две сущности: психическое состояние и соответствующее ему физическое состояние. Общепринято, что любое психическое состояние всегда сопровождается соответствующим ему физическим состоянием (так называемый «психофизический параллелизм»). Никем не оспаривается, что носителем каждого психического состояния служит свое особое состояние физическое. Психическое всегда неразлучно с физическим как тень с пешеходом в солнечный день. Принцип тождества утверждает лишь то, что в данном случае нет надобности вводить две разные сущности, достаточно использовать одну из них, поскольку сущности эти невозможно ни различить, ни разделить. История науки знает примеры слияния двух сущностей в одну. Так, в древние времена планета Венера принималась за два разных объекта: Веспер – вечерняя звезда и Люцифер – утренняя звезда. Потребовались длительное время и большие интеллектуальные усилия астрономов, чтобы объединить эти два понятия в одно.

5. Применение принципа тождества

Действенность принципа тождества основана на том, что он устраняет воображаемую пропасть между психическим и физическим, которая возникла из-за «необоснованного» разделения состояний на психические и физические. Употребление в предыдущей фразе слова «необоснованный» без кавычек было бы несправедливостью по отношению к тем, кто когда-то ввел такое разделение. Разве в свое время было необоснованным введение двух названий для одной и той же (как это мы знаем теперь) планеты Венера? Это была совершенно естественная мера предосторожности в условиях дефицита знаний об этих, как казалось тогда, различных объектах.

Введение двух разных имен для одного и того же предмета – еще не ошибка. Ничто не мешает отождествить содержание этих имен впоследствии, когда для этого накопится достаточный объем знаний. Разделение состояний на психические и физические было вполне естественным на начальных стадиях развития науки об интеллекте. Но теперь, когда о свойствах психических и физических состояний известно уже достаточно много, и, тем не менее, не возникает необходимости в различении этих понятий, вполне созрели условия для провозглашения тождества этих двух «сущностей». Чтобы воображаемая пропасть между психическим и соответствующим ему физическим не отравляла в будущем жизнь специалистам по теории интеллекта, пропасть эту надо ликвидировать. А чтобы сделать это, необходимо принять принцип тождества.

Формулировался ли принцип тождества теми, кто ранее занимался исследованием интеллекта? Наши поиски в этом направлении не дали ясного положительного ответа. Мы можем привести только несколько высказываний двух классиков естествознания, которые с большой натяжкой можно рассматривать как вклад в провозглашение принципа тождества. Шредингер в послесловии к книге [3, с. 122] развивает взгляд, согласно которому « «Я», взятое в самом широком значении этого слова – т.е. каждый сознательный разум, когда-либо говоривший или чувствовавший «я», представляет собой не что иное, как субъект, могущий управлять «движением атомов» согласно законам природы».

Казалось бы, это высказывание не имеет ничего общего с принципом тождества. Однако далее Шредингер пишет: «Само по себе это представление не ново. Насколько мне известно, наиболее ранние упоминания о нем насчитывают уже, по крайней мере, 2500 лет, если не больше. Начиная с древних великих Упанишад, представление о том, что Атман = Брахман (т.е. личная индивидуальная душа равна вездесущей, всепостигающей, вечной душе), ... считалось квинтэссенцией глубочайшего прозрения в то, что происходит в мире» [3, с. 123]. Если под словом «Атман» понимать природу субъективных состояний, а под словом «Брахман» – природу соответствующих им физических состояний, то мы получим принцип тождества. Однако Шредингер, как нам представляется, вкладывает в эти слова иной смысл. Это тем более вероятно, что в другом месте этой же книги Шредингер отрицает возможность естественнонаучного объяснения психофизического параллелизма. Он пишет: «На мой взгляд, природа этого параллелизма лежит в стороне от области естественных наук и, весьма возможно, за пределами человеческого понимания» [3, с. 18]. Между тем, принцип тождества как раз и объясняет существование этого параллелизма. Рассел весьма близок к тому, чтобы признать в субъективном восприятии физический объект. Он отличает восприятие от знания о нем. Рассел пишет: «Суть голого явления – просто определенные цветные пятна. Они ассоциируются с образами осязания, они могут вызвать слова и могут стать источником воспоминаний. Психический объект восприятия, поскольку он наполнен образами осязания, становится «объектом», о котором предполагают, что он физический; наполненный же словами и воспоминаниями, он становится «восприятием», которое является частью «субъекта» и считается духовным. Психический объект восприятия – это именно явление; он не бывает ни истинным, ни ложным. Заполненный словами, он есть суждение, и способен быть истинным или ложным. Это суждение я называю «суждением восприятия». Предложение «знание есть восприятие» следует истолковать как означающее «знание есть суждение восприятия». Только в этой форме оно способно в грамматическом отношении быть правильным» [2, с. 174].

В другом месте этой же книги Рассел спорит с утверждением о нефизичности восприятий: «Не доказано, например, что цвета, существенно отличные от тех, которые мы видим, не могут существовать, будучи невидимы. По физиологическим основаниям мы можем полагать, что этого не происходит, но такое основание эмпирично; что касается логики, то нет оснований отрицать наличие цветов там, где нет глаз или мозга» [2, с. 671]. Рассел ставит под сомнение утверждение, что «ничто не может быть одновременно и духовным и материальным» [2, с. 672]. Он добавляет: «Быть наблюдаемым или быть воспринимаемым объектом означает просто воздействовать определенным образом, и нет логических оснований отрицать за всеми событиями способности к воздействиям такого рода» [2, с. 672].

Термин «принцип тождества» широко используется в философской литературе и связывается с именем Шеллинга, который, пытаясь преодолеть дуализм кантовской и фихтевской систем, выдвинул новый исходный принцип монистической философии – абсолютное тождество субъективного и объективного, идеального и реального. Принцип тождества мышления и бытия лежит также в основе гегелевской системы. В настоящее время идеи тождества мышления и бытия проповедуют отдельные школы неотомизма. Марксистская философия обосновывает свой монизм, исходя из идей материального единства мира. Ленин пишет: «...противоположность материи и сознания имеет абсолютное значение только в пределах очень ограниченной области: в данном случае исключительно в пределах основного гносеологического вопроса о том, что признать первичным и что вторичным. За этими пределами относительность данного противоположения несомненна» [4, с. 133]; «За этими пределами оперировать с противоположностью материи и духа, физического и психического, как с абсолютной противоположностью было бы громадной ошибкой» [4, с. 231].

Выводы

Отправляясь от принципа тождества, можно ответить на множество интересных вопросов. Возникают ли субъективные состояния в организме человека, или же они существуют в каком-то ином смысле, нежели физические состояния? Ответ однозначен: как физические процессы субъективные состояния, естественно, следует искать только в организме человека. Можно ли и как отыскать физический процесс, совпадающий с данным субъективным состоянием? Можно, для этого надо иметь полное математическое описание данного субъективного состояния (включая и все его связи с другими субъективными состояниями) и полное математическое описание физического состояния (включая и все его связи с другими физическими состояниями), о которых предполагается, что они соответствуют друг другу. Если эти математические описания с точностью до обозначений совпадают друг с другом, значит, мы имеем дело с одним и тем же объектом. В противном случае – это разные объекты.

Можно ли непосредственно воспринять произвольно выбранное физическое состояние таким, каким оно есть на самом деле, т.е. как «вещь в себе»? Можно, для этого надо данное физическое состояние использовать в роли материального носителя субъективного состояния. Будучи подсоединен к этому носителю, механизм разума (неважно чьего) непосредственно воспримет данное физическое состояние в виде некоторого субъективного состояния. Природа этого субъективного состояния не зависит от воспринимающего разума, поскольку, согласно принципу тождества, она совпадает с природой соответствующего физического состояния.

Какова природа произвольно взятой «вещи в себе»? Она такова, какой психологически воспринимает ее разум, использующий эту «вещь в себе» в роли носителя субъективного состояния. И никакой иной она быть не может. Бесполезно искать природу «вещи в себе» еще где-то. Если б нашлась иная природа, отличная от первой, то мы имели бы две различные природы одного и того же физического состояния, иными словами, – не одну, а две «вещи в себе». Если бы мы не воспринимали физические процессы непосредственно в виде субъективных состояний, то никогда б не узнали ни о существовании самих себя, ни о существовании окружающего нас внешнего мира. Любые два разума будут воспринимать одинаковые физические состояния как идентичные субъективные состояния, если первые являются носителями последних. Если два субъекта имеют, к примеру, физически неотличимые механизмы зрения, то с необходимостью они будут реагировать на одинаковые световые излучения одинаковыми ощущениями цвета.

Находится ли субъективное состояние за воспринимающим аппаратом, реагирующим на физический его носитель, или перед ним? Перед ним, т.к. воспринимающий аппарат анализирует физическое состояние, которое, согласно принципу тождества, совпадает с соответствующим ему субъективным состоянием. Субъективное состояние (оно же и физическое) объективно существует вне зависимости от того, воспринимается ли оно каким-либо разумом или нет. Воспринимающий аппарат разума играет роль окна, из которого открывается вид на находящиеся перед ним предметы. Если допустить, что субъективное состояние находится за воспринимающим аппаратом и является его продукцией, то получаем противоречие в виде регресса в бесконечность: потребуется еще один прибор для восприятия полученного субъективного состояния и т.д. Утверждать, что субъективное состояние есть не сам физический процесс, а лишь образ этого физического процесса – носителя этого состояния, столь же нелепо, как говорить, что измеренная длина стола характеризует не сам стол, а лишь образ стола.

Авторы должны сознаться, что последовательное применение принципа тождества приводит к весьма непривычным представлениям. Однако создается впечатление, что разработчику теории интеллекта такие представления навязываются принудительно вне зависимости от того, нравятся они ему или нет. Здесь очень многое требует еще осмысления и дальнейшей проработки.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Начала теории интеллекта. Проблемы и перспективы [Текст]/ *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Рукопись деп. в ВИНИТИ 28.06.82, №3324 – 82. Деп. – 210 с. **2.** *Рассел, Б.* История западной философии [Текст]/ *Б. Рассел* – М.: ИЛ, 1959. – 932 с. **3.** *Шредингер, Э.* Что такое жизнь с точки зрения физики? [Текст]/ *Э. Шредингер* – М.: ГИИЛ, 1947. **4.** *Ленин, В.И.* Материализм и эмпириокритицизм [Текст]/ *В.И. Ленин* – М.: Госполитиздат, 1967.

Поступила в редколлегию 17.02.2011.

УДК 519.7

Проблеми моделювання суб'єктивних станів / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, Н.Є. Русакова, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 24-32.

У статті розглядається природа інтроспекції та коректується постанова одної із задач теорії інтелекту з метою приведення її рішення у відповідність з інтроспективними даними на прикладі вивчення механізму теорії кольору.

Бібліогр.: 4 найм.

UDC 519.7

Problems of design of the subjective states / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 24-32.

In the article nature of introspection is examined and raising of one of tasks of theory of intellect is corrected with the purpose of bringing its decision over in accordance with introspective information.

Ref.: 4 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДИКАТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрены проблемы построения математических моделей цветового зрения человека. Проанализированы результаты, полученные в области моделирования цветового зрения человека Ньютоном, Максвеллом, Шредингером и Грассманом. В качестве формального аппарата предложен метод компараторной идентификации и модели в виде линейных предикатов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Одно из главных препятствий, с которым сталкивается исследователь, стремящийся математически описать работу органов чувств, заключается в неразработанности необходимого математического аппарата. Оказывается, что математики не позаботились о конструировании таких форм, в которые можно было бы облечь наблюдаемые психофизические явления. Поначалу этот факт изумляет. Не верится, что среди огромного множества формальных структур, накопленных математикой за многие века ее существования, нет таких, которые подошли бы для решения интересующих нас задач. Однако если разобраться, то именно этого и следовало бы ожидать. Ведь математический аппарат, в конечном счете, всегда развивается в ответ на запросы практики, удовлетворяя потребности тех областей знания, которые в нем нуждаются. Так, желание решать задачи небесной механики вынудило Ньютона разработать дифференциальное и интегральное исчисления. Стремление постичь законы мышления привело Буля к необходимости создания аппарата алгебры логики. Подобные примеры можно было бы умножить.

Психофизика – весьма своеобразная область знания. Она изучает связи, существующие между объективными процессами, происходящими в физическом мире, и явлениями субъективной сферы – ощущениями, представляющими собой факты нашего сознания. С проблемой математического описания подобных связей науке прошлого почти не приходилось сталкиваться. Лишь после возникновения кибернетики и информатики задачи моделирования психофизических процессов стали актуальными, и к их решению всерьез обратилась научная мысль. Нет никаких оснований надеяться на то, что такая специфическая и не похожая на другие область знания, как психофизика, не потребует для своей математизации никаких дополнительных формальных средств и сможет обойтись уже имеющимися математическими разработками. Напротив, следует ожидать, что потребности в математических средствах, возникающие в процессе моделирования психофизических процессов, приведут в будущем к развитию новых обширных и глубоких областей математического знания. В этой статье предпринята попытка положить начало математическим разработкам такого рода. Источником, из которого черпались математические задачи, для нас служили запросы практики моделирования функции человеческого зрения.

Одна из классических задач психофизики зрения заключается в изучении связи между *световым излучением*, падающим на сетчатку глаза, и *цветом* ощущения, возникающим в сознании наблюдателя в ответ на этот зрительный стимул. Еще Ньютон установил, что качество цвета всецело определяется спектром соответствующего светового излучения. Он, кроме того, предложил изображать цвета в виде точек некоторой области в трехмерном пространстве. Ньютон также обнаружил некоторые закономерности восприятия при сложении излучений, которые наводили на мысль, что *координаты цвета* (то есть координаты точек, изображающих цвета) линейно зависят от спектров соответствующих световых излучений. Отталкиваясь от этих результатов, Максвелл [1] записал координаты u_1, u_2, u_3 цвета, соответствующего световому излучению со спектром $b(\lambda)$, в виде интегралов вида

$$u_i = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) K_i(\lambda) d\lambda, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (1)$$

Здесь $b(\lambda)$ – это зависимость плотности энергии b светового излучения от длины волны λ электромагнитных колебаний; $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$ – некоторые весовые функции, характеризующие чувствительность глаза к лучам с различной длиной волны; λ_1 и λ_2 – минимальная и максимальная длины волн световых излучений, видимых глазом. Максвелл первым предпринял попытку опытным путем определить конкретный вид функций $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$, получивших название *функций спектральной чувствительности зрения*. Впоследствии эти функции определялись многими авторами на базе более совершенной аппаратуры и улучшенной методики. В настоящее время значения функций спектральной чувствительности зрения определяют с весьма высокой точностью, указывая для них три, а иногда и более значащих цифр.

Наконец, Шредингер [2] поставил задачу построения аксиоматической теории цветового зрения. Отталкиваясь от законов цветового зрения, сформулированных Грассманом [3], он попытался чисто формальным путем вывести из них преобразования (1). Однако недостаточный уровень развития необходимого математического аппарата, а также недостаточно совершенная формулировка законов зрения не позволили ему сделать это достаточно корректно.

1. Изучение цветового зрения методом сравнения

Изложим некоторые известные результаты теории цветового зрения человека, необходимые для того, чтобы продемонстрировать читателю естественность и полезность решаемых задач. Эти результаты должны разъяснить мотивы, побудившие авторов взяться за разработку представленного здесь математического аппарата.

Основным инструментом *колориметрии* – науки об измерении цвета является *метод сравнения* цветов. Согласно этому методу наблюдателю предъявляют на двух небольших полях, имеющих общую границу, световые излучения, характеризующиеся соответственно *спектрами* $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. Наблюдатель воспринимает эти излучения в виде соприкасающихся цветных пятен. От него требуется дать ответ на вопрос: совпадают или не совпадают друг с другом цвета полей сравнения? Формирование ответа существенно облегчается тем, что в случае совпадения цветов граница между цветными пятнами исчезает. Таким образом, наблюдатель фактически принимает решение о совпадении или различии цветов с помощью очень тонкого индикатора – отсутствия или наличия видимой границы между полями сравнения. О высокой чувствительности метода сравнения свидетельствует такой факт. Если подать на поля сравнения пару идентичных излучений $(b(\lambda), b(\lambda))$, то наблюдатель зарегистрирует равенство цветов. Однако если предъявить пару излучений $(b(\lambda), 1{,}01b(\lambda))$, то есть на правом поле энергетический уровень излучения повысить всего лишь на 1% без изменения спектрального состава света, то наблюдатель с нормальным зрением отчетливо зафиксирует различие цветов. Установлено, что методом сравнения можно различить по цвету много миллионов световых излучений.

С первого взгляда может показаться, что цвета взаимно однозначно связаны с порождающими их световыми излучениями, и поэтому наблюдатель, регистрирующий равенство или неравенство цветов, тем самым обнаруживает совпадение или различие соответствующих световых излучений. Факты, однако, говорят, что это не так. Оказывается, существует множество совершенно различных по спектру и по мощности световых излучений (их называют *метамерными*), которые для глаза неотличимы по цвету. Отсюда следует, что различных цветов гораздо меньше, чем различных световых излучений. Орган зрения реагирует одним и тем же цветом на огромное число различных световых излучений. Таким образом, глаз, формируя цвет, тем самым группирует световые излучения в некоторые классы. Установлено, кроме того, что различные наблюдатели классифицируют световые излучения не совсем одинаково. Поэтому световые излучения, видимые одним наблюдателем как одноцветные, для другого наблюдателя будут, как правило, выглядеть не совсем одинаковыми по цвету.

Из этих фактов следует, что каждый человек представляет собой особый объект для колориметрического обследования. Более того, оказывается, что один и тот же наблюдатель в различные периоды своей жизни в колориметрических опытах может реагировать по-разному. Это означает, что параметры зрительной системы человека с течением времени изменяются, эволюционируют. Несмотря на эти обстоятельства и на то, что в колориметрических опытах приходится иметь дело с субъективными ощущениями наблюдателя и с его субъективно формируемым решением о равенстве или неравенстве цветов, эти опыты строго объективны и вполне могут быть отнесены к разряду чисто физических экспериментов. Исход колориметрических опытов совершенно не зависит от желания наблюдателя. Хотя наблюдатель может произвольно выдумать свой ответ или же ошибиться в выработке правильного ответа (например, при отвлечении внимания в процессе сравнения цветов), однако исследователь имеет возможность обнаружить такие ответы и отвергнуть их, подобно тому, как в процессе обработки результатов физического эксперимента удается выявить и исключить промахи экспериментатора.

Наблюдатель в колориметрическом опыте действует вполне машинообразно: повторное предъявление той же самой пары световых излучений приводит к тому же самому ответу (если, конечно, не растягивать проведение эксперимента на многие годы, когда сам наблюдатель станет иным). Правда, в особых случаях, а именно – когда цвета находятся на границе между равенством и неравенством, наблюдается элемент случайности в ответе. Но такой же элемент случайности появляется в любом физическом эксперименте в тех случаях, когда приходится работать на пределе возможностей измерительных приборов. В этих случаях точность исхода физических опытов обычно повышают за счет многократного повторения одних и тех же испытаний с последующей статистической обработкой результатов экспериментов. Такая же статистическая обработка ответов испытуемого возможна и в колориметрических опытах. Точность, достигаемая в колориметрических опытах, составляет 2 – 3 знака, а при глубокой статистической обработке может доходить до четырех. Далеко не каждый физический эксперимент можно выполнить с такой высокой точностью.

Из всего изложенного вывод таков: в колориметрических опытах мы имеем тот, по существу, поразительный случай, когда субъективные ощущения человека и его субъективные действия, производимые им при сравнении цветов, успешно исследуются вполне объективными, чисто физическими методами. Иными словами, колориметрические опыты демонстрируют нам принципиальную возможность объективного изучения субъективных состояний человека, дают конкретный прецедент такого изучения. Это заключение очень ответственно, поскольку из него можно извлечь ряд далеко идущих выводов. В самом деле, если это так, тогда нет непроходимой пропасти между объективным физическим миром и субъективным миром человека. Значит, понятия, выражаемые словами “объективный” и “субъективный”, логически не исключают друг друга, и второе поглощается первым. Это значит также, что субъективные состояния поддаются вполне объективному изучению чисто физическими методами.

В связи со столь кардинальными выводами тезис о возможности успешного объективного изучения некоторых субъективных состояний человека с помощью колориметрических опытов, на котором эти выводы основываются, должен быть подвергнут тщательнейшей проверке и придирчивому критическому рассмотрению. К выполнению этой задачи мы сейчас и приступим. Главное возражение состоит в следующем. В колориметрических опытах действительно изучается объективно регистрируемое поведение человека. В них наблюдатель выступает в роли некоего “черного ящика” с двумя входами и одним выходом. На входы “черного ящика” поступают световые излучения, характеризуемые своими спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. С математической точки зрения эти спектры представляют собой некоторые функции вещественного аргумента λ, заданного на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, с вещественными значениями $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. На выходе "черного ящика" формируется двоичный сигнал $y \in \{0, 1\}$. Его значение 1 будем интерпретировать как ответ наблюдателя "да", означающий равенство цветов на полях сравнения, а значение 0 – как ответ "нет", означающий неравенство цветов. Таким образом, наблюдатель своим поведением реализует некоторый предикат:

$$y = \Phi(b'(\lambda), b''(\lambda)), \tag{2}$$

и именно свойства этого предиката изучаются в колориметрических экспериментах. Как входные сигналы $b'(\lambda)$, $b''(\lambda)$, так и выходной сигнал y могут быть зарегистрированы физическими приборами и поэтому дают вполне объективную информацию для установления вида предиката Φ.

Однако во всем этом еще нет места для субъективных состояний наблюдателя; пока ни слова не сказано о цветах зрительных ощущений и об операции сравнения цветов, осуществляемой сознанием наблюдателя. Правда, основываясь на собственном субъективном опыте, мы можем утверждать, что: 1) когда наблюдатель формирует сигнал $y=1$, то при этом цвета его ощущений равны; 2) при этом наблюдатель каким-то усилием своего сознания сравнивает между собой цвета и приходит к заключению об их равенстве. Тем не менее, в справедливости этих двух утверждений мы не можем удостовериться посредством объективных наблюдений.

Как можно бороться с этим возражением? Оно утратило бы силу, если б нам удалось, исходя только из объективно наблюдаемых свойств предиката Φ, каким-то образом доказать, что преобразование сигналов Φ можно представить в виде

$$y = D(f(b'(\lambda)), f(b''(\lambda))). \tag{3}$$

Здесь сигналы

$$f(b'(\lambda)) = u', \; f(b''(\lambda)) = u'', \tag{4}$$

$$u = (u'_1, u'_2, u'_3), \; u'' = (u''_1, u''_2, u''_3) \tag{5}$$

– трехмерные векторы с вещественными компонентами u'_1, u'_2, u'_3 и u''_1, u''_2, u''_3, вычисляемыми по формулам

$$\begin{aligned}
u_1' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda; \quad u_1'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda; \\
u_2' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda; \quad u_2'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda; \\
u_3' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda; \quad u_3'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda.
\end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (5) математически описывают вид функций $u' = f(b'(\lambda))$ и $u'' = f(b''(\lambda))$. Буквой D обозначен *предикат равенства*, определяемый следующим образом:

$$D(u', u'') = \begin{cases} 1, \text{ если } u' = u'', \\ 0, \text{ если } u' \neq u''. \end{cases} \tag{7}$$

Только что описанное представление предиката Φ легко интерпретируется в психологических терминах. Сигналы u' и u'' можно понимать как *цвета* полей сравнения, субъективно переживаемые наблюдателем. Функцию f интерпретируем как *преобразование светового излучения в цвет* зрительного ощущения, производимое зрительной системой человека. Предикат D будем интерпретировать как *операцию сравнения цветов* полей сравнения, осуществляемую сознанием наблюдателя. Если бы удалось доказать, что предикат (2) может быть представлен в виде соотношений (3) – (7), то это дало бы нам право утверждать, что: 1) сигналы u' и u'' могут бытъ приняты в качестве математического описания цветов на полях сравнения; 2) функция f может быть принята в качестве математического описания преобразования светового излучения, действующего на сетчатку глаза, в цвет зрительного ощущения, возникающего в сознании наблюдателя. В результате была бы полностью решена задача логического обоснования объективными методами математической модели цветового зрения (1), предложенной Максвеллом.

Описанный подход, однако, тоже может быть подвергнут критике. Возражение состоит в том, что при этом подходе имеется в виду лишь доказательство *возможности* представления преобразования сигналов в зрительной системе в виде (3). Надо же доказывать *необходимость* такого представления. Согласно этой точке зрения следует доказывать, что зрительный анализатор *действительно* обладает анатомо-физиологическими структурами, вычисляющими в процессе зрения значения интегралов (1), и что цвет зрительных ощущений на *самом деле* есть тройка числовых кодов, материально представленных в виде некоторого физико-химического процесса. На это возражение можно ответить следующим образом. Спору нет, было бы очень заманчиво получить не только функциональное, но и структурное описание зрительного анализатора. Однако получение математических зависимостей, описывающих лишь способ функционирования зрительной системы, – это тоже немало. Даже в физике в большинстве случаев ограничиваются функциональным (феноменологическим) описанием процессов. Небесная механика, ядерная физика и многие другие важные разделы физики идут почти исключительно по этому пути. Если же мы хотим ограничиться функциональной стороной дела, тогда с неизбежностью придется довольствоваться лишь возможными математическими моделями изучаемых процессов. Все возможные различающиеся между собой по структуре тождественные формулы, описывающие одну и ту же функцию, придется при этом считать равноценными. Ни одной из этих формул нельзя отдать предпочтения при функциональном подходе, сколь бы сильно они ни отличались друг от друга по своей структуре.

2. Исследования Шредингера

Итак, для того чтобы продемонстрировать возможность успешного объективного изучения субъективных состояний человека, осталось сделать "совсем немного": доказать, что предикат (2) может быть записан в виде системы соотношений (3)÷(7). Первую попытку такого доказательства (и пока единственную) предпринял в 1920 году Шредингер в статье [2]. Насколько нам известно, эта статья вообще является первым исследованием такого рода во всей психофизике. Поэтому она заслуживает самого пристального изучения. Здесь кратко излагается ход идей Шредингера по обоснованию зависимостей (3) – (7).

В начале статьи автор пишет, что в ней разработан *проект* теоретического обоснования колориметрии. Отсюда явствует, что он не претендует в этой статье на исчерпывающее решение поставленной задачи и отдает себе отчет в ее сложности. Далее Шредингер пишет, что искусство измерения цвета он рассматривает преимущественно как составную часть экспериментальной физики, а не как составную часть физиологии ощущений. Вместе с тем, он подчеркивает принципиальное отличие измерений, осуществляемых органами чувств, от любых измерений, производимых при помощи физических приборов. Колориметрические измерения основаны на том, что мы в состоянии вынести суждение о том, одинаковы или нет два граничащих между собою цветных поля. В то время как результаты измерения одного и того же физического параметра не зависят от типа использованного прибора, результаты цветовосприятия существенно зависят от глаза наблюдателя. В последнем случае никак нельзя заменить глаз каким-либо инструментом, так как глаз другого наблюдателя по-иному воспринимает тот же самый световой стимул, и абсолютно излишними будут споры о том, чье восприятие лучше или правильнее. Два различных источника света, видимые одинаковыми, взятые сами по себе, не имеют ничего общего, кроме того, что они кажутся этому глазу одинаковыми; оценка света глазом является неоспоримой и никаким другим измерительным прибором не проверяется и не воспроизводится.

После всего этого можно было бы сказать, что область зрения принадлежит совсем не физике. Здесь исследуются не объективные свойства физического мира, а свойства субъективных ощущений. Шредингер, однако, возражает против такой постановки вопроса. Он говорит, что при исследовании цвета речь идет не об изучении свойств и закономерностей окружающего нас физического мира, а об изучении способа действия органа ощущения. Это сразу приводит к выводу, что цвет является не менее объективным предметом исследований, чем атомы, электромагнитные поля, источники света и т. д. Если все же кто-нибудь будет против этого возражать и настаивать на принципиальном отличии физических явлений от субъективных ощущений, то ему можно ответить следующим образом. Единственной связью человека с внешним миром являются его органы чувств. Вся объективная информация о физических процессах, прежде чем станет достоянием нашего разума, так или иначе проходит через ощущения и в этом смысле является субъективной. Следовательно, это возражение ведет к солипсистскому выводу, что все наши знания об окружающем мире субъективны.

Таким образом, не следует думать, что в то время как тела, которые нас окружают, обладают сами по себе определенными свойствами, цвета имеют значение только для нас. Трехмерное многообразие цвета, цветовое пространство обладает совершенно такой же реальностью, как и наше физическое трехмерное пространство. Конечно, способ, каким мы задаем в нем координаты, классифицируем и измеряем его элементы, является искусственно созданной математической конструкцией, но то же самое относится и к обычному физическому пространству.

После этого введения Шредингер приступает к характеристике света и цвета. Цвет появляется тогда, когда в глаз попадает свет. *Световое излучение* описывается при помощи спектра – функции $f(\lambda)$ длины волны λ, изменяющейся в пределах от 0,4 до 0,8 мкм. Множество спектров образует функциональное пространство, его мощность больше, чем мощность любого конечномерного пространства. В принципе, возможно, чтобы это же относилось и к множеству цветов, однако это не так: это множество всего лишь трехмерно. Световые спектры группируются по принципу неразличимости соответствующих цветов на полях сравнения в больше классы. Каждый класс равен по мощности функциональному пространству, а многообразие этих классов трехмерно. Шредингер предлагает понимать под выражением "цвет излучения" класс всевозможных излучений, выглядящих одинаковыми по цвету с излучением $f(\lambda)$.

Далее вводится операция *сложения* $f(\lambda)+g(\lambda)$ *световых излучений* $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$. Суммарное излучение получается при совмещении лучей в одном и том же месте. Утверждается, что с равным правом можно говорить и о *сложении цветов*, и что это следует из третьего закона Грассмана: “Одинаково выглядящие излучения дают при сложении одинаково выглядящие излучения”. Затем Шредингер вводит обозначения для цветов, знак = для обозначения равенства цветов. Вводится также операция *вычитания цветов*: если $A+X=B$, то полагаем что $X=B-A$. Указывается, что вычитание однозначно, однако оно определено не для всех пар цветов. *Умножение цвета* на натуральное число m определяется как многократное сложение $mA=A+A+A+......+A$ m раз. Обратной к этой операции будет операция умножения на дробь вида $1/m$. Для того чтобы найти цвет A/m, нужно разделить спектр $f_A(\lambda)$, соответствующий цвету A, на m. Спектр $f_A(\lambda)/m$ будет соответствовать цвету A/m. Отмечается, что однозначность последней операции не очевидна и требует доказательства. Суперпозиция этих двух операций приводит к операции умножения цвета на рациональное число. Далее производится ссылка на второй закон Грассмана: “Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета”. Здесь Шредингер предлагает свою редакцию этого закона: “Если $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)+\sigma\varphi(\lambda)$ являются двумя мало отличающимися друг от друга излучениями, а $\psi(\lambda)$ означает излучение, выглядящее одинаково с $\varphi(\lambda)$, то среди одинаково выглядящих излучений $\varphi+\sigma\varphi$ найдется минимум одно $\psi+\sigma\psi$, которое очень ненамного будет отличаться от ψ. Сославшись на нее, Шредингер приходит к понятию произведения μA произвольного вещественного числа μ на цвет A.

Но можно ли принять постулат об однозначности деления цвета на натуральное число, то есть утверждать, что из равенства $\mu A=\mu B$ следует равенство $A=B$? Шредингер полагает, что этого нельзя сделать без дополнительных ссылок на опыт и здесь же приводит постулат, принадлежащий Герингу: “Одинаково выглядящие изучения будут одинаковыми, если повышать или понижать интенсивность каждого из них в одинаковых размерах”. По поводу этого постулата замечается, что в нем, вероятно, содержится избыточная информация, так как частный случай этого постулата об умножении на натуральные числа был уже логически выведен из сложения цветов.

Переходя к обсуждению вопроса о *размерности цветового пространства*, Шредингер приводит формулировку первого закона Грассмана: “Для любого излучения можно подобрать одинаково выглядящую смесь белого излучения с некоторым чистым спектральным или же пурпурным излучением”. Под *чистым спектральным* понимается монохроматическое излучение, под *пурпурным* – смесь крайних в видимой части спектра монохроматических изучений. Он отмечает, что эта формулировка содержит больше информации, чем это нужно для обоснования размерности цветового пространства, и предлагает свою собственную формулировку постулата: “Существует линейно независимая тройка цветов. Любые четыре цвета всегда линейно зависимы”.

Далее указывается способ взаимно однозначного сопоставления каждому цвету трех вещественных чисел, называемых координатами цвета. Надо взять тройку A, B, C линейно независимых эталонных цветов и световое излучение со спектром $\Phi(\lambda)$, ни в одной точке не обращающимся в нуль. Из этого спектра вырезается небольшой участок на интервале $[\lambda, \lambda+\Delta\lambda]$ – так называемое "спектральное излучение", и цвет F_λ от этого излучения уравнивается линейной комбинацией эталонных цветов $F_\lambda = x_1 A + x_2 B + x_3 C$. Если "спектральное излучение" сдвигать вдоль оси длин волн, меняя значение величины λ, то коэффициенты x_1, x_2, x_3 при эталонных цветах будут изменяться, таким образом получаем три функции $x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda)$. В качестве координат цвета "спектрального излучения" единичной мощности принимаются числа

$$\frac{x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)}.$$

Координаты цвета произвольного излучения $f(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$\sum_1^n \frac{f x_1}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_2}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_3}{\Phi}.$$

Утверждается, что эти результаты можно с достаточной точностью заменить определенными интегралами вида

$$\int \frac{f(\lambda) x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda) x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda) x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda.$$

Интегрирование здесь ведется по всей видимой части спектра в диапазоне $\lambda \in [0{,}4 - 0{,}8$ мкм].

В статье Шредингера рассматривается также много других вопросов, однако они не отражены в нашем изложении, как не относящиеся к интересующей нас теме. Вместе с тем, мы постарались извлечь из нее все существенное, что связано с обоснованием соотношений (3) – (7).

3. Анализ и оценка результатов Шредингера

Соображения Шредингера, изложенные выше, имеют, на наш взгляд, огромное значение для науки. Здесь впервые провозглашается, что ощущения человека могут успешно исследоваться чисто объективными методами и описываться математическими зависимостями точно так же, как и физические процессы. Более того, на примере зрительных ощущений показывается, как конкретно должно вестись исследование психических состояний, чтобы оно, в конечном итоге, приводило к их достоверному математическому описанию. Тезис Шредингера о возможности объективного изучения субъективных состояний не противоречит философии диалектического материализма, который считает, что между физическим и психическим нет непроходимой пропасти. В.И. Ленин пишет: "...противоположность материи и сознания имеет абсолютное значение только в пределах очень ограниченной области: в данном случае исключительно в пределах основного гносеологического вопроса о том, что признать первичным, а что вторичным. За этими пределами относительность данного противоположения несомненна" [4]. "За этими пределами оперировать с противоположностью материи и духа, физического и психического, как с абсолютной противоположностью, было бы громадной ошибкой" [4].

Вместе с тем, как пишет сам Шредингер, его работа является лишь попыткой создания проекта теоретического обоснования колориметрии, она представляет собой не завершение, а только начало разработки проблемы. Ниже анализируются недостатки и пробелы в работе Шредингера. Это делается не с той целью, чтобы умалить его заслуги, которые, в действительности, очень велики, а затем, чтобы, отталкиваясь от достижений Шредингера, двигаться дальше в разработке поставленной им проблемы. Шредингер указывает, что множество спектров световых излучений образует функциональное пространство. Но какое именно? Этот вопрос остается без ответа. Между тем понятно, что ход дальнейших рассуждений должен существенно зависеть от выбора конкретного способа математического описания всей совокупности возможных зрительных стимулов, что световые спектры по признаку цвета группируются в классы. Ясно, что имеются в виду классы эквивалентности. Однако далеко не каждый бинарный предикат порождает классы эквивалентности. Так, множества равноцветных излучений в принципе могли бы и пересекаться – в этом нет ничего логически невозможного. Классы излучений, дающих один и тот же цвет на левом поле, могли бы и не совпадать с классами равноцветных излучений для правого поля. Чтобы этого не случилось, нужно потребовать, чтобы поведение наблюдателя подчинялось некоторым специальным свойствам. Однако об этих свойствах в работе Шредингера ничего не говорится. Вследствие этого существование классов излучений, которые можно было бы отождествить с цветами, остается недоказанным.

Шредингер без каких-либо оговорок пользуется операцией сложения излучения и операцией умножения излучения на вещественное число. При этом, очевидно, молчаливо предполагается, что пространство излучений является линейным. Однако об аксиомах линейного пространства, которые должны при этом выполняться в опыте, ничего не говорится. Далее вводятся операции сложения и вычитания цветов (то есть классов излучений). При этом указывается, что вычитание цветов определено не для всех пар цветов. Но это противоречит прежде сделанному предположению о том, что множество всех излучений, видимых глазом, есть функциональное пространство. На самом же деле Шредингер, очевидно, имеет в виду, что спектры не могут иметь отрицательных значений, следовательно, речь должна идти не обо всем функциональном пространстве, а только о какой-то его части, по-видимому, о положительном конусе, однако это не оговаривается, эта сторона дела никак не отражена в постулатах, которые должны выполняться в опыте.

Много неясного в понятии непрерывности множества цветов. Что значат слова "непрерывное изменение цвета", если под цветом понимается класс излучений? Как вывести из закона непрерывности в формулировке Грассмана или в формулировке Шредингера существование и единственность произведения цвета на вещественное число? Эти и многие другие вопросы, которые можно было бы здесь поставить, остаются без ответа. То же самое относится и к проблеме доказательства конечномерности пространства цветов. Выглядят весьма бездоказательными и рассуждения о введении тройки чисел для математической характеристики цвета. Как доказать, что эта тройка чисел взаимно однозначно связана с цветом?

Приведенного достаточно, чтобы убедиться в том, что работа Шредингера, действительно, дает лишь *проект* теоретического обоснования колориметрии. К сделанному надо добавить еще очень многое, чтобы этот проект превратился в законченную научную теорию цвета. Целью настоящей статьи является разработка идей, сформулированных Шредингером.

4. Определение линейного предиката

Пусть V – *выпуклое множество* в пространстве $L^2[0, 1]$. Это значит, что для любых двух точек x, $y\in V$ отрезок $[x, y]=\{Z/Z=(1-\gamma)x+\gamma y,\ 0\leq\gamma\leq 1\}$ является частью множества V. Отметим несколько частных случаев, которые, в основном, будут нас интересовать в приложениях. А именно, когда V – все пространство, V – окрестность некоторой точки, V – положительный конус пространства $L^2[0, 1]$ и, наконец, V – пересечение положительного конуса с некоторым телесным ограниченным множеством. Второй из этих случаев встречается, когда существуют экспериментальные возможности лишь для локального изучения предиката. Естественно, на основе такой информации могут быть сделаны доказательные выводы лишь для изученной окрестности. С математической точки зрения это означает, что рассматривается только ограничение предиката на эту окрестность, хотя физически предикат может быть определен и вне ее.

Положительным конусом в пространстве $L^2[0, 1]$ называется множество всех неотрицательных функций (более точно, всех классов эквивалентности по отношению равенства почти всюду, содержащих неотрицательные функции) этого пространства с линейной и топологической структурой, индуцированной на нем в пространство. Это множество *выпукло*: если $x(t)$ и $y(t)$ – неотрицательные функции, то их выпуклая комбинация $z(t)=(1-\gamma)x(t)+\gamma y(t)$ $(0\leq\gamma\leq 1)$ также является неотрицательной функцией. Необходимость изучения только неотрицательных функций возникает, например, в случаях, когда функции являются математическим описанием спектра. Наконец, четвертый случай на практике возникает, когда существенны оба приведенные выше соображения. Например, при изучении зрения человека ограничиваются излучениями с не очень большими энергиями, поскольку чрезмерно интенсивные излучения могут разрушить орган зрения. Это значит, что рассматриваются излучения со спектральными характеристиками, являющимися неотрицательными функциями $x(\lambda)$, удовлетворяющими условиям $\|x\|\leq c$, где c – некоторая положительная константа. Другими словами, в этом случае множество V является пересечением положительного конуса и некоторого шара с центром в нуле.

Договоримся о терминологии и обозначениях. *Линейным оператором* будем называть аддитивный, однородный и непрерывный оператор в $L^2[0, 1]$. Для любого линейного оператора A и множества V через $A(V)$ будем обозначать множество всех точек $y\in L^2[0, 1]$, для которых существуют точки $x\in V$ такие, что $y=Ax$. В частном случае, когда V совпадает со всем пространством, это множество называется *образом оператора* A и обозначается $\mathrm{Im}A$. Множество всех точек $x\in L^2[0, 1]$, для которых $Ax=0$, называется *ядром оператора* и обозначается через $\mathrm{Ker}A$. Через A^* будем обозначать оператор, сопряженный с оператором A, то есть такой оператор, для которого при всех x, $y\in L^2[0, 1]$ справедливо равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Если подпространства X и Y пространства $L^2[0, 1]$ обладают тем свойством, что для любого элемента $z\in L^2[0, 1]$ существуют единственные элементы $x\in X$ и $y\in Y$ такие, что $z=x+y$, то говорят, что пространство $L^2[0, 1]$ разложено в прямую сумму подпространств X и Y. Этот факт будем изображать равенством $L^2[0, 1]=X\dot{+}Y$. В частном случае, когда в прямом разложении подпространства X и Y взаимно ортогональны, говорят об *ортогональном разложении*. Будем писать в таком случае $L^2[0, 1]=X\oplus Y$. Оператор A называется *проектором*, если он линеен и *идемпотентен*, то есть $A^2=A$. Для любого проектора существует разложение в прямую сумму:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Ker}A, \qquad (8)$$

причем A является тождественным преобразованием на $\mathrm{Im}A$. Проектор проектирует параллельно своему ядру. В частном случае, когда проектор P является *самосопряженным оператором* (то есть $P^*=P$), он называется *ортопроектором*. В этом случае прямое разложение (8) является ортогональным:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}P\oplus\mathrm{Ker}P. \qquad (9)$$

Множество M называется *аффинным многообразием*, если $(1-\gamma)x+\gamma y\in M$ для всех $x, y\in M$ и всех чисел γ. Каждое аффинное многообразие M параллельно единственному линейному многообразию M_0 в том смысле, что $M=M_0+\alpha$ для некоторой точки $\alpha\in M$. Линейное многообразие M_0 называется *транслянтом аффинного многообразия M*. Для всякого множества V существует единственное минимальное по включению аффинное множество M, содержащее V. Оно именуется *аффинной оболочкой множества V* и обозначается aff$V$. Транслянт множества aff$V$ будем обозначать $T(V)$. Наконец, договоримся для всякого множества V обозначать через $L(V)$ его линейную оболочку.

Рассмотрим предикат Φ, определенный на декартовом квадрате $V\times V$, где V – некоторое множество в $L^2[0, 1]$. Другими словами, Φ – функция, которая ставит в соответствие любой паре $x, y\in V$ число нуль или один. Будем предполагать, что этот предикат удовлетворяет условиям:

а) для любого $x\in V$ имеет место равенство $\Phi(x, x)=1$,

б) для любых $x, y\in V$ равенство $\Phi(x, y)=1$ *влечет равенство* $\Phi(y, x)=1$,

в) для любых $x, y, z\in V$ равенства $\Phi(x, y)=1$ *и* $\Phi(y, z)=1$ *влекут равенство* $\Phi(x, z)=2$.

При этих условиях отношение между x и y, состоящее в выполнении равенства $\Phi(x, y)=1$, обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Такое отношение порождает на V разбиение на классы, а именно x и y принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=2$. Нас будут интересовать условия, при которых это разбиение на классы согласуется с линейной и топологической структурой пространства $L^2[0, 1]$.

Назовем предикат Φ *линейным*, если в $L^2[0, 1]$ существует такой ортопроектор P, что для всех $x, y\in V$

$$\Phi(x, y)=D(Px, Py), \qquad (10)$$

где D – *предикат равенства*: $D(u, v)=1$ тогда и только тогда, когда $u=v$.

Лемма 1. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате произвольного множества V, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы в $L^2[0, 1]$ существовал такой линейный оператор B с замкнутым образом, что*

$$\Phi(x, y)=D(Bx, By),\ \ x, y\in V. \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность*. Пусть линейный оператор B связан с предикатом Φ равенством (11). Для любого оператора с замкнутым образом существует разложение в ортогональную сумму:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}B^*\oplus\mathrm{Ker}B. \qquad (12)$$

Обозначим через P ортопроектор $L^2[0, 1]$ на подпространство ImB^*. Комбинация равенств (9) и (12) дает

$$\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}B^*, \qquad \mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}B. \qquad (13)$$

Покажем, что для так определенного ортопроектора P выполняется равенство (10).

Пусть $\Phi(x, y)=2$. Тогда в силу (11), $Bx=By$, или, что то же самое, $B(x, y)=0$. Значит, $x-y\in \mathrm{Ker}B$. Поэтому из (13) следует, что $x-y\in\mathrm{Ker}P$, то есть $Px=Py$. Обратно, если $Px=Py$, то $Bx=By$. Таким образом, $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $x,y\in V$ и $Px=Py$. Другими словами, справедливо (10).

Необходимость очевидна, поскольку в качестве B можно взять ортопроектор P.

Лемма 1 доказана.

Наша дальнейшая цель заключается в разработке конструкции, которая позволит каждому $x\in V$ ставить в соответствие единственный элемент $y(x)\in V$ такой, что $\Phi(x, y(x))=2$. В случае, когда V – все пространство, таким элементом мог бы быть Px. В остальных случаях это уже не так, так как точка Px может не принадлежать множеству V. Способ выбора элемента $y(x)$ зависит от характера множества V. Поэтому, начиная с этого места, мы будем некоторое время раздельно рассматривать различные случаи.

5. Предикаты на всем пространстве

Лемма 2. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы в $L^2[0, 1]$ существовал такой линейный оператор A с замкнутым образом, для которого равенство*

$$\Phi(x, Ay)=1 \qquad (14)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность*. Пусть оператор A с указанными свойствами существует. Покажем, что

$$\Phi(x, y)=D(Ax, Ay). \qquad (15)$$

Действительно, пусть $\Phi(x, y)=2$. Из условия леммы следует, что $\Phi(y, Ay)=2$. Из двух последних равенств и условия транзитивности *в* вытекает равенство $\Phi(x, Ay)=2$. Тогда по условию $Ax=Ay$. Пусть обратно $Ax=Ay$. Вместе с равенством $\Phi(x, Ax)=1$ это дает $\Phi(x, Ay)=2$. Но $\Phi(y, Ay)=2$. Применяя к двум последним равенствам условия *б* и *в*, получаем $\Phi(x, y)=2$. Равенство (15) доказано. Из этого равенства и леммы 1 следует, что предикат Φ – линейный. Положим $A=P$, где P – ортопроектор, связанный с

Φ равенством (10), и покажем, что равенство (14) выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Действительно, согласно формуле (10), равенство (14) при $A=P$ может быть переписано в виде $Px=P^2y$. Но P – проектор. Поэтому последнее равенство означает, что $Px=Py$.

Лемма 2 доказана.

Назовем любой линейный оператор A с замкнутым образом, для которого выполняются условия леммы 2, *присоединенным* к предикату Φ. Как видно из определения (10), каждому ортопроектору P можно поставить в соответствие единственный линейный предикат Φ. Верно и обратное – каждому линейному предикату Φ соответствует только один ортопроектор, удовлетворяющий равенству (10). Это следует из того, что если для двух ортопроекторов равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y\in L^2[0, 1]$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$ и, следовательно, $P_1=P_2$. Таким образом, существует однозначное соответствие между всеми линейными предикатами и всеми ортопроекторами, или, что то же самое, всеми линейными подпространствами.

С операторами, присоединенными к линейному предикату Φ, дело обстоит не так. Полная характеристика таких операторов дается следующими утверждениями.

Лемма 3. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату* Φ, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства*:

$$AP=A, \quad PA=P. \qquad (16)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для линейного оператора A выполняются равенства (16). Покажем, что образ оператора A замкнут и

$$\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P, \quad \mathrm{Im}A^*=\mathrm{Im}P, \quad A^2=A. \qquad (17)$$

Действительно, пусть $x\in \mathrm{Ker}A$, то есть $Ax=0$. Тогда из второго равенства (16) следует, что $Px=PAx=0$, то есть $x\in \mathrm{Ker}P$. Обратно, если $x\in \mathrm{Ker}P$, то $Px=0$ и $Ax=APx=0$, то есть $x\in \mathrm{Ker}A$. Первое равенство (17) доказано. Далее, $A^2=(AP)\times(AP)=A(PA)P=AP^2=AP=A$. Итак, третье равенство (17) выполняется. Из этого равенства вытекает замкнутость образа оператора A. Действительно, пусть $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathrm{Im}A$, $y_k\to y$ при $k\to\infty$. Поскольку A – ограниченный оператор, то тогда $Ay_k\to Ay$ при $k\to\infty$. Но каждая точка y_k представима в виде $y_k=Ax_k$. Поэтому $Ay_k=A^2x_k=Ax_k=y_k$. Таким образом, $y=Ay\in \mathrm{Im}A$. Поскольку $\mathrm{Im}A$ замкнут, то справедливо ортогональное разложение:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}A^*\oplus\mathrm{Ker}A \qquad (18)$$

Сравнивая это равенство с равенством (9) и учитывая, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, получаем второе равенство (17).

Равенство (14), учитывая (10), можно переписать в виде $Px=PAy$, или, используя (16), $Px=Py$. Последнее равенство означает, что $x-y\in \mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}A$, а значит, $Ax=Ay$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть линейный оператор A присоединен к линейному предикату Φ. Формула (10) позволяет переписать равенство (14) в виде $Px=PAy$. Таким образом, $Px=PAy$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Поэтому, в частности, $Px=PAy$ для всех $x\in L^2[0, 1]$. Второе равенство (16) доказано. Поскольку оператор А присоединен к предикату Φ, то справедливо (15). Сравнивая это равенство с (10), получаем $D(Ax, Ay)=D(Px, Py)$. Таким образом $A(x-y)=0$ тогда и только тогда, когда $P(x-y)=0$, то есть $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Разложим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в ортогональную сумму $x=x_1\oplus x_2$, где $x_1\in \mathrm{Im}P$, $x_2\in \mathrm{Ker}P$. Тогда $Ax=Ax_1$, так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. С другой стороны, $Px=Px_1$ и, следовательно, $APx=Ax_2$. Поэтому $Ax=APx$ для любого элемента $x\in L^2[0, 1]$, то есть выполняется первое равенство (16).

Лемма 3 доказана.

Представим для выразительности этот результат в матричном виде. Напомним, что если линейные пространства X_1 и X_2 представлены в виде прямых сумм $X_1=Y_1\dot{+}Z_1$, $X_2=Y_2\dot{+}Z_2$, то линейный оператор $A{:}X_1\to X_2$ порождает четыре линейных оператора $A_{11}{:}\ Y_1\to Y_2$, $A_{12}{:}Z_1\to Y_2$, $A_{21}{:}Y_1\to Z_2$, $A_{22}{:}Z_1\to Z_2$ таких, что $A(y_1\dot{+}Z_1)=(A_{11}y_1+A_{12}Z_1)\dot{+}(A_{21}y_1+A_{22}Z_1)$. Матрица, составленная из этих операторов, называется *матричным представлением оператора А*. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

– матричное представление оператора A, соответствующее прямому разложению (9).

Следствие 1. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединен к предикату* Φ, *необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление* (19) *имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

где I – тождественный оператор в пространстве $\mathrm{Im}P$, A_{21}: $\mathrm{Im}P\to\mathrm{Ker}P$ *– произвольный линейный оператор.*

Доказательство. Матричное представление оператора Р имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Отсюда и из (19) получаем

$$PA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; AP = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Предположим, что оператор A присоединен к линейному предикату Φ. Тогда имеют место равенства (16). Сравнивая равенство (21) с первым равенством (22), получаем, что $A_{11}=I$, $A_{12}=0$. Аналогично из сравнения (19) со вторым равенством (22), находим, что $A_{22}=0$. Таким образом, справедливо (20). Обратно, пусть справедливо (20), то есть $A_{11}=I$, $A_{12}=0$, $A_{22}=0$. Тогда из (22) вытекают равенства (16). Поэтому в силу леммы 3 оператор A является присоединенным к предикату Φ.

Следствие 1 доказано.

Приведем теперь другое описание множества всех операторов, присоединенных к линейному предикату Φ.

Следствие 2. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, P – соответствующий ортопроектор. Для того, чтобы линейный оператор A был присоединен к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором параллельно* $\mathrm{Ker}P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть линейный оператор A является присоединенным к предикату Φ. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, $A^2=A$, то есть A – проектор. Проектор проектирует параллельно своему ядру, но в нашем случае $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Следовательно, проектор A проектирует параллельно $\mathrm{Ker}P$. Обратно, пусть A – проектор параллельно $\mathrm{Ker}P$, то есть $A^2=A$, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Представим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в виде $x=x_1+x_2$, $x_1\in \mathrm{Im}P$, $x_2\in \mathrm{Ker}P$. Как видно из матричного представления (19), $x\in \mathrm{Ker}P$ тогда и только тогда, когда

$$A_{11}x_1+A_{12}x_2=0, \quad A_{21}x_1+A_{22}x_2=0.$$

Так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, последние равенства эквивалентны равенству $x_1=0$. Это значит, что $A_{12}=0$, $A_{22}=0$ и $\mathrm{Ker}(A_{11}\oplus A_{21})=\{0\}$. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Возводя последнее равенство в квадрат, получаем

$$A^2 = \begin{pmatrix} A^2{}_{11} & 0 \\ A_{21}A_{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Но по условию $A^2=A$, то есть $A_{11}^2=A_{11}$, $A_{21}A_{11}=A_{22}$. Из двух последних равенств следует, что $(A_{11}\oplus A_{21})A_{11}=A_{11}\oplus A_{22}$. Отсюда видно, что оператор $A_{11}\oplus A_{21}$ может быть невырожденным лишь если $\mathrm{Ker}A_{11}=\{0\}$. Поскольку $A_{11}^2=A_{11}$ то имеет место прямое разложение $\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}A_{11}\dot{+}\mathrm{Ker}A_{12}$. Следовательно, $\mathrm{Im}A_{11}=\mathrm{Im}P$. Тогда $A_{11}=2$. Действительно, пусть $y\in \mathrm{Im}P$, и следовательно, $y\in \mathrm{Im}A_{12}$. То есть существует $x\in \mathrm{Im}P$ такой, что $y=A_{11}x$. Имеем $A_{11}y=A_{11}^2x=A_{11}x=y$. Итак, равенство $A_{11}=1$ справедливо. Тогда из (23) и следствия 1 вытекает, что оператор A присоединен к предикату Φ.

Следствие 2 доказано.

Из формулы (15) видно, что оператор, присоединенный к линейному предикату, удовлетворяет условиям леммы 1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Связь между двумя свойствами оператора – удовлетворять условию леммы 1 и быть присоединенным – описывается следующим утверждением.

Следствие 3. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором и для него выполнялось равенство* (15).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть оператор A присоединен к предикату Φ. При доказательстве леммы 2 было показано, что тогда справедливо (15). Тот факт, что A является проектором, вытекает из следствия 2. Обратно, пусть A – проектор и имеет место равенство (15). Сравнивая (15) и определение (10), получаем, что для x, $y\in L^2[0, 1]$ $Px=Py$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Следовательно, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Поэтому из следствия 2 вытекает, что оператор A присоединен к предикату Φ.

Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал линейный предикат, к которому оператор A является присоединенным, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был проектором.*

6. Предикаты на конусе

Подмножество K пространства $L^2[0, 1]$ называется *конусом*, если $\lambda x\in K$ для любых $x\in K$, $\lambda\geq 0$ и $x_1+x_2\in K$ для любых x_1, $x_2\in K$. Линейная оболочка $L(K)$ конуса K совпадает с множеством всех точек x пространства, представимых в виде $x=x_1-x_2$, x_1, $x_2\in K$. Нас будут интересовать конусы с замкнутой линейной оболочкой. Подклассом таких конусов являются воспроизводящие конусы. Конус K называется *воспроизводящим*, если $L(K)$ совпадает со всем пространством. Отметим важный частный случай – положительный конус в $L^2[0, 1]$. Он является воспроизводящим, поскольку любая функция $x(t)$, суммируемая с квадратом на $[0, 1]$, может быть представлена в виде $x(t)=x_+(t)-x_-(t)$, где

$$\begin{aligned} E_+(t) &= \begin{cases} x(t), & \text{если } E(t)\geq 0, \\ 0, & \text{если } E(t)<0, \end{cases} \\ E_-(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } E(t)\geq 0, \\ x(t), & \text{если } E(t)<0. \end{cases} \end{aligned} \qquad (24)$$

Очевидно, функции x_+ и x_- являются неотрицательными и суммируемыми с квадратом.

Если конус K является воспроизводящим, то всякому линейному предикату Φ соответствует лишь один ортопроектор P, связанный с ним равенством (10). Это видно из того, что если для двух ортопроекторов P_1 и P_2 равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y\in K$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$. Действительно, пусть $x\in \mathrm{Ker}P_2$. Так как K – воспроизводящий конус, то существуют $x_1, x_2\in K$: $x=x_1-x_2$. Тогда $P_1(x)=P_1(x_1)-P_1(x_2)=0$, $P_2(x_1)=P_1(x_1)$, $P_2(x_2)=P_1(x_2)$. Значит, $P_2(x_1)-P_2(x_2)=0$ и $\mathrm{Ker}P_1\subset\mathrm{Ker}P_2$. Очевидно, верно и обратное включение. Следовательно, $P_1=P_2$. Если K – не воспроизводящий конус, но $L(K)$ – замкнутое множество, то ортопроектор P не определен однозначно. Поскольку принципиально этот случай не отличается от случая воспроизводящего конуса (вместо всего пространства $L^2[0, 1]$ можно с самого начала рассматривать подпространство $L(K)$), мы, чтобы не усложнять формулировки, ограничимся в настоящем параграфе случаем воспроизводящего конуса.

Лемма 2 не может быть перенесена на случай конуса дословно, поскольку элементы вида Ax ($x\in K$) вообще говоря, не принадлежат конусу K и поэтому выражение $\Phi(x, Ax)$ может не иметь смысла. Аналогом леммы 2 для случая конуса может служить следующая.

Лемма 4. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный оператор A с замкнутым образом и отображения (вообще говоря, линейные) f_i: $L^2[0, 1]\to K$ ($i=1, 2$), удовлетворяющие следующим условиям*:

$$(f_2-f_1)=I, \tag{25}$$

где I – тождественное отображение;

для $x, y\in K$ равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$;

для $x, y\in K$ равенство $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=2$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть оператор A и отображения f_1, f_2 с указанными свойствами существуют. Рассмотрим произвольные x, $y\in K$, для которых $\Phi(x, y)=2$. Тогда $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=2$. Вместе с равенством $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ это дает $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=2$. Но тогда в силу свойства оператора A и отображений f_1, f_2 должно быть $Ax=Ay$. Пусть обратно, $x, y\in K$ и $Ax=Ay$. Имеем $\Phi(y+f_1(Ay), f_2(Ay))=2$. Комбинируя это равенство с равенством $Ax=Ay$, получаем $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=2$. Отсюда и из равенства $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ находим, что $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=2$. Следовательно, $\Phi(x, y)=2$.

Итак, для любых x, $y\in K$ равенство $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Это означает, что справедливо равенство $\Phi(x, y)=D(Ax, Ay)$, $x, y\in K$. Тогда в силу леммы 1 предикат Φ является линейным.

Необходимость. Поскольку K – воспроизводящий конус, любой элемент $z\in L^2[0, 1]$ может быть представлен в виде $z=z_2-z_1$, где z_1, $z_2\in K$. Такое представление, вообще говоря, не является единственным. Воспользуемся аксиомой выбора и выберем произвольным образом одно из таких представлений для каждого z. Тогда $z_2=f_2(z)$, $z_1=f_1(z)$, где f_1, f_2 – некоторое отображение $L^2[0, 1]\to K$. Очевидно, $f_2-f_1=I$, где I – тождественное отображение. Покажем, что второе и третье условия леммы также выполняются, если положить $A=P$, где P – ортопроектор, соответствующий Φ. Равенство $\Phi(x+f_1(Py), f_2(Py))=1$ в силу формулы (10) означает, что $P(x+f_1(Py))=Pf_2(Py)$, то есть $Px=P(f_2-f_1)(Py)$. Формулы (17) и равенство $P^2=P$ позволяют заключить, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Выполнимость третьего условия леммы очевидна.

Лемма 4 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства леммы, отображения f_1 и f_2 являются совершенно произвольными, лишь бы для них выполнялось равенство $f_2-f_1=I$. Другими словами, если какие-либо отображения f_1 и f_2 удовлетворяют условиям леммы 4, то любые другие отображения, обладающие данным свойством, также удовлетворяют этим условиям. Кроме того, следует отметить, что отображения f_1 и f_2 могут быть определены не на всем пространстве $L^2[0, 1]$, а лишь на $\mathrm{Im}A$, поскольку они применяются к элементам вида Ax.

Будем называть линейный оператор A в $L^2[0, 1]$ *присоединенным к линейному предикату* Φ, определенному на $K\times K$, если для него существуют такие отображения f_1 и f_2, что выполняются условия леммы 4.

Лемма 5. *Пусть Φ – линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса K; P – отвечающий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$AP=A, \quad PA=P. \tag{26}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для линейного оператора A выполняются равенства (26). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, $\mathrm{Im}A$ замкнут. Обозначим через f_1 и f_2 произвольные отображения $L^2[0, 1]\to K$, для которых $f_2-f_1=I$. Как было показано при доказательстве леммы 4, в сторону необходимости, эти отображения вместе с ортопроектором P удовлетворяют условиям леммы 4. Покажем, что они удовлетворяют тем же условиям и совместно с оператором A.

В силу формулы (10) равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $P(x+f_1(Ay))=PAy$, то есть $Px=P(f_2-f_1)Ay$, или с учетом (25) и (26), $Px=Py$. Таким образом, второе условие леммы 4 выполняется. Выполнение третьего условия очевидно.

Необходимость. Пусть оператор A является присоединенным к предикату Ф. Второе из условий леммы 4 позволяет заключить, что для любых x, $y\in K$ равенство $Ax=Ay$ выполняется тогда и только тогда, когда $Px=P(f_2-f_1)Ay$ или, в силу (25), $Px=PAy$. В частности, отсюда следует, что $Px=PAx$ для всех $x\in K$. Поскольку K – воспроизводящий конус, отсюда вытекает второе из равенств (26). При доказательстве леммы 4 было показано, что для оператора A, присоединенного к предикату Ф, имеет место равенство (26). Вместе с (10) это дает: для любых x, $y\in K$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Поскольку K – воспроизводящий конус, отсюда следует, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Окончание доказательства леммы совпадает с окончанием доказательства леммы 3.

Лемма 5 доказана.

Линейный оператор, присоединенный к предикату Ф, был определен различным образом в случаях всего пространства и конуса. Тем не менее, формулировки лемм 3 и 5 почти совпадают. Почти совпадают соответственно и формулировки следствий. Поскольку их доказательства различаются лишь в деталях, приведем здесь для случая конуса лишь формулировки.

Следствие 5. *Пусть* Ф *– линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K; P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату* Ф, *необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление, соответствующее ортогональному разложению* $L^2[0, 1]=\mathrm{Im}P\oplus\mathrm{Ker}P$, *имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где I – тождественный оператор в пространстве $\mathrm{Im}P$, A_{21}: $\mathrm{Im}P\to\mathrm{Ker}P$ *– произвольный линейный оператор.*

Следствие 6. *Пусть* Ф *– линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K, P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату* Ф, *необходимо и достаточно, чтобы A был проектором параллельно* $\mathrm{Ker}P$.

Следствие 7. *Пусть* Ф *– линейно порожденный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату* Ф, *необходимо и достаточно, чтобы A был проектором и выполнялось равенство* (25).

Следствие 8. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса K, к которому оператор A присоединен, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был проектором.*

7. Предикаты на выпуклом множестве

Аффинная оболочка любого множества V состоит из всех векторов x вида

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\ , \tag{27}$$

где m – любое натуральное число, $x_i\in V$, а λ_i – произвольные числа, сумма которых равна 2. В случае, когда V – выпуклое множество, это утверждение можно уточнить. А именно,

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\beta_1x_1+\beta_2x_2,\ x_i\in \mathrm{V},\ \beta_1+\beta_2=1\}. \tag{28}$$

Проверим это равенство. Пусть $x\in\mathrm{aff}V$. Тогда он представим в виде (27). Пусть I – множество всех номеров i в (27), для которых $\lambda_i<0$. Если $I=\varnothing$, то $x\in V$ и для него выполняется (28). Пусть $I\neq\varnothing$. Положим

$$\beta_1=\sum_{i\in I}\lambda_i\ ;\quad \beta_2=+\sum_{i\bar\in I}\lambda_i\ ;$$

$$\mu_i=\beta_1^{-1}\lambda_i\ ,\ i\in I;\quad \mu_i=+\beta_2^{-1}\lambda_i\ ,\ i\bar\in I\ .$$

Тогда из (27) вытекают представления (28), где

$$x_1=\sum_{i\in I}\mu_i x_i\ ,\quad x_2=\sum_{i\bar\in I}\mu_i x_i\ .$$

Поскольку V – выпуклое множество и $\mu_{i\geq}0,\ \sum_{i\in I}\mu_i=1,\ \sum_{i\bar\in I}\mu_i$, то $x_1, x_2\in V$. Кроме того, очевидно, $\beta_1+\beta_2=2$. Равенство (28) доказано.

В дальнейшем нам понадобится еще одно равенство, справедливое для выпуклых множеств:

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2),\ \beta>0,\ x_1\in V,\ x_2\in V\}. \tag{29}$$

Здесь α – произвольная фиксированная точка множества V. Проверим это равенство. Обозначим множество, фигурирующее в правой части (29), через Z. Это множество является аффинным многообразием. Действительно, пусть z, $z'\in Z$. Тогда $z=\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2)$, $z'=\alpha+\beta'(x_1'\text{-}x_2')$; $\beta>0$, $\beta'>0$; x_1, x_2, x_1', $x_2'\in V$. Зададим произвольное число α и положим $\xi=|1\text{-}\lambda|\beta+|\lambda|\beta'$, $\gamma=|\lambda|\beta'\xi^{2.}$ Тогда $\xi>0$, $\gamma\in[0, 1]$ и справедливо равенство:

$$(1\text{-}\lambda)z+\lambda z'=\alpha+\xi(y_1\text{-}y_2), \tag{30}$$

где $y_1=(1-\gamma)x_1+\gamma x_1'$, $y_2=(1-\gamma)x_2+\gamma x_2'$, в случае $0\leq\lambda\leq1$; $y_1=(1-\gamma)x_2+\gamma x_1'$, $y_2=(1-\gamma)x_1+\gamma x_2'$, в случае $\lambda>1$; $y_1=(1-\gamma)x_1+\gamma x_2'$, $y_2=(1-\gamma)x_2+\gamma x_1'$, в случае $\lambda<0$. В любом случае y_1, $y_2\in V$ и из (30) вытекает, что $(1-\lambda)z+\lambda z'\in Z'$. Итак, Z – аффинное многообразие. Любая точка $v\in V$ представима в виде $v=\alpha+(v-\alpha)$. Поэтому $Z\supset V$. По определению $\mathrm{aff}V$ является минимальным аффинным многообразием, содержащим V. Из доказанного выше тогда вытекает, что $\mathrm{aff}V\subset Z$. Проверим справедливость обратного включения. Точки α, x_1, $x_2\in V\subset\mathrm{aff}V$. Поэтому $(1+\beta)x_1-\beta x_2\in\mathrm{aff}V$ и $(1+\beta)\alpha\text{-}\beta x_2\in\mathrm{aff}V$. Легко видеть, что

$$\alpha+\beta(E_1-E_2)=\frac{\beta}{1+\beta}((1+\beta)x_1-\beta x_2)+$$
$$+\frac{1}{1+\beta}((1+\beta)\alpha-\beta x_2).$$

Следовательно, и $\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2)\in \mathrm{aff}V$ и $Z\subset\mathrm{aff}$. Формула (29) доказана.

Лемма 6. *Пусть V – выпуклое множество и* $\mathrm{aff}V=L^2[0, 1]$. *Для того чтобы предикат* Φ, *определенный на квадрате множества V, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейный оператор A с замкнутым образом и отображения*

$$f_i\colon L^2[0, 1]\to V (i=1, 2),\quad \gamma_0\colon L^2[0, 1]\to[0, 1],$$

удовлетворяющие условиям

$$\gamma_0(x)x+(1-\gamma_0(x))f_1(x)=f_2(x); \qquad (31)$$

для $x, y\in V$ равенство

$$\Phi(\gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1 \qquad (32)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$;
для $x, y\in V$ равенство

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax),$$
$$\gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax))=1 \qquad (33)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=$ $=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность.* Пусть оператор A и отображения γ_0, f_1, f_2 удовлетворяют условиям леммы. Рассмотрим какую-либо пару точек $x, y\in V$, для которых $\Phi(x, y)=2$. Тогда для них выполняется (33). Комбинируя это равенство с равенством

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1, \qquad (34)$$

получим (32). Но тогда $Ax=Ay$. Пусть обратно $Ax=Ay$. Тогда выполняется (32). Вместе с равенством

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1$$

это дает (33). Значит, $\Phi(x, y)=2$. Итак, имеет место равенство

$$\Phi(x, y)=D(Ax, Ay);\ x, y\in V. \qquad (35)$$

Поэтому из леммы 1 следует, что предикат Φ является линейным.

Необходимость. Пусть оператор Φ является линейным. По условию $\mathrm{aff}V=L^2[0, 1]$. Поэтому любой вектор $x\in L^2[0, 1]$ представим (не единственным образом) в виде (28). Выберем для любого X произвольным образом числа β_i и точки x_i, для которых справедливо это равенство. В случае $\beta_1<0$, $\beta_2>0$ положим $\gamma_0=\beta_2^{-1}$, $f_1(x)=x_1$, $f(x_2)=x_2$. Случай $\beta_1>0$, $\beta_2<0$ рассматривается аналогично. Другие случаи исключены равенством $\beta_1+\beta_2=2$. Легко проверить, что в любом случае $f_1(x), f_2(x)\in V$ и справедливо (31). Проверим выполнимость второго и третьего условий леммы 6, полагая $A=P$, где P – ортопроектор, соответствующий предикату Φ. В соответствии с (10) равенство (32) может быть переписано в виде

$$\gamma_0(Px)Py+(1-\gamma_0(Px))Pf_1(Px)=Pf_2(Px)).$$

Вместе с равенством (31) это дает $\gamma_0(Px)Py=$ $=\gamma_0(Px)Px$, то есть $Px=Py$. Тем самым проверено второе условие. Выполнимость третьего очевидна.

Лемма 6 доказана.

Будем называть оператор A *присоединенным* к линейному предикату Φ на $V\times V$, если он вместе с некоторыми отображениями γ_0, f_1 и f_2 удовлетворяет условиям леммы 6.

Лемма 7. *Пусть Φ – линейный предикат на квадрате выпуклого множества V с* $\mathrm{aff}V=L_2[0, 1]$, *а P – соответствующий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$AP=A,\quad PA=P. \qquad (36)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность.* Пусть оператор A связан с ортопроектором P, соответствующим предикату Φ, равенствами (36). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, образ оператора A замкнут.

Для оператора P, как было показано при доказательстве леммы 6, существуют отображения γ_0, f_1 и f_2, которые вместе с P удовлетворяют условиям леммы 6. Покажем, что они удовлетворяют условиям этой леммы и вместе с оператором A. Первое и третье условия очевидны. Проверим второе. Формула (10) позволяет переписать равенство (32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax),$$

или, учитывая (31) и (36), $\gamma_0(Ax)Py=\gamma_0(Ax)Px$, то есть $Py=Px$. Последнее равенство эквивалентно равенству $Ay=Ax$, поскольку $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$.

Необходимость. Пусть линейный оператор A присоединен к предикату Φ. Тогда в соответствии с леммой 6 предикат является линейным. Формула (10) позволяет переписать равенство (32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax),$$

или, учитывая (31), $Py=PAx$. Таким образом, для всех $x, y\in V$ последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Отсюда, в частности, вытекает, что $Px=PAx$, $x\in V$. Формула (28) позволяет распространить это равенство на множество $\mathrm{aff}V$, которое по условию совпадает со всем пространством. Таким образом, второе равенство (36) выполняется.

Как было показано при доказательстве леммы 6, для оператора A имеет место равенство (35). Вместе с равенством (10) это дает: для любых $x, y\in V$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Покажем, что эта эквивалентность сохраняется для любых точек пространства. Пусть $x, y \in L^2[0, 1]$. Тогда по условию леммы $x, y \in \operatorname{aff} V$. Воспользуемся равенством (29): $x=\alpha+\beta(x_1-x_2)$, $y=\alpha+\gamma(y_1-y_2)$; $\alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$; $\beta, \gamma > 0$. Тогда равенство $Ax=Ay$ означает, что $\beta(Ax_1-Ax_2)=\gamma(Ay_1-Ay_2)$, то есть $Au=Av$, где

$$u=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_1+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_2, \qquad v=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_2+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_1.$$

Аналогично, равенство $Px=Py$ означает, что $Pu=Pv$. Но $u, v \in V$. Поэтому равенства $Au=Av$ и $Pu=Pv$ эквивалентны. Значит, и равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны.

Итак, $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker} P$ и $Pa=P$. Как было показано при доказательстве леммы 3, отсюда вытекает равенство $AP=A$.

Лемма 7 доказана.

Замечание. Выбор отображений f_1, f_2 и γ_0 в представлении линейного предиката через присоединенный оператор не существенен. Если какие-либо отображения f_1, f_2 и γ_0 удовлетворяют второму и третьему условиям леммы 6, то любые другие отображения, для которых выполняется (31), также удовлетворяет этим условиям. Это было видно при доказательстве лемм 6 и 7. Кроме того, отображения f_1, f_2 и γ_0 могут рассматриваться не на всем пространстве, а лишь на $\operatorname{Im} A$, так как и во всех формулировках, и во всех доказательствах они применяются, по существу, лишь к элементам вида Ax.

В случае выпуклого множества справедливы аналоги следствий 1–4. Приведем их формулировки.

Следствие 9. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате выпуклого множества V с* $\operatorname{aff} V=L^2[0, 1]$, *$P$ – соответствующий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий (тем самым эти условия эквивалентны).*

Матричное представление оператора A, соответствующее прямому разложению $L^2[0, 1]=\operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$, имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где I – тождественный оператор в пространстве $\operatorname{Im} P$, A_{21}: $\operatorname{Im} P \to \operatorname{Ker} P$ – произвольный линейный оператор.

Оператор A является проектором параллельно $\operatorname{Ker} P$.

Оператор A является проектором и для него справедливо равенство (35).

Следствие 10. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал линейный предикат на квадрате выпуклого множества V с* $\operatorname{aff} V=L^2[0, 1]$, *к которому оператор A присоединен, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором.*

8. Координатные формулировки

В приложениях особенно важен случай, когда оператор P конечномерен, то есть его образ имеет конечную размерность. Будем называть линейный предикат *n-мерным*, если ранг (*рангом* линейного оператора B называется размерность его образа; будем обозначать ранг оператора B через $\operatorname{rg} B$) соответствующего ему ортопроектора P равен n. Заметим, что это определение корректно, если аффинная оболочка выпуклого множества V, на квадрате которого определен предикат Φ, совпадает со всем пространством. В противном случае ортопроектор P не определен равенством (10) однозначно. Из первого равенства (13) видно, что для любого линейного оператора B, связанного с предикатом Φ равенством (11), $\operatorname{rg} B=\operatorname{rg} P$. Таким образом, если предикат Φ является n-мерным, то для любого такого оператора B будет $\operatorname{rg} B=n$. В частности, так будет для любого оператора A, присоединенного к предикату Φ. В этом параграфе, используя предыдущие результаты, мы разовьем координатную теорию линейных предикатов.

Лемма 8. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате выпуклого множества V с $\operatorname{aff} V=L_2[0,1]$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовала линейно-независимая система линейных функционалов* (в силу теоремы Рисса в гильбертовом пространстве существует канонический изоморфизм между векторами и линейными функционалами. Мы, однако, не всегда будем отождествлять векторы и функционалы в формулировках результатов, имея в виду удобство приложений) $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *такая, что для любых $x, y \in V$ равенство*

$$\Phi(x,\ y)=1 \tag{37}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(x)=\alpha_i(y), \quad i=1,2,\dots,n. \tag{38}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая система линейных функционалов, для которой равенства (37) и (38) эквивалентны. Выберем любую линейно-независимую систему векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и рассмотрим оператор B, определенный равенством

$$Bx=\sum_{1}^{n}\alpha_i(x)e_i. \tag{39}$$

Тогда равенства (38) означают, что $Bx=By$. Таким образом, для любых $x, y \in V$ равенства $\Phi(x,\ y)=1$ и $Bx=By$ выполняются или не выполняются одновременно. Другими словами, имеет место равенство (11). Согласно лемме 1, предикат Φ является линейным. Из линейной независимости систем $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{e_i\}_{i=1}^n$ следует, что $\operatorname{rg} B=n$. Но тогда, как было замечено выше, и $\operatorname{rg} P = n$. Значит, предикат Ф является n-мерным. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть Ф — n-мерный линейный предикат. Выберем любой линейный оператор B, связанный с предикатом Ф равенством (11). Тогда $\operatorname{rg} B = n$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — любой базис в подпространстве $\operatorname{Im} B$. Тогда для оператора B найдется такая линейно-независимая система линейных функционалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\alpha_i(x) = (Bx, e_i)$, что при всех $x \in L^2[0,1]$ справедливо равенство (39). 0чевидно, для любых $x, y \in L^2[0,1]$ $Bx = By$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 1, 2, ..., n$. Комбинируя этот факт с формулой (4), получаем, что равенства (37) и (38) эквивалентны.

Лемма 8 доказана.

Если Ф — линейный предикат, P — соответствующий ортопроектор, то оператор B удовлетворяет равенству (11) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} B^* = \operatorname{Im} P$. Нас будет интересовать координатная формулировка этого утверждения. Если оператор B представлен в виде (39), то для оператора B^* имеет место равенство

$$B^* y = \sum_{i=1}^{n} (e_i, y)\, \alpha_i. \tag{40}$$

Это значит, что

$$\operatorname{Im} B^* = L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}. \tag{41}$$

Следствие 11. *Для того чтобы две линейно-независимые системы функционалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{u_i\}_{i=1}^n$ определяли в смысле леммы 8 на квадрате выпуклого множества V с $\operatorname{aff} V = L^2[0, 1]$ один и тот же n-мерный линейный предикат, необходимо и достаточно, чтобы*

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = L\{u_1, u_2, ..., u_n\}. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть система $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ определяет в смысле леммы 8 предикат Ф, а система $\{u_i\}_{i=1}^n$ — предикат A. Обозначим через P и Q ортопроекторы, соответствующие предикатам Ф и T соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} P &= L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}, \\ \operatorname{Im} Q &= L\{u_1, u_2, ..., u_n\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Поэтому (43) означает, что $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$. Поскольку P и Q — ортопроекторы, последнее равенство эквивалентно $P = Q$. Но в случае $\operatorname{aff} V = L^2[0, 1]$ равенство $P = Q$ выполняется тогда и только тогда, когда Ф$=T$.

Следствие 11 доказано.

Для получения координатных аналогов результатов из параграфов 5 — 7 мы, как и ранее, раздельно рассмотрим различные случаи множеств V.

Лемма 9. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы линейно-независимых векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ и линейно-независимых функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ такие, что для любого $x \in L^2[0,1]$*

$$\Phi(x, \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = 1 \tag{44}$$

тогда и только тогда, когда

$$\xi_k = \alpha_k(x), \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{45}$$

Достаточность. Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существуют. Рассмотрим оператор A, определенный равенством

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k. \tag{46}$$

Пусть векторы x и y таковы, что $\Phi(x, Ay) = 1$, то есть

$$\Phi(x,\ \alpha_1(y)e_1 + ... + \alpha_n(y)e_n) = 1. \tag{47}$$

Тогда по условию леммы $\alpha_k(y) = \alpha_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$, то есть $Ax = Ay$. Пусть обратно для векторов $x, y \in L^2[1, 2]$ имеет место равенство $Ax = Ay$. Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^n$ — линейно-независимые, то тогда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$. Поэтому из условия леммы вытекает равенство (40) или, что то же самое, равенство $\Phi(x, Ay) = 1$. Итак, $\Phi(x, Ay) = 1$ тогда и только тогда, когда $Ax = Ay$. Согласно лемме 8, отсюда следует, что предикат Ф — линейный. То, что этот предикат является n-мерным, следует из тех же соображений, что и в лемме 8. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть Ф — n-мерный линейный предикат. Согласно лемме 8 существует такой линейный оператор A, что равенство $\Phi(x, Ay) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax = Ay$. Как было отмечено в начале настоящего параграфа, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} P$. По условию $\operatorname{rg} P = n$. Значит, и $\operatorname{rg} A = n$. Тогда существуют такие линейно-независимые системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ и функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, что имеет место равенство (46). Легко видеть, что (47) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$, $k = 1, 2, ..., n$. Но это значит, что равенства (44) и (31) эквивалентны.

Лемма 9 доказана.

Будем говорить, что пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *присоединена* к n-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, если она удовлетворяет условиям леммы 8.

Следствие 12. *Для того чтобы пара линейно-независимых векторов и функционалов $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к n-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы равенство (37) было эквивалентно равенству (38) и*

$$\alpha_i(e_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, ..., n, \tag{48}$$

где δ_{ik} *— символ Кронекера:* δ_{ik} *=1 тогда и только тогда, когда* $i = k$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ таковы, что равенства (37) и (38) для них эквивалентны и выполняется (48). Определим оператор A равенством (46). Как и при доказательстве леммы 8, можно проверить, что выполняется равенство $\Phi(x,y) = D(Ax, Ay)$. Далее, используя (48), получаем

$$\alpha_j(Ax) = \left(\alpha_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) e_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_j(e_k)\alpha_k(x) = \alpha_j(x).$$

Поэтому

$$A^2 x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(Ax) e_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) e_j = Ax.$$

Таким образом, A — проектор. Эквивалентность равенств (37) и (38) означает справедливость формулы (15). Из следствия 11 вытекает, что оператор A присоединен к предикату Ф. Отсюда вытекает, что (44) эквивалентно (45).

Необходимость. Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ присоединены к n-мерному линейному предикату Ф. Определим оператор A равенством (46). При доказательстве леммы 9 в сторону достаточности было показано, что так определенный оператор A является присоединенным к предикату Ф. Тогда согласно следствию 11 оператор A является проектором и имеет место равенство (15), которое означает, что (37) и (38) эквивалентны. Из равенства $A^2 = A$ следует, что

$$\alpha_j(Ax) = \alpha_j(x), x \in L^2[1, 2], \; j = 1, 2, ..., n. \qquad (49)$$

Это значит, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_j(e_k)\alpha_k(x) = \alpha_j, \; j = 1, 2, ..., n. \qquad (50)$$

Поскольку предикат Ф является n-мерным, то $\operatorname{rg} A = n$. Отсюда следует, что система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ линейно-независимая. Но тогда (50) может выполняться лишь при условии (48).

Следствие 12 доказано.

Перейдем теперь к случаю конуса.

Лемма 10. *Для того чтобы предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы линейно-независимых векторов* $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$ *и линейно-независимых функционалов* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *такие, что*

$$\Phi\left(x + \sum_{i \in I} \xi_i e_i, \sum_{i \in \bar{I}} \xi_i e_i\right) = 1; \; \xi_i \geq 0; \xi_i > 0, i \in I \qquad (51)$$

тогда и только тогда, когда $I = \{i \,|\, \alpha_i(x) < 0\}$, $\xi_i = \alpha_i(i)$ *при* $i \notin I$, $\xi_i = -\alpha_i(i)$ *при* $i \in I$ *; равенство*

$$\Phi\left(x - \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)\alpha_i, y - \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) e_i\right) = 1 \qquad (52)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x,y) = 1$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существуют. Определим, как и ранее, оператор A равенством (46). Далее, определим на $\operatorname{Im} A$ отображения f_1 и f_2 равенствами

$$f_1(Ax) = -\sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) e_i, \; f_2(Ax) = \sum_{i \notin I(x)} \alpha_i(x) e_i. \qquad (53)$$

Легко видеть, что $f_i(\operatorname{Im} A) \subset K$ и $f_2 - f_1$ является тождественным отображением на $\operatorname{Im} A$. В замечании к лемме 4 было отмечено, что для применения этой леммы достаточно, чтобы отображения f_1 и f_2 были определены только на $\operatorname{Im} A$. Легко видеть, что условия леммы 4 выполняются. Из этой леммы следует, что предикат Ф является линейным. Поскольку системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ — линейно независимые, то, следовательно, $rgA = n$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть предикат Ф является n-мерным линейным, P — соответствующий ортопроектор. Множество $P(K)$, очевидно, является конусом. Проверим, что это конус, воспроизводящий в подпространстве $\operatorname{Im} P$. Действительно, пусть $y \in \operatorname{Im} P$. Тогда существует $x \in L^2[0, 1]$ такой, что $y = Px$. Поскольку K — воспроизводящий конус, найдутся $x_1, y_2 \in K$, при которых $x = x_1 - x_2$. Положим $y_1 = Px_1, y_2 = Px_2$. Тогда $y = y_1 - y_2, y_i \in P(K)$.

Пусть $\{g_i\}_{i=1}^n$ — произвольный базис в $\operatorname{Im} P$. Поскольку $P(K)$ — воспроизводящий конус в $\operatorname{Im} P$, существуют $g'_i, g''_i \in P(K)$ такие, что $g_i = g'_i \quad g''_i, \; i = 1, 2, ..., n$. Система $\{g_i{}'\}_{i=1}^n \cup \{g_i{}''\}_{i=1}^n$ полна в подпространстве $\operatorname{Im} P$. Пусть $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ — базис, отобранный из элементов этой системы. Таким образом, в $\operatorname{Im} P$ существует базис $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset P(K)$. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ — двойственный базис в $\operatorname{Im} P$. (Базисы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ в одном и том же евклидовом пространстве называются *взаимно двойственными* (*дуальными, биортогональными*), если для каждого базиса существует единственный двойственный ему базис). Тогда ортопроектор P может быть представлен в виде

$$Px = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i. \qquad (54)$$

Выберем произвольным образом элементы $e_i \in K$ такие, что $Pe_i = \beta_i$, и положим

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i. \qquad (55)$$

Заметим теперь, что

$$(\alpha_i, e_j) = (P\alpha_i, e_j) = (\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij} \; .$$

Поэтому

$$Ae_i = e_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (56)$$

Положим $I(x) = \{i \mid \alpha_i(x) < 0\}$. Из (55), (56) и линейной независимости векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ следует, что равенство

$$A\left(x + \sum_{i\in I}\xi_i e_i\right) = A\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right); \xi_i \geq 0; \xi_i > 0, i \in I \qquad (57)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $I = I(x)$, $\xi_i = \alpha_i(x)$ при $i \notin I, \xi_i = -\alpha_i(x)$ при $i \in I$.

Сравнивая равенства (54), (55) и $Pe_i = \beta_i$, находим, что $D(Px, Py) = D(Ax, Ay)$ при всех $x, y \in L^2[0,1]$. Поэтому из определения (10) вытекает равенство

$$\Phi(x, y) = D(Ax, Ay), \ \ x, y \in K, \qquad (58)$$

которое позволяет переписать (57) в виде (51). Тем самым доказано выполнение первого из условий леммы 10. Выполнимость второго очевидна.

Лемма 10 доказана.

Будем говорить, что пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *присоединена* к n-мерному линейному предикату Φ, определенному на квадрате воспроизводящего конуса *K*, если она удовлетворяет условиям леммы 2.3.

Следствие 13. *Пусть K — воспроизводящий конус в* $L^2[0,1]$. *Для того чтобы пара линейно-независимых систем векторов и функционалов* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *была присоединена к* n *-мерному линейному предикату Φ, определенному на квадрате конуса K, необходимо и достаточно, чтобы равенство (37) было эквивалентно (38) и имело место (48).*

Это утверждение проверяется аналогично следствию 12.

Рассмотрим случай выпуклого множества V. Нам понадобятся некоторые определения из выпуклого анализа [5, 6]. Функция $\beta(x), x \in V$ называется *аффинной*, если для любых $x_1, x_2 \in V$

$$\beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\beta(x_1) + \lambda_2\beta(x_2), \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Если $V = L^2[0,1]$, то непрерывная аффинная функция β однозначно представима в виде

$$\beta(x) = (b, \ x) + c, \qquad (59)$$

где $b \in L^2[0,1]$, *c* — число. Система точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ называется *аффинно-независимой*, если равенства

$$\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k e_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k = 0$$

могут выполняться лишь при $\gamma_k = 0, k = 1, 2, \ldots, n+1$. В любом n-мерном аффинном многообразии существуют аффинно-независимые системы из $n+1$ точек и не существуют такие системы из большего числа точек. Таким образом, если система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая, то $rg\, aff\{e\}_{i=1}^{n+1} = n$. Любой вектор $x \in aff\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i, \ \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i = 1. \qquad (60)$$

Если система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая (и только в этом случае), представление (60) единственно. В этом случае $\beta_i(x)$ — непрерывные аффинные функции, удовлетворяющие тому условию, что система линейных уравнений

$$\beta_i(x) = s_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n+1 \qquad (61)$$

разрешима при любых правых частях таких, что $s_1 + \ldots + s_{n+1} = 1$. Эти функции называются *барицентрическими координатами*. Полагая в (60)

$$I(x) = \{i \mid \beta_i(x) < 0\}, \ \ \alpha_0(x) = \left(\sum_{i\notin I(x)}\beta_i(x)\right)^{-1}, \qquad (62)$$
$$\alpha_i(x) = \alpha_0\left|\beta_i(x)\right|,$$

приходим к представлению (здесь и далее сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю):

$$\alpha_0 x + \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i = \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i, \qquad (63)$$

$$\alpha_i \geq 0; \quad \alpha_0 > 0; \quad \alpha_i > 0 \ \text{ при } \ i \in I;$$

$$\alpha_0 + \sum_{i\in I}\alpha_i = 1; \quad \sum_{i\notin I}\alpha_i = 1. \qquad (64)$$

Обратно, если для точки x имеет место представление (63), (64), то, полагая

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x)/\alpha_o(x), & i \notin I(x), \\ -\alpha_i(x)/\alpha_o(x), & i \in I(x), \end{cases} \qquad (65)$$

приходим к представлению (60). Представление (63), (64) для каждой точки $x \in \mathrm{aff}\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n+1}$ является единственным тогда и только тогда, когда система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая.

Пусть $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ — некоторая система функций в $L^2[0, 1]$ и $I(x)$ — некоторое отображение $L^2[0, 1] \to \{1, 2, \ldots, n+1\}$, удовлетворяющее при всех $x \in L^2[0, 1]$ условию (64). Введем систему функций $\{\beta_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ равенствами (65). Будем называть $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ $I(x)$ *системой однородных координат*, если функции $\beta_i(x)$ являются аффинными и система (61) при условии $s_1 + \ldots + s_{n+1} = 1$ разрешима.

Лемма 11. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате выпуклого множества* V *с* $\mathrm{aff}\, V = L^2[0, 1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы аффинно-независимых точек* $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$ *и однородных координат* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$ *такие, что*

$$\Phi\left(\xi_0 x + \sum_{i\in I}\xi_i e_i, \sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right) = 1; \qquad (66)$$

$$\xi_0>0,\quad \xi_i>0,\quad i\in I;\quad \xi_i\geq 0,\quad i\notin I,$$
$$\xi_0+\sum_{i\in I}\xi_i=1,\quad \sum_{i\notin I}\xi_i=1 \qquad (67)$$

тогда и только тогда, когда $\xi_i=\alpha_i(x),\quad I=I(x)$; равенство

$$\Phi(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i,\ \alpha_0(x)y+ \\ +\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i)=1 \qquad (68)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=1$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть системы $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ и $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$ с указанными свойствами существуют. Рассмотрим пару точек x, y, удовлетворяющих условию $\Phi(x, y)=1$. Тогда имеет место равенство (68). Кроме того, по условию

$$\Phi\left(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i,\quad \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=1. \qquad (69)$$

Из (68) и (69) получаем

$$\Phi\left(\alpha_0(x)y+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i,\quad \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=1. \qquad (70)$$

Поэтому из первого условия леммы следует, что

$$I(y)=I(x);\alpha_i(y)=\alpha_i(x),\ i=0,1,...,n+1. \qquad (71)$$

Но тогда и

$$\beta_i(x)=\beta_i(y),\ i=1,2,...,n+1. \qquad (72)$$

Пусть обратно выполняется (72) и, следовательно, (68). Тогда имеет место равенство (70). Комбинируя его с (69), получаем (68). Тогда по условию леммы $\Phi(x, y)=1$.

Исходя из (59), можно переписать равенство (72) в виде $Ax=Ay$, где

$$Ax=\sum_{i=1}^{n+1}(b_i,x)e_i,\qquad (b_i,x)=\beta_i(x)-C_i. \qquad (73)$$

Таким образом, $\Phi(x, y)=1$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Из леммы 1 следует, что предикат Φ линеен. Осталось показать, что $\operatorname{rg}A=n$. Рассмотрим аффинное отображение

$$C(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)e_i. \qquad (74)$$

Тот факт, что система (61) разрешима при любых $\{s_i\}^{n+1}$, сумма которых равна 1, означает, что $\operatorname{Jm}C=\operatorname{aff}\ \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Но нетрудно видеть, что $C(x)= =Ax+d$, где $d=c_1e_1+...+c_{n+1}e_{n+1}$ и, следовательно, $\operatorname{Im}A=\operatorname{Im}C\quad d$. Поэтому размерность линейного оператора A совпадает с размерностью аффинного оператора C, то есть с размерностью $\operatorname{aff}\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Последняя равна n, так как векторы $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – аффинно-независимые. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть предикат Φ является n-мерным линейным, P – соответствующий ортопроектор. Проверим, что

$$\operatorname{aff}P(V)=\operatorname{Im}P. \qquad (75)$$

Действительно, $P(V)\subset\operatorname{Im}P$. Поскольку $\operatorname{Im}P$ – линейно, а следовательно, является аффинным многообразием, отсюда вытекает включение $\operatorname{aff}P(V)=\operatorname{Im}P$. Пусть $y\in\operatorname{Im}P$. Тогда существует $x\in L^2[0,\,1]$ такой, что $y=Px$. Поскольку $\operatorname{aff}V=L^2[0,\,1]$, то, согласно (28), существуют такие точки $x,y\in V$ и числа λ_1,λ_2, сумма которых равна 1, что $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$. Поэтому $y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2$, где $y_i=Px_i\in P(V)$. Отсюда видно, что $y\in\operatorname{aff}P(V)$. Равенство (75) доказано.

По условию $\operatorname{rg}P=n$. Поэтому существуют такие векторы $g_i\in\operatorname{Im}P,\ i=1,2,...,n+1$, что

$$\operatorname{aff}\{g_i\}_{i=1}^{n+1}=\operatorname{Im}P. \qquad (76)$$

Согласно (75) и (28) найдутся такие системы $\{u_i\}_{i=1}^{n+1},\{v_i\}_{i=1}^{n+1}\in P(V)$ и числа $\lambda_{1i},\lambda_{2i}$, что $g_i=\lambda_{1i}u_i+\lambda_{2i}v_i,\ \lambda_{1i}+\lambda_{2i}=1,\ i=1,\,2,...,\,n+1$. Поэтому $\operatorname{aff}\{g_i\}_{i=1}^{n+1}\subset\operatorname{aff}\{\{u_i\}_{i=1}^{n+1}\cup\{v_i\}_{i=1}^{n+1}\}=\operatorname{Im}P$. Вместе с (76) это дает

$$\operatorname{aff}\{\{u_i\}_{i=1}^{n+1}\cup\{v_i\}_{i=1}^{n+1}\}=\operatorname{Im}P. \qquad (77)$$

Выберем из системы $\{u_i\}_{i=1}^{n+1}\cup\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ аффинно-независимую подсистему. Из (77) и равенства $\operatorname{rg}P=n$ вытекает, что эта подсистема состоит из $(n+1)$-й точки и ее аффинная оболочка совпадает с образом P. Таким образом, существует аффинно-независимая система $\{e_i'\}_{i=1}^{n+1}\subset P(V)$ такая, что

$$\mathit{aff}\{e_i'\}_{i=1}^{n+1}=\operatorname{Im}P. \qquad (78)$$

Отсюда следует, что для любого элемента $x\in L^2[0,\,1]$ существует единственное представление:

$$Px=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_ie_i',\quad \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i=1, \qquad (79)$$

причем барицентрические координаты $\beta_i(x)$ являются аффинными функциями. Пользуясь формулой (65) перехода от представления (60) к представлению (63), можно заключить, что существует такая система однородных координат $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$, что равенство

$$\xi_0Px+\sum_{i\in I}\xi_ie_i'=\sum_{i\notin I}\xi_ie_i' \qquad (80)$$

при условии (67) выполняется тогда и только тогда, когда $\xi_i=\alpha_i(x), I=I(x)$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}\subset V$ – любые точки, для которых $e_i=Pe_i$. Равенство (80) может быть переписано в виде

$$P\left(\xi_0 x + \sum_{i\in I}\xi_i e_i\right) = P\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right)$$

или, учитывая формулу (10), в виде (66). Таким образом, первое условие леммы 11 проверено. Выполнение второго условия очевидно. Лемма 11 доказана.

Будем говорить, что системы точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ *присоединены* к n-мерному линейному предикату Φ, определенному на квадрате выпуклого множества V с $\operatorname{aff} V = L^2[0,1]$, если они удовлетворяют условиям леммы 11.

Следствие 14. *Пусть V — выпуклое множество $\operatorname{aff} V = L^2[0,1]$. Для того чтобы пара аффинно-независимой системы точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1} \subset V$ и системы однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ была присоединена к n-мерному линейному предикату Φ, определенному на $V\times V$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x,y)=1$ было эквивалентно (71) и были справедливы соотношения*

$$\alpha_0(e_j)=1, \alpha_0(e_j)=\delta_{ij}, I(e_j)=\varnothing,$$

$$i, j = \overline{1, n+1}\,. \tag{81}$$

Доказательство. Пусть пара $\{e_k\}_{k=0}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}$, $I(x)$ присоединена к n-мерному линейному предикату Φ. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 14 в сторону достаточности, равенство $\Phi(x,y)=1$ эквивалентно (71). Далее $\Phi(e_j,e_j)=1$. Это означает, что выполняется (66) с $\xi_0=1, \xi_j=1, \xi_i=0$ при $i\neq j, I=\varnothing$. В силу первого условия леммы 14 отсюда вытекает (81).

Пусть, обратно, для пары $\{e_k\}_{k=0}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}$, $I(x)$ равенство $\Phi(x,y)=1$ эквивалентно (71) и выполняется (81). Заметим, что в силу соотношений (62) и (65) равенство (71) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (72), а (81) может быть переписано в виде

$$i, j = 1,\ 2, \ldots,\ n+1\,. \tag{82}$$

В частности, (66) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\beta_j\left(\xi_0 x + \sum_{i\in I}\xi_i\beta_j(e_i)\right) = \beta_j\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right).$$

Поскольку β_j — аффинные функции и имеют место равенства (67), то последнее равенство может быть переписано в виде

$$\xi_0\beta_j(x) + \sum_{i\in I}\xi_i\beta_j(e_i) = \sum_{i\notin I}\xi_i\beta_j(e_i)$$

или, с учетом (82),

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \xi_i/\xi_0, & i\notin I, \\ -\xi_i/\xi_0, & i\in I. \end{cases}$$

Сравнивая это равенство с (65), находим, что первое условие леммы 14 выполняется. Выполнимость второго условия очевидна.

Следствие 14 доказано.

Выводы

Проанализированы результаты Шредингера в области объективного изучения субъективных состояний человека и построения проекта теоретического обоснования колориметрии. Проанализированы проблемы разработки математического аппарата, необходимого для описания работы органов чувств. Развивается метод компараторной идентификации на примере цветового зрения человека. Показано, что субъективные состояния человека поддаются объективному изучению физическими методами.

Список литературы: **1.** *Maxwell, J.C.* On the theory of compound colours and the relations of the spectrum // Proc. Roy. Soc. 1860 – V. 10. **2.** *Schrödinger, E.* Grundlinien einer Theorie der Farbenmetric im Tagessehen // Ann. d. Phys., (4). 1920 – Bd. 63, N22. **3.** *Grassman, H.* Zur Theorie der Farbenmischung // Ann. d. Phys. u Chemie. – 1853 – Bd. 89, N5. **4.** *Ленин, В.И.* Материализм и эмпириокритицизм [Текст] / В.И. Ленин – М.: Госполитиздат, 1967. **5.** *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ [Текст] / Р. Рокафеллар – М.: Мир, 1973. – 347 с. **6.** *Никайдо, Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика [Текст] / *Х. Никайдо* – М.: Мир, 1972. – 533 с.

Поступила в редколлегию 11.03.2011.

УДК 510.6

Лінійні предикати та їх застосування для моделювання колірного зору людини / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51.

Пропонується математичний апарат для моделювання психофізичних явищ. Розглянуті проблеми побудови математичних моделей колірного зору людини.

Бібліогр.: 6 найм.

UDC 510.6

Linear predicates and their applications for the man colour sight modeling / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Inteligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 33-51.

A mathematical apparatus is offered for the design of the psychophysical phenomena. The problems of man's colour sight mathematical models construction are considered.

Ref.: 6 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

О СИСТЕМЕ УСЛОВИЙ ЛИНЕЙНОСТИ ПРЕДИКАТА

Рассмотрены условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора – на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства. Доказаны соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях линейности предиката.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой проанализированы результаты, полученные Ньютоном, Максвеллом, Шредингером и Грассманом в области моделирования цветового зрения человека. В качестве формального аппарата был предложен метод компараторной идентификации и модели в виде линейных предикатов. Развиты математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Источником математических задач были запросы практики моделирования функции человеческого зрения. Даны определения линейного предиката и линейного *n*-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора – декартовом квадрате всего пространства $L^2[0,1]$, его конуса и выпуклого множества.

В данной работе продолжается рассмотрение условий линейности предиката для некоторых областей определения линейного оператора – на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства.

1. Открытое выпуклое множество

Пусть V – выпуклое множество в $L^2[0,1]$, множество $\mathrm{aff}V$ замкнуто и множество V открыто в $\mathrm{aff}V$. Это значит, что для каждой точки $x \in V$ существует такая окрестность W, что $W \cap \mathrm{aff}V$. Для краткости будем говорить при выполнении этих условий, что множество V *относительно открыто*. В частности, если V – открытое множество, то оно, очевидно, относительно открыто. Всюду на протяжении этого параграфа Ф – обозначение для предиката, удовлетворяющего условиям *а* – *в* [1].

Теорема 1. *Для того чтобы предикат* Ф, *определенный на декартовом квадрате относительно открытого выпуклого множества* V, *был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$, *то*

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

д) существует такое подмножество $u \subset V$, *открытое в* $\mathrm{aff}V$, *что если последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $x \in U$, *последовательность* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $y \in U$ *и* $\Phi(x_k, y_k) = 1$, *то* $\Phi(x, y) = 1$.

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Напомним, что *двоично-рациональными* называются числа вида $m2^{-n}$, где m – целое число, n – натуральное. Проверим, прежде всего, что если $\Phi(x, y) = 1$, $\Phi(x', y') = 1$, γ – двоично-рациональное число из отрезка [1, 0], то

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma x', (1-\gamma)y + \gamma y') = 1. \quad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по n. При n =1 двоично-рациональными числами из отрезка [0, 1] являются 0, 1/2 и 1. Для чисел γ, равных 0 или 1, равенство (1) выполняется по условию, для γ =1/2 этот факт эквивалентен условию г. Предположим, что (1) доказана при данном *n*. Рассмотрим число γ вида $k2^{\ (n+1)}$. Если k – четное, то γ – число вида $m2^{-n}$ и, следовательно, выполнимость (1) вытекает из предположения индукции. Пусть γ – нечетное число. Тогда $\gamma = 2m + 1$, где m – некоторое натуральное число. Положим, $\gamma_1 = m2^{-n}$, $\gamma_2 = (m+1)2^{-n}$. Очевидно, $\gamma = 1/2(\gamma_1 + \gamma_2)$. По предположению индукции

$$\Phi((1-\gamma_1)x + \gamma_1 x', (1-\gamma_1)y + \gamma_1 y') = 1,$$

$$\Phi((1-\gamma_2)x + \gamma_2 x', (1-\gamma_2)y + \gamma_2 y') = 1.$$

Применив к двум последним равенствам условие *г*, получим для γ формулу (1). Таким образом, (1) доказана.

Обозначим через S множество всех элементов ξ из $L^2[0,1]$, представимых в виде

$$\xi = \beta(x-y);\ x, y \in V;\ \Phi(x, y) = 1;\ \beta > 0. \quad (2)$$

Пусть для некоторой точки $\xi \in S$ имеет место равенство

$$\xi = \beta'(x'-y');\ x', y' \in V;\ \beta' > 0. \quad (3)$$

Покажем, что тогда

$$\Phi(x', y') = 1. \tag{4}$$

Согласно определению множества S для точки ξ существует представление (2). Рассмотрим вначале частный случай, когда в (2) $x, y \in U$. Без ограничения общности можем считать, что множество U выпукло (если это не так, можно взять в качестве нового множества U любой открытый шар в $\operatorname{aff} V$, являющийся частью U). Заметим, что для точек $x, y \in U$ из равенства $\Phi(x, y) = 1$ вытекает, что

$$\Phi(u, v) = 1, \quad u, v \in [x, y]. \tag{5}$$

Действительно, пусть $z(\gamma) = (1-\gamma)x + \gamma y, \quad \gamma \in [0,1]$. Если γ – двоично-рациональное число, то в силу (1) из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(y, y') = 1$ получаем

$$\Phi(z(\gamma), y) = 1\,. \tag{6}$$

Если γ не является двоично-рациональным, то найдется последовательность двоично-рациональных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к γ. Тогда, очевидно, последовательность $\{z(\gamma_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке $z(\gamma)$. Но в силу (6) $\Phi(z(\gamma_k), y) = 1$. Поскольку $z(\gamma_k)$, $y \in U$, из условия ∂ следует (6). В частности, из (6) получаем $\Phi(u, y) = 1$, $\Phi(v, y) = 1$. Отсюда вытекает (5). Зададим числа $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 1]$ и положим (рис. 1):

$$u = \frac{x+y}{2} + \frac{\delta_1}{2}(y-x), \qquad v = \frac{x+y}{2} - \frac{\delta_2}{2}(y-x).$$

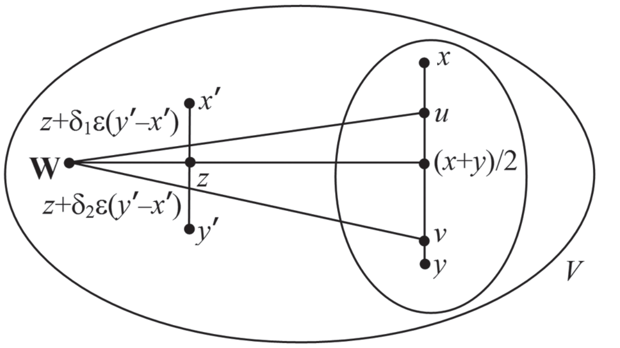


Рис. 1

Так как $u, v \in [x, y]$, то в силу (5) $\Phi(u, y) = 1$.

Пусть z – произвольная точка отрезка $[x', y']$. Зафиксируем двоично-рациональное число $\gamma \in (0,1)$, достаточно близкое к 1. Тогда точка W, определенная равенством

$$W = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{x+y}{2} + \frac{1}{\gamma}z\,, \tag{7}$$

достаточно близка к z и поскольку V – относительно открытое множество, отсюда следует, что $w \in V$. Из равенств $\Phi(u, v) = 1$, $\Phi(w, w) = 1$ с помощью (1) находим

$$\Phi((1-\gamma)u + \gamma w, (1-\gamma)v + \gamma w) = 1. \tag{8}$$

Имеем $(1-\gamma)u + \gamma w = (1-\gamma)u + (\gamma-1)(x+y)/2 + {}$ $+ z = z + (1-\gamma)(u - (x+y)/2)) = z + (1-\gamma)(\delta_1/2)(y-x)$.

Но из равенств (2) и (3) следует, что

$$y - x = (\beta'/\beta)(y' - x')\,.$$

Поэтому

$$(1-\gamma)u + \gamma w = z + \delta_1\varepsilon(y' - x')\,,$$

где $\varepsilon = \beta'(1-\gamma)/2\gamma$. Аналогично

$$(1-\gamma)v + \gamma w = \ z + \delta_2\varepsilon(y' - x')\,.$$

Но δ_1, δ_2 – произвольные числа отрезка $[-1, 1]$. Поэтому (8) означает, что для любой точки $z \in [x', y']$ существует такая окрестность на отрезке $[x', y']$, для любых точек которой $\Phi(u', v') = 1$. Поскольку отрезок является компактным множеством, из покрытия отрезка $[x', y']$ этими окрестностями можно выбрать конечное покрытие. Отбросим те из оставшихся отрезков, которые являются частью какого-либо другого отрезка покрытия. Пусть $\{[u_1, v_i]\}_{i=1}^{N}$ – получившееся покрытие. Тогда $u_1 = x', v_N = y', u_i < u_{i+1} \le v_i < v_{i+1}$. Поэтому $\Phi(u_i, u_{i+1}) = 1$, а следовательно, $\Phi(x', u_N) = 1$. Кроме того, $\Phi(u_N, y') = 1$. Из двух последних равенств вытекает (4).

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда в (3) $x', y' \in U$. Для произвольной точки $z \in [x', y']$ введем точку w равенством (6), где $\gamma \in (0,1)$ – какое-либо двоично-рациональное число, при котором $w \in U$. Из равенств $\Phi(x, y) = 1$, $\Phi(w, w) = 1$ с помощью (1) находим

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma w, (1-\gamma)v + \gamma w) = 1. \tag{9}$$

Имеем $(1-\gamma)x + \gamma w = z - \varepsilon(y' - x')$, $(1-\gamma)y + \gamma w =$ $= z + \varepsilon(y' - x')$, где $\varepsilon = \beta'(1-\gamma)/2\beta$. Поэтому из (9) и свойства (5) вытекает, что для каждой точки $z \in [x', y']$ существует такая окрестность на этом отрезке, для любых точек u', v' которой будет $\Phi(u', v') = 1$. Как и в предыдущем случае, отсюда вытекает, что $\Phi(x', y') = 1$.

Перейдем теперь к общему случаю. Зафиксируем произвольную точку $x'' \in U$. Подберем такое положительное число β'', чтобы точка $y'' = x + \beta(\beta'')^{-1}(x - y)$ принадлежала множеству U. Тогда

$$\xi = \beta''(y'' - x'');\, x'', y'' \in U; \beta'' > 0. \tag{10}$$

Это второй из рассмотренных ранее частных случаев. Поэтому $\Phi(x'', y'') = 1$. При сравнении ξ представления в виде (3) и (10) мы находимся в условиях первого частного случая. Это позволяет заключить, что $\Phi(x', y') = 1$. Равенство (4) полностью доказано.

Заметим теперь, что для любых точек $x, y \in V$ соотношения

$$\Phi(x, y) = 1 \ \text{ и } \ x - y \in S \tag{11}$$

эквивалентны. Действительно, из равенства $\Phi(x, y)=1$ по определению множества S следует, что $x-y \in S$. Обратное утверждение справедливо, поскольку (3) имплицирует (4).

Множество S замкнуто. Действительно, пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ сходится к некоторой точке ξ. Зафиксируем произвольную точку $a \in U$. Как видно из определения (2), множества S и формулы (28) из [1] при любом числе ε точки вида $a+\varepsilon\xi_n \in \operatorname{aff} V$. По условию $\operatorname{aff} V$ – замкнутое множество. Поэтому и точка $a+\varepsilon\xi \in \operatorname{aff} V$. Но множество U является открытым в $\operatorname{aff} V$. Поэтому если ε – достаточно мало, то отсюда следует, что $a+\varepsilon\xi \in U$. Имеем

$$\xi_n = \frac{1}{\varepsilon}[(a+\varepsilon\xi_n)-a].$$

Поскольку из (3) вытекает (4), то $\Phi(a+\varepsilon\xi_n, a)=1$. В силу условия *д* тогда и $\Phi(a+\varepsilon\xi, a)=1$. Отсюда и из равенства

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}[(a+\varepsilon\xi)-a]$$

следует, что $\xi \in S$. Итак, S – замкнутое множество. Пусть $\Phi(x, y)=1$, $\Phi(x', y')=1$. Покажем, что тогда равенство (1) справедливо при всех (не обязательно двоично-рациональных) числах $\gamma \in [0,1]$. Положим $\xi = x-y$, $\xi = x'-y'$, $\xi(y)=(1-\gamma)\xi+\gamma\xi'$. Очевидно,

$$\xi(\gamma) = ((1-\gamma)x+\gamma x')-((1-\gamma)y+\gamma y'). \qquad (12)$$

Поэтому (1) означает, что в случае двоично-рационального числа γ точка $\xi(\gamma)$ принадлежит S. Аппроксимируя произвольное число γ сходящейся к нему последовательностью двоично-рациональных чисел и используя замкнутость множества S, получаем, что при любом $\gamma \in [0,1]$ точка $\xi(\gamma)$ принадлежит S. Таким образом, из (12) и свойства (4) вытекает (1).

Покажем теперь, что множество S является линейным многообразием. Пусть $\xi \in S$, γ – произвольное число. Если $\gamma > 0$, то из (2) следует, что

$$\gamma\xi = (\gamma\beta)(x-y), \qquad \Phi(x,y)=1, \qquad \gamma\beta > 0.$$

Поэтому $\gamma\xi \in S$. Если $\gamma < 0$, то из (2) получаем

$$\gamma\xi = (-\gamma\beta)(y-x), \quad \Phi(y,x)=1, \quad -\gamma\beta > 0.$$

Следовательно, $\gamma\xi \in S$. Наконец, если $\gamma = 0$, то $\gamma\xi = 0$ и, значит, $\gamma\xi = x-x$, $\Phi(x,x)=1$, так что $\gamma\xi \in S$. Далее, для любых точек $\xi, \xi' \in S$ из соотношений $\xi = \beta(x-y)$, $\xi' = \beta'(x'-y')$, $\Phi(x,x)=1$, $\Phi(x',x')=1$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$ при $\gamma = \beta'(\beta+\beta')^{-1}$ вытекают равенства

$$\xi+\xi' = (\beta+\beta')(((1-\gamma)x+\gamma x')-((1-\gamma)y+\gamma y'))$$

и (1). Это означает, что $\xi+\xi' \in S$.

Итак, S – линейное подпространство в $L^2[0,1]$. Пусть P – ортопроектор на ортогональное дополнение $S^{\perp}$ к S. Равенство $P_x = P_y$ выполняется тогда и только тогда, когда $x-y=S$. Поэтому из эквивалентности соотношений (11) вытекает (1).

Теорема 1 доказана.

В приложениях для проверки выполнимости условий *г* и *д* в каждой конкретной ситуации следует проводить экспериментальное исследование. При этом имеющиеся средства исследования могут быть различными в различных ситуациях. Для проверки выполнения условия *г* экспериментатор должен иметь возможность для любых физических сигналов x и y формировать средний между ними сигнал $(x+y)/2$. В случае, когда этими сигналами являются излучения, сумма имеет естественную физическую интерпретацию – смешение излучений, а умножение на положительное число λ интерпретируется как увеличение интенсивности излучения в λ раз при сохранении спектрального состава. Таким образом, сигнал $(x+y)/2$ может быть сформирован в два этапа – сложение и умножение на 1/2. Для удобства приложений теоремы мы укажем различные варианты формулировки условий *г* и *д*.

Условие *г* может быть заменено совокупностью двух условий:

г') если $\Phi(x, y)=1$ *и* $\Phi(x', y')=1$, *то*

$$\Phi(x+x', y+y')=1,$$

г") если $\Phi(x, y)=1$, *то* $\Phi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)=1.$

Действительно, из *г'*, *г"*, очевидно, вытекает условие *г*, и поэтому теорема 1 останется справедливой в сторону достаточности, если заменить *г* на *г'* и *г"*. Справедливость теоремы в сторону необходимости при такой замене также очевидна.

Легко увидеть также, что условие *г* может быть заменено условием: если $\Phi(x, y)=1$ и $\Phi(x', y')=1$, то при любом $\gamma \in [0,1]$ имеет место равенство (1).

Еще один вариант: если $\Phi(x,y)=1$ и $\Phi(x', y')=1$, то при любых α и β, для которых $\alpha x+\beta x' \in V$, $\alpha y+\beta y' \in V$, имеет место равенство $\Phi(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')=1$.

Условие *г*, однако, не может быть заменено одним лишь условием *г'*. Это видно из следующего примера. Пусть $V = L^2[0,1]$, e – произвольный ненулевой вектор в $L^2[0,1]$. Рассмотрим предикат Φ на $V \times V$, равный 1 тогда и только тогда, когда $(e, x-y)$ – целое число. Очевидно, для этого предиката выполняются условия *а*, *б*, *в*, *г'*, *д*, но не существует ортопроектор P, для которого условия $Pz=0$ и (e, z) – целое число эквивалентны при всех z.

Аналогично условие *г* не может быть заменено следующим более слабым условием:

если $\Phi(x, y)=1$ *и* $\Phi(x', y')=1$, *то* $\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, y\right)=1$.

В качестве примера рассмотрим предикат Ф, определенный на $L^2[0,1] \times L^2[0,1]$ условием: $\Phi(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда $x=y$ или $(x,e)=0$ и $(y,e)=0$, где e – произвольно фиксированный ненулевой вектор. Этот же пример показывает, что условие *г* не может быть заменено условием:

$$\text{если } \Phi(x,y)=1\text{, то } \Phi\left(\frac{x+x}{2},\ y\right)=1 .$$

Условие *д* может быть заменено условием *д*’: *существует такая точка x и такая окрестность* $u \subset V$ *этой точки, что если последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $x \in U$ *и* $\Phi(x_k, y)=1$, *то* $\Phi(x,y)=1$.

Тот факт, что теорема 1 остается справедливой при замене *д* на *д*’ в сторону достаточности, виден из доказательства теоремы. Справедливость в сторону необходимости вытекает из того, что условие *д*’, очевидно, слабее условия *д*.

2. Произвольное выпуклое множество

Множества, фигурирующие в частных случаях, описанных выше, не являются открытыми в своих аффинных оболочках. Например, положительный конус в пространстве $L^2[0,1]$ является воспроизводящим, то есть его линейная оболочка совпадает со всем пространством, однако он не является открытым множеством. Условия *а* – *д* теоремы 1 не обеспечивают линейность предиката, если множество V не является относительно открытым. Это видно из следующего примера. Пусть предикат Ф определен на квадрате положительного конуса K в $L^2[0,1]$ условием $\Phi(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда *x* и *y* одновременно равны или одновременно не равны нулю. Условия *а* – *г* для этого предиката, очевидно, выполняются. Для любого открытого множества U, не содержащего 0, верно, что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ сходится к $x \in U$, последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ сходится к $y \in U$ и $\Phi(x_k, y_k)=1$, то $\Phi(x,y)=1$. Тем не менее, этот предикат не является линейным. Действительно, если бы он был линейным, то, очевидно, условие *д* выполнялось бы при $U=K$. Это, однако, не так: пусть $x_k \to x$, $x_k \neq 0$, $y_k \to y$, $x=0$, $y \neq 0$. Тогда $\Phi(x_k, y_k)=1$, но $\Phi(x,y)=0$. Этот пример показывает, как следует усилить формулировку теоремы 1, чтобы она оставалась справедливой и для множеств, не являющихся относительно открытыми. А именно, следует потребовать, чтобы условие непрерывности было глобальным.

Теорема 2. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на декартовом квадрате выпуклого множества V с замкнутой аффинной оболочкой, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$, *то*

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)=1;$$

д) если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $x \in V$, *последовательность* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $y \in V$ *и* $\Phi(x_k, y_k)=1$, *то* $\Phi(x,y)=1$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть аффинная оболочка выпуклого множества V замкнута. Тогда для произвольной точки* $x_0 \in V$ *существует такая константа* C, *что любая точка* $\xi \in T(V)$ *представима в виде*

$$\xi=\beta(x-y); \quad \beta>0; \quad x,y \in V, \tag{13}$$

где

$$\beta=C\|\xi\|; \quad \|x-x_0\|\le 1; \quad \|y-x_0\|\le 1. \tag{14}$$

Доказательство. Наличие представления (13) вытекает из формулы (28) из [1]. Покажем теперь, что среди представлений (13) существуют такие, которые удовлетворяют дополнительным условиям (13). Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in V$. Рассмотрим линейное пространство $T(V)\times R$, элементами которого являются упорядоченные пары (ξ; *t*), где $\xi \in T(V)$, t – действительное число. Введем в нем норму, полагая

$$\|(\xi;\, t)\| = \sqrt{\|\xi\|^2 + t^2} .$$

Поскольку aff$V$ – замкнутое множество, то $T(V)$ – подпространство пространства $L^2[0,1]$. Поэтому $T(V)\times P$ с введенной таким образом нормой – гильбертово пространство. Определим множество K_0 в пространстве $T(V)\times R$ равенством (рис. 2):

$$K_0=\{(t\,(x-x_0);\, t) \mid x\in V,\ \ t\in R\}.$$

Множество K_0 является конусом.

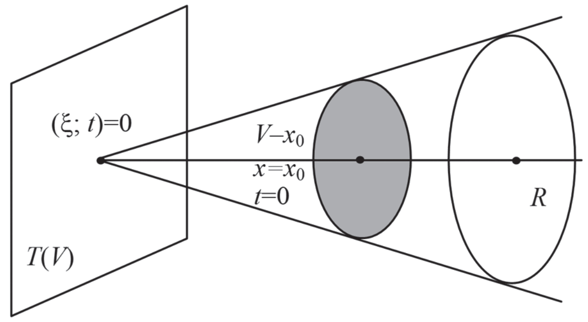


Рис. 2

Действительно, если $(t(x-x_0);t)\in K_0$ и $\lambda \ge 0$, то $\lambda(t(x-x_0);t)=(\lambda t(x-x_0);\lambda t)\in K_0$. Пусть $(t_i(x_i-x_0);$ $t_i)\in {}_0$, $i=1,2$. Тогда $(t_1(x_1-x_0),t_1)+(t_2(x_2-$ $-x_0),t_2)=(t(x-x_0),t)$, где

$$t=t_1+t_2,\ \ x=\frac{t_1}{t}x_1+\frac{t_2}{t}x_2\in V.$$

Покажем теперь, что конус K_0 является воспроизводящим в пространстве $T(V)\times R$. Рассмотрим вначале точки пространства $T(V)\times R$ вида $(\xi;0)$. Так как $\xi\in T(V)$, то в силу указанного выше имеет место представление (13). Равенство (13) можно переписать в виде $\xi=\beta((x-x_0)-(y-y_0))$. Поэтому

$$(\xi\,;\,0)=(\beta\,(x-x_0);\,\beta\,)-(\beta\,(y-y_0);\,\beta\,).$$

Очевидно, каждый из элементов, фигурирующих в правой части этого равенства, принадлежит конусу. Теперь рассмотрим точки пространства $T(V)\times R$ вида $(0;t)$. Для них имеет место очевидное равенство:

$$(0;\,t)=\left(t\left(x_0-x_0\right);\,t\right)-\left(0\cdot\,\left(x_0-x_0\right);\,0\right).$$

Следовательно, такие точки также содержатся в линейной оболочке конуса K_0. Осталось заметить, что любая точка $(\xi;t)$ пространства представима в виде

$$(\xi_i;\,t)=(\xi;0)+(0;t).$$

Поскольку каждая из точек, фигурирующая в правой части этого равенства, принадлежит $L(K_0)$, отсюда вытекает, что $(\xi;t)\in L(K_0)$.

Поскольку конус K_0 является воспроизводящим в гильбертовом пространстве $T(V)\times R$, то существует такая константа C, что для каждого элемента $\eta\in T(V)\times R$ имеется представление

$$\eta=\eta_1-\eta_2,\quad(\eta_1,\eta_2\in K_0),\tag{15}$$

при котором

$$\|\eta_1\|\le C\|\eta\|,\qquad\|\eta_2\|\le C\|\eta\|.\tag{16}$$

Пусть ξ — произвольная точка пространства $T(V)$. Тогда точка $\eta=(\xi;0)\in T(V)\times R$. В рассматриваемом случае представление (15), (16) примет вид

$$(\xi\,;\,0)=(\,\beta'(x'-x_0);\;\beta')-(\gamma'(y'-x_0);\;\gamma'),\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\beta'^2\|x'-x_0\|^2+\beta'^2\le C^2\|\xi\|^2,\\&\gamma'^2\|y'-x_0\|^2+\gamma'^2\le C\|\xi\|^2,\end{aligned}\tag{18}$$

где β', γ' — некоторые положительные числа; x',y' — некоторые точки множества V. Но из равенства (17) с очевидностью следует, что $\beta'=\gamma'$. Таким образом, для точки ξ справедливо равенство $\xi=\beta'(x'-y')$, причем из (18) вытекают неравенства

$$\beta'\le C\|\xi\|,\quad\beta'\|x'-x_0\|\le C\|\xi\|;\quad\beta'\|y'-y_0\|\le C\|\xi\|.$$

Пусть $C_1=\max\{\|x-x_0\|,\ \|y-x_0\|\}$. Если $C_1\le 1$, то лемма уже доказана. Предположим, что $C_1>1$. Положим

$$x=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)x_0+\frac{1}{C_1}x',\ y=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)y_0+\frac{1}{C_1}y',\ \beta=C_1\beta'.$$

Тогда, очевидно, выполняются соотношения (13), (14).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть аффинная оболочка выпуклого множества* V *замкнута. Тогда для любой последовательности* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset T(V)$*, сходящейся к некоторой точке* $\xi=\beta(x-y)\,(\beta>0,\ x,y\in V)$*, существует представление*

$$\xi_k=\beta_k(x_k-y_k)\,(\beta_k>0,\ x_k,y_k\in V)\tag{19}$$

такое, что

$$\lim\beta_k=\beta;\quad\lim_{k\to\infty}x_k=x;\quad\lim y_k=y.\tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in V$. Согласно лемме 1 при любом K имеет место равенство

$$\xi_k-\xi=t_k(u_k-v_k),\tag{21}$$

где

$$t_k>0;u_k,v_k\in V;t_k\le C\|\xi_k-\xi\|;$$
$$\|u_k-x_0\|\le 1,\|v_k-x_0\|\le 1.$$

Имеем

$$\xi_k=\beta\,(x-y)+t_k(u_k-v_k)=\beta_k(x_k-y_k).$$

Здесь

$$\beta_k=\beta+t_k,\quad x_k=\frac{\beta}{\beta_k}x+\frac{t_k}{\beta_k}u_k,\quad y_k=\frac{\beta}{\beta_k}+\frac{t_k}{\beta_k}v_k.$$

Точки x_k,y_k являются выпуклыми комбинациями точек множества V и, следовательно, сами принадлежат V. Легко видеть, что

$$x_k-x=\frac{t_k}{\beta_k}((u_k-x_0)+(x_0-x)),$$

$$y_k-y=\frac{t_k}{\beta_k}((v_k-x_0)+(y_0-y)).$$

Из (21) видно, что последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Тогда выполняется первое равенство (20). Поскольку $\beta>0$, то из последних двух равенств и неравенств (21) вытекает второе и третье равенства (20).

Лемма 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность.* Заметим, что условие *г* можно переписать в следующем виде. Если $\Phi(x,y)=1$ и $\Phi(x',y')=1$, то при любом $\gamma\in[0,1]$

$$\Phi((1-\gamma)x+\gamma x',(1-\gamma)y+\gamma y')=1.\tag{22}$$

В случае двоично-рационального γ равенство (19) доказывается так же, как и равенство (1). В случае произвольного γ производится аппроксимация числа γ последовательностью двоично-рациональных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Положим

$$u_k=(1-\gamma_k)x+\gamma_k x',\ v_k=(1-\gamma_k)y+\gamma_k y',$$
$$u=(1-\gamma)x+\gamma x',\ v=(1-\gamma)y+\gamma y'.$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u, \quad \lim_{k\to\infty} v_k = v.$$

Поскольку для двоично-рациональных чисел (19) уже доказано, то $\Phi(u_k, v_k) = 1$. Тогда по условию ∂ будет и $\Phi(u, v) = 1$. Этим заканчивается доказательство (22).

Так же, как и в теореме 1, из равенства $\Phi(a, b) = 1$ следует, что

$$\Phi(u' + v') = 1, \quad u',\ v' \in [a, b]. \qquad (23)$$

Обозначим через S множество всех элементов $\xi \in L^2[0,1]$, представимых в виде

$$\xi = \beta(x - y); \quad x, y \in V;\ \Phi(x, y) = 1;\ \beta > 0. \qquad (24)$$

Покажем, что соотношения

$$\xi \in S;\ \xi = \beta'(x' - y'); \quad x', y' \in V;\ \beta' > 0 \qquad (25)$$

влекут равенство

$$\Phi(x, y) = 1. \qquad (26)$$

В рассматриваемой ситуации нельзя пользоваться конструкцией, используемой с аналогичной целью при доказательстве теоремы 1, так как точка W, определенная равенством (7), может не принадлежать множеству V, поскольку V не является относительно открытым.

Зададим $\gamma \in [0,1]$ и положим $u = (1-\gamma)x + \gamma x'$, $v = (1-\gamma)y + \gamma y'$ (рис. 3).

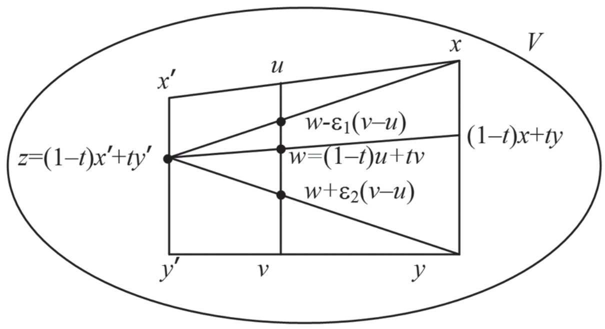


Рис. 3

Пусть W – произвольная точка отрезка $[u, v]$. Тогда $W = (1-t)u + v,\ 0 \le t \le 1$. Положим $z = (1-t)x' + ty'$. Из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(z, z) = 1$ и свойства (22) заключаем, что

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma z, \quad (1-\gamma)y + \gamma z) = 1. \qquad (27)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} (1-\gamma)\, x + \gamma\, z &= w - \varepsilon_1(v - u), \\ (1-\gamma)\, x + \gamma\, z &= w + \varepsilon_2(v - u), \end{aligned} \qquad (28)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{t(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(1-t)(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}.$$

Проверим это. Из (24) и (25) следует, что $\beta(x - y) = \beta(x' - y')$. Поэтому

$$u - v = (1-\gamma)(x - y) + \gamma(x' - y') = \left[(1-\gamma)\frac{\beta'}{\beta} + \gamma\right](x' - y').$$

Откуда

$$x' - y' = \frac{\beta}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}(u - v).$$

Далее

$$\begin{aligned} &(1-\gamma)x + \gamma\, z - w = u - \gamma\, x' + \gamma\left[(1-t)x' + ty'\right] - \\ &-\left[(1-t)u + tv\right] = t(u - v) - \gamma t(x' - y') = \\ &= -\frac{t(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}(v - u) = -\varepsilon_1(v - u). \end{aligned}$$

Второе равенство (28) проверяется аналогично. Таким образом, можно переписать (27) в виде

$$\Phi(w - \varepsilon_1(v - u), \quad w + \varepsilon_2(v - u)) = 1.$$

Отсюда и из свойства (23) следует, что для каждой точки $w \in [u, v]$ существует такая окрестность на отрезке $[u, v]$, для любых точек u', v' которой $\Phi(u, v) = 1$. Так же, как и в теореме 1, это позволяет заключить, что $\Phi(u, v) = 1$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\gamma \to 1$, с помощью условия ∂ заключаем, что $\Phi(x', y') = 1$.

Докажем теперь, что множество S замкнуто. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ сходится к к некоторой точке ξ. Поскольку $S \subset T(V)$ и множество $T(V)$ замкнуто, то $\xi \in T(V)$. Представим точку ξ в виде (13). Согласно лемме 2, последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ может быть представлена в виде (19), (20). Поскольку из (25) вытекает (26), то из (19) вытекает равенство $\Phi(x_k, y_k) = 1$. Тогда из (20) и условия 5 можно заключить, что $\Phi(x, y) = 1$. Отсюда и из определения (24) следует, что $\xi \in S$. Замкнутость множества S доказана.

Окончание доказательства данной теоремы совпадает с окончанием доказательства теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

3. Координатная формулировка для всего пространства

Теоремы 1 и 2 носят “безразмерный” характер – в их посылках нет каких бы то ни было указаний на размерность ортопроектора P, соответственно, их нет и в заключении. В частности, это означает, что ортопроектор P может быть как бесконечномерным, так и конечномерным. Для конечномерного случая можно получить также другую систему необходимых и достаточных условий линейности предиката Φ, носящую координатный характер. Мы начнем со случая, когда предикат определен на декартовом квадрате всего пространства $L^2[0, 1]$. В этом случае формулировка соответствующего результата имеет простой вид и доказательство также не является сложным.

Теорема 3. *Для того чтобы предикат* Φ, *определенный на декартовом квадрате пространства* $L^2[0,1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$, *то*

$$\Phi(x+x',y+y')=1;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$, *что для каждого* $x\in L^2[0,1]$ *есть единственный набор чисел* $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, *удовлетворяющий условию*

$$\Phi(x,\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k)=1; \tag{29}$$

е) функции $\alpha_k(x)$ *непрерывны.*

Доказательство. Установим сначала достаточность условий теоремы. Покажем, что векторы $e_1+...+e_k$ — линейно-независимы. В самом деле, пусть $\gamma_1 e_1+...+\gamma_n e_n=0$. Тогда

$$\Phi(0,\gamma_1 e_1+...+\gamma_n e_n)=1.$$

Согласно условию *д* это равенство может выполняться лишь при $\gamma_1=\gamma_2=...=\gamma_n=0$. Линейная независимость системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ доказана.

Из условия *д* имеем

$$\Phi(x,\sum_{k=1}^n \alpha_k(x)e_k)=1,\ \Phi(y,\sum_{k=1}^n \alpha_k(y)e_k)=1, \tag{30}$$

$$\Phi(x+y,\ \sum_{k=1}^n \alpha_k(x+y)e_k)=1. \tag{31}$$

Комбинируя равенства (30), с помощью условия *г*, получаем

$$\Phi(x+y,\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k(x)+\alpha_k(y))e_k)=1.$$

Сравнивая последнее равенство с (31) и учитывая единственность коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, находим

$$\alpha_k(x+y)=\alpha_k(x)+\alpha_k(y),\ \ k=1,2,...,n.$$

Таким образом, функционалы α_k являются аддитивными и, согласно условию *е*, непрерывными. Поэтому α_k — линейные функционалы. Проверим линейную независимость системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. Для любых чисел $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ вектор $x=\gamma_1 e_1+...+\gamma_n e_n$ является решением системы линейных уравнений

$$\alpha_k(x)=\gamma_k,\quad k=1,2,...,n. \tag{32}$$

Это видно из того, что по условию 1 [1] имеет место равенство

$$\Phi(x,\sum_{k=1}^n \gamma_k\ e_k)=1\quad,$$

так что из *д* следует, что $\gamma_k=\alpha_k(x)$. Следовательно, система (32) разрешима при любых правых частях. Это и означает линейную независимость функционалов $\alpha_1,...,\alpha_n$. Для окончания доказательства осталось сослаться на лемму 2.

Пусть обратно предикат Φ является n-мерным линейным. Тогда выполнимость условия 4 очевидна. Выполнимость *д* и *е* вытекает из леммы 2.

Теорема 3 доказана.

4. Координатная формулировка для конуса

Теорема 4. *Для того чтобы предикат* Φ, *определенный на квадрате воспроизводящего конуса* K, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$, *то*

$$\Phi(x+x',y+y')=1;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n\subset K$, *что для каждого* $x\in K$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ *и единственное подмножество* $I(x)\subset\{1,2,...,n\}$ *такие, что (сумма по пустому множеству индексов предполагается равной нулю)*

$$\Phi(x+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\sum_{i\notin I}\alpha_i e_i)=1;\ \ \alpha_i>0, i\in I; \tag{33}$$

е) если $x,y\in K,\quad \gamma>0$ *и при некотором i*

$$\Phi(x+\gamma e_i, y+\gamma e_i)=1,\text{ то }\Phi(x,y)=1;$$

ж) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны на* K.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть* f *— аддитивный функционал на воспроизводящем конусе* K *пространства* $L^2[0,1]$ *и функция* $|f(x)|$ *непрерывна на* K. *Тогда существует единственный линейный функционал* F *на* $L^2[0,1]$ *такой, что*

$$F(x)=f(x),\qquad x\in K. \tag{34}$$

Доказательство. Пусть x — произвольный вектор L. Тогда для него имеет место представление

$$x=x_1-x_2,\qquad x_1,x_2\in K. \tag{35}$$

Положим

$$F(x)=f(x_1)-f(x_2). \tag{36}$$

Покажем, что это определение корректно в том смысле, что не зависит от выбора x_1 и x_2 в представлении (35). Действительно, пусть $x=x'_1-x'_2$; $x'_1,x'_2\in K$. Тогда $x_1+x'_2=x_2+x'_1\in K$. Следовательно, $f(x_1+x'_2)=f(x_2+x'_1)$. Но f — аддитивный функционал. Поэтому $f(x_1)+f(x'_2)=f(x_2)+f(x'_1)$, то есть $f(x'_1)-f(x'_2)=f(x_1)+f(x_2)$, что и требовалось доказать.

Функционал F является аддитивным. Действительно, пусть $x,y\in L^2[0,1]$, x — представлен в виде (35) и $y=y_1-y_2, y'_1,y'_2\in K$. Тогда $x+y=(x_1+y_1)-(x_2+y_2), x_1+y_1\in K$. Поэтому $F(x+y)=f(x_1+y_1)-f(x_2+y_2)=(f(x_1)+f(y_1))-$

$(f(x_2)+f(y_2)) = (f(x_1)-f(x_2))+(f(y_1)-f(y_2)) = (f(x_1)-f(x_2))+(f(y_1)- f(y_2))=F(x)+F(y)$.

Поскольку K – воспроизводящий конус, то существует такая константа C, что для любого $z\in L^2[0,1]$ имеет место представление

$$z=x-y; x,y\in K; \|x\|\le C\|z\|, \|y\|\le C\|z\|. \quad (37)$$

Покажем, что функционал F непрерывен в нуле. Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. В соответствии с (37) существуют последовательности $\{x_k\}_1^{\infty}, \{y_k\}_1^{\infty}\subset K$ такие, что

$$z_k = x_k - y_k,\ \lim_{k\to\infty} x_k = 0,\ \lim_{k\to\infty} y_k = 0. \quad (38)$$

Но $|f(x)|$ – непрерывная функция. Поэтому из (38) следует, что

$$F(z_k)=f(x_k)-f(y_k), \quad \lim_{k\to\infty}|f(x_k)|=|f(0)|, \quad \lim_{k\to\infty}|f(y_k)|=|f(0)|. \quad (39)$$

Заметим теперь, что $f(0)=0$. Действительно, пусть $x\in K$, $x\neq 0$. Так как f – аддитивный функционал, то при любом натуральном n будет

$$\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}|f(x)|.$$

Поскольку $|f(x)|$ – непрерывная функция, в последнем равенстве можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Получаем $|f(0)|=0$. Тогда из (39) следует, что функционал F непрерывен в нуле. Но аддитивный функционал, непрерывный в нуле, является линейным. Значит, F – линейный функционал.

Единственность продолжения очевидна.

Лемма 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Установим сначала достаточность условий теоремы. Покажем, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно-независимые. В самом деле, пусть $\gamma_1 e_1+\ldots+\gamma_n e_n=0$. Положим $J=\{i\,|\,\gamma_i<0\}$. Тогда

$$\sum_{i\in J}(-\gamma_i)e_i=\sum_{i\notin J}\gamma_i e_i \quad \text{и} \quad \Phi\left(0+\sum_{i\in J}(-\gamma_i)e_i, \quad \sum_{i\notin J}\gamma_i e_i\right)=1.$$

В силу условия *д* последнее равенство может иметь место лишь при $\gamma_i=0; i=1,\ldots,n.$

Равенство (33) ставит каждому вектору $x\in K$ в соответствие пару векторов (x_1, x_2) по правилу

$$x_1=\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \quad x_2=\sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i. \quad (40)$$

Положим

$$Ax=x_2-x_1. \quad (41)$$

Тогда

$$\Phi(x,y)=D(Ax,Ay). \quad (42)$$

Действительно, пусть $\Phi(x,y)=1$. Вместе с равенством $\Phi(x_1,x_2)=1$ это дает $\Phi(x+x_1, y+y_1)=1$. Но (40) означает, что $\Phi(x+x_1,x_2)=1$. В силу условий *б*, *в* тогда $\Phi(y+x_1,x_2)=1$. Из условия *д* следует, что последнее равенство может выполняться лишь при $x_1=y_1, x_2=y_2$. Поэтому $Ax=Ay$. Пусть, обратно, $Ax=Ay$. Так как система $\{e_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая, отсюда вытекает, что $x_1=y_1, x_2=y_2$. Значит, вместе с равенством $\Phi(x+x_1,x_2)=1$ справедливо равенство $\Phi(y+x_1,x_2)=1$. Но тогда $\Phi(x+x_1,y+y_1)=1$. Применяя условие *е*, получаем $\Phi(x,y)=1$.

Покажем, что оператор A аддитивен. Пусть x, y – произвольные точки конуса. Для векторов x_1,x_2,y_1,y_2, определенных формулой (40), имеют место равенства $x_1+y_1=\delta_1e_1+\ldots+\delta_ne_n$, $x_2+y_2=\delta'_1e_1+\ldots+\delta'_ne_n$, где δ_i,δ'_i – некоторые неотрицательные числа. Положим $N=\{i\,|\,\delta_i>\delta'_i\}$ и

$$u=\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta_i')e_i, \quad v=\sum_{i\notin N}(\delta_i'-\delta_i)e_i, \quad z=\sum_{i\in N}\delta_i' e_i+\sum_{i\notin N}\delta_i e_i. \quad (43)$$

Тогда $x_1+y_1=u+z_1, x_2+y_2=v+z$. Из равенств $\Phi(x+x_1,x_2)=1$ и $\Phi(y+y_1,y_2)=1$ следует, что $\Phi(x+y+x_1+y_1,x_2+y_2)=1$, то есть $\Phi(x+y+u+z,v+z)=1$. Применяя условие *е*, получаем $\Phi(x+y+u,v)=1$. Но последнее есть равенство (33) для вектора $x+y$. Поэтому $A(x+y)=v-u=(x_2+y_2)-(x_1+y_1)=Ax+Ay$.

Равенства (40), (41) можно переписать в виде

$$Ax=\sum_{i=1}^n\beta_i(x)e_i, \quad \beta_i(x)=\begin{cases}\alpha_i(x), i\notin I(x),\\ -\alpha_i(x), i\in I(x).\end{cases} \quad (44)$$

Из аддитивности оператора A вытекает аддитивность функционалов β_i. Но $|\beta_i(x)|=\alpha_i(x)|$ и функции α_i непрерывны. Поэтому на основании леммы 3 можно заключить, что функционалы β_i допускают единственное продолжение до линейных функционалов на $L^2[0,1]$. Чтобы не усложнять обозначений, будем продолженные функционалы обозначать теми же символами β_i.

При любых неотрицательных числах для вектора $x=\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_ne_n$ имеет место равенство $\Phi(x,\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_ne_n)=1$. Следовательно, $\beta_i(x)=\gamma_i$ и $Ax=x$. Это значит, что $\operatorname{Im}A$ содержит положительный конус L^+ линейной оболочки L системы векторов $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Поскольку L^+ – воспроизводящий конус в L, то отсюда следует, что $\operatorname{Im}A=L$. Следовательно, система $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая. Для окончания доказательства достаточности осталось сослаться на лемму 3.

Докажем необходимость. Если предикат Φ является n-мерным линейным, то условия *г* и *е*, очевидно, выполняются. Выполнимость условий *д* и *ж* вытекает из леммы 3.

Теорема 4 доказана.

5. Координатная формулировка для открытого выпуклого множества

Теорема 5. *Для того чтобы предикат* Φ, *определенный на квадрате открытого выпуклого множества* $V \subset L^2[0,1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$, *то*

$$\Phi\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right) = 1;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$, *что для каждого* $x \in V$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ *и единственное подмножество* $I(x) \in \{i = 1, 2, ..., n\}$ *такие, что*

$$\Phi(\alpha_0 x + \sum_{i\in I}\alpha_i e_i, \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i) = 1; \quad (45)$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i > 0; i \in I, \alpha_0 + \sum_{i\in I}\alpha_i = 1; \sum_{i\notin I}\alpha_i = 1; \quad (46)$$

е) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Зафиксируем произвольные положительные числа $\{\alpha_i^0\}_{i=1}^{n+1}$, сумма которых равна 1, и положим

$$a = \alpha_1^0 e_1 + ... + \alpha_{n+1}^0 e_{n+1}. \quad (47)$$

Тогда a принадлежит V. Из рефлексивности предиката Φ и условия *д* следует, что $\alpha_i(x) = \alpha_i^0$ $(i = 1, 2, ..., n+1)$, $\alpha_0(x) = 1$, $I(a) = \varnothing$. Тогда существует такая окрестность $u \subset V$ точки a, что

$$\alpha_i(x) > 0, \quad I(x) = \varnothing \quad (i = 1, 2, ..., n+1; x \in u). \quad (48)$$

Неравенства для α_i вытекают из непрерывности этих функций. Предположим, что вопреки доказательству существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к точке a, для которой $I(x_n) \neq \varnothing$. Поскольку функция $x \to I(x)$ принимает лишь конечное число значений, из этой последовательности можно отобрать такую подпоследовательность, для которой $I(x_n) = I$, где I — какое-нибудь непустое подмножество множества $\{1, 2, ..., n+1\}$. На этой последовательности по условию д будет

$$\alpha_0(x_n) + \sum_{i\in I}\alpha_i(x_n) = 1.$$

В пределе по подпоследовательности, используя условие *е* и равенство $\alpha_0(a) = 1$, получаем

$$1 + \sum_{i\in I}\alpha_i^0 = 1, \quad I \neq \varnothing.$$

Но это противоречит положительности чисел $\alpha_i^0, ..., \alpha_{n+1}^0$. Заметим теперь, что для всех $x, y \in V$ из равенства $\Phi(x, y) = 1$ вытекают равенства

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(y), \quad i = 0, 1, 2, ..., n+1; \quad I(x) = I(y). \quad (49)$$

Действительно, из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(e_i, e_i) = 1$ на основании условия *г* получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)x + \sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \quad \alpha_0(x)y + \sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i) = 1.$$

Сравнивая это равенство с (45), находим

$$\Phi(\alpha_0(x)y + \sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \quad \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i) = 1.$$

В силу единственности чисел $\alpha_i(y)$ и множества $I(y)$ отсюда вытекает (49).

Покажем теперь, что выполняется условие *д* теоремы 1. В качестве U возьмем любое открытое множество, для которого справедливо (48). Пусть последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\subset U$ сходятся к точкам $x, y \in U$ соответственно и $\Phi(x_n, y_n) = 1$. В силу равенства (49) тогда $\alpha_i(x_n) = \alpha_i(y_n)$. По непрерывности отсюда заключаем, что $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 0, 1, ..., n+1$. Кроме того, в силу (48) $I(x) = I(y) = \varnothing$. Таким образом,

$$\Phi(x, \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i) = 1, \Phi(y, \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i) = 1 \ (\beta_i = \alpha_i(x) = \alpha_i(y)).$$

Тогда по условиям *б*, *в* будет $\Phi(x, y) = 1$.

В силу теоремы 1 имеет место равенство (3) с некоторым ортопроектором *P*. Тогда

$$Px = \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)Pe_i, \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x) = 1 \ (x \in V), \quad (50)$$

где $\beta_i(x) = -\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i \in I(x)$ и $\beta_i(x) = -\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i \notin I(x)$. Первое равенство (50) вытекает из (45), второе — из (46). Поскольку V — телесное множество, из (50) следует, что $\operatorname{Im} P$ совпадает с аффинной оболочкой множества точек $Pe_1, ..., Pe_{n+1}$. Проверим, что $\operatorname{rg} P = n$. Для этого достаточно убедиться в аффинной независимости системы точек $Pe_1, ..., Pe_{n+1}$. Предположим, что эта система аффинно зависима, то есть существуют такие числа γ_i, что

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i Pe_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i = 0, (\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}) \neq (0, ..., 0). \quad (51)$$

Пусть a — точка, определенная равенством (47). Подберем число $\lambda \neq 0$ так, чтобы $\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n+1)$. Используя (3), имеем

$$Pa = P\left(\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i)e_i\right), \quad \Phi\left(a\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i)e_i\right) = 1.$$

З н а ч и т, $\alpha_i(a) = \alpha_i^0 + \lambda\gamma_i$ $(i = 1, 2, ..., n+1)$, что противоречит установленным ранее равенствам $\alpha_i(a) = \alpha_i^0$. Достаточность доказана.

Необходимость вытекает из леммы 1.

Теорема 5 доказана.

6. Координатная формулировка для произвольного выпуклого множества

Нам не известно, остается ли верной теорема 5 в случае, когда множество V не является открытым, но $\operatorname{aff} V = L^2[0, 1]$. Верен, однако, вариант этого результата, отличающийся усилением условия *г* и одним дополнительным условием.

Теорема 6. *Для того чтобы предикат* Φ*, определенный на квадрате выпуклого множества* V *с* $\operatorname{aff} V = L^2[0,1]$*, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$, $\gamma\in(0,1)$*, то*

$$\Phi((1-\gamma)x+\gamma x',(1-\gamma)y+\gamma y')=1;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$*, что для каждого* $x\in V$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ *и единственное подмножество* $I(x)\subset\{1,2,...,n+1\}$ *такие, что*

$$\Phi(\alpha_0 x+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\quad \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i)=1; \tag{52}$$

$$\alpha_0>0;\alpha_i>0; i\in I;\ \alpha_0+\sum_{i\in I}\alpha_i=1,\sum_{i\notin I}\alpha_i=1; \tag{53}$$

е) если $x,y\in V$, $\gamma\in(0,1)$ *и при некотором i* $\Phi(\gamma x+(1-\gamma)e_i,\gamma y+(1-\gamma)e_i)=1$*, то* $\Phi(x,y)=1$*;*

ж) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны.*

Лемма 4. *Пусть* V *— выпуклое множество, аффинная оболочка которого совпадает со всем пространством; функция* f*, определенная на* V*, удовлетворяет условию*

$$f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)),\ x,y\in V \tag{54}$$

и функция $|f(x)|$ непрерывна в какой-либо точке $x_0\in V$. Тогда существует единственный функционал F на $L^2[0,1]$ и единственное число C такие, что

$$f(x)=F(x)+C,\ x\in V. \tag{55}$$

Доказательство. Из равенства (54) вытекает, что при любом двоично-рациональном числе $\gamma\in[0,1]$ имеет место равенство

$$f((1-\gamma)x+\gamma y)=(1-\gamma)f(x)+\gamma f(x)\ \ x,y\in V. \tag{56}$$

Поскольку $\operatorname{aff} V=L^2[0,1]$, то, как это следует из формулы (22), каждая точка $\xi\in L^2[0,1]$ может быть представлена в виде

$$\xi=\beta(x-y);\ \beta>0;\ x,y\in V. \tag{57}$$

Более того, число β можно считать двоично-рациональным. Действительно, исходя из (57), возьмем любое рациональное число $\beta>\beta'$. Точка $y'=(1-\frac{\beta}{\beta'})x+\frac{\beta}{\beta'}y\in V$ и имеет место равенство $\xi=\beta'(x-y')$.

Положим для ξ, представленного в виде (57),

$$F(\xi)=\beta(f(x)-f(y)). \tag{58}$$

Проверим корректность этого определения. Пусть одновременно с (58) имеет место равенство $\xi=\beta_1(x_1-y_1)$, $\beta_1>0$ — двоично-рациональное, $x_1,y_1\in V$. Тогда $\beta_1(x_1-y_1)=\beta(x-y)$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}x+\frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}y_1=\frac{\beta}{\beta+\beta_1}y+\frac{\beta}{\beta+\beta_1}x.$$

Точки, фигурирующие в каждой части этого равенства, являются выпуклыми комбинациями точек из V и поэтому сами принадлежат V. Применяя к обеим частям равенства функцию f, получаем с учетом (56)

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x)+\frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}f(y_1)=\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(y)+\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x).$$

Отсюда $\beta_1(f(x_1)-f(y_1))=\beta(f(x)-f(y))$. Таким образом, определение (58) корректно.

Функция F является аддитивной. Действительно, пусть ξ_1,ξ_2 — произвольные точки пространства $L^2[0,1]$. Представим их в виде (57):

$$\xi_1=\beta_1(x_1-y_1);\xi_2=\beta_2(x_2-y_2).$$

Тогда

$$\xi_1+\xi_2=(\beta_1+\beta_2)((\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1+\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2)-$$
$$-(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1+\frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))$$

и (58) и (56) дают

$$F(\xi_1+\xi_2)=(\beta_1+\beta_2)(f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1+\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2)-$$
$$-f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1+\frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))=$$
$$=\beta_1f(x_1)+\beta_2f(x_2)-\beta_1f(y_1)-\beta_2f(y_2)=$$
$$=\beta_1(f(x_1)-f(y_1))-\beta_2(f(x_2)-f(y_2)).$$

Таким образом, $F(\xi_1+\xi_2)=F(\xi_1)+F(\xi_2)$.

Покажем, что функция F непрерывна в нуле. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Воспользуемся леммой 1:

$$\begin{gathered}\xi_k=\beta_k(u_k-v_k);u_k,v_k\in V;\beta_k>0;\\ \|u_k-x_0\|\le 1;\|v_k-x_0\|\le 1;\beta_k\le C\|\xi_k\|.\end{gathered} \tag{59}$$

Рассуждая так же, как и в начале доказательства этой леммы, покажем, что в представлении (59) в качестве β_k можно брать числа, являющиеся квадратами двоично-рациональных чисел. Итак, считаем $\sqrt{\beta_k}$ двоично-рациональными числами. Положим

$$x_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(u_k-x_0),\quad y_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(v_k-x_0).$$

Из последнего неравенства (59) следует, что при достаточно больших k будет $\sqrt{\beta_k}\le 1$. Поэтому $x_k,y_k\in V$. Имеем из (59)

$$\begin{gathered}\xi_k=\sqrt{\beta_k}(x_k-y_k),\ \|x_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|},\\ \|y_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|}.\end{gathered} \tag{60}$$

Тогда

$$F(\xi_k)=\sqrt{\beta_k}\,(f(x_k)-f(y_k)) \text{ и } \\ |F(\xi_k)|\le\sqrt{\beta_k}\,(|f(x_k)|-|f(y_k)|). \quad (61)$$

Из неравенств (60) следует, что последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке x_0. Тогда по условию леммы последовательности $\{|f(x_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{|f(y_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке $|f(x_0)|$ и, следовательно, ограничены. Поэтому из неравенства (61) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}|F(\xi_k)|=0.$$

Поскольку F – аддитивный функционал, то отсюда вытекает, что $F(0)=0$ и, следовательно, функционал непрерывен в нуле. В таком случае F – линейный функционал.

Для любой точки $x\in V$ в силу (58) будет $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Функционал F линеен, так что $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Поэтому при $C=f(x_0)-F(x_0)$ имеем $f(x)=F(x-x_0)+f(x_0)=$ $=F(x)+(f(x_0)-F(x_0))=F(x)+C.$ Равенство (55) доказано.

Проверим единственность функционала F и числа C. Пусть

$$f(x)=F_1(x)+C_1,\quad x\in V, \quad (62)$$

где F_1 – линейный функционал; C_1 – число. Поскольку F_1 – линейный функционал, для числа ξ, представленного в виде (57), будет $F_1(\xi)=\beta(F_1(x)-F_1(y))$. Тогда (62) дает

$$F_1(\xi)=\beta(f(x)-f(y)).$$

Сравнивая это равенство с (58), получаем $F_1=F$. Тогда из (55) и (62) следует, что $C_1=C$.

Лемма 4 доказана.

Замечание. Утверждение о продолжаемости функции *f* остается в силе, если взамен равенства $\operatorname{aff}V=L^2[0,\,1]$ потребовать лишь замкнутость множества $\operatorname{aff}V$. Утверждение о единственности продолжения при этом перестает быть верным.

Доказательство теоремы 6. *Достаточность.* Покажем, что точки $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}$ – аффинно-независимые. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=0. \quad (63)$$

Положим

$$\beta_1=\gamma_1+1;\quad \beta_i=\gamma_i;\quad i=2,3,\dots,n+1. \quad (64)$$

Тогда

$$e_1=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i=1, \quad (65)$$

То есть точка e_1 представима в виде (53). Перейдем от этого представления к представлению (56) по формуле (55):

$$\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i=\sum_{i\notin I}\alpha_i e_i. \quad (66)$$

Тогда

$$\Phi\left(\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\quad \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i\right)=1.$$

Кроме того, согласно условию 1,

$$\Phi(e_1,e_1)=1.$$

Поэтому из условия *д* следует, что

$$I=\varnothing,\quad \alpha_0=1,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_i=0$$

при $i=2,\ 3,\dots,\ n+1$. Переходя от (66) назад к (65) по формулам (58), получаем $\beta_1=1,\ \beta_i=0$ при $i=2,\ 3,\dots,\ n+1$. Тогда из (64) видно, что $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{n+1}=0$. Аффинная независимость точек $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}$ доказана.

Заметим теперь, что условие *е* обобщается в следующей форме, именуемой в дальнейшем условием *е*': *если*

$$x,y\in V,\quad \Phi\left(\gamma_0 x+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i,\quad \gamma_0 y+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i\right)=1, \\ \gamma_0>0,\quad \gamma_i\ge 0,\quad \gamma_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=1, \quad (67)$$

то $\Phi(x,y)=1$. Действительно, заменим в (67) n на k и проверим по индукции справедливость утверждения при k =0, 1,..., n +1. Если k =0, утверждение вытекает из *е*. Пусть утверждение выполняется при некотором k. Перейдем к k +1. Положим

$$x'=(1-\gamma_{k+2})^{-1}\left(\gamma_0 x+\sum_{i=1}^{k+1}\gamma_i e_i\right),$$

$$y'=(1-\gamma_{k+1})^{-1}\left(\gamma_0 y+\sum_{i=1}^{k+2}\gamma_i e_i\right).$$

Посылка утверждения имеет вид

$$\Phi((1-\gamma_{k+2})x'+\gamma_{k+2}e_{k+2},\quad (1-\gamma_{k+2})y'+\gamma_{k+2}e_{k+2})=1.$$

Тогда из е следует, что $\Phi(x',y')=1$, то есть

$$\Phi\left(\gamma'_0 E+\sum_{i=1}^{k+1}\gamma'_i e_i,\gamma'_0 y+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i e_i\right)=1,\ \gamma'_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i=1,$$

где $\gamma'_i=(1-\gamma_{k+2})^{-1}\gamma_i$. Предположение индукции позволяет заключить, что $\Phi(x,y)=1$. Выполнимость условия *е*' доказана.

Поставим в соответствие каждому $x\in V$ точки x_1,x_2 и Ax, определенные равенствами

$$E_1=\sum_{i\in I(x)}\alpha_k(x)e_i, \\ x_2=\sum_{i\notin I(x)}\alpha_k(x)e_i,\alpha_0(x)Ax+x_1=x_2. \quad (68)$$

Пусть числа $\beta_i(x)$ связаны с числами $\alpha_i(x)$ равенствами (53). Тогда

$$Ax=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)e_i. \quad (69)$$

Покажем, что

$$\Phi(x,y)=D(Ax,Ay). \qquad (70)$$

Действительно, пусть $\Phi(x,y)=1$. Тогда из условия *г* следует, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x+x_1,\alpha_0(x)y+x_1)=1. \qquad (71)$$

Но (52) означает, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x+x_1,x_2)=1. \qquad (72)$$

Сравнивая (71) с (72) и используя условия *б* и *в*, получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)y+x_1,x_2)=1. \qquad (73)$$

Согласно условию *д*, последнее равенство может выполняться лишь при $\alpha_0(x)=\alpha_0(y)$, $x_1=y_1$, $x_2=y_2$. Значит, и $Ax=Ay$. Пусть обратно $Ax=Ay$. Поскольку система точек $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – аффинно-независимая, представление (49) для любой точки из aff $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ является единственным. Поэтому из третьего равенства (68) следует, что

$$\alpha_0(x)=\alpha_0(y), \quad x_1=y_1, \quad x_2=y_2.$$

Значит, из равенства $\Phi(\alpha_0(y)y+y_1,\,y_2)=1$ вытекает (73). Вместе с (72) это дает (70). Применив к (71) условие *е*', получаем $\Phi(x,\,y)=1$. Равенство (70) доказано.

Покажем теперь, что отображение *A* является аффинным. Пусть $x,\,x'$ – произвольные точки множества $V;\lambda,\lambda'$ – положительные числа, $\lambda+\lambda'=1$. Нужно проверить, что

$$A(\lambda x+\lambda' x')=\lambda Ax+\lambda' Ax'. \qquad (74)$$

Согласно условию *д* имеют место равенства

$$\begin{gathered}\Phi(\alpha_0x+x_1,x_2)=1, \quad \Phi(\alpha'_0x'+x'_1,x'_2)=1,\\ \alpha=\alpha_0(x), \quad \alpha'=\alpha_0(x').\end{gathered} \qquad (75)$$

Положим

$$\gamma=\frac{\lambda\alpha'_0}{\lambda\alpha'_0+\lambda'\alpha_0}, \qquad \gamma'=\frac{\lambda'\alpha_0}{\lambda\alpha'_0+\lambda'\alpha_0}.$$

Числа γ и γ' – положительные, $\gamma+\gamma'=1$. Как видно из (68) и (53), при некоторых неотрицательных числах δ_i,δ'_i $(i=1,\ldots,n+1)$ будет

$$\begin{gathered}\gamma x_1+\gamma' x'_1=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i e_i, \qquad \gamma x_2+\gamma' x'_2=\sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i e_i,\\ \alpha_0\gamma+\alpha'_0\gamma'+\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i=1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i=1.\end{gathered} \qquad (76)$$

Положим

$$N=\{i\,|\,\delta_i>\delta'_i\},\ \nu=\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta'_i),\ \mu=\sum_{i\notin N}(\delta'_i-\delta_i).$$

Из (76) вытекает равенство

$$\alpha_0\gamma+\alpha'_0\gamma'+\nu=\mu\,.$$

Пусть

$$u=\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta'_i)e_i,\ v=\sum_{i\notin N}(\delta'_i-\delta_i)e_i,\ z=\sum_{i\in N}\delta'_i e_i+\sum_{i\notin N}\delta_i e_i.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\gamma_1x_1+\gamma'_1x'_1=u+z, \quad \gamma_2x_2+\gamma'_2x'_2=v+z,\\ v-u=\gamma_1(x_2-x_1)+\gamma'_1(x'_2-x'_1).\end{gathered} \qquad (77)$$

Условие (66) и третье равенство (77) дают

$$v-u=\gamma\alpha_0Ax+\gamma'\alpha'_0Ax'. \qquad (78)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\lambda=\frac{\gamma\alpha_0}{\gamma\alpha_0+\gamma'\alpha'_0}=\frac{\gamma\alpha_0}{\mu-\nu}, \qquad \lambda'=\frac{\gamma'\alpha'_0}{\gamma\alpha_0+\gamma'\alpha'_0}=\frac{\gamma'\alpha'_0}{\mu-\nu}.$$

Поэтому из (78) следует, что

$$\begin{gathered}\frac{v-u}{\mu-v}=\lambda Ax+\lambda' Ax',\\ \frac{\alpha_0\gamma x+\alpha'_0\gamma' x'}{\mu-v}=\lambda x+\lambda' x'.\end{gathered} \qquad (79)$$

В силу условия *г* из (75) вытекает равенство

$$\Phi(\alpha_0\gamma x+\alpha'_0\gamma' x'+\gamma x_1+\gamma' x'_1,\ \gamma x_2+\gamma' x'_2)=1.$$

Комбинируя его с (77) и (79), получаем

$$\Phi(\mu\frac{(\mu-\nu)(\lambda x+\lambda' x')+u}{\mu}+z,\ \mu\frac{\nu}{\mu}+z)=1. \qquad (80)$$

Положим $\gamma_0=\mu;\ \gamma_i=\min\{\delta_i,\delta'_i\}$, $i=\overline{1,n+1}$. Тогда

$$z=\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_e, \qquad \gamma_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=1.$$

Кроме того, $\mu^{-1}((\mu-v)(\lambda x+\lambda' x')+u)\in V$. Действительно, если $v=0$, то $u=0$ и утверждение очевидно. Если же $v>0$, то и этот факт вытекает из представления в виде выпуклой комбинации

$$\mu^{-1}((\mu-\nu)(\lambda x+\lambda' x')+u)=\frac{\mu-v}{\mu}(\lambda x+\lambda' x')+\frac{v}{\mu}\cdot\frac{u}{v}.$$

Наконец, $\mu^{-1}u\in V$. Таким образом, для равенства (80) выполняется посылка условия *е*'. Его заключение дает

$$\Phi\left(\frac{\mu-v}{\mu}(\lambda x+\lambda' x')+\frac{u}{\mu},\ \frac{v}{\mu}\right)=1.$$

Но последнее равенство является соотношением (72) для точки $\lambda x\neq\lambda' x'$. Поэтому

$$A(\lambda x+\lambda' x')=\left(\frac{\mu-v}{\mu}\right)^{-1}\left(\frac{v}{\mu}-\frac{u}{\mu}\right)=\frac{v-u}{\mu-v}.$$

Вместе с первым равенством (79) это дает требуемую формулу (74).

Поскольку точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – аффинно-независимые, из равенств (69) и (74) вытекает, что β_i – аффинные функционалы на V. Из (58) и условия *ж* следует, что функции $\beta_i|(x)|$ – непрерывные. Тогда по лемме 4 функционалы допускают однозначное продолжение до аффинных функционалов на всем пространстве. Проверим теперь, что уравнения (54) разрешимы при условии $s_1+\ldots+s_{n+1}=1$. Пусть

$s_1,\ldots,\ s_{n+1}$ удовлетворяют этому условию. Покажем, что точка

$$x=\sum_{i=1}^{n+1} s_i e_i$$

является решением (54). Из равенств $\Phi(e_i, e_i)=1$ и условия *д* следует, что $I(e_i)=\varnothing,\quad \alpha_0(e_i)=1,\ \alpha_j(e_i)=\delta_{ij}$. Поэтому из (58) вытекает, что $\beta_j(e_i)=1$. Так как β_j — аффинные функционалы и $s_1+\ldots+s_{n+1}=1$, то $\beta_j(x)=s_i$.

Таким образом, выполняется первое условие леммы 4. Выполнимость второго вытекает из условий *г* и *е*'. Утверждение теоремы в сторону достаточности вытекает из леммы 4.

Проверим *необходимость*. Пусть Ф — *n*-мерный линейный предикат. Тогда выполнимость условий *г* и *е* очевидна. Выполнимость условий *д* и *ж* вытекает из леммы 4.

Теорема 6 доказана.

Выводы

Рассмотрены условия линейности предиката для некоторых областей определения линейного оператора — на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51.

Поступила в редколлегию 15.04.2011.

УДК 519.7

Про систему умов лінійності предиката / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64.

Сформульовані і доведені системи необхідних і достатніх умов лінійності предиката для деяких практично важливих областей визначення лінійного оператора.

Іл. 3. Бібліогр.: 1 найм.

UDC 519.7

About the predicate linearness terms system / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 52-64.

The systems of necessary and sufficient terms of predicate linearness are formulated and well-proven for some practically important ranges of linear operator definition.

Fig. 3. Ref.: 1 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Проанализированы отдельные условия к предикатам с точки зрения экономности и удобства в приложениях, а также процедура практической проверки линейной независимости функционалов. Предложены различные варианты условий. Доказаны соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях линейности предиката.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2]. Здесь рассматриваются условия линейности предиката для конечных или счетных систем.

В соответствии с теоремой Рисса [3] для любого линейного функционала $\alpha(x)$ в $L^2[1,\ 0]$ существует единственный вектор $\alpha \in L^2[1,\ 0]$ такой, что $\alpha(x) = (\alpha, x)$. Это равенство устанавливает канонический изоморфизм между функционалами и векторами (и тем самым оправдывает обозначение их одним и тем же символом). В интегральной форме равенство Рисса имеет вид

$$\alpha(x) = \int_0^1 \alpha(t)x(t)dt.$$

Оно позволяет сформулировать результаты из [1, 2] в некотором окончательном с прикладной точки зрения виде.

1. Общий случай

Предикат Ф, определенный на квадрате выпуклого множества V и удовлетворяющий условиям *а* – *в* из [1, п. 4] (рефлексивность, симметричность, транзитивность), назовем линейным, если существует конечная или счетная система функций $\{\alpha_i \mid i \in J\}$, $\alpha_i \in L^2[1,0]$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^1 \alpha_i(t)\alpha_j(t)dt = \delta_{ij}, \quad i, \quad j \in J, \tag{1}$$

и такая, что для любых $x, y \in V$ равенства

$$\Phi(x, y) = 1 \tag{2}$$

и

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)y(t)dt, \ k \in J, \tag{3}$$

эквивалентны.

Проверим, что это определение эквивалентно исходному определению, данному в [1]. Пусть для предиката Ф выполняется равенство (3) из [1]. Выберем в пространстве $\operatorname{Im} P$ какой-либо ортонормированный базис $\{\alpha k \mid k \in J\}$. Тогда

$$Px = \sum_{k \in J} (x, \alpha_k)\alpha_k \ . \tag{4}$$

Легко видеть, что $Px = Py$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$, $k \in J$. Используя формулу Рисса, последние равенства можно переписать в форме (3). Пусть обратно для предиката Ф существуют функции $\{\alpha_i \mid i \in J\}$, удовлетворяющие (1), и такие, что соотношения (2) и (3) эквивалентны. Определим ортопроектор P равенством (4). Легко видеть, что $Px = Py$ тогда и только тогда, когда выполняется условие *в*. Таким образом, рассматриваемые определения действительно эквивалентны. Как видно из (4),

$$\operatorname{Im} P = L(\{\alpha_i \mid i \in J\}). \tag{5}$$

Если $\operatorname{aff} V = L^2[1,\ 0]$, то линейному предикату соответствует лишь один ортопроектор. Таким образом, в этом случае предикат Ф является n-мерным линейным тогда и только тогда, когда множество J состоит из n элементов.

Требование ортонормированности системы функций не всегда является удобным в приложениях. Заменим его менее ограничительным требованием. Будем для краткости называть конечную или счетную систему $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ базисной, если она является базисом своей линейной оболочки. Если система конечна, она является базисной тогда и только тогда, когда она линейно независима. Если система $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ – счетная, то линейной независимости, вообще говоря, недостаточно для базисности. Приведем одно достаточное условие. Пусть существуют такие положительные константы m и M, что для любого собственного значения каждой из матриц Грама (n=1, 2, 3,...)

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_1,\alpha_2)...(\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)...(\alpha_2,\alpha_n) \\ .... \\ (\alpha_n,\alpha_1)(\alpha_n,\alpha_2)...(\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

справедливо неравенство $m \le \lambda \le M$. Тогда система $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ является базисной и существует базисная система $\{\beta_i \mid i \in J\}$, двойственная к системе $\{\alpha_i \mid i \in J\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на квадрате выпуклого множества V, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы сущест-*

вовала такая базисная система функций $\{\alpha_i \mid i \in J\}$, $\alpha \in L^2[1,\ 0]$, *что для всех* x, $y \in V$ *равенства (2) и (3) являются эквивалентными. При этом, если* $\operatorname{aff} V = L^2[1,\ 0]$, *то предикат* Φ *n-мерный линейный тогда и только тогда, когда множество* J *состоит из* n *элементов.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна – в качестве системы $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ можно взять ортонормированную систему, фигурирующую в определении.

Проверим *достаточность.* Пусть система $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ удовлетворяет условиям теоремы, $\{\beta_i \mid i \in J\}$ – двойственная система. Определим оператор B равенством

$$Bx = \sum_{i \in J} \alpha_i(x)\beta_i. \tag{6}$$

Поскольку $\{\alpha_i \mid i \in J\}$ – базисная система, $\operatorname{Im} B$ является замкнутым множеством. Очевидно, $Bx = By$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i \in J$. Поэтому эквивалентность равенств (2) и (3) означает справедливость формулы (4) [1]. Тогда предикат Φ является линейным в силу леммы 1 [1]. Если множество J состоит из n элементов, предикат Φ является n-мерным в силу леммы 8 [1].

Основной в настоящей статье является теорема 2.

Теорема 2. *Пусть предикат* Φ *определен на квадрате выпуклого множества* V *с замкнутой аффинной оболочкой. Для того чтобы существовала базисная система функций* $\{\alpha_k \mid k \in J\}$, $\alpha_k \in L^2[1,0]$ *такая, что для всех* x, $y \in V$ *равенство* $\Phi(x,y) = 1$ *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)y(t)dt\,, \quad k \in J\,,$$

необходимо и достаточно, чтобы предикат Φ *удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y) = 1$ *и* $\Phi(x',y') = 1$, *то*

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1\,;$$

д) если последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится к* $x \in V$, *последовательность* $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится к* $y \in V$ *и* $\Phi(x_j, y_j) = 1$, *то* $\Phi(x,y) = 1$.

Этот результат является комбинацией теорем 1 и 2.

В случае, когда множество V открыто, условие *д* можно ослабить до формы, фигурирующей в теореме 1. Другие варианты условий *г* и *д* приведены в комментариях к теореме 1.

Будем говорить, что линейно независимая система функций (не обязательно ортогональная) $\{\alpha_k(t) \mid k \in J\}$ определяет линейный предикат Φ, если равенства (2) и (3) эквивалентны.

Следствие 1. *Для того чтобы две линейно-независимые системы функций* $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^{n}$ *и* $\{u_i(t)\}_{i=1}^{n}$ *определяли один и тот же* n*-мерный линейный предикат* Φ, *на квадрате выпуклого множества с замкнутой аффинной оболочкой, необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная матрица*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

такая, что почти при всех $t \in [0,\ 1]$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{11}\alpha_1(t) + a_{12}\alpha_2(t) + \ldots + a_{1n}\alpha_n(t), \\ u_2(t) &= a_{21}\alpha_1(t) + a_{22}\alpha_2(t) + \ldots + a_{2n}\alpha_n(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n(t) &= a_{n1}\alpha_1(t) + a_{n2}\alpha_2(t) + \ldots + a_{nn}\alpha_n(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Это утверждение вытекает из следствия 11 ([1], п. 8).

Предположим теперь, что заданы два линейных предиката Φ_1 и Φ_2. Будем говорить, что предикат Φ_2 грубее, чем предикат Φ_1, если для всех $x, y \in V$ из условия

$$\Phi_1(x,y) = 1 \tag{9}$$

вытекает, что

$$\Phi_2(x,y) = 1\,, \tag{10}$$

и существуют такие x_0, $y_0 \in V$, для которых

$$\Phi_1(x_0,y_0) = 0, \quad \Phi_2(x_0,y_0) = 1\,. \tag{11}$$

Следствие 2. *Пусть* V *– выпуклое множество,* $\operatorname{aff} V = L^2[1,\ 0]$. *Пусть, далее, система* $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ *определяет предикат* Φ_1 *на* $V \times V$, *система* $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ *определяет предикат* Φ_2 *на* $V \times V$. *Для того чтобы предикат* Φ_2 *был грубее предиката* Φ_1, *необходимо и достаточно, чтобы было* $n_2 < n_1$ *и нашлась такая прямоугольная матрица*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n_1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n_2 1} & c_{n_2 2} & \ldots & c_{n_2 n_1} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

что

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &= c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 + \ldots + c_{1n_1}\alpha'_{n_1}, \\ \alpha''_2 &= c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + \ldots + c_{2n_1}\alpha'_{n_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha''_{n_2} &= c_{n_2 1}\alpha'_1 + c_{n_2 2}\alpha'_2 + \ldots + c_{n_2 n_1}\alpha'_{n_1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть P_1 – ортопроектор, порождающий предикат Φ_1; P_2 – ортопроектор, порождающий предикат Φ_2. В соответствии с формулой (3) [1] предикат Φ_2 грубее предиката Φ_1 тогда и только тогда, когда для $x, y \in V$ из равенства $P_1(x-y) = 0$ вытекает, что $P_2(x-y) = 0$ и существуют x_0, y_0 такие, что $P_1(x_0 - y_0) \neq 0$, $P_2(x_0 - y_0) = 0$.

Эти равенства и неравенство являются другой формой записи соотношений (9) – (11). Поскольку $\operatorname{aff} V = L^2[1,\ 0]$, любой элемент $z \in L^2[1,\ 0]$ может быть записан в виде $z = \beta(x-y)$, $x, y \in V$. Поэтому тот факт, что Φ_2 грубее, чем Φ_1, означает, что для любого $z \in L^2[1,\ 0]$ равенство $P_1 z = 0$ влечет равенство $P_2 z = 0$ и существует $z_0 \in L^2[1,\ 0]$ такой, что $P_1 z_0 \neq 0$, $P_2 z_0 = 0$. Другими словами, это значит, что $\operatorname{Ker} P_1 \subset \operatorname{Ker} P_2$ и это включение является строгим. Пользуясь разложением (9) [1], это утверждение можно переписать в виде $\operatorname{Im} P_1 \supset \operatorname{Im} P_2$, причем включение является строгим. Вместе с (5) из [1] это дает

$$\begin{gathered} L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}) \supset L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}), \\ L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}) \neq L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}). \end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку каждая из систем $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ и $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ – линейно независимая, соотношения (14) означают, что $n_2 < n_1$ и существует такая матрица (12), что справедливо (13).

Следствие 2 доказано.

Обсудим вопрос о процедуре практической проверки линейной независимости функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$. Такая система линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^{n}$, $0 \le t \le 1$, связанная с ней формулой Рисса. На практике система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^{n}$ не может быть известна в точности. Обычно известными являются некоторые конечные приближения $\tilde{\alpha}_k = \{\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kp}\}$ функций $\alpha_k(t)$. Разумеется, чтобы точность аппроксимации была приемлемой, необходимо, чтобы $p \ge n$. Таким образом, на практике вопрос о линейной независимости системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ заменяется вопросом о линейной независимости системы $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^{n}$. Оценим погрешность аппроксимации. Положим для $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$

$$Ds = \sum_{k=1}^{n} s_k \alpha_k\ , \quad \tilde{D}s = \sum_{k=1}^{n} s_k \tilde{\alpha}_k\ .$$

Мерой линейной независимости систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^{n}$ могут служить величины

$$\mu = \min_{s \neq 0} \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} \quad \text{и} \quad \tilde{\mu} = \min_{s \neq 0} \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2},$$

являющиеся наименьшими собственными значениями матриц Грама $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\Gamma(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n)$ соответственно. Имеем

$$\left| \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} - \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2} \right| = \frac{\sum\limits_{k,j=1}^{n} s_k s_j ((\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j))}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2}. \tag{15}$$

Для любой симметричной матрицы $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ имеет место неравенство

$$\max \frac{\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj} s_k s_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2} \le n \cdot \max_{k,j} |b_{kj}|.$$

Поэтому из (15) можно заключить, что

$$\left| \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} - \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2} \right| = m \max_{k,j} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)|.$$

Но тогда и

$$|\mu - \tilde{\mu}| \le n \cdot \max_{k,j} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)|. \tag{16}$$

Пусть известна верхняя оценка для точности конечномерной аппроксимации:

$$\|(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)\| \le \varepsilon, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\begin{gathered} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)| = |(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_k - \alpha_k) + \\ + (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j) + (\tilde{\alpha}_k - \alpha_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j)| \le 2c\varepsilon + \varepsilon^2, \end{gathered}$$

где

$$c = \max_{1 \le k \le n} |\tilde{\alpha}_k|\ .$$

Тогда из (16) следует, что

$$|\mu - \tilde{\mu}| \le n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Итак, если после вычисления величины μ (эта величина может быть найдена любым методом отыскания наименьшего собственного значения симметрической неотрицательно определенной матрицы) окажется, что $\tilde{\mu} > n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, то можно гарантировать линейную независимость системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$. В противном случае есть основания подозревать линейную зависимость этой системы. Во втором случае для дальнейшего уточнения можно попытаться экспериментально найти лучшую конечномерную аппроксимацию и исследовать вопрос для нее. Если окажется, что при уточненном исследовании $\tilde{\mu} \le n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, а величина ε достаточно мала, это означает, что если система $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ и не является вырожденной, то она настолько близка к вырожденной, что с практической точки зрения ее можно считать таковой.

Для более детального изучения n-мерных линейных предикатов рассмотрим раздельно основные интересующие нас случаи множества V.

2. Предикаты на всем пространстве

Теорема 3. *Пусть предикат Φ определен на декартовом квадрате пространства $L^2[1,\ 0]$ и удовлетворяет условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi(x + x', y + y') = 1;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, что для каждого $x \in L^2[1,\ 0]$ есть единственный набор чисел $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющих условию

$$\Phi\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = 1\,; \tag{17}$$

е) функции $\alpha_k(x)$ непрерывны.

Тогда существуют такие векторы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset L^2[1,\ 0]$, что

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt\,, \tag{18}$$

системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ являются линейно-независимыми и пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ (понятие пары, присоединенной к n-мерному линейному предикату, было введено в п. 8 из [1].

Это утверждение вытекает из теоремы 3. Верным является и обратное утверждение, а именно: если $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$ — пара систем, присоединенных к предикату Ф, то для этого предиката выполняются условия *г — е*. Это утверждение очевидно.

Следствие 3. *Для того чтобы пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к n-мерному линейному предикату Φ, определенному на квадрате пространства $L^2[1,\ 0]$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам (то есть чтобы система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определяла предикат Ф)*

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)y(t)dt, k = 1,2,\dots,n \tag{19}$$

и чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \alpha_j(t)e_j(t)dt = \delta_{ij}, i, j = 1, 2,\dots, n. \tag{20}$$

Это утверждение вытекает из следствия 12 (см. п. 8 из [1]) и теоремы Рисса.

Если $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ — произвольная линейно независимая система векторов, то условию (20) вместе с ней может удовлетворять двойственная ей система $\{\beta_i\}_{i=1}^n$. Эта система может быть построена по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1n}\alpha_n\,, \\ \beta_2 &= c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{2n}\alpha_n\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= c_{n1}\alpha_1 + c_{n2}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n\,, \end{aligned} \tag{21}$$

где $(c_{ij})_{i,j=1}^n$ — марица, обратная матрице Грама:

$$\Gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_n(t)dt \\ \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_n(t)dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_n(t)dt \end{pmatrix}.$$

При практических вычислениях более удобной является схема нахождения системы $\{\beta_i\}_{i=1}^n$, использующая следующий конечный итерационный процесс. Полагаем $\beta_{i0} = \alpha_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Предположим, что при некотором $m = 1, 2,\dots, n$ уже построена система $\{\beta_{i\,m-1}\}_{i=1}^n$. Вычислим функцию β_{mm} по формуле

$$\beta_{mm} = \frac{\beta_{m\ m-1}}{\int_0^1 \beta_{m\ m-1}(t)\,\alpha_m(t)dt}\,,$$

а затем функции β_{im} $(i = 1, 2,\dots, n,\ i \neq m)$ по формулам

$$\beta_{im} = \beta_{i\,m-1} - \left(\int_0^1 \beta_{i\,m-1}(t)\alpha_m(t)dt\right)\beta_{mm}\,.$$

На n-м шаге получаем требуемый результат: $\beta_i = \beta_{in}$, $i = 1, 2,\dots, n.$

В приложениях одни системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ могут быть предпочтительнее других (например, потому, что удовлетворяют дополнительному требованию — все функции $e_k(t)$ неотрицательны). Поэтому приведем здесь общую конструкцию, позволяющую найти все такие системы векторов.

Следствие 4. *Пусть Φ — n-мерный линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[1,\ 0]$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ — линейно независимая система функционалов, определяющая предикат Ф; $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ — двойственная система. Для того чтобы пара систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к предикату Ф, необходимо и достаточно, чтобы*

$$e_k = \beta_k + \gamma_k, \quad k = 1, 2,.., n\,, \tag{22}$$

где $\{\gamma_k\}_{n=1}^\infty$ — любая система, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \alpha_i(t)\gamma_j(t)dt = 0, i = 1, 2,\dots, n. \tag{23}$$

Доказательство. Действительно, если система векторов $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условию (23), то есть ортогональна подпространству $L\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, то в силу двойственности систем $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ выполняются равенства (20) и пара $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ присоединена к предикату Ф в силу следствия 3. Теперь пусть пара $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ присоединена к предикату Ф. Тогда имеют место равенства (20). Но для двойственной системы $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ также выполняются эти равенства. Тогда $(e_k - \beta_k, \alpha_i) = (e_k, \alpha_i) - (\beta_k, \alpha_i) = \ = \delta_{ki} - \delta_{ki} = 0.$

Следствие 4 доказано.

Мы видели, что n-мерный линейный предикат Ф не определяет однозначно связанную с ним систему $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. Однако если задать систему векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$, то существует лишь одна система функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ такая, что пара $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Ф. Действительно, пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ — две такие системы. Тогда они связаны равенством (8). Имеем

$$(u_i, e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j, e_k). \tag{24}$$

Но согласно следствию 3

$$(u_i, \quad e_k) = \delta_{ik}, \ (\alpha_i, \quad e_k) = \delta_{jk}.$$

Поэтому из (24) следует, что $\alpha_i = \delta_{jk}$. Тогда из (8) вытекает, что $u_i = \alpha_i, \ i = 1, 2, ..., n$.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – одна, а $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ – другая пара систем, присоединенная к одному и тому же предикату Ф. Предположим, что системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ известны. Вопрос заключается в том, чтобы по этим данным найти систему $\{u_k\}_{k=1}^n$. Оказывается, что это может быть сделано даже без знания системы $\{e_k\}_{k=1}^n$. А именно, система $\{u_i\}_{i=1}^n$ может быть найдена по формулам (8), где (7) – матрица, обратная матрице

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \alpha_1(t) g_1(t) dt & \int_0^1 \alpha_1(t) g_2(t) dt & \dots & \int_0^1 \alpha_1(t) g_n(t) dt \\ \int_0^1 \alpha_2(t) g_1(t) dt & \int_0^1 \alpha_2(t) g_2(t) dt & \dots & \int_0^1 \alpha_2(t) g_n(t) dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 \alpha_n(t) g_1(t) dt & \int_0^1 \alpha_n(t) g_2(t) dt & \dots & \int_0^1 \alpha_n(t) g_n(t) dt \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Действительно, если пары $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ присоединены к предикату Ф, то каждая из систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ определяет этот предикат. Тогда согласно следствию 1 имеют место равенства (8), где (7) – некоторая невырожденная матрица. Умножая скалярно каждое из этих равенств на $g_k \ (k = 1, 2, ..., n)$, получаем

$$(u_i, g_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_i, g_k), i, k = 1, 2, .., n. \tag{26}$$

Но в силу следствия 3 справедливо равенство $(u_i, g_k) = \delta_{ik}$. Поэтому (10) может быть переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 g_1) & (\alpha_1 g_2) & \dots & (\alpha_1 g_n) \\ (\alpha_2 g_1) & (\alpha_2 g_2) & \dots & (\alpha_2 g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n g_1) & (\alpha_n g_2) & \dots & (\alpha_n g_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица (7) действительно обратна (25).

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какие-либо системы функционалов, определяющие предикат Ф; $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ и $\{v_k\}_{k=1}^n$ – двойственные к ним системы. Если известны матрица (7), связывающая системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ равенством (8), и система $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, то для нахождения $\{v_k\}_{k=1}^n$ нет необходимости в задании $\{u_k\}_{k=1}^n$. Она может быть найдена по формулам

$$\begin{aligned} v_1 &= d_{11}\beta_1 + d_{12}\beta_2 + \dots + d_{1n}\beta_n, \\ v_2 &= d_{21}\beta_1 + d_{22}\beta_2 + \dots + d_{2n}\beta_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n &= d_{n1}\beta_1 + d_{n2}\beta_2 + \dots + d_{nn}\beta_n, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{28}$$

– матрица, обратная к сопряженной матрице (7). Действительно, согласно следствию 1, системы $\{v_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ связаны равенством (27), где $\{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – некоторая невырожденная матрица. Тогда

$$\delta_{ki} = (u_k, v_i) = (u_k \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\beta_j) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(u_k, \beta_j). \tag{29}$$

Но из (8) следует, что

$$(u_k, \beta_j) = (\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\alpha_s\beta_j) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}(\alpha_s, \beta_j) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\delta_{sj} = a_{kj}.$$

Вместе с (29) это дает

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} a_{kj} = \delta_{ik},$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица (28) действительно обратна сопряженной матрице (7).

Сделаем последнее замечание, относящееся к замене координат в интегральном представлении n-мерного линейного предиката. Пусть, как и ранее, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо пара функционалов и векторов, присоединенная к предикату Ф; $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо система функционалов, определяющая этот предикат. Требуется найти какую-либо систему векторов $\{g_k\}_{k=1}^n$, которая вместе с $\{u_k\}_{k=1}^n$ присоединена к Ф. Эта задача может быть решена без знания $\{u_k\}_{k=1}^n$, если известна система $\{e_k\}_{k=1}^n$ и матрица (7). Искомая система может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} g_1 &= d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + \ldots + d_{1n}e_n, \\ g_2 &= d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + \ldots + d_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n &= d_{n1}e_1 + d_{n2}e_2 + \ldots + d_{nn}e_n, \end{aligned} \qquad (30)$$

аналогичной (27), с той же матрицей (28) – обратной сопряженной матрице (7). Действительно, пусть $\{g_k\}_{k=1}^n$ – система, определяемая равенствами (30). Положим

$$\xi_j = g_j - v_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Тогда из (27), (30) и (22)

$$\xi_j = \sum_{k=1}^n d_{jk}(e_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^n d_{jk}\gamma_k.$$

Поэтому из (23) получаем

$$(\xi_j, \alpha_i) = \sum_{k=1}^n d_{jk}(\gamma_k, \alpha_i) = 0.$$

Вместе с (8) это дает

$$(\xi_j, u_s) = (\xi_j, \sum_{i=1}^n a_{si}\alpha_i) = \sum_{i=1}^n a_{si}(\xi_j, \alpha_i) = 0.$$

Таким образом, система $\{u_k\}_{k=1}^n$ определяет предикат Φ; $\{v_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система $g_k = v_k + \xi_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ $(\xi_k, u_j) = 0$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Тогда, согласно следствию 4, пара систем $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ, что и требовалось доказать.

3. Предикаты на конусе

Теорема 4. *Пусть предикат Φ определен в декартовом квадрате воспроизводящего конуса K пространства $L^2[0, 1]$ и удовлетворяет условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi(x + y', \ y + x') = 1;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, что для каждого $x \in K$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n \subset K$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{1, 2, ..., n\}$ такие, что

$$\Phi(x + \sum_{i \in I}\alpha_i e_i, \sum_{i \in I}\alpha_i e_i) = 1, \ \ \alpha_i > 0 \ \text{при } i \in I; \qquad (31)$$

е) если $x, y \in K$, $\gamma > 0$ и при некотором i

$$\Phi(x + \gamma e_i, \ y + \gamma e_i) = 1, \ \Phi(x, y) = 1;$$

ж) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны на K.

Тогда существуют такие векторы $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n \subset \subset L^2[0, 1]$, что

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 \alpha_k(t)X(t)dt, \ \ x \in K, \qquad (32)$$

системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ являются линейно независимыми и пара систем $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату (понятие присоединенности было введено в п. 5 из [1].

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и леммы 10 из [1]. Обратное утверждение также верно. Если $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – пара систем, присоединенная к предикату Φ, то для предиката Φ выполняются условия *г* – *ж*. Этот факт также вытекает из комбинации теоремы 1 и леммы 10 из [1].

Следствие 5. *Для того чтобы пара $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к n-мерному предикату Φ, определенному на квадрате воспроизводящего конуса K, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам*

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)e_k(t)dt, \ k = 1, 2, ..., n, \qquad (33)$$

(то есть система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определяла предикат Φ) и чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \alpha_i(t)e_i(t)dt = \delta_{ij}, \ \ i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (34)$$

Это утверждение вытекает из следствия 13 из [1] и теоремы Рисса.

В предыдущем параграфе при изучении предикатов, определенных на квадрате всего пространства, мы видели, что для любой системы линейно независимых функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, определяющих предикат Φ, существует система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ. В рассматриваемом сейчас случае это уже не так. Это видно из простого примера. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in L^2[0,1]$, $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, $s_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $s_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $K = \{x \mid (s_1, x) \geq 0, \ (s_2, x) \geq 0\}$, предикат Φ определен условием $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 1, 2$. Тогда не существует векторов $e_1, e_2 \subset K$, удовлетворяющих условию $(\alpha_i, e_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$.

Следствие 6. *Пусть Φ – n-мерный линейный предикат на воспроизводящем конусе K; $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо линейно независимая система функционалов, определяющая предикат Φ, $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система. Для того чтобы существовала система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие векторы γ_k $(k = 1, 2, ..., n)$, что*

$$\beta_k + \gamma_k \in K, \quad K = 1, 2, ..., n \qquad (35)$$

и

$$\int_0^1 \gamma_i(t)\alpha_j(t)dt = 0, \ \ i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (36)$$

Доказательство. Пусть система $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существует. Положим $\beta_k - \gamma_k \in K$, $K = 1, 2, ..., n$. Поскольку система $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ биортогональна к системе $\{\alpha_k\}$, из (6) вытекает (34). Тогда из следствия 5 вытекает, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ. Положим $\gamma_k = e_k - \beta_k \in K$, $K = 1, 2, ..., n$. Условие д, очевидно, выполняется. Согласно следствию 5, справедливо (34). Отсюда вытекает (36).

Следствие 6 доказано.

Задача о нахождении какой-либо системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ при известной системе $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ сводится к решению n систем уравнений при дополнительном условии $x \in K$. Система с номером γ имеет вид

$$\int_0^1 \alpha_i(t)x(t)dt = 0, i = \overline{1,n}. \quad (37)$$

Эта задача является частным случаем задачи бесконечномерного линейного программирования – отсутствует целевая функция. В качестве целевой функции можно взять любой линейный функционал. Непустота множества допустимых точек полученной таким образом задачи линейного программирования эквивалентна наличию вектора x, удовлетворяющего условию (37). На практике функции $\alpha_k(t), t \in [0,1]$ не могут быть известны в точности. Обычно известны их конечномерные аппроксимации. Пусть $\{t_m\}_{m=0}^p$ – одномерная сетка на отрезке [0, 1],

$$0 = t_0 < t_1 < ..... < t_{p-1} < t_p = 1,$$

$\tilde{\alpha}_k$ – кусочно-постоянная функция на [0, 1]:

$$\tilde{\alpha}_k(t) = \alpha_{k,m+1}, t_m \le t < t_{m+1},$$

достаточно близкая к функции α_k в метрике $L^2[0, 1]$. Пусть, далее, $\tilde{x}$ – кусочно-постоянная функция:

$$\tilde{x}(t) = x_{m+1}, \quad t_m \le t < t_{m+1}.$$

В наиболее важном в приложениях частном случае K – положительный конус в $L^2[0, 1]$. В этом случае аппроксимация задачи (37) имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1p}x_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{j-1}x_1 + \ldots + \alpha_{j-1p}x_p = 0, \\ \alpha_{j1}x_1 + \ldots + \alpha_{jp}x_p = 1, \\ \alpha_{j+11}x_1 + \ldots + \alpha_{j+1p}x_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{np}x_p = 0, \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_p \ge 0. \end{gathered} \quad (38)$$

Решение этой задачи, если оно существует, является конечномерным приближением вектора e_j. Таким образом, нам нужно указать способ, позволяющий выяснить, имеет ли решение каждая $(j = \overline{1,n})$ из задач (38), и в положительном случае найти это решение.

Лемма 1. *Для того чтобы каждая из задач (38) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы система неравенств*

$$\begin{gathered} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \ldots + \alpha_{n1}y_n \ge 0, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{n2}y_n \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1p-1}y_1 + \alpha_{2p-2}y_2 + \ldots + \alpha_{np-2}y_n \ge 0 \end{gathered}$$

не имела решений, не удовлетворяющих условию $y_1 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0$.

Этот факт легко выводится из теории линейных неравенств.

Для практического решения задачи (38) удобно добавить искусственную переменную y. Рассмотрим вспомогательную каноническую задачу линейного программирования

$$\min\ y \quad (39)$$

при условии

$$\begin{gathered} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1p}x_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{j-1}x_1 + \ldots + \alpha_{j-1p}x_p = 0, \\ \alpha_{j1}x_1 + \ldots + \alpha_{jp}x_p = 1, \\ \alpha_{j+11}x_1 + \ldots + \alpha_{j+1p}x_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{np}x_p = 0, \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_p \ge 0, y \ge 0. \end{gathered} \quad (40)$$

Множество допустимых точек этой задачи не пусто – оно содержит точку

$$(0, \ldots, 0, 1). \quad (41)$$

Поскольку целевая функция этой задачи неотрицательна на множестве допустимых точек, задача (39), (40) имеет решение. Пусть μ – минимальное значение целевой функции. Очевидно, $\mu \ge 0$.

Проверим, что задача (38) имеет решение тогда и только тогда, когда $\mu = 0$. Действительно, пусть $\mu = 0$. Обозначим через

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y})$$

какое-либо решение этой задачи. Из равенства $\mu = 0$ следует, что $y = 0$. Но тогда $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$ удовлетворяет условиям (38). Обратно, пусть существует точка $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$, удовлетворяющая условиям (38). В этом случае точка

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \quad 0)$$

удовлетворяет условиям (40). Значение целевой функции в этой точке равно 0. Тогда по определению числа μ должно быть $\mu \ge 0$. Следовательно, $\mu = 0$.

Итак, вопрос о нахождении вектора e_j сводится к задаче линейного программирования (39), (40). Точка (41) является опорным планом этой задачи, поскольку n-мерный вектор (0,.., 0, 1, 0,..,0) с числом 1 на j-м месте, связанный с единственной положительной координатой этого плана, является ненулевым. Набор из всех n-мерных векторов вида (0,.., 0, 1, 0,...,0) (число 1 в k-м векторе стоит на k-м месте) является базисом этого решения. Поэтому задача (39), (40) является удобным объектом для применения симплекс-метода.

Коснемся еще нескольких вопросов, аналогичных рассматриваемым в п. 2 для случая задания предиката на квадрате всего пространства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – одна, а $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ – другая пара систем, присоединенных к предикату Φ, определенному на $K\times K$. Если системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ известны, то система $\{u_k\}_{k=1}^n$ может быть найдена по формулам (8) с матрицей (7), обратной матрице (25). То есть, в этом случае ситуация такая же, как и в п. 2. Это, однако, не так по отношению к следующему вопросу. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – пара, присоединенная к предикату Φ; $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо система функционалов, определяющая этот предикат, система $\{g_k\}_{k=1}^n$ вычислена по формуле (30) с матрицей (28) – обратной к сопряженной матрице (7). В случае конуса пара $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ уже не обязательно присоединена к Φ, поскольку может не выполняться условие $\{g_k\}_{k=1}^n\subset K$.

4. Предикаты на выпуклом множестве

Теорема 5. *Пусть предикат Φ определен на декартовом квадрате открытого выпуклого множества V и удовлетворяет следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ и $\Phi(x',y')=1$, то

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2},\quad \frac{y+y'}{2}\right)=1\,;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}\subset V$, что для каждого $x\in V$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ и единственное подмножество $I(x)\subset\{i=1,2,...,n+1\}$ такие, что

$$\Phi\left(\alpha_0 x+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\quad \sum_{i\in I}\alpha_i e_i\right)=1\,; \tag{42}$$

$$\alpha_0>0;\alpha_i>0; i\in I, \alpha_0+\sum_{i\in I}\alpha_i=1; \sum_{i\notin I}\alpha_i=1; \tag{43}$$

е) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны.

Тогдасуществуюттакиевекторы $\{\beta_k\}_{k=1}^n\subset L^2[0,1]$ и такие числа $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$I(x)=\left\{\frac{i}{\beta_i(x)}<0\right\},\quad \alpha_0(x)=\left(\sum_{i\in I}\beta_i(x)\right)^{-1},$$

$$\alpha_i(x)=\alpha_0(x)\left|\beta_i(x)\right|, \tag{44}$$

где

$$\beta_i(x)=\int_0^1 b_i(t)x(t)dt+c_i\ ,\ i=1,2,...,n+1\,, \tag{45}$$

система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ – аффинно независимая,

$$\sum_{i=1}^{n+1}b_i=0\,,\ \sum_{i=1}^{n+1}c_i=1\,, \tag{46}$$

пара систем точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}$, $I(x)$ присоединены к предикату Φ.

Действительно, при выполнении условий *г – е*, согласно теореме 5 (см. п. 5 из [2]), предикат Φ является n-мерным линейным. Тогда из леммы 11 (см. п. 8 из [1]) следует, что $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ – однородные координаты, система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ – аффинно-независимая и пара $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ. Из (62), (59) (см. [2]) и теоремы Рисса вытекают равенства (44), (45). Условие

$$\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i=1\,,\quad x\in V \tag{47}$$

в совокупности с условием разрешимости системы (61) из [2] при любых правых частях, для которых $s_1+...+s_{n+1}=1$, эквивалентно условию аффинной независимости точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ в совокупности с равенствами (46).

Верно и обратное утверждение. Если $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}\in V$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ – аффинно-независимые системы: $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$ – числа, выполняются равенства (46), отображения $I(x)$ и $\alpha_i(x)$ ($i=0,1,...,n+1$) вычислены по формулам (44), (45) и пара $\{c_k\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ, то предикат Φ удовлетворяет условиям *г – е*. Этот факт также следует из комбинации теоремы 5 и леммы 11 из (см. п. 8 из [1]).

Если множество V не является открытым, но $\operatorname{aff}V=L^2[0,1]$, теорема 2 будет справедлива при замене условий *г – е* на условия *г – ж* теоремы 4.

Следствие 7. *Для того чтобы пара однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и аффинно-независимых точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}\in V$ была присоединена к n-мерному линейному предикату Φ, определенному на квадрате выпуклого множества V с $\operatorname{aff}V=L^2[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x,y)=1$ было эквивалентно равенствам*

$$\int_0^1 b_k(t)x(t)dt=\int_0^1 b_k(t)(t)dt\,,$$

$$k=1,2,..,n+1,\ x,y\in V \tag{48}$$

и чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^1 b_i(t)e_i(t)dt=-c_i+\delta_{ij}\,,\quad i,j=1,2,...,n+1\,. \tag{49}$$

Этот результат вытекает из следствия 14 (см. п. 8 из [1]).

Так же, как и в случае конуса, в рассматриваемой ситуации, вообще говоря, нельзя утверждать, что для любой системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$, определяющей предикат Φ, существует система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ такая, что пара $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ. Положительный ответ на этот вопрос означает, что каждая из систем равенств – включений ($i,j=1,2,...,n+1$) $x\in V$

$$\int_0^1 b_1(t)x(t)dt=-c_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 b_{j-1}(t)x(t)dt=-c_{j-1}$$

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt=-c_j+1 \tag{50}$$

$$\int_0^1 b_{j+1}(t)x(t)dt = -c_{j+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int_0^1 b_{n+1}(t)x(t)dt = -c_{n+1}$$

имеет решение. Заметим, что в силу равенств (46), уравнение

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j + 1$$

является следствием остальных уравнений (50) и поэтому может быть опущено. Вопрос о существовании решения системы (50) может быть различным образом сформулирован в виде бесконечномерной задачи выпуклого программирования. Например, формализация может иметь следующий вид. Найти минимум (более точно, инфинум) квадратичного функционала $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{i \neq j}\left(\int_0^1 b_i(t)x(t)dt + c_i\right)^2$$

при условии $x \in V$. Если минимум положителен, то исходная задача (50) не имеет решения, если минимум равен нулю, то решение $\bar{x}$ задачи $g(x) \to \min$, $x \in V$ является решением задачи (50). На практике, разумеется, не может быть найден точный минимум и критерий должен быть загрублен в следующей форме: если минимум меньше наперед заданного малого положительного числа ε, то задача (50) имеет решение, в противном случае – не имеет. Вспомогательная задача может быть эффективно решена методами нелинейного программирования, если реализовано отображение проектирования Q_V на выпуклое множество $\bar{V}$ – замыкание множества V. Например, если V – положительный конус, то $Q_V x = x_+$,

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), x(t) \geq 0, \\ 0, \quad x(t) < 0, \end{cases}$$

если V – шар $\{x / \|x - x_0\| \leq R\}$, то

$$Q_V x = \begin{cases} x, \|x - x_0\| \leq R, \\ x_0 + R\dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, \quad \|x - x_0\| > R. \end{cases}$$

Для решения вспомогательной задачи может быть применен, например, метод проекции градиента.

Отметим, что в основных интересующих нас частных случаях существуют более простые способы решения задачи. Рассмотрим случай $V = \{x \mid \| x - x_0 \| \leq R\}$. Поставим в соответствие системе (50) задачу

$$\min \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \tag{51}$$

при условиях

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j, \quad i \neq j. \tag{52}$$

Пусть μ – минимальное значение целевой функции. Если $\mu > \frac{1}{2}R^2$, то система (50) не имеет решения, если $\mu \leq \frac{1}{2}R^2$, то решение задачи (51), (52) является решением системы (50). Решение задачи (51), (52) нетрудно выписать. Сделаем это. Заметим, что система $\{b_k\}_{k \neq j}$ является линейно независимой. Действительно, из (46) следует, что $b_j \in L(\{b_k\}_{k \neq j})$. Поэтому $L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{b_k\}_{k \neq j})$ и, следовательно, $\mathrm{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \subset L(\{b_k\}_{k \neq j})$. Если система $\{b_k\}_{k \neq j}$ линейно зависима, то, как видно из последнего включения, размерность $\mathrm{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$ меньше n, что противоречит аффинной независимости системы $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$. Поскольку система $\{b_k\}_{k \neq j}$ – линейно независимая, существует двойственная к ней система $\{g_k\}_{k \neq j}$. Функция Лагранжа задачи (51), (52) имеет вид

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 + \sum_{i \neq j}\lambda_i((b_i, x) + c_i), \quad \lambda = \{\lambda_i\}_{i \neq j}.$$

Необходимое и достаточное условие минимума этой задачи заключается в выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial x}L(x, \lambda) = 0, \ \frac{\partial}{\partial \lambda_i}L(x, \lambda) = 0, \quad i \neq j,$$

то есть

$$x - x_0 + \sum_{j \neq j}\lambda_i b_i = 0, \ (b_i, x) + c_i = 0, \ i \neq j. \tag{53}$$

Первое из этих условий означает, что $x - x_0 \in L(\{b_i\}_{i \neq j})$. Поэтому оно может быть переписано в виде

$$x - x_0 + \sum_{j \neq j}\mu_i g_i = 0, \tag{54}$$

где $\{\mu_k\}_{k \neq j}$ – некоторые числа. Найдем их. Для этого умножим скалярно равенство (54) на вектор $b_k (k \neq j)$. С учетом второго равенства (53) и биортогональности систем $\{b_i\}_{i \neq j}$ и $\{g_i\}_{i \neq j}$, получаем

$$\mu_k = c_k + (b_k, x_0), \ k \neq j.$$

Тогда из (54) следует, что решение задачи (51), (52) имеет вид

$$x = x_0 + \sum_{i \neq j}(c_i + (b_i, x_0))g_i.$$

При этом

$$\mu = \frac{1}{2}\| \sum_{i \neq j}(c_i + (b_i, x_0))g_i \|^2.$$

Итак, если

$$\| \sum_{i \neq j}(c_i + (b_i, x_0))g_i \| > R,$$

то система (50) не имеет решения. Если же при любом γ выполняется обратное неравенство, то задача имеет решение и

$$e_i = x_0 + \sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0)) g_i .$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда множество является пересечением положительного конуса и шара $\|x - x^0\| \leq R$. В этом случае (50) можно переписать в виде

$$x \geq 0, \|x - x^0\| \leq R, \ (b_i, x) = -c_i \ , \ i \neq j \ .$$

Поставим в соответствие этой задаче вспомогательную задачу:

$$\frac{1}{2} \| x - x^0 \|^2 \to \min, \ x \geq 0, \ (b_i, x) = -c_i \ , \ i \neq j \ . \quad (55)$$

Пусть μ – минимальное значение целевой функции в этой задаче. Тогда, как и в рассматриваемой ранее ситуации, если $\mu > \frac{1}{2} R^2$, то система (50) не имеет решения, если $\mu \leq \frac{1}{2} R^2$, то решение задачи (55) является решением системы (50). Конечномерная аппроксимация задачи (55) соответствующая одномерной сетке, описанной в предыдущем параграфе, имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{S=1}^{P} (x_S - x_S^0)^2 \to \min \ ,$$

$$b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + ... + b_{iP} x_P + c_i = 0 \ , \ i \neq j \ , \quad (56)$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , ... \ x_P \geq 0 \ ,$$

где $(x_1, ..., \ x_P)$, $(x_1^0, ..., \ x_P^0)$, $(b_{i1}, ..., \ b_{iP})$ – конечномерные приближения векторов x, x^0 и b соответственно. Задача (56) является задачей квадратичного программирования. Для ее решения существуют конечные методы.

Обсудим теперь вопрос о замене координат. Пусть $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ – одна, а $\{u_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ – другая система однородных координат и точек, присоединенные к предикату Φ. Предположим, что системы $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}, \{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ известны. Требуется найти систему $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$. Оказывается, что эта задача имеет однозначное решение даже при отсутствии информации о системе $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$.

Положим, как и ранее,

$$\beta_i(x) = \begin{cases} -\alpha_i(x)/\alpha_0(x), \ i \in I(x), \\ \ \ \alpha_i(x)/\alpha_0(x), \ i \notin I(x). \end{cases} \quad (57)$$

Аналогичным образом определим

$$\lambda_i = \begin{cases} -u_i(x)/u_0(x), \ i \in J(x), \\ \ \ u_i(x)/u_0(x), \ i \notin J(x). \end{cases} \quad (58)$$

Знание системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ равносильно знанию системы $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$. Вычисления в одну сторону проводятся по формулам (57), в другую – по формулам (44). Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$. Имеем

$$\beta_i(x) = (b_i, x) + c_i \ , \ \lambda_i(x) = (l_i, x) + s_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} l_i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} s_i = 1 \ . \quad (59)$$

Поскольку каждая из однородных координат определяет один и тот же предикат Φ, то при всех $x, y \in V$ равенства $\beta_i(x) = \beta_i(y), \ i = 1, 2, ..., n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\lambda_i(x) = \lambda_i(y), \ \ j = 1, 2, ..., n+1,$. В терминах векторов $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$, и $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$ этот факт означает, что при всех $x, y \in V$ равенства $(b_i, x - y) = 0$, $i = 1, 2, ..., n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда $(l_i, x - y) = 0, \ \ i = 1, 2, ..., n+1$. Поскольку aff $V = L^2[0, 1]$, отсюда вытекает, что

$$L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (60)$$

Проверим, что

$$\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \ . \quad (61)$$

Включение $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \subset L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$ очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x \in L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Тогда существуют такие числа $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$x = \gamma_1 b_1 + ... + \gamma_{n+1} b_{n+1} \ . \quad (62)$$

Из третьего равенства (59) при любом γ следует, что

$$0 = \gamma b_1 + ... + \gamma b_{n+1} \ .$$

Вместе с (62) это дает

$$x = t_1 b_1 + ... + t_{n+1} b_{n+1} \ , \quad t_i = \gamma_i + \gamma \ . \quad (63)$$

Положим

$$\gamma = \frac{1}{n+1} (1 - \gamma_1 - \gamma_2 - ... - \gamma_{n+1}).$$

Тогда $t_1 + t_2 + ... + t_{n+1} = 1$ и из (63) следует, что $x \in \text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Равенство (61) доказано. Аналогичное равенство справедливо для системы $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$. Поэтому из (61) следует, что $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = \text{aff}(\{l_k\}_{k=1}^{n+1})$. Но тогда и

$$T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = T(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (64)$$

Поскольку система точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ аффинно-независима, то система векторов $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^{n}$ является базисом в $T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^{n}$. Поэтому из (64) следует, что системы $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^{n}$ и $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^{n}$ являются базисами одного и того же подпространства. Значит, существует невырожденная матрица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & ..... & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & ..... & g_{2n} \\ ..... & ..... & .... & .... \\ g_{n1} & g_{n2} & .... & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (65)$$

такая, что

$$l_i - l_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} (b_j - b_{n+1}). \quad (66)$$

Для любого вектора x, очевидно, выполняются равенства $(l_i, x) - (l_{n+1}, x) = \lambda_i(x) - \lambda_{n+1}(x)$ и

$(b_j,x)-(b_{n+1},x)=\beta_j(x)-\beta_{n+1}(x)$. Поэтому из (66) следует, что при всех x будет

$$\lambda_i(x)-\lambda_{n+1}(x)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(b_j(x)-\beta_{n+1}(x)\right). \quad (67)$$

Найдем матрицу (65). При $x=g_k$, $k=1,2,..,n$ из (67) следует, что

$$\lambda_i(g_k)-\lambda_{n+1}(g_k)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(\beta_j(g_k)-\beta_{n+1}(g_k)\right). \quad (68)$$

Но согласно следствию 7 $\lambda_i(g_k)=\delta_{ik}$. Поэтому выражение (68) может быть следующим образом переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1\,0\ldots 0 \\ 0\,1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\ldots 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11}\ q_{12}\ \ldots q_{1n} \\ q_{21}\ q_{22}\ \ldots q_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1}\ q_{n2}\ \ldots q_{nn} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \beta_1(g_1)-\beta_{n+1}(g_1)\ldots\beta_n(g_1)-\beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2)-\beta_{n+1}(g_2)\ldots\beta_n(g_2)-\beta_{n+1}(g_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1(g_n)-\beta_{n+1}(g_n)\ldots\beta_n(g_n)-\beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица (65) является обратной к матрице

$$\begin{pmatrix} \beta_1(g_1)-\beta_{n+1}(g_1)\ \beta_2(g_1)-\beta_{n+1}(g_1)\ldots\beta_n(g_1)-\beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2)-\beta_{n+1}(g_2)\ \beta_2(g_2)-\beta_{n+1}(g_2)\ldots\beta_n(g_2)-\beta_{n+1}(g_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1(g_n)-\beta_{n+1}(g_n)\ \beta_2(g_n)-\beta_{n+1}(g_n)\ldots\beta_n(g_n)-\beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Из равенства (67) и равенства $\lambda_1(x)+\ldots+\lambda_{n+1}(x)=1$ следует, что

$$\lambda_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\left[1-\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\left(\beta_j(x)-\beta_{n+1}(x)\right)\right], \quad (70)$$

$$\lambda_i(x)=\lambda_{n+1}(x)+\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\left(\beta_j(x)-\beta_{n+1}(x)\right),\ i=\overline{1,n}. \quad (71)$$

Итак, для нахождения системы $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$ известным системам $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ следует:

1. Найти систему $\{\beta_j(x)\}_{j=1}^{n+1}$ по формулам (57);
2. Вычислить элементы матрицы (69);
3. Найти матрицу (65) обращением матрицы (69);
4. Вычислить функцию $\lambda_{n+1}(x)$ по формуле (70);
5. Вычислить функции $\lambda_i(x)$, $i=1,\ 2,..,\ n$ по формуле (71);
6. Положить $J(x)=\{i/\lambda_i<0\}$,

$$u_0(x)==\left(\sum_{i\notin J}\lambda_i(x)\right)^{-1},\ u_i(x)=u_0(x)\left|\lambda_i(x)\right|.$$

5. Эксперименты по нахождению линейного предиката

Предыдущие результаты указывают способ экспериментальной проверки того, что предикат является линейным и, тем самым, определяется каким-то набором (конечным или счетным) интегралов вида (3). Предположим, что нам известны функции $\alpha_k(t)$, $0\le t\le 1$, являющиеся весовыми для этих интегралов. Зная эту систему, можно найти двойственную к ней систему функций $\beta_k(t)$ (в конечном случае для этого существует эффективная процедура), определить ортопроектор P равенством

$$P(x)=\sum_{k\in J}\left(\int_0^1\alpha_k(t)x(t)dt\right)\beta_k$$

и задать предикат Φ формулой $\Phi(x,y)=D(Px,Py)$, где D – тождественный предикат.

Таким образом, вопрос сводится к нахождению функций $\alpha_k\in L^2[0,1]$, фигурирующих в интегралах. При этом единственно доступная из эксперимента информация заключается в значениях $\alpha_k(x)$ интеграла при тех или иных значениях $x\in L^2[0,1]$. Всюду выше, пользуясь взаимно однозначным каноническим соответствием между линейными функционалами и элементами L^2, мы обозначали одним и тем же символом α_k линейный функционал и его весовую функцию в интегральном представлении. Начиная с настоящего места это становится неудобным, и поэтому мы обозначим интеграл (3) другим символом. Кроме того, для простоты обозначений, опустим индекс K. Итак, пусть

$$\alpha(x)=\int_0^1\alpha(x)x(t)dt,\ x\in L^2[0,1]. \quad (72)$$

Требуется по информации о величине $\alpha(x)$ найти функцию $\alpha(t)\in L^2[0,1]$.

Покажем, что эта задача может быть решена с помощью функции Хевисайда (функции единичного скачка):

$$x_\tau(t)=\begin{cases}1,\ 0\le t\le\tau,\\ 0,\ \tau\le t\le 1.\end{cases}$$

Имеем

$$\int_0^\tau\alpha(t)dt=u(\tau), \quad (73)$$

где $u(\tau)=a(x_\tau)$ – известный отклик на единичный скачок (переходная функция). Функции $\alpha(t)$ по предположению являются суммируемыми с квадратом. Отсюда вытекает, что они суммируемы. Но интеграл от суммируемой функции, как функция верхнего предела, является абсолютно непрерывной функцией. Следовательно, эта функция почти везде имеет конечную производную. Более того, эта производная почти везде равна подынтегральной функции. Таким образом, почти всюду

$$\alpha(t) = u'(t) = \frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau). \tag{74}$$

Заметим, что вопрос о значении функции $\alpha(\tau)$ во всех точках не имеет физического смысла: если две функции $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ различаются лишь на множестве меры нуль, то при любых $x(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)dt = \int_0^1 \bar{\alpha}(t)x(t)dt,$$

другими словами, величины $\alpha(x)$ для них совпадают. Поскольку в эксперименте для наблюдения доступны лишь эти величины, отсюда вытекает, что функции $\alpha(t)$ принципиально не могут быть восстановлены в каждой точке. Таким образом, равенство (74) теоретически полностью решает задачу о нахождении весовой функции.

На практике, однако, равенство (74) не может быть применено непосредственно, так как в эксперименте измеряется не значение производной $\frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau)$, а значение самой функции $a(x_\tau)$. Поэтому непосредственное применение формулы (74) на практике означает использование приближенной формулы:

$$\alpha(\tau) \approx \frac{a(x_\tau + t) - a(x_\tau)}{t}, \tag{75}$$

где t – достаточно малое число. Но процедура численного дифференцирования является некорректной задачей – сколь угодно малые погрешности в вычислении функции могут вести к сколь угодно большим погрешностям в вычислении производной. Для того чтобы обойти это препятствие, используются различные методы решения некорректно поставленных задач.

Один из них, принадлежащий М.М. Лаврентьеву, в применении к рассматриваемой задаче состоит в замене уравнения (73) уравнением

$$\int_0^\tau \alpha(t)dt + \lambda \cdot \alpha(\tau) = u(\tau), \tag{76}$$

где λ – положительный малый параметр. Это интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $k(\tau - t)$, где

$$k(\xi) = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Оно является корректным при любом $\lambda \neq 0$. Выпишем его явное решение. Дифференцируя, получаем

$$\lambda\alpha'(t) + \alpha(t) = u'(t), \quad \alpha(0) = \frac{1}{\lambda}u(0).$$

Пользуясь известной формулой для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, находим

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\tau u'(t)e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}}dt + \frac{1}{\lambda}u(0)e^{-\frac{\tau}{\lambda}}.$$

Произведя интегрирование по частям в правой части, получаем

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\lambda}u(\tau) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\tau u(t)e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}}dt. \tag{77}$$

Эта формула уже может быть использована в практических вычислениях. Для этого следует произвести дискретную аппроксимацию функции $u(t)$ и заменить интеграл в (77) какой-либо формулой приближенного интегрирования (например, Симпсона или трапеций).

Приведенный метод обладает тем недостатком, что не указывает способ подбора параметра λ. Приведем другой метод, находящийся в круге тех же идей, но снабженный эффективной процедурой нахождения регуляризующего параметра. Речь идет об обобщенном методе невязки. Рассматривается некорректное уравнение:

$$A\alpha = u, \tag{78}$$

где A – линейный иньективный оператор в $L^2[0,1]$, обратный к которому не является ограниченным. Правая часть уравнения известна приближенно, то есть известна некоторая функция u_ε такая, что

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon, \tag{79}$$

где ε – известное положительное число. Метод состоит в решении вспомогательной задачи:

$$\|\alpha\| \to \inf, \ \|A\alpha - u_\varepsilon\| = 2\varepsilon. \tag{80}$$

Эта задача имеет единственное решение α_ε, причем, если уравнение (48) имеет решение, то α_ε стремится к какому-либо решению (78) при $\varepsilon \to 0$ (то есть метод является регуляризующим по А.И. Тихонову). В нашем случае оператор A имеет вид

$$[0, 1](t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau. \tag{81}$$

Найдем сопряженный вектор A^*. Имеем, используя формулу интегрирования по частям,

$$(A\alpha, \beta) = \int_0^1 \left(\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right)\beta(t)dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 \beta(t)dt\right)\alpha(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$[A^*\beta](\xi) = \int_\xi^1 \beta(t)dt. \tag{82}$$

Правило Лагранжа сводит экстремальную задачу (80) к системе уравнений относительно α и λ (λ – число):

$$\alpha + \lambda A^*(A\alpha - u_\varepsilon) = 0. \tag{83}$$

Используя (81) и (82), перепишем первое из этих уравнений в виде

$$\alpha(\xi) + \lambda\int_\xi^1\int_0^1 \alpha(\tau)d\tau = \lambda\int_\xi^1 u_\xi(t)dt. \tag{84}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\alpha''(\xi)-\lambda\alpha(\xi)=-\lambda u_{\xi}'(\xi),\\&\alpha(1)=0,\ \alpha'(0)=-\lambda u_{\xi}(0).\end{aligned}\tag{85}$$

Нетрудно проверить, что общее решение дифференциального уравнения (85) имеет вид

$$\alpha(t)=c_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t+c_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}t-\lambda\int_0^t u_\varepsilon(\tau)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}(t-\tau)\right)d\tau .$$

Тогда частным решением (85), удовлетворяющим краевым значениям, будет

$$\begin{aligned}\alpha(t)=\lambda\int_0^1 u_\varepsilon(\tau)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau))d\tau\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}}-\\-\lambda\int_0^t u_\varepsilon(\tau)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau))d\tau.\end{aligned}\tag{86}$$

Второе уравнение (83) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_0^1\left[\int_0^\xi \alpha(t)dt-u_\varepsilon(\xi)\right]^2 d\xi=4\varepsilon^2.$$

Подставляя сюда (86), получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sqrt{\lambda}\int_0^1 u_\varepsilon(\tau)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau))d\tau\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\xi}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}}-\\-\lambda\int_0^\xi dt\int_0^t u_\varepsilon(t)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau))d\tau-u_\varepsilon(\xi))^2 d\xi=4\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Обозначим левую часть этого равенства через $f(\lambda)$. По экспериментально найденному приближению $u_\varepsilon(t)$ для функции $u(t)$ можно, пользуясь приближенными формулами интегрирования, вычислить значения $f(\lambda)$ при любом λ. Это позволяет, используя какой-либо метод одномерного поиска, приближенно найти число λ, удовлетворяющее условию $f(\lambda)=4\varepsilon^2$. Подставляя найденное значение λ в (86), получаем требуемое приближение для функции $\alpha(t)$.

Укажем еще два метода, которые могут быть применены для решения некорректной задачи (74). Один из них предназначен специально для уравнений типа свертки, другим является общий прокс-алгоритм.

Рассмотрим теперь пробные функции вида

$$x_{\tau,h}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h},\ t\in[\tau,\tau+h],\\0,\ t\notin[\tau,\tau+h].\end{cases}\tag{87}$$

Из (72) имеем

$$\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\alpha(t)dt=u(\tau),\tag{88}$$

где $u(\tau)=a(x_{\tau,h})$. В силу теоремы о точках Лебега суммируемых функций для почти всех точек τ справедливо равенство

$$\lim\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\alpha(t)dt=\alpha(\tau).\tag{89}$$

Сравнивая (88) и (89), получаем, что почти для всех точек τ будет

$$\alpha(\tau)=\lim_{h\to 0}a(x_\tau,h).\tag{90}$$

Формула (90) теоретически решает задачу о нахождении целевой функции. Ее использование на практике означает применение при достаточно малых h приближенной формулы

$$\alpha(\tau)\approx a(x_\tau,h).\tag{91}$$

Отметим, что с математической точки зрения формулы (75) и (91) совпадают, однако экспериментальные процедуры, предусматривающие их использование, резко различаются. В первом случае используются сигналы с равномерно распределенной плотностью, во втором – с плотностью, сосредоточенной в окрестности фиксированной точки (то есть почти монохроматические). Заметим еще, что конкретный вид функции с плотностью, сосредоточенной в окрестности точки, не является существенным. Взамен функции (87) можно использовать любую неотрицательную функцию $d\tau$, носитель которой находится в малой окрестности точки τ, а площадь соответствующей криволинейной трапеции равна 1. Любая такая функция является приближенной реализацией импульсной функции (δ – функции Дирака), для которой почти всюду

$$\alpha(\tau)=a(\delta_\tau).\tag{92}$$

Последнее равенство вытекает из формулы

$$\int_0^1\alpha(t)\delta(t-\tau)dt=\alpha(\tau).\tag{93}$$

Формула (92) является обобщением формулы (90). Для любой приближенной реализации d_τ функции Дирака имеет место приближенная формула:

$$\alpha(\tau)=a(d_\tau).\tag{94}$$

Эта формула обобщает (91).

С формулами (90) и (92) дело обстоит так же, как и с формулой (74) – их непосредственное применение ведет к решению некорректно поставленных задач – интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. В случае формулы (92) ядром уравнения является δ-функция, в случае (90) ядро имеет вид

$$k(\xi)=\begin{cases}1,\ \xi\in[-h,0],\\0,\ \xi\notin[-h,0].\end{cases}$$

Отметим, что к таким же вопросам приводят задачи определения: 1) формы радиоимпульса, излученного источником, по результатам записи его на больших расстояниях от источника, 2) формы электрического импульса на входе кабеля по результатам записи на выходе, 3) переходных функций в линейных преобразователях автоматического регулирования и многие другие. Для решения этих задач могут быть применены те же методы, что и описанные выше в применении к задаче (74).

Укажем, наконец, еще один способ нахождения функции $\alpha(t)$. На этот раз будем пользоваться отрезками любой непрерывной положительной на [0, 1] функции $\varphi(t)$. Положим

$$\varphi_\tau(t)=\varphi(t)x_\tau(t)=\begin{cases}\varphi(t), & 0\le t\le\tau,\\ 0, & \tau\le t\le 1.\end{cases}$$

Тогда (72) дает

$$a(\varphi_\tau)=\int_0^\tau \varphi(t)\alpha(t)d\tau.$$

Так же, как и в случае равенства (73), имеем почти всюду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}a(\varphi_\tau)=\varphi(\tau)\alpha(\tau),$$

откуда

$$\alpha(\tau)=\frac{1}{\varphi(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}a(\varphi_\tau). \tag{95}$$

При использовании формулы (95) возникают те же вопросы, связанные с некорректностью, что и при использовании (74), (90) или (92).

Выводы

В статье рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Проанализированы отдельные условия к предикатам с точки зрения экономности и удобства в приложениях, а также процедура практической проверки линейной независимости функционалов. Предложены различные варианты условий линейности предиката. Доказаны соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях линейности предиката.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко //Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3.** *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев М.: Наука, 1965. 389 с.

Поступила в редколлегию20.04.2011.

УДК 519.7

Інтегральні представлення лінійних предикатів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78.

Сформульовані і доведені системи необхідних і достатніх умов лінійності предиката для скінченних або зчисленних систем. Запропоновані різні варіанти умов лінійності предиката та процедура практичної перевірки лінійної незалежності функціоналів.

Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Integral presentations of linear predicates / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 65-78.

The formulated and well-proven systems of necessary and sufficient predicate linearness terms for the eventual or countable systems. Offered different variants of predicate linearness terms and practical verification procedure of linear functionals independence.

Ref.: 3 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

ДЕДУКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ЦВЕТА

Рассмотрены три варианта теории цвета, отличающиеся степенью общности похода к исследованию механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Проанализированы возможности и ограничения использования закона Талбота для экспериментального изучения цветового зрения. Сформулированы и обсуждены особенности нескольких систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

После необходимой математической “артподготовки”, продолжавшейся на протяжении предыдущих трех статей [1-3], мы можем приступить к реализации проекта Шредингера – теоретического обоснования колориметрии. Замысел состоит в том, чтобы построить дедуктивную теорию цвета, основанную на специальной системе аксиом (математически сформулированных предположений), истинность которых могла бы быть подтверждена с помощью физического эксперимента, проводимого строго объективными методами без привлечения каких-либо субъективных свидетельств нашего сознания. Если это удастся сделать, то теория цвета выйдет на такой же высокий уровень, на какой в свое время вышла геометрия Евклида, под которой в данном случае понимается не математическое учение, а теория физического пространства, в котором мы живем.

Как показал многовековой опыт развития науки, аксиоматическое построение любой физической теории всегда желательно. Оно позволяет выявить и математически сформулировать все предположения, лежащие в основе теории. Вследствие этого появляется возможность сделать каждое из предположений объектом тщательной опытной проверки. Выясняя степень соответствия каждого предположения фактическому положению дела, мы получаем возможность оценить, насколько точно теория описывает соответствующий ей физический объект. Анализ отклонений изучаемых физических процессов от требований аксиом обычно указывает пути дальнейшего совершенствования теории.

Важно отметить, что одно и то же физическое явление можно успешно описывать не одной, а сразу несколькими различными аксиоматическими теориями, причем эти теории могут даже логически исключать друг друга. Так, например, в теории относительности свойства физического пространства математически описываются средствами геометрии Римана, в которой некоторые из аксиом геометрии Евклида не выполняются. В этом случае каждая из конкурирующих теорий имеет сравнительно с остальными свои достоинства и недостатки и распространяется на некоторую свою область практического применения. Например, геометрия Евклида используется в тех случаях, когда речь идет об областях пространства, соизмеримых с размерами Земли. Для галактических масштабов более уместной может оказаться геометрия Римана.

1. Математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета

Мы будем рассматривать три варианта теории цвета, обозначая их буквами *A*, *B* и *C*. Теория *A* предназначается для локального исследования механизма формирования цвета. Эту теорию целесообразно применять, если нас интересует изучение реакций зрительного анализатора “в малом”. Зафиксируем зрительный стимул x_0 и охватим его какой-нибудь небольшой областью V. Теория *A* дает ответ, как будет реагировать орган зрения на стимулы из области V. Таким образом, теория *A* изучает реакции глаза на стимулы, находящиеся вблизи от заданного зрительного стимула x_0. Теория *B* предназначена для глобального изучения механизма формирования цвета. Эту теорию целесообразно применять, если нас интересуют реакции глаза в достаточно больших внутренних областях множества зрительных стимулов. Теория *C* хороша в тех случаях, когда нас интересуют не только внутренние области множества зрительных стимулов, но и сами границы этого множества. Орган зрения перестает формировать цвета при достаточно малом энергетическом уровне зрительных стимулов. Он также отключается (глаз закрывается) или выходит из строя (глаз слепнет) при чрезмерно высоком энергетическом уровне зрительных стимулов. На базе теории *C* можно вести изучение границ области работоспособности органа зрения. Самой простой из этих теорий является теория *A*. Более сложна теория *B*. Еще сложнее теория *C*, она является обобщением теорий *A* и *B*. Теории

A и *B* не вкладываются друг в друга, они представляют собой различные частные случаи теории *C*.

В этом параграфе для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Для краткости будем называть их цветовыми стимулами. В теории *A* цветовые стимулы описываем следующим образом. Пусть $b_0(\lambda)$ – спектр некоторого фиксированного светового излучения, вблизи которого мы намереваемся вести локальное исследование реакций глаза. Назовем это излучение базовым. Предполагаем, что при каждом значении λ в видимом диапазоне $[\lambda_1, \lambda_2]$ длин волн функция $b_0(\lambda)$ имеет положительное значение. Пусть $b(\lambda)$ – спектр цветового стимула. В качестве математической характеристики цветового стимула возьмем разность

$$x(\lambda) = b(\lambda) - b_0(\lambda). \tag{1}$$

Таким образом, под цветовым стимулом $x(\lambda)$ в теории *A* понимается отклонение спектра $b(\lambda)$ цветового стимула от спектра $b_0(\lambda)$ базового излучения. Цветовой стимул x_0, соответствующий спектру $b_0(\lambda)$, равен нулю: $x_0(\lambda) = b_0(\lambda) - b_0(\lambda) \equiv 0$.

Заметим, что математическая природа функций $b(\lambda)$ и $x(\lambda)$ различна. В то время, как любая из функций $b(\lambda)$ при всех значениях аргумента λ неотрицательная (так как энергия не может принимать отрицательных значений), функции $x(\lambda)$ при различных значениях λ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Будем полагать, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит гильбертову пространству $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют все гильбертово пространство. Это означает, что для каждой функции $x(\lambda)$, являющейся цветовым стимулом, существует конечное значение интеграла

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x^2(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

и что каждой функции $x(\lambda)$, для которой существует интеграл (2), соответствует некоторый вполне определенный цветовой стимул.

В теории *B* в качестве математического описания цветового стимула $x(\lambda)$ принимаем спектр соответствующего светового излучения $b(\lambda)$, так что

$$x(\lambda) = b(\lambda). \tag{3}$$

В этом случае полагаем, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит положительному конусу K гильбертова пространства, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют весь положительный конус. Это означает, что: 1) каждая из функций $x(\lambda)$ может принимать лишь неотрицательные значения; 2) для каждой функции $x(\lambda)$, являющейся цветовым стимулом, существует интеграл (2); 3) каждой функции $x(\lambda)$, для которой существует интеграл (2), соответствует некоторый цветовой стимул.

В теории *C* цветовой стимул $x(\lambda)$ математически описываем разностью

$$x(\lambda) = b(\lambda) - b_1(\lambda), \tag{4}$$

где $b_1(\lambda)$ – спектр произвольно выбранного фиксированного (базового) светового излучения. В отличие от спектра $b_0(\lambda)$ спектр $b_1(\lambda)$ может принимать нулевые значения. В частном случае, когда $b_1(\lambda) \equiv 0$, получаем определение (3); если же принято, что $b_1(\lambda) > 0$ при всех λ ($\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$), то приходим к определению (1). В теории *C* будем полагать, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит некоторому выпуклому множеству V гильбертова пространства, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют все множество V. Для каждого $x(\lambda)$, принадлежащего множеству V, существует интеграл (2).

В теории *A* существует произведение любого цветового стимула на произвольное вещественное число и, кроме того, существует сумма любых двух цветовых стимулов. Это значит: если $x(\lambda)$ – цветовой стимул и μ – вещественное число, то $\mu x(t)$ – тоже цветовой стимул; если $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ – цветовые стимулы, то $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ – тоже цветовой стимул. В теории *B* цветовые стимулы можно умножать только на произвольные неотрицательные вещественные числа; можно, кроме того, складывать любые цветовые стимулы. В теории *C* для произвольно взятых цветовых стимулов $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ можно образовывать линейные комбинации вида $\mu x'(\lambda) + (1-\mu)x''(\lambda)$, где μ – произвольное вещественное число, заключенное в пределах $0 \le \mu \le 1$.

Важно заметить, что математические заменители цветовых стимулов, введенные во всех трех теориях, не вполне точно воспроизводят действительные свойства цветовых стимулов. Так, наше исходное понятие – спектр светового излучения никак не учитывает возможность когерентности или поляризации световых волн. Между тем, когерентное излучение и поляризованный свет, получаемые с помощью лазеров и поляроидов, могут порождать цвета, несколько отличающиеся от тех, которые дает некогерентное и неполяризованное световое излучение того же спектра. Далее, понятие спектра предполагает, что для каждого вещественного значения длины волны λ должно существовать вполне определенное значение спектральной плотности лучистой яркости $b(\lambda)$. Однако современные спектроанализаторы из-за своей ограниченной разрешающей способности и чувствительности могут измерить значения функции $b(\lambda)$ лишь для конечного набора длин волн, причем значения эти выбираются не из континуума, а лишь из конечного множества чисел.

С весьма большой натяжкой можно принять, что любой функции $x(\lambda)$, для которой существует конечное значение интеграла (2), соответствует свой цветовой стимул. Дело в том, что этому условию удовлетворяют не только все функции с конечными значениями, но и весьма экзотические функции, принимающие бесконечные значения на конечном или даже счетном множестве длин волн. Требование о том, что в теории A любой цветовой стимул можно умножить на произвольное вещественное число, также нельзя понимать вполне буквально. Практически оно означает лишь то, что следует ограничиваться выбором достаточно малой области, окружающей световое излучение $b_0(\lambda)$. Тогда умножение цветовых стимулов из этой области на не очень большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа не выведет нас за пределы реальных световых излучений, видимых глазом. В этом же смысле надо понимать и требование теории A о возможности образования суммы двух цветовых стимулов. Два цветовых стимула, взятые из области, окружающей базисное световое излучение $b_0(\lambda)$, дадут сумму в той же области или же вблизи нее.

Требование теории B о возможности умножения цветовых стимулов на любые неотрицательные числа также не вполне точно соответствует действительному положению дел. Так, всегда можно подыскать такой достаточно близкий к нулю множитель, что произведение его на цветовой стимул будет очень мало, и его уже нельзя будет считать цветовым стимулом, так как мы перейдем в область сумеречного зрения, при котором цветовые ощущения вообще не возникают. С другой стороны, можно взять значение множителя настолько большим, что глаз не вынесет столь мощного излучения. Чтобы требования теории B о существовании произведения цветового стимула на неотрицательное число и о существовании суммы цветовых стимулов достаточно хорошо соответствовало действительному положению дела, надо цветовые стимулы брать из области световых излучений, весьма удаленной от границ, определяемых условиями работоспособности зрительного анализатора и неотрицательности спектров световых излучений.

У читателя может возникнуть вопрос, почему именно гильбертово пространство положено в основу всех трех теорий цвета, а не какое-нибудь иное. Следует признать, что такой выбор во многом произволен, он определяется не столько физическими, сколько математическими соображениями. Дело в том, что для достижения изящества математической теории цвета весьма желательно, чтобы для выбранного пространства существовало скалярное произведение. Для гильбертова пространства скалярное произведение существует, и в этом его большое преимущество перед другими видами пространств (например, пространств суммируемых, непрерывных, ограниченных или других видов функциональных пространств). Правда, скалярным произведением обладает также и n-мерное евклидово пространство. Однако для теории цвета оно не всегда удобно, так как обязывает нас ввести конкретное значение размерности пространства n. Число n физически интерпретируется как число точек в спектре. Выбор конкретного значения n для теории цвета не всегда просто выполним, так как он определяется многими факторами, в частности, принятыми на практике способом и точностью измерения спектра. Поэтому гильбертово пространство, не требующее введения числа n, в ряде приложений выглядит более предпочтительным.

С физической точки зрения естественнее, чем гильбертово пространство, выглядит пространство функций, суммируемых с первой степенью, так как для него требуется существование не интеграла (2), а интеграла

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(\lambda) d\lambda \,. \tag{5}$$

Это требование легко интерпретируется физически, поскольку интеграл (5) численно равен энергии светового излучения (в теории B). Однако отсутствие скалярного произведения в этом пространстве делает его гораздо менее удобным с математической точки зрения. Серьезным конкурентом гильбертова пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ является пространство обобщенных функций Шварца. Элементом этого пространства является, кроме обычных функций, еще и δ-функция Дирака, которая физически интерпретируется как линия в спектре. В гильбертовом же пространстве спектральные линии – это “незаконные” объекты. Представляется, что одним из важных направлений дальнейшего развития теории цвета является ее разработка на основе пространства обобщенных функций.

Остановимся теперь на вопросе о физической реализации операций. Эти операции можно свести к операциям над спектрами световых излучений. В теории A сумма $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ цветовых стимулов $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ выражается через спектры $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ световых излучений, соответствующих этим стимулам, и через спектр $b_0(\lambda)$ базового излучения следующим образом:

$$x'(\lambda) + x''(\lambda) = b'(\lambda) - b_0(\lambda) + b''(\lambda) - b_0(\lambda) = \\ = b'(\lambda) + b''(\lambda) - 2\,b_0(\lambda) \,.$$

Спектр светового излучения, соответствующего цветовому стимулу $x'(\lambda) + x''(\lambda)$, равен

$$x'(\lambda) + x''(\lambda) + b_0(\lambda) = b'(\lambda) + b''(\lambda) - b_0(\lambda) \,. \tag{6}$$

Пусть цветовому стимулу $x(\lambda)$ соответствует спектр $b(\lambda)$, тогда произведение $\mu x(\lambda)$ выразится через $b(\lambda)$ и $b_0(\lambda)$ так:

$$\mu x(\lambda) = \mu(b(\lambda) - b_0(\lambda)) - \mu b(\lambda) - \mu b_0(\lambda).$$

Спектр светового излучения, соответствующего цветовому стимулу $\mu x(\lambda)$, равен

$$\mu x(\lambda) + b_0(\lambda) = \mu b(\lambda) - (\mu - 1) b_0(\lambda). \qquad (7)$$

В теории *B* цветовому стимулу $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ соответствует световое излучение со спектром $b'(\lambda) + b''(\lambda)$, а стимулу $\mu x(\lambda)$ – излучение со спектром $\mu x(\lambda)$. В теории *C* определение спектров, соответствующих стимулам $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ и $\mu x(\lambda)$, можно выполнять по формулам (6) и (7) после замены $b_0(\lambda)$ на $b_1(\lambda)$.

Умножение спектра излучения на неотрицательный множитель физически достигается диафрагмированием светового потока или изменением расстояния от источника света до освещаемой им поверхности. Сложение спектров можно осуществить, совмещая в пространстве соответствующие световые потоки. Большие возможности для формирования световых излучений с нужным спектром дает практическое использование закона Талбота, известного в трех вариантах: спектральном, временном, пространственном. Сущность спектрального варианта закона Талбота иллюстрируется диаграммами рис. 1.

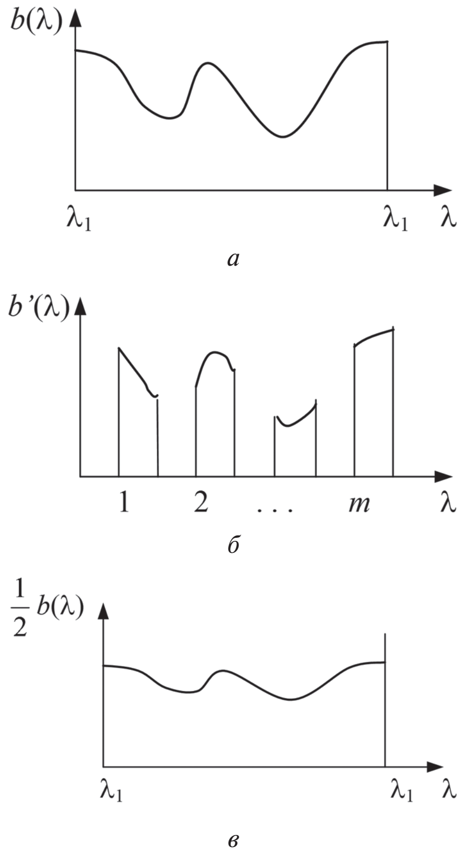


Рис. 1

На диаграмме рис. 1*а* показан спектр $b(\lambda)$ произвольно выбранного светового излучения. На диаграмме рис. 1*б* этот спектр "прорежен", в результате получен спектр $b'(\lambda)$. "Прореженный" спектр получен следующим образом: интервал $[\lambda_1, \lambda_2]$ разбит на m равных участков, на левой половине каждого участка принято $b'(\lambda) \equiv 0$, на правой $b'(\lambda) = b(\lambda)$. Световое излучение с таким спектром можно получить практически, если на пути светового потока, разложенного в спектр, поставить заслонку, имеющую форму гребешка. Если число m зубцов такого гребешка взять достаточно большим, то глаз воспримет излучение $b'(\lambda)$ точно так же, как и излучение со спектром $\frac{1}{2}\, b(\lambda)$ (диаграмма рис. 1*в*)). В этом и состоит эффект закона Талбота. Согласно этому закону, излучение, спектр которого достаточно часто колеблется по мощности при движении вдоль оси длин волн, воспринимается глазом точно таким же, как если бы этот спектр был усреднен и сглажен.

Если на пути светового потока, разложенного в спектр $b(\lambda)$, поставить заслонку, у которой зубцы имеют общую ширину μ, а просвет между ними – ширину $1 - \mu$, измеренную в долях суммарной ширины зубца и просвета, то мы получим излучение, эквивалентное по зрительному восприятию излучению со спектром $\mu\, b(\lambda)$. Таким образом, мы получаем возможность умножать спектр на любое число μ, находящееся в пределах от 0 до 1. Более того, если ширину "зубцов" μ изменять в зависимости от длины волны λ, по некоторому желаемому закону $\mu = \mu(\lambda)$, то из излучения $b(\lambda)$ получим такое излучение, которое будет эквивалентно по восприятию световому излучению со спектром $b'(\lambda) = \mu(\lambda) b(\lambda)$. На получаемые таким образом излучения накладывается одно ограничение: при любых λ должно выполняться $b'(\lambda) \le b(\lambda)$. Если требуется излучение $b(\lambda)$ превратить в излучение, эквивалентное по зрительному восприятию излучению $b'(\lambda)$, то следует взять гребенчатую заслонку, ширина зубцов которой изменяется по закону $\mu(\lambda) = \dfrac{b'(\lambda)}{b(\lambda)}$.

Временной вариант закона Талбота состоит в том, что достаточно быстрые периодические световые мелькания для глаза сливаются в ровный немигающий свет, точно такой же, как если бы наблюдателю было предъявлено одно усредненное излучение. Пусть в первую фазу достаточно быстрого мелькания, длящуюся μ-ю долю периода, на глаз наблюдателя действует излучение со спектром $b_1(\lambda)$, а во вторую – $b_2(\lambda)$. Тогда в сознании наблюдателя возникнет зрительное ощущение, точно такое же, как от излучения со спектром:

$$\mu\, b_1(\lambda) + (1 - \mu)\, b_1(\lambda). \qquad (8)$$

Таким образом, временной вариант закона Талбота дает возможность получать излучение, эквивалентное по своему действию на глаз некоторой линейной комбинации исходных световых излучений. Пространственный вариант закона Талбота имеет аналогичное содержание. Чтобы с его помощью получить излучение, эквивалентное по своему действию на глаз излучению со спектром (8), нужно создать на плоскости достаточно мелкую однородную мозаику из источников света двух типов, причем источники первого типа формируют излучения со спектром $b_1(\lambda)$, второго – $b_2(\lambda)$. Суммарные площади рабочих поверхностей источников первого и второго типа должны находиться в пропорции $\mu : 1-\mu$. Методы физической реализации операций над излучениями, использующие закон Талбота, весьма удобны на практике, однако в теоретическом отношении они не безупречны, так как опираются на некоторые свойства зрительного анализатора, которые сами нуждаются в математической теории, основанной на экспериментального проверяемых постулатах.

2. Аксиомы теории цвета

В этом параграфе сформулированы и рассмотрены несколько систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета (имеются в виду теории A, B и C).

Аксиома предиката. Существует однозначный предикат $y = \Phi\,(\,b_1(\lambda)\,, b_2(\lambda)\,)$, заданный на декартовом квадрате: 1) пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории A; 2) положительного конуса K пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории B; 3) некоторого выпуклого множества V пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории C.

Здесь под функциями имеются в виду цветовые стимулы, предъявленные наблюдателю на полях сравнения, под значением y предиката Φ понимается двоичный ответ наблюдателя. Значению $y = 1$ соответствует ответ "да", означающий совпадение цветов на полях сравнения, значению $y = 0$ соответствует ответ "нет", означающий различие цветов. Предикат Φ интерпретируем как закон функционирования наблюдателя в процессе выработки им сигнала y в ответ на предъявленную ему пару цветовых стимулов ($x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$). Требование существования предиката Φ означает, что при предъявлении любой пары цветовых стимулов из указанной области наблюдатель всегда ставит им в соответствие один из ответов "да" или "нет". Требование однозначности предиката Φ означает, что при повторном предъявлении той же самой пары цветовых стимулов наблюдатель реагирует на нее тем же самым ответом, что и при первом предъявлении.

Аксиома предиката выполняется не всегда. Так, она ложна для слепого или спящего человека, а также для наблюдателя, не желающего участвовать в колориметрическом эксперименте. В этих и других подобных случаях реакция наблюдателя на пару цветовых стимулов не определена, а, следовательно, предикат Φ не существует. Аксиома предиката не будет выполняться также и в том случае, если наблюдатель задался целью давать ответы наобум, вне зависимости от предъявленных ему цветовых стимулов. В этом случае предикат не будет однозначным.

Опыт колориметрических испытаний свидетельствует о том, что даже в нормальных условиях аксиома предиката выполняется не вполне строго. Это проявляется в том, что на границе между равенством и неравенством цветов на полях сравнения существует зона, в которой ответы наблюдателя становятся случайными, и таким образом требование однозначности нарушается. Размер зоны неоднозначности невелик, однако зона, в которой имеет место однозначный ответ "да", еще меньше.

Это положение иллюстрируется диаграммой, представленной на рис. 2. На ней изображена зависимость частоты p ответа "да" от параметра $\mu - 1$, которая наблюдалась в одном из опытов на колориметре Демкиной. В опыте на обоих полях предъявлялись излучения со спектрами $b(\lambda)$ и $\mu\ b(\lambda)$. Каждая точка диаграммы построена на базе ста предъявлении сигналов. Выбор конкретного спектра особого значения не имеет, так как вид кривой мало зависит от $b(\lambda)$. Вероятностный ответ наблюдается при различиях в мощности излучения в пределах от 0,1 до 0,6 %, то есть в зоне 0,5%.

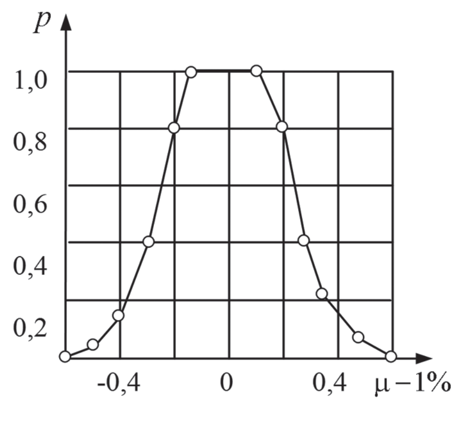


Рис. 2

В то же время зона однозначного ответа "да" составляет всего 0,2%. Приведенная диаграмма, между прочим, показывает, что привлечение глубокой статистической обработки ответов наблюдателя позволяет довести точность установки светового излучения на визуальное равенство по цвету до очень высокого уровня. В описанных выше опытах значение множителя μ, отрегулированное "по цвету", отличалось при повторных испытаниях, как правило, не более, чем на 0,01%. Далеко не в каждом чисто физическом эксперименте можно достичь такого высокого уровня точности измерений, как в психофизическом колориметрическом опыте!

Аксиома рефлексивности. Для любых $x(\lambda)$ $\Phi(x(\lambda), x(\lambda))=1$.

Аксиома симметричности. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda))=1$ следует $\Phi(x_2(\lambda), x_1(\lambda))=1$.

Аксиома транзитивности. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda))=1$ и $\Phi(x_2(\lambda), x_2(\lambda))=1$ следует $\Phi(x_1(\lambda), x_3(\lambda))=1$.

Смысл требования рефлексивности состоит в том, что любые два световые излучения, имеющие одинаковые математические описания, всегда должны порождать равные цвета. О выполнении этого требования можно утверждать лишь с целым рядом оговорок. Рефлексивность заведомо не выполняется, если поля сравнения окружены различными фонами (например, красным и синим). В этом случае вступает в действие механизм зрительной индукции, вследствие чего идентичные световые излучения дают совершенно различные цвета. Чтобы добиться рефлексивности, поля сравнения выбирают не очень большими по угловым размерам и располагают рядом, симметрично относительно друг друга. Поля сравнения помещают в центре поля зрения и окружают нулевым (черным) или произвольным равномерным фоном. Однако даже в этих условиях рефлексивность соблюдается не всегда. Так, наблюдались случаи неравенства цветов при предъявлении наблюдателю поляризованного и неполяризованного света с одинаковым спектром. Если же предъявить когерентное излучение, состоящее из двух гармоник, близких по частоте, то можно наблюдать цветовые биения (периодическое нарастание и убывание яркости цвета во времени).

Если условия рефлексивности обеспечены, то требования симметричности и транзитивности, как показывает практика колориметрических измерений, выполняются автоматически. Впрочем, при поочередном уравнивании по цвету соседних стимулов в последовательности $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$,..., $x_n(\lambda)$, если число n велико, ошибки измерения могут накопиться, и стимулы $x_1(\lambda)$, $x_n(\lambda)$, вопреки транзитивности, в этом случае окажутся разноцветными.

Аксиомам рефлексивности, симметричности и транзитивности должны удовлетворять все три теории зрения для соответствующих им областей определения предиката Ф. Из этих аксиом чисто логически вытекает, что предикат Ф может быть представлен в следующем виде:

$$\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = D(F(x_1(\lambda)), F(x_1(\lambda))). \qquad (9)$$

Здесь F – некоторая функция, заданная на пространстве $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории A, на положительном конусе H – в теории B или на выпуклом множестве V – в теории C. Функцию F интерпретируем как закон преобразования светового излучения, воздействующего на глаз наблюдателя, в цвет зрительного ощущения, осуществляемого зрительной системой человека. Значение функции $F(x(\lambda))$ при заданном цветовом стимуле $x(\lambda)$ понимаем как цвет стимула $x(\lambda)$, возникающий в сознании наблюдателя. Буквой D обозначен предикат равенства

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v, \\ 0, & \text{если } u \neq v. \end{cases} \qquad (10)$$

Предикат $y = D(u, v)$ интерпретируем как операцию сравнения цветов u и v, производимую сознанием наблюдателя и завершающуюся выработкой наблюдателем сигнала y (“да” – если цвета совпадают и “нет” – в противном случае).

Конкретный вид функции F из перечисленных выше аксиом не удается извлечь, поскольку в них содержится недостаточный объем информации о свойствах зрительного анализатора. Для этого нужны дополнительные аксиомы, которые приводятся ниже. Если какая-либо из этих аксиом используется в теории A, то подразумевается, что все фигурирующие в ней цветовые стимулы принадлежат пространству $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$; в теории B – положительному конусу K пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$; в теории C – некоторому выпуклому множеству V пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$. Область $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ назовем полем теории A, область K – полем теории B, область V – полем теории C.

Аксиома равноделения. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует

$$\left(\frac{x_1(\lambda) + x_3(\lambda)}{2}, \frac{x_2(\lambda) + x_4(\lambda)}{2}\right) = 1.$$

Аксиома равноделения может быть проинтерпретирована следующим образом. Предположим, что мы сформировали на полях сравнения два одноцветных стимула $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ (например, оба зеленые) и еще два одноцветных стимула $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ (например, оба красные). Аксиома равноделения гласит, что полусуммы стимулов, сформированных соответственно на левом и правом полях сравнения $(x_1(\lambda) + x_3(\lambda))/2$ и $(x_2(\lambda) + x_4(\lambda))/2$ всегда будут порождать в создании того же самого наблюдателя одинаковые цвета (например, желтые). Аксиома равноделения используется во всех трех теориях.

Аксиома суммы. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует $\Phi(x_1(\lambda) + x_3(\lambda), x_2(\lambda) + x_4(\lambda)) = 1$.

Аксиома суммы означает, что суммы одинаково выглядящих цветовых стимулов выглядят одинаково. Эта аксиома используется в теориях A и B.

В теории C аксиома суммы выполняется не всегда: можно найти стимулы $x_1, x_2 \in V$ такие, что их сумма выйдет за пределы выпуклого множества, то есть $x_1, x_2 \notin V$.

Аксиома деления отрезка. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует $\Phi(\gamma x_1(\lambda) + (1-\gamma)x_3(\lambda),\ \gamma x_2(\lambda) + (1-\gamma)x_4(\lambda)) = 1$ при любом вещественном γ, заключенном в интервале $\gamma : 1-\gamma$.

Эта аксиома означает, что если мы соединим в поле цветовых стимулов точки $x_1(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ отрезками прямых и разделим эти отрезки в отношении $\gamma : 1-\gamma$, то цветовые стимулы, соответствующие точкам деления отрезков, всегда будут выглядеть для наблюдателя одноцветными. Аксиома деления отрезка используется только в теории C, хотя она справедлива во всех трех теориях.

Выводы

Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Проанализированы возможности и ограничения использования закона Талбота для экспериментального изучения цветового зрения. Сформулированы и обсуждены особенности нескольких систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3.** *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78.

Поступила в редколлегию 27.04.2011.

УДК 519.7

Дедуктивна побудова теорії кольору / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85.

Запропоновано три варіанти теорії кольору, що відрізняються рівнем узагальнення підходу до дослідження механізму формування кольору. Сформульовані і обговорені особливості декількох систем аксіом, кожна з яких достатня для побудови на її основі будь-якого з трьох варіантів теорії кольору.

Іл. 2. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Deductive construction of colour theory / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 79-85.

Three variants of colour theory with different generality degree are offered to colour forming mechanism research. Formulated and discussed to the feature of a few axioms systems, each of which suffices for a construction on it basis of any colour theory three variants.

Fig. 2. Ref.: 3 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

МОДЕЛИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ВИДЕ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОДНО- И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека – однопараметрические операторы; операторы с распадающимися и разностными ядрами, описывающие процессы цветовой инерции в случаях, когда излучения имеют спектральную плотность, не меняющуюся во времени или постоянный спектральный состав и изменяющуюся во времени интенсивность; двухпараметрические семейства операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-4], в которых развивается метод компараторной идентификации функций человеческого зрения в виде линейных предикатов. Предложены математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Введены понятия линейного предиката и линейного n-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора. Рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета.

В настоящей работе продолжается рассмотрение моделей цветового зрения человека. Предложены интегральные модели некоторых его функций. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

1. Однопараметрические представления

Пусть t – какое-либо действительное число; L_t^2 – пространство измеримых на $(-\infty, t]$ действительных функций $x(\tau)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau, \tag{1}$$

K_t – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$ (t – параметр), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t \times K_t$ и удовлетворяет условиям *а – в* из [1, п. 4] (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Нас интересуют условия, при которых для всех $t \in (-\infty, \infty)$ и всех $x, y \in L_t^2$ имеет место равенство

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau, \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)y(\tau)d\tau \right), \tag{2}$$

где D – предикат равенства; $B(\xi)$ – некоторая неотрицательная функция на полуоси $[0, \infty)$.

Для формулировки этих условий поставим в соответствие каждой функции $x \in L_t^2$ и положительному числу ξ функцию

$$\tilde{x}_\xi(\tau) = x(\tau - \xi). \tag{3}$$

Функция $\tilde{x}_\xi$ является сдвигом функции x вправо на величину ξ (см. рис. 1).

Имеем

$$\int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} \tilde{x}_\xi^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} x^2(\tau - \xi) d\tau = e^{\xi} \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Отсюда, в частности, видно, что $\tilde{x}_\xi \in L_{t+\xi}^2$.

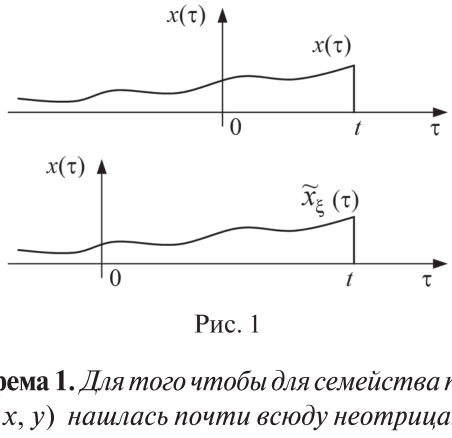


Рис. 1

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\infty e^{\xi} B^2(\xi) d\xi < \infty, \int_0^\infty B(\xi) d\xi = 1, \tag{5}$$

и такая, что имеет место равенство (2), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любых $t \in (-\infty, \infty)$ *и* $x, x', y, y' \in K_t$ *из равенств*

$$\Phi_t(x, x') = 1, \quad \Phi_t(y, y') = 1 \tag{6}$$

следует, что

$$\Phi_t(x + y, x' + y') = 1; \tag{7}$$

д) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ *и любого* $x \in K_t$ *существует единственное неотрицательное число* $[fx](t)$ *такое, что*

$$\Phi_t(x + y, [fx](t)) = 1 \tag{8}$$

(в (8) тем же символом $[fx](t)$ *обозначена функция на* $(-\infty, t]$*, тождественно равная числу* $[fx](t)$*;*

е) величина $[fx](t)$ *как функция от* x *на* K *непрерывна в метрике* L_t^2*;*

ж) для любого $t \in (-\infty, \infty)$*, любых* $x, y \in K_t$ *и любого положительного* ξ *из равенства*

$$\Phi_t(x, y) = 1 \tag{9}$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) = 1. \tag{10}$$

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем t и функции $x, y \in K_t$. Из (8) имеем

$$\Phi_t(x[fx](t)) = 1, \; \Phi_t(y[fy](t)) = 1.$$

Поэтому условие *г* дает

$$\Phi_t(x + y, [fx](t) + [fy](t)) = 1. \tag{11}$$

Но из условия *д* вытекает, что единственным неотрицательным числом c, при котором выполняется равенство $\Phi_t(x + y, c) = 1$, является число $[f(x + y)](t)$. Таким образом, из (21), [3] можно заключить, что

$$[f(x + y)](t)[fx](t) + [fy](t). \tag{12}$$

Это означает, что $[fx](t)$ – аддитивный функционал на положительном конусе K_t пространства L_t^2. Из условия *д* вытекает, что этот функционал непрерывен. Поскольку положительный конус K_t в пространстве L_t^2 является воспроизводящим, то функционал $[fx](t)$ однозначно продолжается до аддитивного, непрерывного, а следовательно, и линейного функционала на L_t^2. Согласно теореме об общем виде линейного функционала на пространстве L_t^2, существует функция $A_t(\tau)L_t^2$ такая, что

$$[fx](t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} A_t(\tau) x(\tau) d\tau \tag{13}$$

для любого $x \in K_t$.

Поскольку равенство (13) справедливо при любом t и любом $x \in K_t$, то, заменяя t на $t + \xi$ для любого $\tilde{x} \in K_{t+s}$ получаем

$$[f\tilde{x}](t + \xi) = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} A_{t+\xi}(\tau) \tilde{x}(\tau) d\tau.$$

В частности, при любой функции $x \in K_t$ и любом положительном ξ для функции $\tilde{x}_\xi$, связанной с функцией x равенством (3), имеем

$$[f\tilde{x}_\xi](t + \xi) = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} A_{t+\xi}(\tau) x(\tau - \xi) d\tau. \tag{14}$$

Далее, из (8) и условия *ж* следует, что

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, ([\tilde{fx}](t))_\xi) = 1. \tag{15}$$

Поскольку f является постоянной функцией при изменении τ на $(-\infty, t]$, то ее сдвиг по формуле (3) является той же константой на рассматриваемой полуоси $(-\infty, t + \xi]$, то есть

$$\widetilde{[fx](t)}_\xi = [fx](t).$$

Отсюда, из (15) и условия *д* следует, что

$$[f\,\tilde{x}_\xi](t + \xi) = [fx](t).$$

Подставляя в это выражение формулы (13) и (14), получаем

$$\int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} A_{t+\xi}(\tau) x(\tau - \xi) d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} A_t(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Сделав в левом интеграле замену переменной интегрирования по формуле $\eta = t + \xi - \tau$, а в правом – по формуле $\eta = t - \tau$, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{\tau+\xi-\eta} A_{t+\xi}(t + \xi - \eta) x(t - \eta) d\eta = \\ &= \int_0^{\infty} e^{\tau-\eta} A_t(t - \eta) x(t - \eta) d\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

Сократив последнее равенство на e^t и положив

$$y(\eta) = x(t - \eta), a(\eta) = A_{t+\xi}(\eta) e^{\xi} - A_t(t - \eta),$$

находим

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta} a(\eta) y(\eta) d\eta = 0. \tag{17}$$

Обозначим через L^2 гильбертово пространство измеримых на $[0, \infty)$ функций $y(\eta)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta} y^2(\eta) d\eta < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{\infty} e^{-\eta} u(\eta) v(\eta) d\eta.$$

Нетрудно видеть, что $a(\eta) \in L^2$. Поскольку $x(\tau)$ в (16) – произвольная неотрицательная функция пространства L_t^2, то $y(\eta)$ в (17) – произвольная неотрицательная функция пространства L^2. Поэтому (17) – произвольная неотрицательная функция пространства L^2. Поэтому (17) означает, что вектор ортогонален положительному конусу пространства L^2. Но этот конус воспроизводящий. Значит, вектор a ортогонален всему пространству и, следовательно, a =0 как элемент L^2, то есть почти при всех $\eta \in x[0, \infty)$

$$A_{t+\xi}(t+\xi-\eta)e^{\xi}-A_t(t-\eta)=0.$$

для всех t и всех положительных ξ. В частности, при $t=1$

$$A_{\xi}(\xi-\eta)e^{\xi}-A_0(-\eta)=0. \qquad (18)$$

Положим

$$B(\eta)=e^{-\eta}A_0(-\eta), \quad \eta\geq 0. \qquad (19)$$

Тогда, заменяя переменную η переменной $\tau=\xi-\eta$, из (18) получаем

$$A_{\xi}(\tau)=e^{-\tau}B(\xi-\eta), \quad \infty<\tau\leq\xi.$$

Вместе с (13) это дает

$$[fx](t)=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad x\in K_t. \qquad (20)$$

Проверим выполнимость (5). Имеем

$$\int_{-\infty}^{0}e^{\xi}B^2(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{0}e^{-\xi}A_0^2(-\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}A_0^2(\tau)d\tau.$$

Поскольку $A_0(\tau)\in L_0^2$, то последний интеграл конечен. Таким образом, первое соотношение (5) выполняется. Далее, пусть функция $x_0(\tau)\equiv 1$ на $(-\infty,\ t]$. В силу рефлексивности $\Phi_t(x_0,x_0)=1$. Но тогда из условия *д* следует, что $[fx_0](t)$. Поэтому (20) дает

$$1=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда вытекает второе соотношение (5).

Проверим, что функция $B(\xi)$ $(\xi\geq 0)$ является неотрицательной всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль. Пусть S – множество точек положительной полуоси, в которых функция B принимает отрицательные значения и пусть мера этого множества не равна нулю. Зафиксируем какое-либо t. Пусть $S_t=t-S$, то есть

$$S_t=\{\tau\,|\,t-\tau\in S\}.$$

Положим

$$x(\tau)=\begin{cases}1, \text{ если } \tau\in S_t,\\ 0, \text{ если } \tau\in(-\infty,t)\setminus S_t.\end{cases}$$

Очевидно, $x\in K_t$. Из (20) имеем

$$[fx](t)=\int_{S_t}B(t-\tau)d\tau=\int_{S}B(\xi)d\xi.$$

Следовательно, $[fx](t)<0$, что противоречит условию *д*.

Проверим выполнимость равенства (2). Пусть функции *x, y* принадлежат $x,y\in K_t$ и для них справедливо равенство

$$\Phi_t(x,y)=1. \qquad (21)$$

Комбинируя (21) с (8), получаем

$$\Phi_t(y,[fx](t))=1. \qquad (22)$$

Но согласно условию *д* единственной постоянной функцией, удовлетворяющей такому условию, является $[fx](t)$. Следовательно,

$$[fy](t)=[fx](t). \qquad (23)$$

Пусть обратно выполняется (23). Это равенство вместе с (8) дает

$$\Phi_t(x,[fy](t))=1.$$

Но

$$\Phi_t(y,[fy](t))=1.$$

Из двух последних равенств и условий *б* и *в* вытекает (21). Таким образом, для всех $x,y\in K_t$ равенство (21) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (23), то есть

$$\Phi_t(x,y)=D([fx](t),[fy](t))=1.$$

Вместе с (20) это дает (2). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и любых $x,y\in K_t$ справедлива формула (2) с некоторой почти всюду неотрицательной функцией $B(\xi)$, удовлетворяющей условиям *д*. Справедливость *г* следует из аддитивности функционала (20). Для проверки справедливости *д* достаточно показать, что для любой функции $x\in K_t$ существует единственное положительное число C такое, что

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau=C\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau.$$

Как видно из второго равенства (5), это действительно так, причем $C=[fx](t)$, где $[fx](t)$ задается равенством (20). Далее, положим

$$A(\xi)=B(\xi)e^{\xi}, \quad \xi\geq 0. \qquad (24)$$

Тогда

$$[fx](t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}A(t-\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (25)$$

Из неравенства (5) имеем

$$\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}A^2(t-\tau)d\tau=e^{t}\int_{0}^{\infty}e^{\xi}B^2(\xi)d\xi<0.$$

Следовательно, функция $A(t-\tau)\in L_t^2$. Тогда, как видно из (25), $[fx](t)$ – линейный функционал на L_t^2. Поэтому выполняется условие *е*. Осталось проверить условие *ж*. Равенство (9) означает, что

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)y(\tau)d\tau, \qquad (26)$$

а равенство (10) – что

$$\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t+\xi-\tau)x(\tau-\xi)d\tau=\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t+\xi-\tau)y(\tau-\xi)d\tau. \qquad (27)$$

Для того чтобы удостовериться, что из (26) вытекает (27), достаточно в (26) ввести новую переменную интегрирования $u=\tau+\xi$.

Теорема 1 доказана.

Обсудим теперь физический смысл этого результата из условий *в* – *ж*. Основным приложением этой теоремы является описание инерционных процессов. Предположим, что на вход преобразователя подается какой-либо физический сигнал $x(t)$, изменяющийся во времени. В силу инерционных свойств любого преобразователя выходной сигнал $[fx](t)$ в момент времени t зависит не только от значения входного сигнала в момент времени t, но и от предыстории процесса. Проиллюстрируем это более подробно на примере естественного преобразователя – зрительной системы человека.

Пусть наблюдателю предъявляется излучение постоянного относительного спектрального состава с интенсивностью, изменяющейся во времени. Обозначим через $x(\tau)$ яркость излучения в момент времени τ. Для любого $t\in(-\infty,\infty)$ эффективной яркостью стимула $x(\tau)$ $(-\infty<\tau\le t)$ в момент времени t называется яркость $[fx](t)$ постоянного во времени по интенсивности стимула, с которым стимул $x(\tau)$ фотометрически уравнивается визуальным способом в момент времени t. Разумеется, такое определение предполагает, что для любого переменного во времени стимула и любого момента времени существует единственный постоянный во времени стимул, вызывающий такую же реакцию в данный момент времени. Это предположение подтверждается многочисленными экспериментами А.В. Луизова. Выходным сигналом зрительной системы является ощущение – объект, не определенный четко и не допускающий непосредственного измерения. Изучение инерции зрительной системы позволяет ввести некоторый объективный косвенный способ измерения ощущения. А именно, ощущение переменного во времени стимула $x(\tau)$ в момент времени t можно измерить, сравнивая его с ощущением от постоянного во времени стимула. Таким образом, эффективная яркость может быть интерпретирована как величина ощущения. Будем обозначать факт уравнивания визуальным способом ощущений от излучения стимулов $x(\tau)$ и $y(\tau)$ $(\tau\le t)$ в момент времени t равенством $\Phi_t(x,y)=1$. Тогда условие *д* является формальной записью предположения о существовании эффективной яркости.

В качестве пространства входных сигналов мы выбрали L_t^2 с экспоненциальным весом. Наличие достаточно быстро убывающей на $-\infty$ весовой функции необходимо для того, чтобы постоянный во времени сигнал был элементом рассматриваемого пространства. Но выбор именно экспоненты носит случайный характер. Легко, однако, видеть, что для описания явления наличие экспоненты не существенно – в основной результат, формулу (2), экспонента не входит и такой же результат был бы получен при других весовых функциях, достаточно быстро убывающих на $-\infty$. Более того, выбор в качестве входного пространства функций, суммируемых с квадратом, не существенен, поскольку использованная нами теорема о представлении линейного функционала в виде интеграла справедлива для любых пространств. Разница сказалась бы лишь на виде неравенства (5).

Смысл условия *е* заключается в малом изменении ощущения яркости при малом изменении самой яркости. Смысл условия *ж* заключается в том, что если стимулы x и y вызывают одинаковую реакцию в момент времени t, то $\tilde{x}_\xi$ и $\tilde{y}_\xi$ – те же стимулы, но сдвинутые во времени на величину ξ, вызывают одинаковую реакцию в момент $t+\xi$.

Выполнимость условия аддитивности *г*, в отличие от остальных условий, не является ясной априори. Поэтому это условие нуждается в экспериментальной проверке. Обсудим существующие экспериментальные данные. Хорошо известно, что периодическое излучение с достаточно высокой частотой воспринимается зрительной системой так же, как постоянно действующее (эффект слияния мельканий). Более того, согласно закону Талбота, эффективная яркость такого излучения совпадает с его средним значением на периоде. Проверим, что из закона Талбота вытекает свойство аддитивности эффективной яркости для таких излучений. Действительно, пусть $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ – два периодических излучения с частотой ω, а $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – постоянные во времени излучения с яркостями, совпадающими со средними яркостями излучений $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$, то есть

$$\bar{x}_i=\int_a^{a+T}x_i(\tau)d\tau \quad (i=1,2),$$

где a – произвольное число; T – период. Тогда согласно закону Талбота

$$[fx_1](t)=\bar{x}_1,\quad [fx_2](t)=\bar{x}_2. \tag{28}$$

Если частота ω достаточно велика, то она будет сверхкритической и для излучения $x_1(\tau)+x_2(\tau)$. Но средняя яркость этого излучения равна $\bar{x}_1+\bar{x}_2$. Поэтому из закона Талбота следует, что

$$[f(x_1+x_2)](t)=\bar{x}_1+\bar{x}_2.$$

Сравнивая это равенство с (28), получаем

$$[f(x_1+x_2)](t)=[fx_1](t)+[fx_2](t),$$

что, как было видно из доказательства теоремы 1, эквивалентно условию аддитивности *г*.

Пусть теперь $\{x_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность излучений, $x(\tau)$ – какое-либо излучение. Нами был сформулирован и экспериментально проверен обобщенный закон Талбота, заключающийся в том, что при достаточно больших K излучения $x_k(\tau)$ и $x(\tau)$ визуально неразличимы тогда и только тогда, когда на любом интервале $[t_1,t_2]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}x_n(\tau)d\tau=\int_{t_1}^{t_2}x(\tau)d\tau.$$

Авторами данной работы изучались следствия из этого закона. В частности, было показано, что из обобщенного закона Талбота следует аддитивность эффективной яркости для существенно более широкого класса излучений, чем периодические излучения со сверхкритической частотой.

2. Распадающиеся и разностные ядра

Обозначим при произвольном числе t через L_t^2 пространство измеримых на $[0,1]\times(-\infty,t]$ действительных функций $x(\lambda,\tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau.$$

Пусть $\bar{K}_t$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим однопараметрическое семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\bar{K}_t\times\bar{K}_t$ и удовлетворяет условиям *а – в*. В настоящем параграфе устанавливаются условия, при которых существуют n функций $g_i(\lambda)$, $0\le\lambda\le1$, и неотрицательная функция $B(\xi)$, $\xi\ge0$ такие, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и всех $x,y\in K_t$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \tag{29}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(y),\quad i=1,2,...,n, \tag{30}$$

где

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\int_0^1\int_{-\infty}^t g_i(\lambda)B_i(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \tag{31}$$

Отметим два частных случая этой задачи. Предположим вначале, что рассматриваемая функция $x(\lambda,\tau)$ на самом деле не зависит от τ. Для того чтобы избежать в дальнейшем недоразумений, будем обозначать всюду на протяжении этого параграфа такие и только такие функции символами u и v, возможно с какими-либо индексами. Для функций, не зависящих от τ, сформулированный выше вопрос примет следующий вид. При каких условиях, накладываемых на семейство предикатов, существует линейно независимая система функций $\{g_i(\lambda)\}_{i=1}^n$, $\lambda\in[0,1]$, такая, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_t(u,v)=1 \tag{32}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(u)=\alpha_i(v),\quad i=1,2,...,n, \tag{33}$$

где

$$\alpha_i(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{34}$$

Ответ на этот вопрос содержится в теореме 4 (см. п. 3. из [3]). Будем для краткости именовать совокупность условий этой теоремы условиями A.

Другой частный случай функций из $\bar{K}_t$ доставляют функции x вида

$$x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)\cdot u(\lambda), \tag{35}$$

где $\beta(\tau)\in K_t$, $u(\lambda)\in K$. Для таких функций требуемый результат состоит в следующем. Для любой функции $u\in K$ существует почти всюду неотрицательная функция $B_u(\xi)$, удовлетворяющая условиям *д*, и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta\cdot u,c\cdot v)=1 \tag{36}$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $c=f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta)=\int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau)d(\tau). \tag{37}$$

Для справедливости этого условия необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 1. Ниже эти условия именуются условиями B.

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ нашлась система линейно независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и неотрицательная функция $\beta(\xi)$, удовлетворяющая условиям д и такая, что равенство (29) эквивалентно равенствам (30), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A,B и*

г) для любых $t\in(-\infty,\infty)$ и $x,x',y,y'\in\bar{K}_t$ из равенств

$$\Phi_t(x,x')=1 \text{ и } \Phi_t(y,y')=1 \tag{38}$$

следует, что

$$\Phi_t(x+y,x'+y')=1; \tag{39}$$

д) для любого $t\in(-\infty,\infty)$ и любого $x\in\bar{K}_t$ существует (не единственная) функция $u\in K$ такая, что

$$\Phi_t(x,u)=1; \tag{40}$$

е) для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty\subset\bar{K}_t$, сходящейся к нулю в метрике $\bar{L}_t^2$, существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty\subset K$, сходящаяся к нулю в метрике $L^2[0,1]$ и такая, что

$$\Phi_t(x_k,u_k)=1,\quad k=1,2,....$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть x – произвольный элемент из $\bar{K}_t$; u – элемент из K такой, что имеет место равенство (40). Существование такого u гарантируется условием *д*. Положим

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i(u),\quad i=1,2,...,n, \tag{41}$$

где α_i – линейный функционал, определенный равенствам (34). Следует проверить, что это определение корректно в том смысле, что величина $\alpha_i(u)$ не зависит от выбора элемента u, удовлетворяющего равенству (40). Пусть V – какой-либо другой элемент из K такой, что $\Phi_t(x,v)=1$. Тогда в силу условий *б* и *в* будет $\Phi_t(u,v)=1$. Поэтому имеет место равенство (33), что и требовалось. Заметим, что отсюда, в частности, вытекает равенство

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\alpha_i(u),\quad i=1,2,...,n,\quad u\in K. \tag{42}$$

Проверим теперь, что для всех $x, y \in \bar{K}_t$ равенства (29) и (30) эквивалентны. Пусть выполняется (29). Подберем в соответствии с условием *д* элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x,u)=1, \quad \Phi_t(y,v)=1. \qquad (43)$$

Из (29) с помощью условий *б – в* можно вывести, что $\Phi_t(u,v)=1$ и поэтому в силу эквивалентности равенств (32) и (33) будет выполняться (32). Тогда согласно определению (40) должно выполняться равенство (30). Пусть обратно имеет место (30). По определению величин $\alpha_i^{(t)}$ найдутся такие $u, v \in K$, что

$$\begin{gathered}\Phi_t(x,u)=1, \quad \Phi_t(y,v)=1,\\ \alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y)=\alpha_i(v).\end{gathered} \qquad (44)$$

Тогда из (30) следует, что $\alpha_i(u)=\alpha_i(v)$. Но в таком случае выполняется (32). Из (33) и первых двух равенств (44) с помощью условий *б – в* можно вывести (29).

Итак, нужно лишь доказать, что функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеют вид (31). Проверим вначале, что эти функционалы аддитивны. Пусть x, y – произвольные элементы из $\bar{K}_t$; u, v – элементы из K, соответствующие им в силу условия *д*. Тогда имеет место равенство (43). Из условия *г* следует, что $\Phi_t(x+y, u+v)=1$. По определению функционалов имеем

$$\begin{gathered}\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y)=\alpha_i(v),\\ \alpha_i^{(t)}(x+y)=\alpha_i(u+v).\end{gathered}$$

Но функционалы α_i аддитивны. Поэтому из трех последних равенств вытекает аддитивность функционалов $\alpha_i^{(t)}(x), i=1,2,\ldots,n.$

Покажем, что эти функционалы непрерывны в нуле. Пусть $\{x_k(\lambda,\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность функций из $\bar{K}_t$, сходящаяся к нулю. Согласно условию *е* существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю и такая, что $\Phi_t(x_k,u_k)=1$. Поскольку α_i – линейные функционалы, то

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i(u_k)=0, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Тогда из определения (13) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i^{(t)}(x_k)=0, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Итак, функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ на $\bar{K}_t$ аддитивны и непрерывны в нуле. Поскольку $\bar{K}_t$ – воспроизводящий конус в пространстве $\bar{L}_t^2$, эти функционалы являются однозначно продолжаемыми до линейных функционалов на всем пространстве $\bar{L}_t^2$. Согласно теореме об общем виде таких функционалов, существуют функции $A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\in \bar{L}_t^2$ такие, что

$$\begin{gathered}\alpha_i^{(t)}(x)=\int_0^1\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau,\\ x\in\bar{K}_t, \quad i=1,2,\ldots,n.\end{gathered} \qquad (45)$$

Применим полученный результат к функциям вида (35). Из (36) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta)u)=1.$$

Поскольку равенства (29) и (30) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=f_u^{(t)}(\beta)\cdot\alpha_i^{(t)}(u), \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (46)$$

Исключив из первых двух равенств системы (46) величину $f_u^{(t)}(\beta)$, получаем

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u)\cdot\alpha_2^{(t)}(u)=\alpha_2^{(t)}(\beta u)\cdot\alpha_1^{(t)}(u). \qquad (47)$$

Это равенство справедливо для всех векторов $u\in K$. Однако линейные функционалы $\alpha_i^{(t)}$ определены при любых (не обязательно положительных) $u\in L^2[0,1]$. Покажем, что равенство (47) справедливо при всех таких u. Зафиксируем функцию $\beta(\tau)$ и рассмотрим произвольный элемент $u_0\in L^2[0,1]$. Поскольку положительный конус K является воспроизводящим в этом пространстве, то найдутся такие элементы $u_1, u_2\in K$, что

$$u_0=u_1-u_2. \qquad (48)$$

Рассмотрим линейные функционалы на R^2:

$$\begin{gathered}a_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2),\\ b_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\beta(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2)),\end{gathered}$$

где $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in R^2$. При $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ элемент $u=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2\in K$. Следовательно, для u имеет место равенство (47). Таким образом, при любых $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ будет

$$b_1(\gamma)a_2(\gamma)=b_2(\gamma)a_1(\gamma). \qquad (49)$$

Перепишем это равенство в координатах

$$\begin{gathered}(b_{11}\gamma_1+b_{12}\gamma_2)(a_{21}\gamma_1+a_{22}\gamma_2)-\\ -(b_{21}\gamma_1+b_{22}\gamma_2)(a_{11}\gamma_1+a_{12}\gamma_2)=0,\end{gathered} \qquad (50)$$

где

$$\begin{gathered}b_{ik}=\alpha_i^{(t)}(\beta u_k), \quad a_{ik}=\alpha_i^{(t)}(u_k),\\ i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2.\end{gathered}$$

Это значит, что многочлен от двух переменных, стоящий в левой части равенства (50), равен нулю на положительная квадранте. Но для многочлена это означает тождественное равенство нулю. Следовательно, (50) справедливо при всех γ_1,γ_2. В частности, при $\gamma_1=1, \gamma_2=-1$, поскольку $b_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\beta u_0)$, $a_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(u_0)$, равенство (50) или, что то же самое, (49), примет вид

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u_0)\alpha_2^{(t)}(u_0)=\alpha_2^{(t)}(\beta u_0)\alpha_1^{(t)}(u_0).$$

Таким образом, равенство (47) справедливо при всех n. Для любого линейного функционала α будем через $\operatorname{Ker}\alpha$ обозначать множество всех его нулей:

$$\operatorname{Ker}\alpha=\{x\,|\,\alpha(x)=0\}.$$

Из (47) видно, что при обращении в нуль функционала $\alpha_1^{(t)}(u)$ должен обращаться в нуль хотя бы один из функционалов, стоящих в левой части равенства. Поэтому, обозначая функционалы $u \to \alpha_i^{(t)}(\beta u)$ через $\alpha_i^{(t)}(\beta)$, получаем $\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \subset \operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)} \cup \operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta)$. Если линейное многообразие является частью теоретико-множественного объединения двух других линейных многообразий, то оно обязано быть частью одного из них. Поэтому из последнего включения следует, что

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)} \tag{51}$$

или

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta). \tag{52}$$

В случае (51) линейные функционалы $\alpha_1^{(t)}$ и $\alpha_2^{(t)}$ линейно зависимы. Но в соответствии с определением (41), $\alpha_1^{(t)}(u) = \alpha_i(u)$, причем, согласно предположению, функционалы $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые. Таким образом, включение (51) не может иметь места и, следовательно, справедливо (52). Но в таком случае существует такое число $f^{(t)}(\beta)$, что

$$\alpha_1^{(t)}(\beta) = f^{(t)}(\beta)\alpha_1^{(t)}.$$

Повторяя это рассуждение при $i = 2, 3, \ldots, n$, получаем аналогичное равенство для всех i, то есть при всех $u \in L[0,1]$:

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f^{(t)}(\beta)\alpha_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{53}$$

Это равенство является усилением равенства (46), так как из (53) видно, что величина $f_n^{(t)}(\beta)$ на самом деле не зависит от n. Поэтому равенство (37) можно переписать в виде

$$f^{(t)}(\beta) = \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \tag{54}$$

Подставляя в равенство (53) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u), f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (45), (54) и (34) соответственно, получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\beta(\tau)u(\lambda)A_i^{(t)}(\lambda,\tau)d\lambda d\tau =$$
$$= (\int_{-\infty}^{t}\beta(\tau)B(t-\tau)d\tau)\cdot(\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda).$$

Воспользовавшись теоремой Фубини, перепишем последнее равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^{t}\beta(\tau)(e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda = 0.$$

Здесь $u(\lambda)$ – произвольный элемент положительного конуса K, то есть функция от переменной λ

$$\int_{-\infty}^{t}\beta(\tau)(e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau$$

ортогональна к этому конусу. Поскольку этот конус является воспроизводящим, отсюда следует, что эта функция равна нулю. Повторяя это рассуждение для функции $\beta(\tau)$, получаем, что

$$e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau) = 0.$$

Поэтому (45) можно переписать в виде (31). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$ обладает тем свойством, что для него равенство (29) и (30) эквивалентны. Для функций $u \in K$ равенство (31) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u) = (\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)d\tau).$$

Поскольку функция $B(\xi)\,(\xi \geq 0)$ удовлетворяет равенству (5), это дает

$$\alpha_i^{(t)}(u) = \int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda.$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит, и левая часть не должна зависеть от t. В силу эквивалентности между равенствами (29) и (30) и ограничение предиката Φ_t на $K \times K$ не зависит от t. Таким образом, на $K \times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u, v \in K$ равенство $\Phi(u, v) = 1$ эквивалентно равенствам $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\alpha_i(u) = \int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda,$$

$\{g_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ – линейно независимая система. Это и означает выполнимость условий A.

Проверим теперь выполнимость условий B. Пусть функция $x(\lambda,\tau)$ имеет вид (35). В этом случае равенство (31) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = (\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{55}$$

Зафиксируем u и положим

$$f^{(t)}(\beta) = \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \tag{56}$$

Рассмотрим наряду с функцией $x(\lambda,\tau)$ функцию $x_\beta(\lambda,\tau) = f^{(t)}(\beta)\cdot u(\lambda)$. Эта функция не зависит от τ и, как видно из (55),

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \alpha_i^{(t)}(f^{(t)}(\beta)u), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу эквивалентности между равенствами (29) и (30) отсюда следует, что $\Phi_t(\beta u, f^{(t)}(\beta)u) = 1$. С другой стороны, если константа C при данных u и β удовлетворяет условию $\Phi_t(\beta u, Cu) = 1$, то в силу эквивалентности между равенствам (29) и (30) должно быть $\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \alpha_i^{(t)}(Cu)$. Используя (55), перепишем это равенство в виде

$$(\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau) =$$
$$= (\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot C\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда, из (56) и равенства (5) следует, что $C = f^{(t)}(\beta)$. Таким образом, условие B выполняется.

Проверим теперь выполнимость условий *г – е*. Выполнимость 4 очевидна. Пусть $x(\lambda,\tau)$ – произвольный элемент конуса $\bar{K}_t$. Положим при $\lambda\in[0,1]$

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau. \qquad (57)$$

Покажем, что $u\in K$. Неотрицательность функции $u(\lambda)$ вытекает из неотрицательности функции $B(\xi)$. Далее имеем

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^{t}(e^{\sqrt{t-\tau}}B(t-\tau))\cdot(e^{-\sqrt{t-\tau}}x(\lambda,\tau))d\tau\le$$

$$\le\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{t-\tau}B^2(t-\tau)d\tau}\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}\le$$

$$\le C\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Мы воспользовались при оценке неравенством (5). Таким образом,

$$\int_0^1 u^2(\lambda)d\lambda\le C^2e^{-t}\int_0^1\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \qquad (58)$$

Так как $x(\lambda,\tau)\in L_t^2$, то из последнего равенства видно, что $u\in L^2[0,1]$. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(u)$, $i=1,2,...,n$. Тогда $\Phi_t(x,u)=1$. Выполнимость условия *д* проверена. Заметим теперь, что неравенство (58) может быть переписано в виде

$$\|u\|\le Ce^{-\frac{t}{2}}\|x\|. \qquad (59)$$

Здесь $\|u\|$ – норма элемента u в метрике $L^2[0,1]$; $\|x\|$ – норма элемента x в метрике $\bar{L}_t^2$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t$ – произвольная, сходящаяся к нулю последовательность. Для каждого x_k выберем элемент $x_k\in K$ по формуле (57). Тогда $\Phi_t(x_k,u_k)=1$ и, как видно из (59), последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в метрике $L^2[0,1]$. Выполнимость 6 проверена.

Теорема 2 доказана.

Обсудим теперь физический смысл условий теоремы. Рассмотрим задачу о математическом описании цветовой инерции. Пусть экран равномерно освещен излучением с изменяющимся во времени спектральным составом. Предполагается, что коэффициент диффузного отражения экрана во всех точках является одинаковым. Обозначим через $x(\lambda,\tau)$ спектральную плотность лучистой яркости в момент времени τ. Пусть $[\lambda_1,\lambda_2]$ – диапазон видимого спектра. С математической точки зрения конкретное значение величин λ_1 и λ_2 не существенно. Поэтому будем считать $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$. Пусть t – произвольно фиксированный момент времени. Будем говорить, что два излучения $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ *t-метамерны*, если они фотометрически уравниваются в момент времени t. Записывать утверждение о *t-мета-мерности* будем в виде $\Phi_t(x,y)=1$. Мы предполагаем, что Φ_t – отношение эквивалентности на множестве излучений. В этом смысл условий *а – в*.

Частным случаем рассматриваемых излучений являются излучения со спектральной плотностью, не изменяющейся во времени. Для таких стимулов t-метамерность означает классическую метамерность, то есть визуальную неразличимость в любой момент времени. Условия *А* являются математической записью законов Грассмана – аддитивности, трехмерности (при $n=3$) и непрерывности. Справедливость этих законов показана многочисленными экспериментами и в настоящее время является общепризнанной.

Другим частным случаем являются излучения с постоянным спектральным составом и изменяющейся во времени интенсивностью, то есть излучения со спектральной плотностью вида $x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)u(\lambda)$, где $u(\lambda)$ – спектральная плотность постоянного во времени излучения, $\beta(\tau)$ – интенсивность как функция времени. Такие излучения рассматривались в предыдущем параграфе и там обсуждался смысл предположений *В*.

Перейдем теперь к условиям *г – е*. Предположение *г* об аддитивности свойства t-метамерности в частных случаях постоянных во времени излучений или излучений с постоянным спектральным составом, но изменяющейся во времени интенсивностью означает соответственно закон аддитивности Грассмана и предположение об аддитивности эффективной яркости. Поэтому для указанных частных случаев предположения *г* можно считать экспериментально обоснованными.

Пусть теперь $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ – какая-либо пара излучений, для которой

$$\int_0^1 x(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda=\int_0^1 y(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda, \qquad (60)$$

где $g_i(\lambda)$ – функции, фигурирующие в формуле (34). Произведем замену метамерных излучений, согласно которому зрительное ощущение таких стимулов совпадает в любой момент времени. В литературе отсутствуют данные о каких-либо специальных исследованиях по проверке такой замены. Известно, однако, что при скачкообразной замене во времени излучения $u(\lambda)$ метамерным излучением $v(\lambda)$ наблюдатель не замечает каких-либо изменений в зрительном ощущении. На этом факте основан колориметрический метод, при котором излучения сравниваются не при одновременном, а при последовательном предъявлении. В другом частном случае, когда стимулы не зависят от времени, указанный принцип замены является основным следствием законов Грассмана. Таким образом, для некоторых классов излучений этот принцип выполняется. Очевидно, предположение об аддитивности t-метамерности хорошо согласуется с принципом замены метамерных излучений.

Пусть $u_1(\lambda),u_2(\lambda),u_3(\lambda)$ – какая-либо система излучений, удовлетворяющая тому условию, что любое излучение может быть фотометрически уравнено смешением излучений этой системы. В колориметрии такие системы называются основными. Тогда для любого излучения $x(\lambda, \tau)$ однозначно определены три таких функции времени $\beta_1(\tau), \beta_2(\tau), \beta_3(\tau)$, что в любой момент времени t излучения $x(\lambda, \tau)$ и $\sum_{i=1}^{3}\beta_i(\tau)u_i(\lambda)$ визуально не различимы, то есть

$$\Phi_t(x, \sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i) = 1. \qquad (61)$$

Именно этот факт лежит в основе цветного телевидения. Роль $x(\lambda, \tau)$ в (61) играет передаваемое излучение, $u_i(\lambda)$ – спектральные характеристики чувствительности трех каналов камеры, $\beta_i(\tau)$ – напряжения сигналов, передаваемых по этим каналам. В частных случаях излучений, не меняющихся во времени или меняющихся по интенсивности при постоянном спектральном составе, величины $\beta_i(\tau)$ при всех τ аддитивно зависят от излучения $x(\lambda, \tau)$. Поэтому есть основания считать, что этот факт имеет место и в общем случае. Если бы было получено экспериментальное подтверждение этого предположения, то оно служило бы сильным аргументом в пользу предположения об аддитивности t-метамерности.

Итак, существуют экспериментальные данные, в тех или иных случаях подтверждающие аддитивность t-метамерности, но не известны какие-либо экспериментальные исследования, направленные непосредственно на проверку этого предположения.

Обсудим теперь физический смысл условия *д*. Пусть $x(\lambda, \tau)$ – произвольное излучение; $\beta_i(\tau)$ – функции времени, согласованные с x условием (61). В силу оговоренного в предыдущем параграфе предположения о существовании эффективной яркости для любого момента времени t существуют три такие числа $f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)$, что

$$\Phi_t(\beta_i u_i, f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i) = 1.$$

Тогда из аддитивности отношения Φ_t следует, что

$$\Phi_t(\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i, \sum_{i=1}^{3}f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i) = 1. \qquad (62)$$

Полагая

$$u = \sum_{i=1}^{3}f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i, \qquad (63)$$

из (61) и (62) получаем

$$\Phi_t(x, u) = 1.$$

Другими словами, в силу экспериментального факта (61) предположение *д* справедливо, если справедливо предположение *г* об аддитивности.

Из практики цветного телевидения хорошо известно, что передачу слабого сигнала $x(\lambda, \tau)$ можно обеспечить низкими напряжениями $\beta_i(\tau)$, передаваемыми по каналам. То есть если

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0,$$

то для функций β_i^k $(i = 1, 2, 3)$, согласованных с x_k условиями (61), тоже должно быть

$$\lim_{k\to\infty}\beta_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку эффективные яркости непрерывно зависят от яркостей, то и

$$\lim_{k\to\infty} f_{u_i}^{(t)}(\beta_i^{(k)}) = 0.$$

Тогда, как это видно из (63), последовательность u_k тоже сходится к нулю. Таким образом, выполнимость на практике условия е не вызывает сомнения.

3. Двухпараметрические семейства

Условимся обозначать через $L^2(R^2)$ пространство измеримых на вещественной плоскости R^2 функций, удовлетворяющих условию

$$\iint e^{-(u^2+v^2)}x^2(u, v)dudv < \infty, \qquad (64)$$

$K(R^2)$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_z(x, y)$ ($z \in R^2$ – параметр), каждый из которых определен на $K(R^2) \times K(R^2)$ и удовлетворяет условиям *а – в*. В настоящем параграфе устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы имело место равенство

$$\begin{aligned}\Phi_z(x, y) = D(&\iint Q(u-\xi, v-\eta)x(u, v)dudv,\\ &\iint Q(u-\xi, v-\eta)y(u, v)dudv),\end{aligned} \qquad (65)$$

где D – предикат равенства, $z = (\xi, \eta) \in R^2$, $Q(u, v)$ – некоторая почти всюду неотрицательная функция.

Положим для любой функции $x \in K$ и любого $\zeta = (\xi, \eta) \in R^2$

$$\tilde{x}_\zeta(u, v) = x(u-\xi, v-\eta). \qquad (66)$$

Функция $\tilde{x}_\zeta$ является сдвигом функции по оси абсцисс на величину ξ и оси ординат на величину η.

Теорема 3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная функция Q, удовлетворяющая при любых $\xi, \eta \in R^1$ условиям*

$$\iint e^{(u-\xi)^2+(v-\eta^2)}Q^2(u, v)dudv < \infty,$$

$$\iint Q(u, v)dudv = 1$$

и такая, что имеет место равенство (65), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям

г) для любых $z \in R^2$ и $x, x', y, y' \in K(R^2)$ из равенств

$$\Phi_z(x, x') = 1 \text{ и } \Phi_z(y, y') = 1$$

следует, что

$$\Phi_z(x+y, x'+y')=1;$$

д) для любого $z \in R^2$ и любого $x \in K(R^2)$ существует единственное неотрицательное число $[fx](z)$ такое, что

$$\Phi_z(x,[fx(t))=1; \qquad (67)$$

е) величина $[fx](t)$ как функция от x при любом $z \in R^2$ непрерывна в метрике $L^2(R^2)$;

ж) для любого $z \in R^2$, любых $x, y \in K(R^2)$ и любого $\xi \in R^2$ из равенства

$$\Phi_z(x, y)=1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{z+\zeta}(\tilde{x}_\zeta, \tilde{y}_\zeta)=1.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 1 и поэтому мы его опустим.

Обсудим теперь возможные психофизические приложения этой теоремы. Речь будет идти об иррадиации зрения. Явление иррадиации состоит в том, что реакция зрительной системы на изображение при фиксации зрения на определенной точке пространства зависит не только от яркости зрительной картины в данной точке, но и от яркости в других точках пространства. В результате воздействие в данной точке является интегральным в физическом смысле этого слова. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что математическое описание преобразования зрительной информации, учитывающее это явление, является также интегральным, но уже в математическом смысле этого слова.

Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина, не изменяющаяся во времени. В настоящем параграфе мы используем разницу в спектральном составе излучений в различных точках этой картины. Пусть $x(u,v)$ – яркость излучения в точке картины с координатами (u,v). Зафиксируем какую-либо точку z зрительной картины с координатами (ξ,η). Предположим, что для любой зрительной картины $x(u,v)$ существует такая не изменяющаяся от точки к точке зрительная картина, то есть картина с постоянной яркостью $[fx](z)$, что обе картины уравниваются наблюдателем, сравнивающим их воздействия в фиксированной точке z. Это, разумеется, не значит, что зрительная система не различает эффектов от воздействия этих картин в других, отличных от z, точках. Величину $[fx](z)$, по аналогии с соответствующей величиной, возникающей при изучении инерции зрения, естественно называть эффективной яркостью зрительной картины в точке z.

Вообще эффект уравнивания зрительной системой двух зрительных картин $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z будем обозначать равенством

$$\Phi_z(x, y)=1. \qquad (68)$$

В этих обозначениях условие *д* теоремы 3 является записью предположения о существовании эффективной яркости.

Рассмотрим условие *ж*. Для любой зрительной картины $x(u,v)$ зрительная картина $\tilde{x}_\zeta(u,v)$, определенная равенством (66), является сдвигом на вектор ζ. С другой стороны, предикат $\Phi_{z+\zeta}(x,y)$ отличается от предиката $\Phi_z(x,y)$ тем, что описывает сравнение наблюдателем зрительных изображений не в точке *z*, а в точке, сдвинутой на тот же вектор ζ. Понятно, что зрительное уравнение картины $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z означает зрительное уравнивание картин $\tilde{x}_\zeta(u,v)$ и $\tilde{y}_\zeta(u,v)$ в точке $z+\zeta$. Другими словами, условие *ж* означает независимость от выбора нулевой точки системы координат.

Наиболее существенным с прикладной точки зрения является условие аддитивности *г*. Существуют экспериментальные данные, дающие основание для предположения о его выполнимости. В первую очередь это относится к экспериментам со зрительными картинами, состоящими из последовательности конгруэнтных полос, на каждой из которых уровень яркости принимает поочередно одно из двух фиксированных значений. Если ширина этих полос достаточно мала, то зрительная система воспринимает такую картину как картину с постоянной яркостью. Согласно пространственному закону Талбота уровень яркости этой постоянной картины равен среднему значению яркости исходной. Проверим, что отсюда вытекает условие аддитивности для зрительных картин такого класса. Пусть $x(u,v)$, $x'(u,v)$, $y(u,v)$, $y'(u,v)$ – четыре зрительные картины из сливающихся чередующихся полос, причем картины $x \subset x'$ и $y \subset y'$ воспринимаются одинаково зрительной системой в точке $z=(\xi,\eta)$, то есть

$$\Phi_z(x, x')=1, \quad \Phi_z(y, y')=1. \qquad (69)$$

Пусть $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ – средние значения яркостей зрительных картин x, x', y, y' соответственно. Тогда согласно закону Талбота

$$\begin{aligned}&\Phi_z(x,\bar{x})=1, \quad \Phi_z(x',\bar{x}')=1,\\ &\Phi_z(y,\bar{y})=1, \quad \Phi_z(y',\bar{y}')=1.\end{aligned} \qquad (70)$$

Средняя яркость картины $x+y$ равна $\bar{x}+\bar{y}$. Поэтому по закону Талбота

$$\Phi_z(x+y, \bar{x}+\bar{y})=1. \qquad (71)$$

Аналогично

$$\Phi_z(x'+y', \bar{x}'+\bar{y}')=1. \qquad (72)$$

Но из (69) и (70) в силу условий *б* и *д* следует, что

$$\Phi_z(x, x')=1, \quad \Phi_z(y, y')=1.$$

Поскольку зрительные картины $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ постоянны, то два последних равенства могут выполняться лишь если

$$\bar{x} = \bar{x}', \quad \bar{y} = \bar{y}'.$$

Но тогда

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}' + \bar{y}'. \tag{73}$$

Из (71), (72) и (73) вытекает, что

$$\Phi_z(x + y, x' + y').$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим обобщение пространственного закона Талбота, состоящее в следующем. Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ – произвольная последовательность излучений, сходящихся к некоторому (не обязательно постоянному по u, v) излучению x в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} x_n(u,v)dudv = \iint\limits_{\Omega} x(u,v)dudv,$$

где Ω – любое измеримое ограниченное множество. Тогда при достаточно больших n излучения x_n и x визуально не различимы. Рассуждая так же, как и выше, можно показать, что из этого вытекает аддитивность для достаточно широкого класса зрительных картин.

Выясним теперь вопрос о том, при каких дополнительных условиях на предикат $\Phi_z(x, y)$ можно уточнить теорему 3, конкретизируя вид ядра $Q(u,v)$ в виде функции, зависящей только от расстояния точки (u,v) от нуля. В этом случае формула (64) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_z(x, y) = D(&\iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)x(u,v)dudv, \\ &\iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)y(u,v)dudv), \end{aligned} \tag{74}$$

где D – предикат равенства, $z = (\xi, \eta) \in R^2$; T – почти всюду неотрицательная функция.

Пусть $x(u,v)$ – произвольная функция; θ – произвольное число из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Положим

$$\bar{x}_\theta(u,v) = x(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta), \tag{75}$$

то есть функция $\bar{x}_\theta$ получается из функции x в результате поворота вокруг нуля на угол θ.

Теорема 4. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная на полуоси $[0, \infty)$ функция T, удовлетворяющая при любых ξ, η условиям*

$$\begin{gathered} \iint e^{(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2} T^2(u^2 + v^2)dudv < \infty, \\ \int_0^\infty T(r)dr = \frac{1}{\pi} \end{gathered} \tag{76}$$

и такая, что имеет место равенство (74), необходимо и достаточно, чтобы семейство удовлетворяло условиям г – ж теоремы 3 и условию

з) для любых $x, y \in K(R^2)$ и любого $Q \in [0, 2\pi)$ из равенства

$$\Phi_0(x, y) = 1 \tag{77}$$

вытекает равенство

$$\Phi_0(\bar{x}_\theta, \bar{y}_\theta) = 1\,. \tag{78}$$

Доказательство. *Достаточность.* Поскольку выполняются условия *г – ж*, то в силу теоремы 3 имеет место равенство (65). Пусть x – произвольный неотрицательный элемент из $K(R^2)$. Из условия *д* имеем

$$\Phi_0(x, [fx](0)) = 1.$$

Тогда из условия *з* получаем

$$\Phi_0(\bar{x}, ([\bar{f}x](0))_\theta) = 1. \tag{79}$$

Но согласно условию *д* единственной константой C, удовлетворяющей условию $\Phi_0(\bar{x}_\theta, C) = 1$, является $C = [f\,\bar{x}_\theta](0)$. Поэтому из (79) имеем

$$([\bar{f}x](0))_\theta = [f\,\bar{x}](0). \tag{80}$$

Но постоянная функция $[fx](0)$ не изменяется при преобразовании координат (75), так что

$$[\bar{f}x](0)_\theta = [fx](0).$$

Сравнивая это равенство с (79), получаем

$$[f\,\bar{x}_\theta](0) = [fx](0).$$

Подставляя сюда выражения для $[f\,\bar{x}_\theta](0)$ и $[fx](0)$. в виде (65), находим

$$\begin{gathered} \iint Q(-u, -v)x(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv = \\ = \iint Q(-u, -v)x(u, v)dudv. \end{gathered}$$

Сделав в этом интеграле замену переменных, перепишем это равенство в виде

$$\begin{gathered} \iint Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta)x(u, v)dudv = \\ = \iint Q(-u, -v)x(u, v)dudv. \end{gathered}$$

Поскольку x – произвольный элемент из $K(R^2)$, и $K(R^2)$ – воспроизводящий конус, отсюда следует, что

$$\begin{gathered} Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta) = \\ = Q(-u, -v) \end{gathered} \tag{81}$$

для всех $(u,v) \in R^2$ и всех θ. Зафиксируем произвольное $R \geq 0$. Пусть (u,v) и (u',v') – две произвольные точки, удовлетворяющие условию

$$u^2 + v^2 = R^2 \text{ и } (u')^2 + (v')^2 = R^2.$$

Тогда точка (u',v') может быть получена из точки (u,v) поворотом на некоторый угол θ и, следовательно,

$$u' = u\cos\theta - v\sin\theta, v' = u\sin\theta + v\cos\theta.$$

Но тогда из (81) следует, что

$$Q(u', v') = Q(u, v). \tag{82}$$

Таким образом, равенство $u'^2 + v'^2 = u^2 + v^2$ влечет за собой равенство (82). Это и означает, что

$$Q(u, v) = T(u^2 + v^2), \tag{83}$$

где T – некоторая функция на $[0, \infty)$. Подставляя $Q(u, v)$ в виде (83) в (65), приходим к (74). Неотрицательность функции T вытекает из неотрицательности функции Q.

Из условий, которым удовлетворяет функция $Q(u,v)$, вытекает неравенство (76) и равенство

$$\iint T(u^2+v^2)dudv=1.$$

Сделаем в последнем интеграле полярную замену переменных. Получаем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} T(\rho^2)\rho d\rho=1.$$

Еще одна замена координат $\rho^2=r$ приводит к равенству

$$\pi\int_0^{\infty} T(r)dr=1.$$

Таким образом, соотношения (76) выполняются.

Необходимость. Пусть имеет место равенство (74) с неотрицательной на $[0,\infty)$ функцией T, удовлетворяющей условиям (76). Поскольку (74) является частным случаем формулы (65), то в силу теоремы 3 выполняются условия *г* – *ж*. Пусть x и y – произвольные элементы из K, для которых справедливо (77). В силу формулы (74) имеем

$$\begin{gathered}\iint T((u')^2+(v')^2)x(u',v')du'dv'= \\ =\iint T((u')^2+(v')^2)y(u',v')du'dv'.\end{gathered} \tag{84}$$

Сделав замену переменных при произвольно фиксированном θ

$$u'=u\cos\theta+v\sin\theta,\ \ v'=-u\sin\theta+v\cos\theta,$$

преобразуем (84) к виду

$$\begin{gathered}\iint T(u^2+v^2)x(u\cos+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)dudv= \\ =\iint T(u^2+v^2)y(u\cos+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)dudv,\end{gathered}$$

то есть

$$\iint T(u^2+v^2)\bar{x}_\theta(u,v)dudv=\iint T(u^2+v^2)\bar{y}_\theta(u,v)dudv.$$

Но тогда в силу (74)

$$\Phi_0(x_0,y_0)=1.$$

Теорема 4 доказана.

Выводы

В статье решена задача структурной компараторной идентификации в виде интегральных операторов специального вида – однопараметрических операторов, описывающие инерционные процессы, в частности, в зрительной системе человека; операторы с распадающимися и разностными ядрами, описывающие процессы цветовой инерции в случаях, когда излучения имеют спектральную плотность, не меняющуюся во времени или постоянный спектральный состав и изменяющуюся во времени интенсивность; двухпараметрические семейства операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид и условия существования соответствующих операторов.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3.** *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78. **4.** *Бондаренко, М.Ф.* Дедуктивное построение теории цвета предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85.

Поступила в редколлегию 28.04.2011.

УДК 519.7

Моделі компараторної ідентифікації у вигляді сімейств інтегральних одно- і двохпараметричних операторів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 86-97.

Вирішено завдання структурної компараторної ідентифікації у вигляді інтегральних операторів спеціального виду - однопараметричних операторів; операторів з ядрами, що розпадаються і різницевими, які описують процеси колірної інерції у випадках, коли випромінювання мають спектральну щільність, що не змінюється в часі, або постійний спектральний склад і інтенсивність, що змінюються в часі; двохпараметричних сімейств операторів, вживаних для моделювання явища іррадіації зору.

Іл. 1. Бібліогр.: 4 найм.

UDC 519.7

Models of comparator identification as one- and two-parameters integral operators families / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 86-97.

The task of structural comparator identification is decided as integral operators of the special kind - oneself-reactance operators; operators with disintegrating and differential kernels, describing the processes of colour inertia in the cases when radiations have a spectral closeness, not changing in time or permanent spectral composition and time-varying intensity; two-parameter families of operators, applied for the sight irradiation phenomenon design.

Fig. 1. Ref.: 4 items.

УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

МОДЕЛИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ВИДЕ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И СВЕРТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека в виде семейств интегральных трехпараметрических и сверточных операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-5], в которых развивается метод компараторной идентификации функций человеческого зрения в виде линейных предикатов. Предложены математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Введены понятия линейного предиката и линейного n-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора. Рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета.

В настоящей работе продолжается рассмотрение моделей цветового зрения человека. Предложены интегральные модели некоторых его функций. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

1. Трехпараметрические семейства

Обозначим при произвольном $t\in(-\infty,\infty)$ через $L_t^2(R^2)$ пространство всех измеримых на $(-\infty,t)\times R^2$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(u^2+v^2)}x^2(\tau,p,q)d\tau dudv<\infty, \quad (1)$$

через $K_t(R^2)$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x,y)$, ($t\in R^1, z\in R^2$ – параметры), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t(R^2)\times K_t(R^2)$ и удовлетворяет условиям *а* – *в* из п. 4, [1]. Целью настоящего параграфа является нахождение условий, при которых для всех $t\in R^1$, $z\in R^2$ и $x,y\in K_t(R^2)$ имеет место равенство

$$\Phi_{t,z}(x,y)=$$
$$=D\left(\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-u,\eta-v)x(\tau,u,v)d\tau dudv,\right. \quad (2)$$
$$\left.\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-u,\eta-v)y(\tau,u,v)d\tau dudv\right),$$

где D – предикат равенства, $z=(\xi,\eta)\in R^2$, $Q(\tau,u,v)$ – почти всюду неотрицательная функция на $[0,\infty)\times R^2$.

Определим, как и ранее, для любой функции $x\in K_t(R^2)$ и любых $\rho\in R^1$, $\zeta=(\xi,\eta)\in R^2$ функцию $\tilde{x}_{\rho,\zeta}$, являющуюся сдвигом функции x на вектор (ρ,ξ,η):

$$\tilde{x}_{\rho,\zeta}(\tau,u,v)=x(\tau-\rho,u-\xi,v-\eta). \quad (3)$$

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_{t,z}$ нашлась почти всюду неотрицательная функция $Q(\tau,u,v)$, удовлетворяющая при любых $\xi,\eta\in R^1$ условиям*

$$\int_{0}^{\infty}\iint e^{\tau}e^{-(u-\xi)^2+(v-\eta)^2}Q^2(\tau,u,v)d\tau dudv<\infty,$$
$$\int_{0}^{\infty}\iint Q(\tau,u,v)d\tau dudv=1 \quad (4)$$

и такая, что имеет место равенство (2), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любых $t\in R^1$, $z\in R^2$ и $x,x',y,y'\in K_t(R^2)$ из равенств

$$\Phi_{t,z}(x,x')=1,\quad \Phi_{t,z}(y,y')=1$$

следует, что

$$\Phi_{t,z}(x+y,x'+y')=1;$$

д) для любых $t\in R^1$, $z\in R^2$ и $x\in K_t(R^2)$ существует единственное неотрицательное число $[fx](t,z)$ такое, что

$$\Phi_{t,z}(x,[fx](t,z))=1;$$

е) величина $[fx](t,z)$ как функция от x при любых фиксированных $t\in R^1$, $z\in R^2$ непрерывна в метрике $L_t^2(R^2)$;

ж) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$, $x, y \in K_t, \rho \in R^1, \zeta \in R^2$ *из равенства*

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\rho,\, z+\zeta}(\tilde{x}_\zeta, \tilde{y}_\zeta) = 1.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 1 (см. п. 1, [3]).

Полученный результат может быть применен к описанию инерции и иррадиации зрения в рамках единой математической модели. Пусть наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными яркостями в разных точках пространства, причем яркости изменяются во времени произвольным образом. Различие в спектральных составах излучения в различных точках и в различные моменты времени здесь игнорируется. Пусть $x(\tau, u, v)$ — яркость излучения в точке зрительной картины с пространственными координатами (u, v) в момент τ. Пусть t — какой-либо фиксированный момент времени; $z = (\xi, \eta)$ — фиксированная точка зрительной картины. Предполагается, что для любой изменяющейся во времени зрительной картины $x(\tau, u, v)$, $-\infty < \tau \le t$, $-\infty < u, v < \infty$, существует единственная постоянная во времени и однородная в пространстве картина, уравнивающаяся наблюдателем с исходной в момент t в точке $z = (\xi, \eta)$. Постоянную яркость этой картины будем обозначать $[fx](t, z)$. Величину $[fx](t, z)$ будем называть эффективной яркостью. Очевидно, это понятие обобщает одноименные понятия в случае изменения зрительной картины только во времени или только в пространстве.

Предикат $\Phi_{t,z}(x, y)$ является формальной записью уравнивания зрительных картин:

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1$$

тогда и только тогда, когда картины $x(\tau, u, v)$ и $y(\tau, u, v)$ вызывают одинаковые реакции зрительной системы в момент времени t в точке z.

Условия *г — ж* интерпретируются в общем случае так же, как и в частных случаях, изучавшихся в [1].

Основным с точки зрения экспериментатора, как и ранее, является условие *г* аддитивности. Об экспериментах, подтверждающих выполнимость этого условия в частных случаях, см. в п. 2 и 3 [5]. Что касается экспериментальной проверки этого условия в общем случае, то, по-видимому, здесь не существует каких-либо экспериментальных данных.

Установим теперь, при каких условиях на семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x, y)$ формула (2) может быть переписана в виде

$$\Phi_{t,z}(x,y) = D\Big(\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(t-\tau, (\xi-u)^2, (\eta-v)^2)x(\tau,u,v)d\tau du dv, \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(t-\tau, (\xi-u)^2, (\eta-v)^2)y(\tau,u,v)d\tau du dv\Big), \qquad (5)$$

где D — предикат равенства, $t \in R^1$, $z = (\xi, \eta) \in R^2$, $T(\tau, R)$ — почти всюду неотрицательная функция.

Положим для произвольной функции $x(\tau, u, v)$ и произвольного $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\breve{x}_\theta(\tau, u, v) = x(\tau,\ u\cos\theta + v\sin\theta,\ -u\sin\theta + v\cos\theta).$$

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства предикатов* $\Phi_{t,z}$ *нашлась функция* T, *удовлетворяющая при всех* $\xi, \eta \in R^1$ *условиям*

$$\int_0^\infty \iint e^\tau e^{(u-\xi)^2+(v-\eta)^2} T^2(\tau, u^2+v^2) d\tau du dv < \infty,$$

$$\int_0^\infty T(\tau, r) d\tau dr = \frac{1}{\pi}$$

и такая, что имеет место равенство (5), необходимо и достаточно, чтобы семейство предикатов удовлетворяло условиям г — ж теоремы 1 и условию

з) для любых $x, y \in K_0$ *и любого* $\theta \in [0, 2\pi)$ *из равенства*

$$\Phi_{0,0}(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{0,0}(\breve{x}_\theta, \breve{y}_\theta) = 1 .$$

Теорема 2 может быть выведена из теоремы 1 аналогично тому, как теорема 4 (см. п. 2, [4]) была выведена из теоремы 3 (см. п. 2 из [3]). Мы опустим этот вывод.

Физический смысл условия *з* состоит в следующем. Если наблюдатель уравнивает две зрительных картины в один и тот же момент времени в той же точке, то факт уравнивания сохраняется при предъявлении наблюдателю тех же картин, но повернутых на один и тот же угол.

Пусть t — произвольное число,

$$\Omega_t = \{(\lambda, \tau, p, q) \mid \lambda \in [0,1], \tau \in (-\infty, t], p, q \in (-\infty, \infty)\}$$

$L^2(\Omega_t)$ — пространство измеримых на Ω_t функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t} \iint e^\tau e^{-(p^2+q^2)} x^2(\lambda, \tau, p, q) d\lambda d\tau dp dq < \infty, \qquad (6)$$

$K(\Omega_t)$ — положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}$ $(t \in R^1, z \in R^2)$, каждый из которых определен при соответствующем t на $K(\Omega_t) \times K(\Omega_t)$ и удовлетворяет условиям *а — в* (см. п. 1 из [4]). Ниже устанавливаются условия, гарантирующие существование n линейно независимых функций $g_i \in L^2[0,1]$ почти всюду неотрицательной функции $Q(\tau, u, v)$ таких, что при всех $t \in R^1$, $z = (\xi, \eta) \in R^2$ и всех $x, y \in K(\Omega_t)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \qquad (7)$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (8)$$

где

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \int_0^1\int_{-\infty}^{t} \iint g_i(\lambda) Q(t-\tau, \xi-p, \eta-q) \times x(\lambda, \tau, p, q) d\lambda d\tau dp dq. \qquad (9)$$

Рассмотрим вначале частный случай, заключающийся в том, что приведенные функции $x(\lambda, \tau, u, v)$ зависят только от λ. Такие функции будем обозначать символами u и v. Для этих функций сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях можно гарантировать существование почти всюду ограниченных неотрицательных функций $g_i(\lambda)$ таких, что при всех $t \in R^1$, всех $z \in R^2$ и всех u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_{t,z}(u, v) = 1 \qquad (10)$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (11)$$

где

$$\alpha_i(u) = \int_0^1 g_i(\lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, ..., n? \qquad (12)$$

Решение этого вопроса дается теоремой 4 (см. п. 2.4). Будем, как и в п. 1, [2], именовать совокупность условий этой теоремы условиями A. Соответственно через Φ будем обозначать предикат на $K \times K$ такой, что $\Phi(u, v) = 1$, если $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$ при каких-либо (а, следовательно, в силу условий A, и при любых) $t \in R^1$, $z \in R^2$.

Кроме того, выделим частный случай функций вида

$$x(\lambda, \tau, p, q) = \beta(\tau, p, q) u(\lambda), \qquad (13)$$

где $\beta \in K_t(R^2)$, $u \in K$. Для этого случая сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях для любой функции $u \in K$ существует функция $\theta_u(\tau, p, q)$, удовлетворяющая условию (60) (см. [1]) и такая, что для любой функции $\beta(\tau, p, q)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(\beta u, cu) = 1 \qquad (14)$$

выполняется тогда и только тогда, когда константа $c = f_u^{(t,z)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t,z)}(\beta) = \int_{-\infty}^{t} \iint Q_u(t-\tau, \xi - p, \eta - q) \beta(\tau, p, q) d\tau dp dq? \qquad (15)$$

Этот вопрос был решен теоремой 1. Условия этой теоремы ниже именуются условиями C.

Теорема 3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_{t,z}$ нашлась линейно независимая система функций $\{q_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ и почти всюду неотрицательная на $[0,\infty) \times R^2$ функция Q, удовлетворяющая условиям г и такая, что равенства (7) и (8) эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, C и*

г) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, x', y, y' \in K(\Omega_t)$ из равенств

$$\Phi_{t,z}(x, x') = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, y') = 1$$

следует, что

$$\Phi_{t,z}(x + y, x' + y') = 1.$$

д) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x \in K(\Omega_t)$ существует (не единственная) функция $u \in K$ такая, что

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1; \qquad (16)$$

е) для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset K(\Omega_t)$ сходящейся к нулю в $L^2(\Omega_t)$, существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset K$, сходящаяся к нулю в метрике $L^2[0,1]$ и такая, что

$$\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1.$$

Доказательство теоремы мы проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 (см. [1]). *Достаточность.* Пусть при некоторых $t \in R^1$, $z \in R^2$ x – произвольный элемент $K(\Omega_t)$. Положим

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (17)$$

где u – какой-либо элемент из K, для которого справедливо (16). Элемент u не определяется равенством (16) однозначно. Поэтому следует проверить, что равенство (17) определяет величину $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ вне зависимости от выбора u. Мы опустим эту проверку.

Покажем теперь, что при всех $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, y \in K(\Omega_t)$ равенства

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \qquad (18)$$

и

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (19)$$

эквивалентны. Подберем для x и y какие-либо элементы $u, v \in K$ такие, что

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, v) = 1. \qquad (20)$$

Если для x и y имеет место равенство (18), то из (20) на основании условий *б* и *в* легко вывести, что $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$. Но тогда и

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (21)$$

Отсюда и из определения (17) вытекают равенства (19). Пусть обратно для x и y справедливо (19). Подберем для x и y элементы $u, v \in K$ так, чтобы имело место (20). Тогда справедливо (21) и, следовательно, $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$. Вместе с (20) это дает (18).

Таким образом, равенство (7) эквивалентно равенству (8). Осталось проверить, что для величин $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ справедлива формула (9). Рассмотрим произвольные элементы $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ конуса $K(\Omega_t)$. Пусть $u, v \in K$ удовлетворяют равенствам (20). Применив к этим равенствам условие *г*, получаем

$$\Phi_{t,z}(x + y, u + v) = 1.$$

Из этого равенства и (20) следует, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t,z)}(y) = \alpha_i(v),$$
$$\alpha_i^{(t,z)}(x + y) = \alpha_i(u + v), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Поскольку $\alpha_i(u+v)=\alpha_i(u)+\alpha_i(v)$, то отсюда вытекает, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x+y)=\alpha_i^{(t,z)}(x)+\alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i=1,2,\dots,n,$$

то есть функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ аддитивны. Проверим их непрерывность в нуле. Рассмотрим произвольную последовательность функций, сходящуюся к нулю. Подберем для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subset K$ согласно условию *е*. Тогда

$$\Phi_{t,z}(x_k,u_k)=1, \quad \lim_{k\to\infty}u_k=0.$$

Из последнего равенства и непрерывности функционалов α_i следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i(u_k)=0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Но тогда из (17) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i^{(t,z)}(x_k)=0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Таким образом, функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ определены на воспроизводящем конусе $K(\Omega_t)$ пространства $L^2(\Omega_t)$, аддитивны и непрерывны в нуле. Значит, они однозначно продолжаются до линейных функционалов на всем пространстве. По теореме об общем виде линейного функционала

$$\alpha_i^{(t,z)}(x)= =\int_0^1\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)d\lambda d\tau dpdq, \tag{22}$$

где $S_i^{(t,z)}\in L^2(\Omega_t)$.

Пусть функция $x(\lambda,\tau,p,q)$ имеет вид (13). Из (14) имеем

$$\Phi_{t,z}(\beta u, f_u^{(t,z)}(\beta)u)=1. \tag{23}$$

Поскольку условия *ж* и *з* эквивалентны, из (23) можно заключить, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=\alpha_i^{(t,z)}(f_u^{(t,z)}(\beta)u), \quad i=1,2,\dots,n. \tag{24}$$

Вынося константу $f_u^{(t,z)}(\beta)$ из аргумента линейных функционалов $\alpha_i^{(t,z)}$, находим

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f_u^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (см. [1]), можно показать, что на самом деле функция $f_u^{(t,z)}(\beta)$ не зависит от u. Так что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u), \quad i=1,2,\dots,n \tag{25}$$

и равенство (15) можно переписать в виде

$$f^{(t,z)}(\beta)= =\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq. \tag{26}$$

Комбинируя равенство (25) с равенствами (12), (22) и (26), получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\lambda d\tau dpdq=$$

$$\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\tau dpdq,$$

то есть

$$\int_0^1\Big(\int_{-\infty}^{t}\iint (e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$

$$-g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q))\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq\Big)u(\lambda)d\lambda=0.$$

Мы использовали здесь теорему Фубини. Поскольку в последнем равенстве $u(\lambda)$ – произвольный элемент положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ и конус K является воспроизводящим, то из равенства вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}(S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$

$$-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q))\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq=0.$$

Далее, $\beta(\tau,p,q)$ – произвольный элемент воспроизводящего конуса $K_t(R^2)$ пространства $L_t^2(R^2)$ и поэтому из последнего равенства следует, что

$$S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)=-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q).$$

Подставляя это равенство в (22), приходим к (9). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть линейно независимая система функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и почти всюду неотрицательная на $[0,\infty)\times R^2$ функция Q, удовлетворяющая условиям *г*, таковы, что для них равенства (7) и (8) эквивалентны. Для функций $u\in K$ равенство (9) дает

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)d\tau dpdq.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

Отсюда видно, что величина $S_i^{(t,z)}$ на самом деле не зависит от u. Поэтому из эквивалентности равенств (7) и (8) вытекает эквивалентность равенств (10) и (11), где величины $\alpha_i(u)$ определяются формулой (12). Таким образом, условия A выполняются.

Перейдем к условиям C. Рассмотрим функции $x(\lambda,\tau,p,q)$ вида (13). Для таких функций формула (9) принимает вид

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times \times\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq. \tag{27}$$

Определим функционалы α_i на $L^2[0,1]$ формулой (12) и функционалы $f^{(t,z)}$ на $L^2(\Omega_t)$ формулой (25). Равенство (26) может быть переписано в виде (24). Но по условию теоремы равенство (24) эквивалентно равенству (23) Обратно, пусть для некоторого $u\in K$, некоторого $\beta\in K(\Omega_t)$ и числа C имеет место равенство (14). Поскольку равенства (7) и (8) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u) = c \cdot \alpha_i^{(t,z)}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Комбинируя это равенство с формулой (9), найдем, что $c = f^{(t,z)}(\beta)$. Итак, выполнимость условий C проверена.

Перейдем к условиям *г* – *е*. Справедливость *г* вытекает из аддитивности функционала (9). Проверим *д*. Пусть $x \in K(\Omega_t)$. Положим

$$u(\lambda) = \int_{-\infty}^{t} \iint Q(t-\tau, \xi - p, \eta - q) x(\lambda, \tau, p, q) d\tau dp dq. \quad (28)$$

Очевидно, функция $u(\lambda)$ почти всюду неотрицательна. Далее, имеем, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$u(\lambda) \le \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} Q(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq} \times$$

$$\times \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} x^2(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq} \le$$

$$\le c_1 \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq}.$$

Здесь c_1 – некоторая положительная константа, существование которой вытекает из неравенства (4). Из последнего неравенства получаем

$$\int_0^1 u^2(\lambda) d\lambda \le c_1^2 \sqrt{\int_0^1 \int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(\lambda, \tau, p, q) d\lambda d\tau dp dq}.$$

Поэтому из (6) следует, что $u \in L^2[0,1]$ и

$$\| u \| \le c_1 \| x \|, \quad (29)$$

где $\|u\| - L^2[0,1]$ – норма элемента u; $\|x\|$ – $L^2(\Omega_t)$ – норма элемента x. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(u)$. Следовательно, $\Phi_{t,z}(x,u) = 1$ и условие *д* выполняется.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – сходящаяся к нулю последовательность элементов из $K(\Omega_t)$. Определим для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ по формуле (41) (см. [1]). Тогда $\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1$, а из неравенства (29) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Значит, условие *е* выполняется.

Теорема 2 доказана.

С прикладной точки зрения этот результат является попыткой описать в рамках единой модели явления иррадиации и инерции зрения, учитывая при этом цветовое восприятие. Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными спектральными плотностями лучистой яркости в различных точках пространства, изменяющимися произвольным образом во времени. Обозначим через $x(\lambda, \tau, p, q)$ спектральную плотность на длине волны λ в точке (p,q) в момент времени τ. Пусть t – произвольный момент времени, $z = (\xi, \eta)$ – произвольная точка зрительной картины. Будем говорить, что две зрительные картины со спектральными плотностями $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ соответственно (t,z) – метамерны, если их воздействие в точке z в момент времени t представляется наблюдателю одинаковым. Записывать этот факт будем в виде $\Phi_{t,z}(x,y) = 1$. В частном случае, когда спектральная плотность сравниваемых излучений не изменяется в пространстве и во времени, отношение (t,z) -метамерности переходит в классическую метамерность. Математической записью этого факта являются условия A. Рассмотрим теперь зрительные картины со спектральным составом вида (13), где $u(\lambda)$ – спектральная плотность постоянного во времени и пространстве излучения, а $\beta(\tau, p, q)$ – интенсивность излучения, изменяющаяся во времени и пространстве. Этот частный случай изучался выше и там объяснен физический смысл условий C.

Предположение *г* об аддитивности (t,z) -метамерности для различных частных случаев изменения сигнала (только во времени, только в пространстве или постоянные во времени и пространстве сигналы с различными спектральными плотностями излучений) обсуждалось в предыдущих параграфах. Нам не известны какие-либо эксперименты, направленные на проверку выполнимости этого предположения в рассматриваемой здесь общей ситуации.

Предположение *д* является обобщением предположения о существовании эффективной яркости. Его смысл состоит в том, что для любого момента времени t, любой точки пространства z и любой зрительной картины $x(\lambda, \tau, p, q)$ существует единственная постоянная во времени и пространстве зрительная картина $u(\lambda)$, которая (t,z) -метамерна исходной. Наконец, смысл условия *е* примерно такой же, как и в случае аналогичного условия теорем 1 и 2 (см. [1]). Его выполнимость на практике априори представляется обеспеченной.

2. Сверточные семейства

Пусть t – произвольное действительное число, L_t^2 – пространство измеримых на $(-\infty, t]$ действительных функций $x(\tau)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{e} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau, \quad (30)$$

K_t – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$ (t – параметр), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t \times K_t$ и удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Исследуем возможность представления семейства Φ_t в виде

$$\Phi_t(x,y) = D(x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (31)$$

$$\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau) y(\tau) d\tau),$$

где D – предикат равенства; $B(\xi)$ – некоторая весовая функция на полуоси $[0,\infty)$.

Уточним постановку вопроса. В строгой формулировке элементами пространства L_t^2 являются не квадратично суммируемые функции, а их классы эквивалентности по отождествлению функций, совпадающих почти всюду. Поэтому для элемента $x \in L_t^2$ не существует понятия значения $x(t)$ в точке t. Например, функции $x(\tau) \equiv 1$ $(\tau \le t)$ и

$$\widehat{x}(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \ne t, \\ 0, \tau = t, \end{cases}$$

где $x(t)$ – любое действительное число, совпадают как элементы L_t^2. Условимся, чтобы придерживаться аккуратности в формулировках, считать, что в (31) $x, y \in K_t \times R^1$. При этом число $x(t)$ может принимать любое значение независимо от поведения функции $x(\tau)$ при $\tau < t$.

Будем, как и в п. 1, обозначать при любом $x \in L_t^2$ и любом положительном ξ через $\tilde{x}_\xi(\tau)$ функцию, определенную на $(-\infty, t+\xi]$ равенством

$$\tilde{x}_\xi(\tau) = x(\tau - \xi).$$

Теорема 4. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\infty e^\xi B^2(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty B(\xi) d\xi < \infty \tag{32}$$

и такая, что имеет место равенство (31), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in K_t \times R^1$ существует единственное число $[fx](t)$ такое, что

$$\Phi_t(x, [\tilde{fx}](t)) = 1 \tag{33}$$

(здесь $[\tilde{fx}](t) = (0, [fx](t) \in K_t \times R^1)$;

д) величина $[fx](t) - x(t)$ не зависит от выбора числа $x(t)$;

е) для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и $x, x', y, y' \in K_t \times R^1$ из равенств $\Phi_t(x, x') = 1$ и $\Phi_t(y, y') = 1$ следует, что

$$\Phi_t(x + y, x' + y') = 1; \tag{34}$$

ж) величина $[fx](t) - x(t)$ непрерывно зависит от функции $x(\tau)$ $\tau < t$ в метрике L_t^2;

з) для любого $t \in (-\infty, \infty)$, любых $x, y \in K_t$ и любого положительного ξ из равенства

$$\Phi_t(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) = 1.$$

Доказательство. *Необходимость.* Условие *г*, очевидно, выполняется. При этом

$$[fx](t) = x(t) - \int_{-\infty}^t B(t - \tau) x(\tau) d\tau. \tag{35}$$

Из равенства (35) видно, что

$$[fx](t) - x(t) = -\int_{-\infty}^t B(t - \tau) x(\tau) d\tau \tag{36}$$

и, следовательно, не зависит от выбора числа $x(t)$. Таким образом, выполняется условие *д*. Посылка условия *е* означает, что

$$x(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) x(\tau) d\tau = x'(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) x'(\tau) d\tau$$

и

$$y(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) y(\tau) d\tau = y'(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) y'(\tau) d\tau.$$

Из этих равенств следует, что

$$(x(t) + y(t)) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)(x(\tau) + y(\tau)) d\tau =$$

$$(x(t) + y'(t)) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)(x'(\tau) + y'(\tau)) d\tau,$$

то есть получили (34). Для проверки условия *ж* положим

$$A(\xi) = B(\xi) e^\xi, \quad \xi \ge 0. \tag{37}$$

Тогда из (36) следует, что

$$[fx](t) - x(t) = -e^{-t} \int_{-\infty}^t e^\tau A(t-\tau) x(\tau) d\tau. \tag{38}$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^t e^\tau A^2(t-\tau) d\tau = e^t \int_0^\infty e^\xi B^2(\xi) d\xi.$$

Поэтому из (32) следует, что $A(t-\tau) \in L_t^2$. Таким образом, как это видно из (38), величина $[fx](t) - x(t)$ является линейным функционалом от $x(\tau)$ $(\tau < t)$ на L_t^2. Значит, выполняется условие *ж*. Проверим условие *з*. Оно означает, что

$$x(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) x(\tau) d\tau = y(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau) y(\tau) d\tau. \tag{39}$$

Нужно показать, что отсюда вытекает равенство

$$\tilde{x}_\xi(t+\xi) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau) \tilde{x}_\xi(\tau) d\tau = \tilde{y}_\xi(t+\xi) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau) \tilde{y}_\xi(\tau) d\tau.$$

Учитывая определение функции $\tilde{x}_\xi$, последнее равенство можно переписать в виде

$$x(t) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau) x(\tau-\xi) d\tau = y(t) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau) y(\tau-\xi) d\tau.$$

Легко видеть, что это равенство, действительно, вытекает из (39). Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим при фиксированном t функцию $[fx](t)$. Согласно условию *г*, для любых $x, y \in K_t \times R^1$ будет

$$\Phi_t(x, [\tilde{fx}](t)) = 1, \quad \Phi_t(y, [\tilde{fy}](t)) = 1.$$

Отсюда и из условия *е* следует, что

$$\Phi_t(x + y, [\tilde{fx}](t) + [\tilde{fy}](t)) = 1. \tag{40}$$

Согласно условию *д*

$$\Phi_t(x+y,[\tilde{f}(x+y)](t))=1,$$

причем функция $[\tilde{f}(x+y)](t)$ определяется последним равенством однозначно. Значит

$$[\tilde{f}(x+y)](t)=[\tilde{f}x](t)+[\tilde{f}y](t).$$

Таким образом, $[fx](t)$ является аддитивным функционалом. Значит, и $[fx](t)-x(t)$ — аддитивный функционал. Согласно условиям *д* и *ж* этот функционал при фиксированном t зависит только от функции $x(\tau)\,(\tau<t)$ и указанная зависимость является непрерывной в метрике L_t^2. Тогда $[fx](t)-x(t)$ — линейный функционал на K_t. Он, следовательно, допускает единственное продолжение до линейного функционала на всем пространстве L_t^2. Поэтому существует такая функция $A_t(\tau)\in L_t^2$, что

$$[fx](t)-x(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}A_t(\tau)x(\tau)d\tau. \tag{41}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 (см. [1]), можно показать, используя условие *з*, что из (41) вытекает формула

$$[fx](t)=x(t)-\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)x(\tau)d\tau, \tag{42}$$

где функция $B(\xi)$ удовлетворяет условиям (42).

Проверим справедливость равенства (31). Нужно показать, что при любом t для любых $x,y\in K_t\times R^1$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \tag{43}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$[fx](t)=[fy](t). \tag{44}$$

Пусть имеет место (43). Вместе с (32) это дает

$$\Phi_t(y,[\tilde{f}x](t))=1. \tag{45}$$

Согласно условию *г*, отсюда следует равенство

$$[\tilde{f}x](t)=[\tilde{f}y](t), \tag{46}$$

а значит, и (44). Обратно, пусть имеет место равенство (44). В таком случае выполняется и (46). Комбинируя (46) и (33), получаем

$$\Phi_t(x,[\tilde{f}y](t))=1. \tag{47}$$

Согласно условию *г*

$$\Phi_t(y,[\tilde{f}y](t))=1. \tag{48}$$

Требуемое равенство (43) вытекает из (47) и (48).

Теорема 4 доказана.

Обсудим теперь физический смысл полученного результата. В качестве примера приложения рассмотрим вопрос об адаптации зрительной системы человека к уровню освещения. Предположим, что наблюдателю предъявляется излучение постоянного относительного спектрального состава с интенсивностью, изменяющейся во времени. Обозначим через $x(\tau)$ яркость излучения в момент времени τ. Рассмотрим случай ступенчатого изменения яркости. Пусть

$$x(\tau)=\begin{cases} a, \tau\le T, \\ b, \tau>T. \end{cases}$$

Тогда в соответствии с (42)

$$[fx](t)=\begin{cases} a-a\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau, t\le T, \\ b-a\int_{-\infty}^{T}B(t-\tau)d\tau-b\int_{T}^{t}B(t-\tau)d\tau, t>T, \end{cases}$$

то есть

$$[fx](t)=\begin{cases} ae, & t\le T, \\ ac-(b-a)(1-\int_{0}^{t-T}B(u)du), & t>T, \end{cases}$$

где

$$e=1-\int_{0}^{\infty}B(u)du.$$

В случае $a<b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 1 и 2 соответственно.

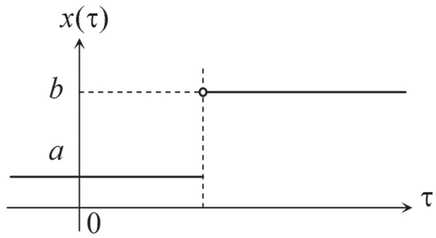


Рис. 1

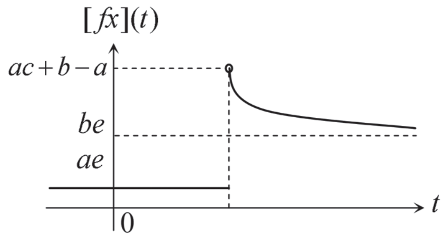


Рис. 2

Для случая $a>b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 3 и 4.

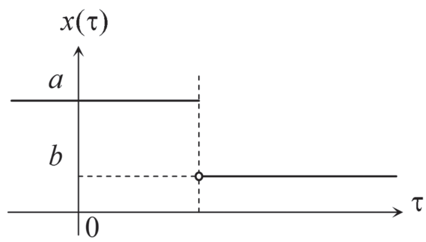


Рис. 3

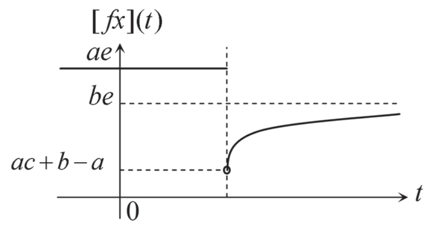


Рис. 4

Как видно из рис. 1 – 4, при скачкообразном увеличении яркости происходит резкое увеличение уровня субъективного ощущения яркости, затем зрительная система постепенно адаптируется к новому уровню яркости и через некоторое время ощущение практически становится равным ощущению bc постоянной яркости b. При скачкообразном снижении уровня яркости ощущение яркости в первый момент резко ослабевает, а затем в результате адаптации чувствительность усиливается. В результате ощущение яркости стремится к ощущению постоянной яркости b.

Разумеется, приведенные выше выводы из модели справедливы лишь в том случае, если модель обоснована. Для обоснования модели следует экспериментально проверить выполнимость условий *а – з* теоремы. Обсудим вопрос о возможности такой проверки на примере для случая субъективного восприятия яркости. Предположение г означает, что для любого закона изменения яркости $x(\tau)$, $-\infty<\tau\le t$, существует единственное значение яркости $[fx](t)$ такое, что закон $x(\tau)$ и закон

$$\begin{cases} 0, \tau<t, \\ [fx](t), \tau=t \end{cases}$$

вызывают одинаковое ощущение яркости в момент t. Если это предположение выполняется, то в эксперименте доступны для наблюдения функция $x(\tau)\,(\tau<t)$ и числа $x(t)$ и $[fx](t)$.

Таким образом, все условия теоремы 4 сформулированы в терминах, допускающих экспериментальную проверку.

3. Семейства интегральных сумм

Будем, как и ранее, обозначать при произвольном числе t через $\bar{L}_t^2$ пространство измеримых на $[0,1]\times(-\infty,t]$ действительных функций $x(\lambda,\tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \tag{49}$$

Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\bar{K}_t\times\bar{K}_t$, где $\bar{K}_t$ – положительный конус в пространстве $\bar{L}_t^2$ и удовлетворяет условиям *а – в*. Нас интересует возможность представления семейства предикатов формулой

$$\Phi_t(x,y)=D((\alpha_1^{(t)}(x),...,\alpha_n^{(t)}(x)), \\ (\alpha_1^{(t)}(y),...,(\alpha_n^{(t)}(y))), \tag{50}$$

где D – предикат равенства на R^n,

$$\alpha_1^{(t)}(x)=\int_0^1 g_i(\lambda)x(\lambda,t)d\lambda- \\ -\int_0^1\int_{-\infty}^t g_i(\lambda)B(t-\tau)x(\lambda,t)d\lambda d\tau, \tag{51}$$

$g_i\ (i=1,2,..,n)$ и B – некоторые функции на $[0,1]$ и $[0,\infty)$ соответственно.

Как и в предыдущем параграфе, постановка вопроса нуждается в уточнении, поскольку для элемента $x\in\bar{L}_t^2$ ограничение на прямую $\tau=t$ не определено. Поэтому будем считать, что в (51) $x\in\bar{K}_t\times L^2[0,1]$, то есть под x понимается упорядоченная пара: функция $x(\lambda,\tau)\in\bar{K}_t$ и функция от переменной λ при фиксированном t $x(\lambda,t)\in L^2[0,1]$.

Рассмотрим, как и в п. 2, два частных случая. Первый из них заключается в том, что функция $x(\lambda,\tau)$ в действительности не зависит от τ. Такие функции в настоящем параграфе обозначаются символами u и v, В рассматриваемом частном случае равенство (50) принимает вид

$$\Phi_t(u,v)=D((\alpha_1(u),...,\alpha_n(u)), \\ (\alpha_1(v),...,\alpha_n(v))), \tag{52}$$

где

$$\alpha_i(u)=e\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{53}$$

Здесь

$$e=1-\int_0^\infty B(\xi)d\xi. \tag{54}$$

Условия представимости предиката в таком виде установлены в теореме 4 (см. [1]). Совокупность условий этой теоремы будем именовать условиями A.

Второй частный случай функций из $\bar{K}_t$ – это функции, представимые в виде

$$x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)u(\lambda), \tag{55}$$

где $\beta(\tau)\in K_t$, $u(\lambda)\in K$ – положительный конус пространства $L^2[0,\ l]$. Для таких функций формулы (50), (51) означают, что для любой функции $u\in K$ существует функция $B_n(\xi)$, удовлетворяющая условиям (51) и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta u, cu)=1 \tag{56}$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $C=f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta)=\frac{1}{e}(\beta(t)-\int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{57}$$

Условия справедливости формул (56), (57) установлены в теореме 4. Будем называть их условиями B'.

Теорема 5. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ нашлась система линейно независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям (32), такие, что имеют место равенства (50), (51), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, B' и*

г) для любого $t\in(-\infty,\infty)$ и любого $x\in\bar{K}_t\times L^2[0,1]$ существует (не единственная) функция $u\in K$ такая, *что*

$$\Phi_t(x,u)=1; \tag{58}$$

д) для любых $t\in(-\infty,\infty)$ *и любых*

$$x,x',y,y'\in\bar{K}_t\times L^2[0,1]$$

из равенств $\Phi_t(x,x')=1$ и $\Phi_t(y,y')=1$ *следует, что*

$$\Phi_t(x+y,x'+y')=1\ ;$$

е) для любой последовательности

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t\times L^2[0,1],$$

сходящейся к нулю в метрике $L_t^2\times L^2[0,1]$, *существует последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subset K$, *сходящаяся к нулю в метрике* $L^2[0,1]$ *и такая, что*

$$\Phi_t(x_k,u_k)=1,\quad k=1,2,\ldots .$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ при некоторых функциях $g_i\ (i=1,2,..,n)$ и B имеют место формулы (50), (51). Для функций $u\in K$ равенство (51) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda-\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times \\ \times\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau=e\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{59}$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит, и левая часть не зависит от t. Тогда, как видно из (50), ограничение предиката Φ_t на $K\times K$ не зависит от t. Следовательно, на $K\times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u,v\in K$

$$\Phi(u,v)=D((\alpha_1(u),\ldots,\alpha_n(u)), \\ (\alpha_1(v),\ldots,\alpha_n(v))),$$

где величины $\alpha_i(u)$ определены равенством (53). Это и означает выполнимость условий A.

Рассмотрим теперь случай функций вида (55). Для таких функций равенство (51) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda-\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times \\ \times\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times \\ \times(\beta(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{60}$$

В частности, при $\beta(\tau)=A\ (\tau\le t)$ имеем

$$\alpha_i^{(t)}(cu)=ce\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

Таким образом, равенство

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\alpha_i^{(t)}(cu)\quad(i=1,2,\ldots,n) \tag{61}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $c=f_u^{(t)}(\beta)$, где величина $f_u^{(t)}(\beta)$ определена равенством (57). Поэтому из формулы (50) следует, что при фиксированном $u\in K$ для любой функции $\beta(\tau)$ существует единственное число c такое, что $\Phi_t(\beta u,cu)=1$, причем c определено равенством (57). Это означает выполнимость условий B'.

Проверим выполнимость условий *г – е*. Рассмотрим при фиксированном t произвольный элемент x пространства $\bar{K}_t\times L^2[0,1]$. Пусть величина $\alpha_i^{(t)}(x)$ определена равенством (51). Положим

$$u(\lambda)=\frac{1}{e}(u(\lambda,t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau). \tag{62}$$

Тогда в соответствии с (59)

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)(x(\lambda,t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau).$$

Сравнивая это равенство с (51), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(u)\quad(i=1,2,\ldots,n). \tag{63}$$

Поэтому из (50) следует, что $\Phi_t(x,u)=1$. Нужно лишь проверить, что функция $u(\lambda)$, определенная равенством (62), является интегрируемой с квадратом. Для этого достаточно проверить, что каждая из функций от переменной λ:

$$x(\lambda,t)\quad\text{и}\quad\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau$$

удовлетворяет этому условию. По условию, при фиксированном t функция $x(\lambda,t)\in L^2[0,1]$ Имеем далее

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau= \\ =\int_{-\infty}^{t}(e^{\sqrt{t-\tau}}B(t-\tau))(e^{\sqrt{t-\tau}}x(\lambda,\tau))d\tau.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau\right|\le \\ \le\sqrt{\int_{-\infty}^{t}(e^{t-\tau}B^2(t-\tau))d\tau}\sqrt{e^t\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Отсюда и из неравенства (51) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau\right|\le ce^{-\frac{t}{2}}\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Поэтому

$$\int_0^1(\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau)^2d\lambda\le c^2e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \tag{64}$$

Поскольку интеграл (49) конечен, то из последнего равенства вытекает требуемый результат. Итак, условие *г* выполняется. Выполнимость условия *д* очевидна. Проверим условие *е*. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t\times L^2[0,1]$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность. Определим для каждого x_k элемент u_k по формуле (62). Тогда из (64) следует, что

$$\| u_k \| \le \frac{1}{e} \| x_k(.,t) \| + ce^{-\frac{t}{2}} \| x_k \|. \tag{65}$$

Здесь $\| u_k \|$ – $L^2[0,1]$ – норма элемента u_k, $\| x_k(.,t) \|$ – $L^2[0,1]$ – норма функции $\lambda \to x_k(\lambda,t)$, ($\lambda \in [0,1]$), $\| x_k \|$ – $\overline{L}_t^2$ – норма функции x_k. Из (65) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Из (63) имеем

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Следовательно

$$\Phi_t(x_k, u_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Для любого $x \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ положим

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{66}$$

где u – произвольный элемент из K, связанный с x условием (58); α_i – линейный функционал, заданный формулой (53). Условие *г* не гарантирует единственности элемента u, удовлетворяющего равенству (58). Поэтому следует проверить, что правые части равенства (66) не зависят от выбора элемента u. Рассмотрим какой-либо другой элемент $v \in K$ такой, что $\Phi_t(x,v) = 1$. Из равенств $\Phi_t(x,u) = 1$ и $\Phi_t(x,v) = 1$ следует, что $\Phi_t(u,v) = 1$. Поэтому на основании (52) можно заключить, что

$$\alpha_i(v) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Проверим теперь справедливость формулы (50). Пусть для некоторых $x, y \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство

$$\Phi_t(x, y) = 1. \tag{67}$$

Подберем элементы $u, v \in K$, согласованные с элементами x и y соответственно условием *г*, то есть

$$\Phi_t(x,u) = 1, \ \Phi_t(y,v) = 1. \tag{68}$$

Из равенств (67) и (68) заключаем, что $\Phi_t(u,v) = 1$. В этих условиях формула (52) дает $\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, \dots, n.$. Поэтому в соответствии с определением (66)

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(y), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{69}$$

Обратно, пусть для некоторых $x, y \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство (69). Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x,u) = 1, \ \Phi_t(u,v) = 1. \tag{70}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \\ &\alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i^{(t)}(v), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{71}$$

Из (71) заключаем, что

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому из (67) (см. [1]) следует, что $\Phi_t(u,v) = 1$. Вместе с (70) это дает (67). Справедливость формулы (50) доказана. Осталось доказать, что для функционалов $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеет место формула (51).

Функционалы $\alpha_i^{(t)}$ аддитивны. Действительно, пусть x, y – произвольные элементы из $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$. Нужно показать, что

$$\alpha_i^{(t)}(x+y) = \alpha_i^{(t)}(x) + \alpha_i^{(t)}(y), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{72}$$

Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы выполнялись равенства (70) и, следовательно, (71). Из (70) и условия *д* заключаем, что

$$\Phi_t(x+y, u+v) = 1.$$

Но тогда по определению величины $\alpha_i^{(t)}$

$$\alpha_i^{(t)}(x+y) = \alpha_i^{(t)}(u+v). \tag{73}$$

Функционалы α_i аддитивны:

$$\alpha_i(u+v) = \alpha_i^{(t)}(u) + \alpha_i^{(t)}(v). \tag{74}$$

Комбинируя равенства (73), (74) и (71), получаем (72).

Рассмотрим произвольную последовательность элементов $x_k \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$, сходящуюся к нулю в норме $\overline{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ – последовательность, согласованная с $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле условия *е*:

$$\lim_{k \to \infty} u_k = 0, \quad \Phi_t(x_k, u_k) = 1. \tag{75}$$

Поскольку α_i – линейные функционалы, то

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_i(u_k) = 0. \tag{76}$$

Но из второго равенства (75) следует, что

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \ k = 1, 2, \dots . \tag{77}$$

Из (76) и (77) получаем, что

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_i^{(t)}(x_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Значит, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ на $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$ аддитивны и непрерывны в нуле. Так как $\bar{K}_t$ – воспроизводящий конус в $\overline{L}_t^2$, то $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$ – воспроизводящий конус пространства $\overline{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Следовательно, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ однозначно продолжаются до линейных функционалов на этом пространстве. Общий вид линейного функционала на пространстве $L^2[0,1]$:

$$u \to \int_0^1 g(\lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad g \in L^2[0,1],$$

а на пространстве $\overline{L}_t^2$:

$$u \to \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A^{(t)}(\lambda,\tau) x(\lambda,\tau) d\lambda d\tau, \quad A^{(t)} \in \overline{L}_t^2.$$

Поэтому функционалы $\alpha_i^{(t)}$ записываем в виде

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \\ = \int_0^1 g_i(\lambda)x(\lambda,\tau)d\lambda + \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A^{(t)}(\lambda,\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \quad (78)$$

Пусть функция x имеет вид (55). Из (56) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta)u) = 1.$$

Комбинируя это равенство с (50), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f_u^{(t)}(\beta)\alpha_i^{(t)}(u). \quad (79)$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (см. [1]), можно показать, что функция $f_u^{(t)}(\beta)$, в действительности, не зависит от u. Поэтому

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f^{(t)}(\beta)\alpha_i^{(t)}(u), \quad (80)$$

а равенство (57) принимает вид

$$f^{(t)}(\beta) = \frac{1}{e}(\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \quad (81)$$

Подставляя в (79) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u)$, $f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (78), (81) и (53) соответственно, получаем

$$\beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau = \\ = (\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau) \cdot \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda,$$

или после упрощения

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau = \\ = -\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda \cdot \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau.$$

Теорема Фубини позволяет переписать это равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^t \beta(\tau)(e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda = 0.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 (см. [1]), из последнего равенства можно заключить, что

$$e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau) = 0.$$

Поэтому равенство (78) можно переписать в виде (51). Теорема 5 доказана.

Выводы

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека в виде семейств интегральных трехпараметрических и сверточных операторов, применяемые для моделирования инерции и иррадиации зрения в рамках единой математической модели. При этом учитывается цветовое восприятие зрительной картины с различными спектральными плотностями лучистой яркости в различных точках пространства, меняющимися произвольным образом во времени. Рассмотрены интегральные модели адаптации зрительной системы человека к уровню освещения в виде сверточных семейств операторов и семейств интегральных сумм. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3**. *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78. **4.** *Бондаренко, М.Ф.* Дедуктивное построение теории цвета предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85. **5.** *Бондаренко, М.Ф.* Модели компараторной идентификации в виде семейств интегральных одно- и двухпараметрических операторов / [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 86-97.

Поступила в редколлегию 23.09.2011.

УДК 519.7

Моделі компараторної ідентифікації у вигляді сімейств інтегральних трьохпараметричних і згортальних операторів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 98-108.

Розглянуто інтегральні моделі деяких функцій колірного зору людини у вигляді сімейств інтегральних трьохпараметричних і згортальних операторів, вживані для моделювання інерції і іррадіації зору у рамках єдиної математичної моделі. Розглянуто інтегральні моделі адаптації зорової системи людини до рівня освітлення у вигляді згортальних сімейств операторів і сімейств інтегральних сум.

Іл. 4. Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

Models of comparator identification as three-parameters and convolutional integral operators families / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 98-108.

The integral models of some colour sight functions are considered as families of integral three-self-reactance and convolutional operators, inertias applied for a design and to the sight irradiation within the framework of single mathematical model. The integral models of adaptation of the visual system of man are considered to the level of illumination as convolutional families of operators and families of operators of integral sums.

Fig. 4. Ref.: 5 items.

УДК 519.7:007.52; 519.711.3

И.Д. Вечирская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
г. Харьков, Украина, ira_se@list.ru

РАЗРАБОТКА ТРЕХЯЗЫЧНОГО ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОГО СЛОВАРЯ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Статья посвящена разработке лексикографической базы данных трехязычного терминологического словаря. Проведен детальный анализ схемы связей между таблицами и структуры самих таблиц с помощью метода трехслойной декомпозиции предиката, что позволило определить пути решения проблемы создания прямых и обратимых трехязычных электронных словарей.

АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ БАЗА ДАННЫХ, МЕТОД ТЕРХУРОВНЕВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПРЕДИКАТОВ, ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Введение

Существует несколько подходов к построению словарей. Один из них, теоретически правильный и обоснованный, предполагает детальную проработку всех методологических аспектов, построение концептуальной модели лексикографической системы [1] и последующей микроструктуры частей словарных статей. Таким образом, на каждом шаге происходит все более углубленное исследование предметной области, ее своеобразная детализация. Возможен также другой путь исследований, где производится переход от частного к общему. В таком случае уже в самом начале производится подробное изучение принципов организации данных, исследуются всевозможные связи с целью их дальнейшего обобщения и получения закономерностей. И только потом осуществляется построение модели системы.

На практике же редко получается отыскать решение задачи тем или иным способом и даже четко определить подход к поиску решения. Как правило, нахождение решения – это перебор или объединение нескольких методов решения с периодической сменой самих подходов. Так, при построении трехязычного терминологического словаря сначала стояла задача непосредственного составления самого словаря в электронном виде, часть которого уже была представлена документом Word, с целью дальнейшего вывода на печать. Реестр словаря составляют однословные термины и терминологические словосочетания по информатике и радиоэлектронике. Кроме терминов в реестр словаря включены некоторые общелитературные слова и словосочетания для облегчения чтения и составления текстов на украинском и английском языках.

1. Построение лексикографической базы данных терминологического словаря

Создание электронных словарей включает, как правило, следующие этапы обработки [1]:

1) Путем сканирования и распознавания получают электронный вариант текста;

2) Электронный текст словаря представляется в виде массива отдельных словарных статей;

3) По формальным признакам автоматически проводится декомпозиция массива словарных статей.

Принцип построения терминологического словаря – алфавитно-гнездовой [2]. Заголовочным словом является русское слово-термин. Гнездо включает терминологические словосочетания, элементом которых является заголовочный термин. Внутри гнезда терминологические словосочетания располагаются в алфавитном порядке. Если в заголовочную часть входит несколько однословных терминов (термины-синонимы или видовые пары глаголов), то для глаголов первым идет глагол несовершенного вида, для других частей речи – наиболее общеупотребительный. Часть заглавного слова, общая для всех терминологических словосочетаний в гнезде, отделяется прямой жирной чертой (**|**), а в производных словах вместо неё выступает тильда (~). Если общая часть не выделена, то вместо тильды подставляется все слово.

Видовые пары глаголов разделяются косой чертой, первым идёт глагол несовершенного вида. Все русские термины и терминологичекие словосочетания приведены жирным шрифтом.

Терминологические словосочетания строятся таким образом, чтобы тильда была на первом месте. Соответствующие украинские переводные эквиваленты сохраняют порядок слов русского словосочетания, английские эквиваленты сохраняют порядок слов, естественный для текстов.

Примеры формальных (полиграфических) признаков приведены в табл.1.

Схема связей между таблицами лексикографической базы данных трехязычного терминологического словаря представлена на рис. 1.

После автоматического построения лексикографической база данных была ее необходимо откорректировать.

Таблица 1

Структурный элемент	Формальный признак
Слово	Начало: абзац, буква (украинский, полужирный шрифт). Окончание: запятая; точка; пробел, индекс, цифра, запятая; пробел *див*; пробел, индекс, цифра, пробел *див*; двоеточие.
Стилистические и грамматические ремарки	Начало: текст после цифры (курсив). Окончание: текст (обычный шрифт).

2. Технологические аспекты разработки баз данных словаря и выбор программных средств

При разработке русско-украинско-английского словаря по информатике и радиоэлектронике использовалась СУБД Firebird. На ее выбор оказали влияние следующие факторы: соответствие SQL стандартам; поддержка транзакции, хранимых процедур; наличие утилиты бэкапа; возможность легкого переноса с одного компьютера на другой; наличие модуля для работы с БД без установки сервера Firebird, что упрощает его использование и инсталляцию на машинах пользователей; поддержка многопользовательского режима; а также наличие поддержки в основных системах разработки: PHP, Delphi, Perl, Borland C++; быстрое создание баз данных и работа с ними.

Инструментарий пользователя для заполнения словаря разрабатывался в среде Delhi 7. Веб-интерфейс не был задействован, т.к. он менее удобен в плане интерактивности, что важно для оператора, который будет заполнять словарь. Планируется использовать веб-интерфейс для предоставления словаря широкому кругу пользователей: поиск, вывод результатов, что предполагает задействование синхронизации данных.

В настоящее время словарь находится в стадии разработки. Изначально словарь был предназначен для ввода словарных статей, хранения данных, удобного поиска с возможностью редактирования и экспорта в Word с последующей печатью словаря. На данном этапе в базу данных входит 15 таблиц (рис. 1), которые отображают связи между словом-термином, его терминологическими словосочетаниями на русском языке и соответствующими переводными эквивалентами на украинском и английском языках. Грамматические показатели отображают следующие признаки частей речи:

– для существительного – род (*ж.*, *с.*, *ч.*,), число (*мн.*);

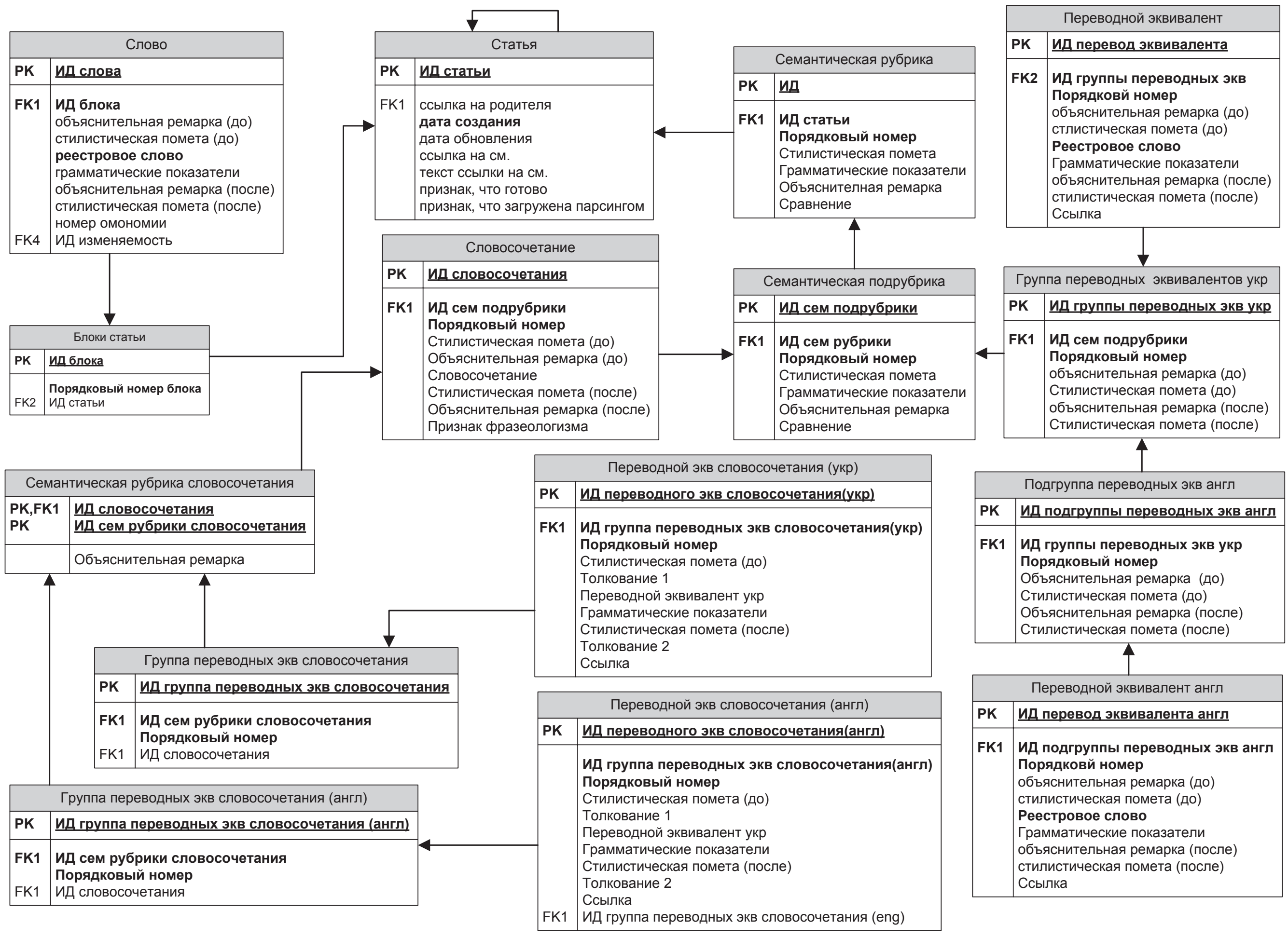


Рис. 1

– для прилагательного – часть речи (*прикм.*), степень сравнения (*вищ. ст.*, *збільш.*, *зменш.*, *зменш.-пестл.*);

– для числительного – часть речи (*числ.*);

– для местоимения – часть речи (*займ.*), разряд (*вказ.*, *пит.*, *особ.*, *означ.*);

– для глагола – вид (*недок.*, *док.*), форма (*акт.*, *безос.*);

– для причастия – часть речи (*дієпр.*);

– для деепричастия – часть речи (*дієприсл.*);

– для наречия – часть речи (*присл.*);

– для предлога – часть речи (*прийм.*);

– для союза – часть речи (*спол.*);

– для частицы – часть речи (*част.*);

– для междометия – часть речи (*виг.*).

На рис. 2, 3 экранными формами представлены поиск в словаре по указанной букве, а также пример редактирования словарной статьи.

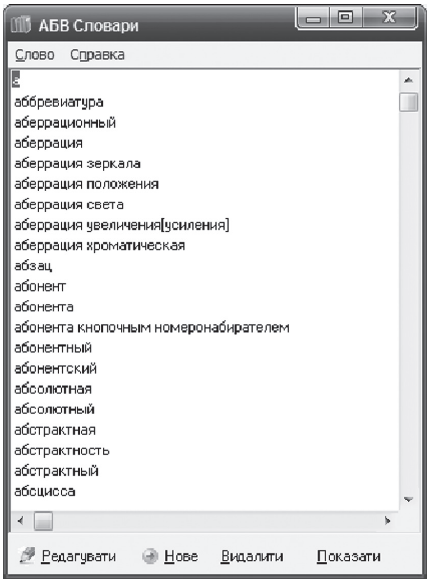


Рис. 2.

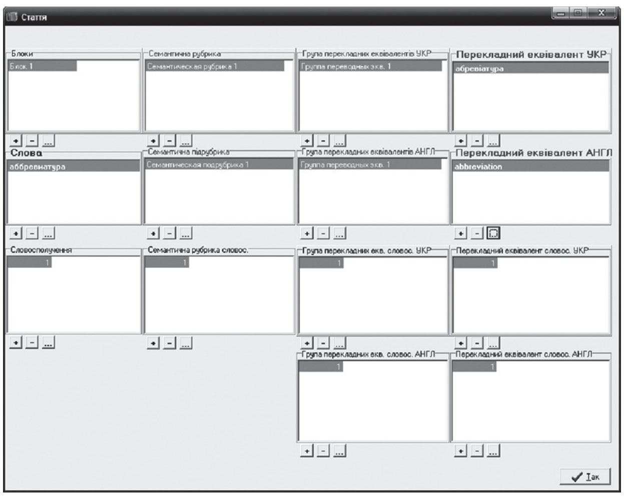


Рис. 3

В перспективе предполагается расширение функциональных возможностей электронного трехязычного словаря (Р → У → А). На данном этапе он позволяет формировать два двуязычных словаря (Р → У, У → А). Для реализации также и остальных (Р → А, У → Р, А → У, А → Р) из всех шести возможных двуязычных словарей ведутся исследования по разработке математической модели с помощью универсального средства описания – алгебры конечных предикатов [3].

3. Схема построения модели трехязычного терминологического словаря на основе трехслойной декомпозиции предикатов

Трехслойная декомпозиция предикатов на примере словоизменения полных непритяжательных имен прилагательных русского языка рассматривалась в [4]. Построенная схемная реализация, обладая свойством обратимости, реализуя широкое распараллеливание обработки информации предиката, получилась обратимой, параллельной и позволяет вычислить результат за несколько тактов. Схема работает в нескольких режимах: вычисляет значение предиката по заданному, определяет неизвестные значения переменных по известным и т.п. Было отмечено, что полученный результат может найти широкое применение в базах данных, где при выполнении некоторых запросов (например, на определение содержания ячеек таблицы) требуется переходить от одной таблицы к другой (достаточно сложный процесс, при котором лавинообразно нарастает информация). Если же от предиката (каждая таблица описывается определенным предикатом) возможно перейти к линейному логическому оператору, то описанное действие выполняется значительно проще и быстрее, а ответ при этом вычисляется (а не находится).

Приведем схематическое описание построения трехслойной декомпозиции предиката, описывающего лексикографическую базу данных терминологического словаря. Для этого необходимо произвести сначала двухслойную декомпозицию соответствующих предикатов 1-го и 2-го рода.

При двухслойной декомпозиции предикатов 1-го рода исходный предикат представляется через свои характеристические функции (сюръекции) и более простой, чем исходный, предикат L (он определен на множестве меньшей мощности).

Рассмотрим тернарный предикат и будем искать для него такое представление, в котором сравнение значений трех соответствующих ему функций f_1, f_2 и f_3 производилось бы с помощью простейшего в некотором смысле предиката. Функциям f_1, f_2 и f_3 соответствуют русский, украинский и английский языки. В нашем случае переменным исходного предиката будут соответствовать все слова и признаки терминологического словаря.

Отметим далее, что множество A_1 отображает значения таблиц лексикографической базы данных, относящихся к русскому языку (множество значений переменной x_1), множество A_2 – значения таблиц, относящихся к украинскому языку, (множество значений переменной x_2), A_3 – значения таблиц, относящихся к русскому языку (множество значений переменной x_3 соответственно).

Введем понятие сопровождающих эквивалентностей предиката, представив их следующей формулой:

$$E_1(x_1', x_1'') = \forall x_2 \in A_2 \ \ \forall x_3 \in A_3 \ (P(x_1', x_2, x_3) \approx P(x_1'', x_2, x_3)).$$

Пусть далее предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ определен на декартовом произведении множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Тогда имеет место:

$$E_i(x_i', x_i'') = \forall x_1 \in A_1 \forall x_2 \in A_2 ... \forall x_{i-1} \in$$
$$\in A_{i-1} \forall x_{i+1} \in A_{i+1} ... \forall x_n \in A_n$$
$$(P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n) \approx$$
$$P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, ..., x_n)).$$

Таким образом,

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = L(f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n)),$$

$P(x_1, x_2, x_3) = L(f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3))$. Далее находим $L(v_1, v_2, v_3) = P(f_1^{-1}(v_1), f_2^{-1}(v_2), f_3^{-1}(v_3))$, заменив $f_i(x_i) = v_i$.

Построим таблицу предиката $P(x_1, x_2, x_3)$, характеризующую связь между переменной x_1 и отношением (x_2, x_3), т.е. между термином русского языка и переводными эквивалентами на украинском и английском языках. Если совокупность признаков (x_1, x_2, x_3) присутствует в терминологическом словаре, то ставим в таблице единицу, в противном случае – нуль.

Далее аналогичным образом необходимо исследовать связь между признаками русского, английского и терминами украинского языков; а также связи между признаками русского, украинского и терминами английского языков и построить соответствующие классы разбиений.

Двухслойная декомпозиция предикатов 2-го рода дает представление исходного предиката через отображения и простейший предикат, единственный для всех предикатов, подобный предикату равенства. Таким образом, двухслойная декомпозиция предикатов 2-го рода – это следующий шаг к представлению отношения в наиболее общем и простом виде.

Записываем характеристические функции предиката P. С этой целью находим характеристические функции $f_i(x_i) = v_i$ эквивалентностей E_i, $(i = \overline{1,3})$.

Записываем образ предиката P, описывающего окончание полных непритяжательных имен прилагательных русского языка. С этой целью представим предикат P в виде:

$$P(x_1, x_2, x_3) = L(f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3)).$$

Откуда находим

$$L(v_1, v_2, v_3) = P(f_1^{-1}(v_1), f_2^{-1}(v_2), f_3^{-1}(v_3)).$$

Составляем таблицы предиката L, заменяя признаки именами слоев, в которые они входят, x_i – на v_i, $(i = \overline{1,3})$, P – на L, затем повторяющиеся столбцы и строки исключаем из таблицы.

Форма записи предиката эквивалентности может быть видоизменена с помощью предиката равенства и характеристических функций. Предикат эквивалентности представим в наиболее общем виде через конъюнкцию своих характеристических предикатов.

Трехслойной декомпозицией предиката E называется его представление в виде:

$$E(x_1, x_2, x_3) = D(g_1^{-1}(f_1(x_1)), g_2^{-1}(f_2(x_2)), g_3^{-1}(f_3(x_3))),$$

где $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ – некоторые функции.

Обобщение теоремы об общем виде 2-го рода предиката на n-арные предикаты имеет следующий вид:

$$E(x_1, x_2, ..., x_n) =$$
$$= \exists v \in B(F_1(x_1, v) \wedge F_2(x_2, v) \wedge ... \wedge F_n(x_n, v)),$$

где

$$F_i(x_i, v) =$$
$$= \exists x_1 \in A_1 \exists x_2 \in A_2 ... \exists x_{i-1} \in A_{i-1} \exists x_{x+1} \in A_{i+1} ... \exists x_n \in A_n$$
$$S(x_1, x_2, ..., x_n, v),$$

S – функция, присваивающая какие-либо различные имена v всем наборам $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $E(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$; B – множество всех таких имен.

Предложенная форма записи общего вида предиката 2-го рода с помощью предиката равенства и отображений более удобна для практики.

Представленный способ нахождения характеристических предикатов с использованием некоторой классифицирующей функции S, присваивающей какие-либо различные имена v всем парам предметов, для которых предикат равен 1.

Таким образом, получаем

$$E(x_1, x_2, ..., x_n) =$$
$$= \exists v \in B(F_1(x_1, v) \wedge F_2(x_2, v) \wedge ... \wedge F_n(x_n, v)),$$

где $F_1(x_1, v) = \exists x_2 \in A_2 \exists x_3 \in A_3 \ \ S(x_1, x_2, x_3, v)$,

$$F_2(x_2, v) = \exists x_1 \in A_1 \exists x_3 \in A_3 \ \ S(x_1, x_2, x_3, v),$$
$$F_3(x_3, v) = \exists x_1 \in A_1 \exists x_2 \in A_2 \ \ S(x_1, x_2, x_3, v).$$

Предикат $E(x_1, x_2, x_3)$, согласно определению, представляет собой композиции предикатов H_1, H_2, H_3 и D_C:

$$E(x_1, x_2, x_3) = \exists p_1, p_2, p_3 \in C \ (H_1(x_1, p_1) \wedge H_2(x_2, p_2) \wedge$$
$$\wedge H_3(x_3, p_3) \wedge D_C(p_1, p_2, p_3)).$$

4. Анализ и перспективы дальнейших исследований

Уже на первом этапе исследований при проведении декомпозиции предиката 1-го рода становится очевидным, что разработанная лексикографическая база данных не будет достаточной для выполнения свойства «обратимости», т.е. трехязычный словарь не будет работать на всю мощность, предоставляя возможность получать из него не только русско-украинский и украинско-английский, а также другие двуязычные словари и недостающие трехъязычные.

Отметим, что признаки разработанной лексикографической базы данных отображены в 15 таблицах, среди них 7 таблиц («Слово», «Статья», «Семантическая рубрика», «Семантическая под-рубрика», «Блок статьи», «Словосочетание», «Семантическая рубрика словосочетания») относятся к русскоязычному термину, 4 таблицы («Украинский переводной эквивалент», «Группа украинских переводных эквивалентов», «Украинский переводной эквивалент словосочетания», «Группа украинских переводных эквивалентов») – к переводным эквивалентам украинского и еще 4 («Английский переводной эквивалент», «Группа английских переводных эквивалентов», «Английский переводной эквивалент словосочетания», «Группа английских переводных эквивалентов») – к переводным эквивалентам английского языка.

Непростой является сама структура словарной статьи [1]. На рис. 4 она представлена в графическом виде на примере слова *звучащий* и его переводных эквивалентов.

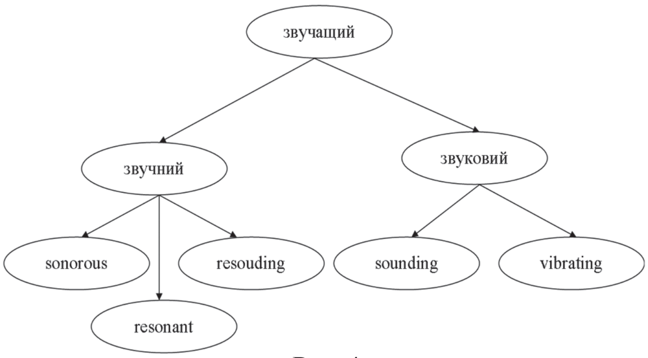


Рис. 4

Приведенная структура представляет собой дерево, главной вершиной которого является слово-термин, на втором уровне находятся узлы, обозначающие семантическую группу, за ней идет уровень семантических подгрупп, только после этого – группа переводных эквивалентов и только потом появляется уровень, который отображает непосредственно сам переводной эквивалент. Таким образом, чтобы получить возможность нахождения всех переводных эквивалентов для реестрового слова, двигаясь снизу вверх, необходимо заполнить все промежуточные поля и признаки. Если в словарь вносить еще и терминологические словосочетания, структура становится еще сложнее.

Выводы

Интеллектуальная обработка информации изначально предполагает детальный анализ предметной области, а также возможностей используемых технических средств. Часто при реализации возникают проблемы, в первую очередь, из-за несоответствия между средствами построения математической модели (неполнота алгебры, как следствие, невозможность расширения/обновления модели – способности к обучению и самообучению) и средствами описания функциональных возможностей самой технической системы. Одним из путей решения этой проблемы является выбор универсального средства описания [5]. Под «универсальностью» математического аппарата подразумевается возможность описания его средствами объекта любой природы.

Таким образом, в статье было описано построенную лексикографическую базу данных терминологического трехязычного словаря. С помощью средств алгебры конечных предикатов был проведен анализ схемы связей между таблицами и структуры самих таблиц, что позволило определить пути решения проблемы создания прямых и обратимых трехязычных электронных словарей.

Использованный метод трехслойной декомпозиции осуществлялся путем обобщения: взяли предикат эквивалентности, убрали свойство однозначности – получили толерантность, убрали еще свойство рефлексивности, заменив его квазирефлексивностью (рефлексивность не на всей области определения, а на ее подмножестве) – получили квазитолерантность. Потом убрали последнее свойство симметричности и получили произвольный n-арный предикат.

Кроме этого, были проанализированы технологические аспекты разработки базы данных терминологического словаря и выбор программных средств для его реализации.

Список литературы: 1. Рабулець, О.Г. Дієслово в лексикографічній системі [Текст] / О.Г. Рабулець, В.А. Широков, К.М. Якименко. – К.: Довіра, 2004. – 259 с. **2.** Остапова, И.В. Лексикографическая структура этимологических словарей и их представление в цифровой среде [Текст] / И.В. Остапова // Прикладная лингвистика и лингвистические технологи: сборник научных трудов. – 2007. – С. 236-245. **3.** Вечирская И.Д. Расслоение предикатов на примере словоизменения прилагательных русского языка [Текст] / И.Д. Вечирская, Г.Г. Четвериков, Т.Н. Федорова // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 170-177. **4.** Бондаренко, М.Ф. Теория интеллекта [Текст]: учеб. / М.Ф. Бондаренко Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Харьков: Изд-во СМИТ, 2006. – 571с. **5**. Как переводит компьютер [Электронный ресурс] / С.В.Соколова. – Режим доступа: http://www.translationmemory.ru/technology/ articles/article_Sokolova.php – 05.11.2010 г. – Загл. с экрана.

Поступила в редколлегию 23.05.2011.

УДК 519.7:007.52; 519.711.3

Розробка тримовного термінологічного словника на основі алгебри скінченних предикатів / І.Д. Вечірська // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 109-113.

Розроблено базу даних термінологічного тримовного словника. Обґрунтовано вибір програмних засобів для його реалізації. Проведено аналіз схеми зв'язків таблиць та їх структури за допомогою методу тришарової декомпозиції предикатів.

Табл. 1. Іл. 4. Бібліогр.: 5 найм.

UDK 519. 519.7:007.52; 519.711.3

About method of linear logical transformations computation / I.D. Vechirskaya // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 109-113.

The database of terminological three-lingual dictionary is developed. Choosing of software environment to its realization. The connection scheme and structure of tables and is analysed by means of method of predicate three-layer decomposition.

Tab. 1. Fig. 4. Ref.: 5 items.

УДК 519.81

Э.Г. Петров[1], Е.В. Губаренко[2]

[1] ХНУРЕ, м. Харків, Україна, ST@kture.kharkov.ua;
[2] ХНУРЕ, м. Харків, Україна, vergeley@mail.ru

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ МЕЖДУНАРОДНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ НА ОСНОВЕ КВОТИРОВАНИЯ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ МИРОВОЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрены способы учета, формирования ограничений и управления мировыми ресурсами. Проанализированы ситуации и целесообразность применения квот как инструмента управления ресурсами на международном уровне. Указаны недостатки современных подходов к формированию различных видов квот и ограничений. Описаны альтернативные подходы и перспективы международного квотирования и учета ресурсов.

СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, КВОТИРОВАНИЕ, ЭНЕРГОЕМКОСТЬ, ВАЛОВОЙ ВНУТРЕННИЙ ПРОДУКТ, РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИЕ ТЕХНОЛОГИИ, МЕТОДЫ РАСЧЕТА КВОТ

Введение

Процессы глобализации и интенсификации международного сотрудничества связаны не столько с разделением труда или иными экономическими либо политическими процессами, сколько с возникновением проблем и предкатострофических ситуаций, которые ни одна локальная социально-экономическая система (СЭС) не может решить самостоятельно. В этом случае СЭС стремятся объединиться с другими системами, чтобы обеспечить расширенный доступ к ресурсам, рынкам сбыта и другим возможностям [1]. Именно это является причиной возникновения различных форм кооперации. Среди них могут быть выделены: подчинение собственных целей целям другой системы, подчинение собственным целям целей других систем, формирование новых совместных целей, объединение целей. В чистом виде данные формы редко встречаются, обычно возникают смешанные формы, которые вбирают в себя элементы каждой из перечисленных.

На данном этапе развития мирового сообщества экономика каждой страны, являясь активным элементом мировой метасистемы, в той или иной степени влияет на общемировые социально-экономические процессы. Политика изоляционизма не приведет к ослаблению взаимного влияния, а лишь усложнит процесс устойчивого развития, лишив возможности эффективного управления, что провоцирует спонтанное, хаотическое развитие СЭС.

Это обусловлено тем, что область устойчивого функционирования СЭС представляет собой некое многомерное пространство возможных состояний, ограниченное доступными объемами критических ресурсов [2].

Так как состояние системы является функцией потребляемых ресурсов, в рамках концепции экономического роста это означает, что любая локальная система с различной скоростью (раньше или позже) достигает состояния на границе ресурсной устойчивости. Такое состояние экстремально по экономическим показателям (уровню потребления, объему оборота, насыщенности потребительских рынков, уровню конкурентоспособности и прочее), но при дальнейшем развитии и нарушении критических ограничений превращается в кризисное или даже катастрофическое. При этом в силу ограниченности объемов многих ресурсов, экстенсивное расширение области экономического роста за счет увеличения объема потребления ресурсов невозможно без катастрофической деградации даже восстанавливающихся ресурсов. Примером может служить судьба Аральского моря. После начала забора воды в 1960-х годах из основных питающих рек Амударья и Сырдарья с целью орошения, Аральское море в 1989 году фактически прекратило своё существование, распавшись на два изолированных водоёма – Северное (Малое) и Южное (Большое), которые продолжают уменьшаться. Хватило 25 лет, чтобы четвертое по размерам озеро планеты исчезло с лица Земли, и огромные территории некогда плодородных земель превратились в пустошь [3].

Можно привести множество аналогичных примеров касающихся экологических и биологических ресурсов. Это означает, что впервые за всю историю существования нашей цивилизации было достигнуто состояния мировой СЭС, близкое к критической граничной области. Другими словами запас устойчивости, которым обладала наша цивилизация, израсходован научно-технической революцией XIX-XX вв. и наращиванием объемов производства и потребления конца XX в.

Переход мировой СЭС в зону критического граничного состояния, и стремительное приближение

СЭС к границе необратимых катастрофических изменений, в частности экологической и социальной сферы [4], вызывает необходимость формирования принципиально новых форм управления устойчивым развитием. Речь идет о масштабных системах мониторинга, отслеживающих и сопоставляющих множество показателей; системах ограничений, которые формировали бы область возможных состояний; системе управления, которая могла бы своевременно и комплексно принимать упреждающие и корректирующие решения, стимулировать переход от экстенсивного экономического роста к интенсивному устойчивому развитию.

Целью статьи является анализ факторов, влияющих на формирование области устойчивого развития, определения количественных значений границ такой области, выработка возможных способов регулирования устойчивого состояния как локальных, так и коопераций СЭС различного уровня, вплоть до мирового, на основе использования ресурсных квот как управляющего воздействия.

1. Квоты как управляющее воздействие

Как показал многолетний опыт развития мировой СЭС, для большинства характеристик устойчивое граничное состояние в условиях свободного стихийного рынка, ориентированного на максимизацию прибыли (экономический рост), не может быть достигнуто естественным путем, т.е. в результате саморегулирования экономических процессов. Это означает, что необходимо вмешательство со стороны органов государственного управления для создания благоприятных условий устойчивого развития различных СЭС. Такое управляющее воздействие может иметь форму установления квот на объем используемых ресурсов.

Квота (от латин. quota – доля, часть, сколь велика) определяет долю в общем производстве или сбыте, устанавливаемая в рамках картельного соглашения для каждого его участника. В контексте настоящей статьи «картелем» может быть названа некоторая группа национальных предприятий, большая или меньшая группа СЭС национального или регионального уровня, или мировая СЭС в целом.

Квоты являются инструментом прямого или косвенного управления макроэкономическими процессами путем формирования ограничений как на общее количество допустимых для использования ресурсов, так и их распределение между участниками картеля. Таким образом, квотирование критических ресурсов позволяет определять области допустимых состояний при управлении устойчивым развитием как отдельных групп, так и мировой системы. При этом следует подчеркнуть, что квотирование должно быть инструментом ограничения экстенсивного (рост производства за счет увеличения объемов потребляемых ресурсов) развития по отношению к критическим ресурсам, но инициировать интенсивное развитие на основе создания инновационных технологий использования традиционных или создания альтернативных ресурсов и т.д.

Необходимо понимать, что квотирование как инструмент государственной политики использовался и используется для достижения собственных целей конкретного государства: оказания давления на национальных или иностранных производителей, навязывания собственных целей конкурирующим производителям или целым странам, экономической блокады и прочее. В большинстве случаев это приводит не к стимулированию интенсивных (высокотехнологических) форм развития, а, наоборот, к экстенсивному, иногда к еще более примитивным формам, нежели были до применения квот. Такие способы применения квотирования (ведения экономических и технологических войн), были приемлемы, когда окружающая среда изобиловала полезными ископаемыми, добыть которые не представляло никаких проблем. На данный момент, когда сам процесс добычи ископаемых может обернуться экологической катастрофой регионального масштаба (разлив нефти в Мексиканском заливе), низкий уровень технологий производства инициирует загрязнения не только на локальном уровне, но и на мировом (выбросы отравляющих веществ китайскими предприятиями фиксируются по всему миру), а последствия техногенных катастроф влияют на каждую страну (Чернобыль и Фукусима, атомные электростанции, аварии на которых загрязнили всю планету), квотирование больше не инструмент ведения политических игр, а жизненно необходимый способ формирования устойчивой и эффективной экономики каждой стран в отдельности и мировой СЭС в целом.

2. Примеры и перспективы применения квотирования

Критическое состояние многих популяций ценных промысловых рыб (осетровых, лососевых, сельдевых, тресковых и др.), морепродуктов (мидий, устриц, гребешков) потребовало введения международных квот на их вылов и добычу вплоть до полного запрета. Это ограничило экстенсивное использование указанных ресурсов, но инициировало развитие интенсивных технологий искусственного разведения ценных видов рыб и морепродуктов как в естественных, так и в искусственных водоемах.

Украина в меру благоприятных природных факторов (умеренный климат, плодородные почвы, изобилие грунтовых вод) благоприятна для развития сельского хозяйства. Но это невозможно без применения орошения, в особенности в Южных регионах Украины. Например, огурец на 98% состоит из воды, перо лука содержит 88% воды, а для формирования кочана капусты весом 2 кг корни поглощают, а листва испаряет около 200 литров воды [5]. Эффективность различных методов орошения: обычная поливка (20-35%), распрыскивание (50-75%), дождевание (70-80%), капельное орошение (85-98%). Возвращаясь к приведенному выше примеру деградации Аральского моря, необходимо отметить, что поливное земледелие в бассейне рек Амударья и Сырдарья ведется обычным методом (открытым арычным способом). При этом около 65-80% воды испаряется и фильтруется в нижние грунтовые почвы, что в свою очередь приводит к засолению и снижению продуктивности почвы, необходимости «промывки» засоленных полей большими объемами воды и последующей утилизацией соленой воды, которая растворяет в себе не только соль, но и остатки удобрения, пестицидов, гербицидов и прочее.

Квотирование водозабора будет способствовать развитию новых прогрессивных методов полива, например, капельного полива. Такой полив позволяет резко уменьшить объем использованной воды, повысить качество продукции, увеличить урожайность, снизить риск засоления уникальных почв, уменьшить затраты на их восстановление и очищение.

Вместе с этим квотирование должно сопровождаться разработкой государственных целевых программ, которые должны взять на себя проведение научных исследований по оценке состояния объекта, выработки методов преодоления кризисных ситуаций, технологии их практической реализации, создания производства соответствующих материальных средств, подготовке и переподготовке специалистов, анализу социально-экономических последствий и т.д.

Для управления процессом устойчивого развития СЭС квоты являются одним из основных методов. Однако практическая реализация такого управления очень сложна, особенно если проблема носит планетарный характер.

Ярчайшим примером является выработка квот на совокупный выброс парниковых газов – Киотское соглашение. Основные обязательства взяли на себя индустриальные страны: Евросоюз должен сократить выбросы на 8 %, Япония и Канада – на 6 %, Страны Восточной Европы и Прибалтики – в среднем на 8 %, Россия, Украина и страны СНГ – сохранить среднегодовые выбросы в 2008–2012 годах на уровне 1990 года. На долю стран, ратифицировавших соглашение, приходится 61% выбросов парниковых газов (с каждым годом этот процент сокращается из-за растущих выбросов индустриальных гигантов Китая, Индии и США, которые отказались ратифицировать соглашение).

Квоты на парниковый газ, которые для Украины составляют 4,5 млрд единиц на 5 лет (2008-2012), являются отличным товаром. Договор между Украиной и Японией на передачу прав в размере 30 млн единиц стал первым в мире подобным документом. Между тем, в Германии, Бельгии, Болгарии, Венгрии, Дании, Греции, Испании, Италии, Румынии и целом ряде других стран рынок квот стремительно разрастается. Только за 2010 год объем оборота вырос до \$130 млрд. Прогнозируется, что к 2020 году оборот увеличится до \$3 трлн. Стоимость одной тонны выброса колеблется от \$10 до \$30 за тонну.

Но сам факт установления квот в том виде, в котором они существуют, неправомерен, так как не учитывает паритет между странами производителями и поглотителями парниковых газов. Основными поглотителями парниковых газов считаются растительный покров, в частности леса Амазонки, экваториальной зоны Африки (тропические леса) и обширные таежные леса Сибири.

На данный момент страны, обладательницы обширных лесов, вынуждены идти на уступки мировому сообществу и отказываться от их вырубки, не получая никаких компенсаций за недоиспользование собственных ресурсов.

Синтезируем модель изменения количества парниковых газов в атмосфере. Введем для каждого *i*-го государства следующие характеристики:

1) $G_i^u(t)$ – количественный комплексный показатель выбросов парникового газа, учитывающий все виды хозяйственной деятельности: промышленность, транспорт, сельское хозяйство (скотоводство) и прочее. Тогда интегральное значение за время T равно

$$G_i^u(T) = \int_t^T G_i^u(t)dt. \qquad (1)$$

2) Каждое государство за счет естественных биосферных процессов генерирует некоторое количество парниковых газов. Другими словами, это те процессы, которые не могут быть отнесены к хозяйственной деятельности, зачастую связанные с деятельностью живых организмов, и не поддаются регулятивному воздействию, хотя и занимают относительно низкий процент от общего объема выбросов:

$$G_i^E(t) = \int_t^T G_i^E(t)dt. \qquad (2)$$

3) Помимо хозяйственных и естественных биосферных процессов необходимо выделить процессы, связанные с природными катаклизмами. Например, извержение вулкана Эйяфьядлайокюдль в Исландии в 2010 г. не может восприниматься как процесс, являющийся прерогативой только одного

государства, а должен рассматриваться как проблема мирового масштаба. Тем самым компенсация подобных выбросов должна происходить за счет всех стран, а не только Исландии. К таким процессам должны быть отнесены все явления, которые не могут однозначно классифицироваться как результат деятельности какой-либо из стран, либо подданного такой страны:

$$G^o = \int_t^T G^o(t)dt. \qquad (3)$$

4) Каждое государство может не только генерировать, но и поглощать парниковые газы $P_i^E(t)$. Поглощение происходит за счет биосферных процессов, в основном фотосинтеза:

$$P_i^E(T) = \int_t^T P_i^E(t)dt. \qquad (4)$$

5) В настоящее время интенсивно обсуждается вопрос возможности поглощения парниковых газов за счет некоторых дополнительных технических, химических или биологических процессов с помощью специальных технологических устройств. Результат оценивается интегралом

$$P_i^u(T) = \int_t^T P_i^u(t)dt. \qquad (5)$$

6) Кроме имеющих принадлежность к государственным территориям, существуют поглотители парниковых газов, которые не относятся ни к одному из государств: морское и океаническое пространство или любая другая территория, на которую ни одна из существующих на момент расчета стран не может предъявить права, предусмотренные международным правом. Обозначим объем поглощаемых парниковых газов такими поглотителями

$$P^o = \int_t^T P^o(t)dt. \qquad (6)$$

Все показатели $G_i(t)$, $P_i(t)$ – определяются в результате деятельности систем мониторинга [6].

Тогда можно составить балансные уравнения, характеризующие динамику изменения содержания парниковых газов в атмосфере Земли:

$$\Delta V_i(T) = G_i^u(T) + G_i^E(T) - P_i^u(T) - P_i^E(T), \qquad (7)$$

$$\Delta V^o(T) = G^o - P^o + \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i(T), \qquad (8)$$

где *n* – количество государств, существующих на момент расчета, вне зависимости, ратифицировали они данное соглашение или нет. Если $\Delta V_i(T) = 0$, система оборота парниковых газов *i*-го государства находится в равновесном состоянии. $\Delta V_i(T) > 0$ – выбросы парниковых газов выше, чем возможности их поглощения, для решения данной ситуации необходимо привлечение возможностей иных государств. $\Delta V_i(T) < 0$ – объем поглощаемого парникового газа выше объема их выбросов. В ситуации, когда $\Delta V^o(T) = 0$, планетарная система находится в равновесии, но такое состояние является потенциально опасным из-за динамики и процессов с различными периодами колебаний. $\Delta V^o(T) > 0$ – опасное состояние системы, когда происходит накопление парниковых газов без возможности их поглощения (превышение определенного уровня концентрации парниковых газов вызовет необратимую цепную реакцию). $\Delta V^o(T) < 0$ – устойчивое состояние, когда происходит снижение концентрации парниковых газов (но парниковые газы, обеспечивают относительную мягкость климата, так что их концентрация не должна опускаться ниже определенного значения).

По формуле (7) рассчитывается баланс выбросов парниковых газов государства по показателям (1,2,4,5). Баланс для мировой метасистемы рассчитывается по формуле (8) с использованием показателей (3,6,7).

Качество атмосферного воздуха в настоящее время является критическим ресурсом, так как изменение его состава может стать причиной глобальных климатических изменений.

3. Показатели оценивающие состояния системы «выброс-поглощение»

Пусть каждая тонна выбросов парниковых газов, превышающая возможности по их поглощению, облагается налогом α. Важно, чтобы данное значение было единым для всех государств, но нелинейно изменялось бы в соответствии с объемами превышения нормы и степени опасности выбрасываемых газов. В случае, если данный показатель будет привязан к иным факторам, таким как объемы ресурсосберегающих технологий, объем инвестиций в научные исследования по сокращению выбросов, количество инновационных высокотехнологических внедрений и прочее, эффективность такой системы управления выбросами сведется к минимуму, а разрыв между уровнем жизни населения различных стран будет только расти:

$$D^o(T) = \sum_{i=1}^{n} D_i(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i(T) \cdot \alpha_i. \qquad (9)$$

Показатель $D^o(T)$ – демонстрирует соотношение спроса и предложения на международном рынке «производителей» и «поглотителей» парниковых газов. «–» – говорит о преобладании «поглотителей», «+» – «производителей». Частный показатель $D_i(T)$ имеет тот же смысл, что и $D^o(T)$, но в пределах *i*-го государства.

Следует отметить, что роль международных организаций не в сборе налоговых отчислений и распределении денежных средств, а в обеспечении правовой и регулятивной стороны вопроса. Основной договор о передаче денежных средств, с одной стороны, и объема поглощающих возможностей с другой должен заключатся только между государствами либо субъектами государств, чье законодательство предусматривает самостоятельную международную деятельность. Международные организации в данном случае должны выступать в роли экспертов, гарантирующих правомерность технической стороны вопроса, подтверждая или опровергая указанные в документах показатели выбросов и возможностей поглощения.

Но даже в данной ситуации международные организации могут применять различные косвенные методы управления распределением денежных средств, поощряющие государства минимизирующие собственные выбросы за счет сокращения доли производства парниковых газов или увеличения объемов их поглощения, а также государства, которые направляют полученные денежные средства на развитие определенных сфер.

Определить, какую долю ВВП государство тратит на отчисления за превышение норм выбросов парниковых газов или зарабатывает в случае превышения поглощающих возможностей, можно по формуле

$$d_i^H(T) = \frac{D_i(T)}{\text{ВВП}_i}. \quad (10)$$

Но в ряде стран более информативным будет показатель

$$b_i^H(T) = \frac{D_i(T)}{\text{ГБ}_i}, \quad (11)$$

где ГБ_i – годовой бюджет i-го государства.

Денежный эквивалент всех выбросов парниковых газов на территории i-го государства

$$D_i^G(T) = [G_i^u(T) + G_i^E(T) + G_i^o(T)] \cdot \alpha, \quad (12)$$

где $G_i^o(T)$ – часть мировых выбросов, приходящихся на долю i-го государства.

Денежный эквивалент всех поглощающих возможностей на территории i-го государства

$$D_i^P(T) = [P_i^u(T) + P_i^E(T) + P_i^o(T)] \cdot \alpha, \quad (13)$$

где $P_i^o(T)$ – часть мировых поглощающих ресурсов, приходящихся на долю *i*-го государства.

Индекс обеспеченности выбросов рассчитывается, как

$$I_i^G(T) = \frac{D_i^P(T)}{D_i^G(T)}. \quad (14)$$

Индекс обеспеченности выбросов характеризует насколько выбрасываемые парниковые газы поглощаются территориальными возможностями i-го государства. $I_i^G(T) = 1$ – поглощается 100%, $I_i^G(T) > 1$ – поглощение превышает выбросы, $I_i^G(T) < 1$ – выбросы превышают поглощение.

4. Альтернативная форма расчета распределения квот на выбросы парниковых газов

Пусть существует некий Q – показатель поглощения, который характеризует способность территории поглощать парниковые газы. Он рассчитывается как совокупный объем всех поглощенных парниковых газов. Объектами поглощения могут выступать не только тропические леса, но любой объект: дерево, кустарник, трава, механические приспособления или искусственно вызванные целенаправленные химические реакции, которые способны поглощать из атмосферы парниковые газы. К парниковым газам относят: водяной пар, углекислый газ, метан, озон (находящийся в тропосфере), оксид азота и фреоны. Каждый из перечисленных газов может вырабатываться как естественным, так и искусственным способом. Пусть S_E – совокупное количество выброшенных парниковых газов естественным способом, S_P – совокупное количество выброшенных парниковых газов искусственным (в результате производства, потребления либо иной человеческой деятельности) способом. Показатель S_P рассчитывается для каждой страны отдельно, в то время как S_E для планеты в целом.

Помимо показателя поглощения Q, который рассчитывается для каждой страны отдельно, рассчитывается и показатель Q_o, который учитывает поглощения, которые происходят вне пределов какой-либо территории. Например, выделение кислорода водорослями, находящимися в открытом океане.

Если $Q_o - S_E \geq 0$, тогда количество квот (K) рассчитывается как

$$K_i = Q_i + \frac{Q_o - S_E}{n}, \quad (15)$$

где *i* – порядковый номер страны, *n* – общее количество стран.

Если $Q_o - S_E < 0$, тогда количество квот рассчитывается как

$$K_i = \frac{Q_i}{\sum_{j=1}^{n} Q_j} \cdot \left(\left(Q_o + \sum_{j=1}^{n} Q_j \right) - \left(S_E + \sum_{j=1}^{n} S_{Pj} \right) \right). \quad (16)$$

При ситуации, когда

$$\left(\left(Q_o + \sum_{j=1}^{n} Q_j \right) - \left(S_E + \sum_{j=1}^{n} S_{Pj} \right) \right) < 0, \quad (17)$$

расчет по формулам (15,16) неуместен. В таком случае происходит процесс накопления парниковых газов, что приведет к катастрофическим последствием. Поэтому при возникновении ситуации (17) необходимо снижать значение S_P до тех пор, пока количество выбросов парниковых газов не уравняется с количеством их поглощения. Расчет снижения уровня выбросов происходит после оценки коэффициента пропорциональности производства (T)

$$T_i = \frac{S_i}{Q_i}. \tag{18}$$

Если $T \leq 1$, то такие страны имеют право не снижать уровень выбросов, если $T > 1$ – страна обязана снижать уровень выбросов, пока условие (17) выполняется или пока коэффициент пропорциональности производства не будет равен единице либо меньше.

Может возникнуть ситуация, когда

$$Q_o + \sum_{j=1}^{n} Q_j < S_E. \tag{19}$$

Ситуация (19) отмечает катастрофическое положение, когда естественное образование парниковых газов превосходит их поглощение, результат развития такого сценария можно наблюдать на Венере.

Помимо квотирования выбросов парниковых газов, квотированию подвержены все товары, составляющие международный оборот, а также добыча полезных ископаемы, в особенности углеводородных.

5. Энергопотребление, как элемент квотирования

На данный момент человек, приобретая товар (либо оплачивая услугу), платит не столько за сырье, из которого он сделан, сколько оплачивает труд, который был приложен для добычи или получения сырья, разработки технологии производства, изготовления инструментов и множества других процессов, которые прямо либо косвенно связаны с производством товара (либо оказанием услуг).

Безусловно, ресурсы (сырье) нуждаются в тщательном учете и бережном обращении, но самыми важными показателями современного общества являются энергоемкость, энергообеспеченность, энергонезависимость и т.д. Другими словами, все те показатели, которые отображают уровень потребления энергии. Существует много форм энергии, большинство из которых используется в различных технологиях. Хорошо известны способы преобразования одного вида энергии в другой. Темпы энергопотребления растут во всем мире быстрее, чем формируется обеспеченность энергоносителями, поэтому на современном этапе развития цивилизации наиболее актуальна проблема энергосбережения и создания более эффективных методов трансформации одного вида энергии в другую.

Был проведен целый ряд мероприятий по всему миру с целью снижения энергопотребления: запрещен выпуск 100Вт ламп накаливания (Россия, Германия), запрещен выпуск определенных моделей телевизоров, а на другие введен налог (Евросоюз), был принят налоговый кодекс: Раздел VIII ст. 240-250, регламентирующий оплату экологического налога (Украина).

Условно источники энергии можно поделить на два типа: невозобновляемые и постоянные. К первым относятся газ, нефть, уголь, уран и т. д. Технология получения и преобразования энергии из этих источников отработана, но, как правило, не экологична, и многие из них истощаются. К постоянным источникам можно отнести энергию солнца, воды, ветра, течений, волн, магмы, а также магнитные свойства Земли. Производство энергии для каждой страны является стратегическим приоритетом вне зависимости от направленности экономики. Но последствия, которые вызывает строительство тепловой электростанции (ТЭС), не ограничиваются воздействием только на территорию данной страны. Получается формирование неравновесного обмена: энергию (благо) использует одно государство, а наносимый ущерб компенсируется за счет всех стран одновременно. Такая же ситуация наблюдается и с атомными электростанциями (АЭС), энергию потребляла только Япония, а последствия разрушения реактора «Фокусима-1» ощущают множества стран.

Ввести международный экологический налог возможно только при добровольном согласии не только стран, но и самих производителей, из-за сложности контроля над нарушениями, а также невозможности возврата уже выброшенных веществ. Другими словами, необходимо изменять культуру производства и потребления, внося элемент ответственности и самоконтроля. К сожалению, концепция экономического роста сформировала культуру роста потребления за счет деградации социальной и экологических сфер. И сломать стереотип, что за деньги можно купить все (даже новую планету), не так просто.

Одним из показателей является энергопотребление на душу населения – соотношение количества энергии, потребляемой за определенный период времени и численности населения. Энергия вычисляется в нефтяном эквиваленте и включает: энергию, получаемую непосредственно при сжигании различных видов топлива; и электроэнергию, вырабатываемую на тепловых, атомных, геотермальных и гидроэлектростанциях.

Сильная зависимость наблюдается между ВВП на душу населения и потреблением энергии на душу населения. Так, академик П. Л. Капица отметил прямую зависимость уровень жизни и уровня потребления энергии [7].

В настоящее время основными энергоносителями в мире являются нефть, уголь и газ, на долю которых приходится почти 90% всей энергии. Альтернативные источники получения энергии вряд ли могут обеспечить растущие потребности общества. Хотя существуют и перспективные методы получения энергии: использование сланцевых газов, гидрата метана и прочее. Атомная энергетика является специфической ветвью получения энергии, одновременно являясь решением одной экологической проблемы и причиной еще большей. Хотя и в этой отрасли намечены уже реальные сдвиги: Лев Максимов (новосибирский физик-ядерщик) предлагает альтернативный ториевый реактор. Формирование негативного общественного мнения к стандартным АЭС, а также катастрофа на Фокусиме-1 (Япония), подтолкнули страны Евросоюза к сворачиванию стандартных ядерных программ.

Стоит отметить, что страны, не обладающие свободным доступом к энергоресурсам (Япония, Швейцария, Дания, Австрия), провели перестройку экономики, включая вынос энергоемких производств за рубеж, внедрили ряд энергосберегающих технологических и организационно-экономических решений. Поэтому они достигли высоких показателей удельного ВВП при незначительном росте энергопотребления. В то время, как страны, обладающие значительными энергетическими ресурсами либо доступом к ним, такие как США, Норвегия, Канада, Россия, Украина даже при повышении эффективности энергопотребления резко увеличили объемы использования энергии. Очень повлияли на рост потребления энергоносителей в этих странах развитие отраслей тяжелой промышленности (в том числе горнодобывающей, металлургической, химической и нефтехимической), а также оказали влияние климатические факторы.

Двадцатка стран, являющаяся крупнейшим потребителем, использует более 80% всей энергии. Самые крупные потребители энергии в мире – США и Китай. В США потребление энергии составляет примерно 25 триллионов ($2{,}5\cdot 10^{13}$) кВт·ч в год, в Украине за 2010 год произведено 180 млрд. кВт·ч ($0{,}018\cdot 10^{13}$) [8].

В мире потребление энергии на душу населения крайне неравномерно: 12% населения Земли потребляет более 48% производимой энергии, а 68% – только 19%. Причем не наблюдается тенденции к выравниванию энергопотребления, а продолжается усиление этой неравномерности.

Попытка в таких условиях ввести международный экологический налог в стандартном виде приведет к приостановлению производства энергии в развивающихся странах и спровоцирует еще большее снижение уровня жизни. А такие основные загрязнители как Китай, Индия и США продолжат выбросы, покрывая потери ростом оборота.

Альтернативой служит модель, в которой помимо международного экологического налога учитывается квота на использование энергии каждым жителем нашей планеты (E_F). Квота E_F – фиксированное энергопотребление на душу населения, устанавливаемое международным сообществом с целью уравнивания дифференциации уровня потребления энергии. Фактический (максимально возможный) уровень потребления государства рассчитывается как $\sum_{j=1}^{n} E_{F\,j}$, n – численность граждан государства. Для анализа с целью выявления отсталости или сверх потребления энергии используют показатель энергетического соответствия (C), который рассчитывается как разность фиксированного ($E_{Fi\,j}$) и реального ($E_{Ri\,j}$) энергопотребления на душу населения:

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} E_{Fi\,j} - \sum_{j=1}^{n} E_{Ri\,j}, \tag{20}$$

где i – порядковый номер страны.

Если $C_i = 0$ – максимально эффективна реализация всего потенциала. $C_i > 0$ – государство обладает запасом энергопотребления, который может быть реализован (продан другим странам). $C_i < 0$ – государство потребляет больше электроэнергии, чем установлено международным сообществом, и обязано сократить потребление либо приобрести квоты на величину, достаточную для компенсации свехпотребления. В таком случае государства, являющиеся основными потребителями энергии, будут вынуждены приобретать квоты у мене развитых стран, тем самым уравнивая дифференциацию уровня жизни.

Устанавливая фиксированное значение энергопотребления на душу населения, необходимо учитывать особенности формирования комфортного существования. Энергопотребление в странах, схожих по экономическому развитию, но отличающихся природно-климатическими условиями, изменяется по правилу: страны, расположенные в умеренных и северных широтах, расходуют дополнительное количество энергии для комфортного существования (отопление, подогрев пищи). Также в пустынях люди вынуждены затрачивать определенную энергию на водообеспечение (получение из скважин или доставку воды). В большинстве стран субтропического и тропического пояса, а в летний период – во всех развитых странах часть энергии используется на кондиционирование жилых и производственных помещений, транспортных средств.

При формировании значения фиксированного энергопотребления необходимо учитывать особенности каждой страны, но в то же самое время придерживаться правила: каждый человек должен иметь доступ к одинаковому энергопотреблению, вне зависимости от того, имеет ли он возможность реализовать его или нет.

При расчете реального энергопотребления необходимо использовать расчет по национальному признаку (как национальный валовой продукт НВП), а не территориальному (как ВВП).

6. Построение граничной зоны устойчивости

На современном этапе развития общества ни один элемент (экономический или социальный) не способен действовать обособлено. Существует тесная взаимосвязь между различными элементами СЭС на различных уровнях иерархии. Самым очевидным доказательством этого являются кризисы, так например кризис 2008 продемонстрировал, насколько сильна эта связь.

Исходя из вышесказанного, следует сделать вывод: при формировании границы устойчивости необходимо учитывать взаимное влияние не только тех элементов, которые непосредственно контактируют с рассматриваемой СЭС, но и тех, которые обеспечивают косвенное воздействие. Так, например, 10% снижение роста энергопотребления в Финляндии должно обеспечить расширение границы устойчивости, но почти двукратное увеличение энергопотребления в Китае (за тот же период) делает неоправданными (с точки зрения мирового энергетического потребления) все энергосберегающие технологии Европы и Японии вместе взятые. Тем более, энергосберегающие технологии не дают снижения реального энергопотребления. Даже не учитывая энергию, затрачиваемую на исследование, разработку, изготовление, монтирование, сопровождение, демонтирование и утилизацию энергосберегающих технологий, они обеспечивают лишь снижение прироста, а не самого потребления энергии. Энерго- и ресурсосберегающие технологии предоставляют возможность СЭС, не обладающих достаточным количеством ресурсов или в меру определенных причин вынужденных расходовать их в большем объеме, чем другие СЭС (природно-климатические факторы), обеспечивать должный уровень конкурентоспособности и достигать поставленных целей. Другими словами, энерго- и ресурсосберегающие технологии применяют только в том случае, когда это выгодно с точки зрения прибыли. А если учесть, что на разработку таких технологий необходимы ресурсы (в том числе и время), а результат не гарантирован, достаточно редко компании, даже крупные корпорации, идут на такие долгосрочные инвестиции. Вот почему, когда Китай предложил схему повышения прибыли, основываясь не на энергосберегающих технологиях, а на дешевой рабочей силе и отсутствии экоконтроля, большинство производств (инвестиции) перекачивали именно в Китай. По такому же пути идут и другие азиатские страны.

Получение высокой прибыли, рост ВВП и снижение энергоемкости производства за счет переноса энергоемких производств в развивающиеся страны, не делает проблему энергетического кризиса решенной. Показатель низкой энергоемкости ВВП Европейских стран не говорит о высокой эффективности экономики, а говорит о том, что данные страны переложили решение собственных и мировых проблем на плечи развивающихся стран. Видимо, рассчитывая, что в странах третьего мира лучше развиты энерго- и ресурсосберегающие технологии, лучше решен вопрос по защите окружающей среды и «мощнейшие» экономики стран третьего мира, могут позволить долгосрочные инвестиции в исследования и нахождения путей выходов из глобальных (ресурсного и энергетического) кризисов.

Придумывая все более сложные схемы расчета экономических показателей, развитые страны, пытаются замаскировать и оправдать агрессивную потребительскую эксплуатацию ресурсов, которая резко сужает область устойчивости мировой СЭС.

Выводы

Вопрос о международном учете и эффективном использовании критических ресурсов с каждым годом становится все острее. Элементы международного управления, такие как квотирование, санкции, эмбарго и многие другие, к сожалению, имеют ярко выраженный экономический и политический окрас, и используются для решения сиюминутных проблем.

Для решения задач долгосрочного планирования и оперативного управления развитием мирового сообщества можно использовать те же механизмы, что и для решения макроэкономических задач государств. Одним из самых эффективных методов является квотирование.

В данной статье проанализирован метод квотирования выбросов парниковых газов в атмосферу. Вскрыты особенности и недостатки современного подхода к выделению квот. Предложенная модификация позволяет создать модель, которая позволит отслеживать состояние выбросов в связке с состоянием окружающей среды, а также основной упор делается на учет объектов, способных поглощать парниковые газы.

Помимо анализа и модификации процедуры выдачи квот на выброс парниковых газов в статье приводится концепция учета энергетического потребления стран. Предлагается ввести квоты на энергопотребление на душу населения, тем самым уравняв дифференциацию между различными странами в сфере энергопотребления и уровня жизни.

Список литературы: **1**. *Петров, Э.Г.* Феноменологический анализ эволюционного развития мировой социально-экономической системы [Текст] / Э.Г. Петров // Вестник ХНТУ № 2 (38). – 2010 г. – С.7-10. **2.** *Петров, Э.Г.* Необходимость и инструментальные средства обеспечения эффективности государственного управления социально-экономическими системами [Текст] / Э.Г. Петров, Е.В. Губаренко // ПИТ. – № 1 (007), – 2010 г. – С. 8-17. **3.** *Федеральное* космическое агентство. Научный центр оперативного мониторинга Земли. Космический мониторинг состояния водных объектов [Электронный ресурс]. – Режим доступа http://www.ntsomz.ru/projects/eco/econews_271108_beta – 3.09.2011. – Загл. с экрана. **4.** *Згуровский, М.З.* Роль инженерной науки и практики в устойчивом развитии общества [Текст] / М.З. Згуровский, Г.А. Статюха // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – №1. – С. 19-38. **5.** *АПК Информ.* Информация для плодовоовощного бизнеса стран СНГ. Маленькие капли – большая прибыль [Электронный ресурс] – Режим доступа http://www.lol.org.ua/rus/milk/showart.php?id=12412 – 3.09.2011. – Загл. с экрана. **6.** *Петров, Э.Г.* Методы и инструментальные средства систем поддержки принятия решений при организационном управлении социально-экономическими системами [Текст] / Э.Г. Петров, Е.В. Губаренко // Бионика интеллекта. – 2010. – № 3 (74). – С. 26-36. **7.** *Капица, С.П.* Парадоксы роста. Законы развития человечества [Текст] / С.П. Капица. – М.: АНФ. – 2010. – 192 с. **8.** *Міністерства* енергетики та вугільної промисловості України [Электронный ресурс]. – Режим доступа http://mpe.kmu.gov.ua/ – 25.04.2011 г. – Загл. с экрана.

Поступила до редколегії 26.05.2011

УДК 519.81

Проблеми та перспективи міжнародного управління ресурсами на основі квотування при реалізації концепції сталого розвитку світової соціально-економічної системи / Е.Г. Петров, Є.В. Губаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 114-122.

У статті пропонується використовувати квотування як інструмент державного управління господарськими процесами для стимулювання інтенсивного способу розвитку виробництва. Наведено низку прикладів застосування політики квотування, а так само описані ситуації, які потребують термінового втручання з боку держави. Запропоновано форми розрахунку і нарахування квот на прикладі викидів парникових газів і енергоємності валового внутрішнього продукту. Описано принципи побудови граничної зони стабільності.

Бібліогр.: 8 найм.

UDK 519.81

Problems and prospects of international management of resources on the basis of quotas in the implementation of the concept of sustainable development of the global socio-economic system / E.G. Petrov, E.V. Gubarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 114-122.

The article proposes the use of quotas as a tool of state management of economic processes, to stimulate the intensive way of development of the production. Provides a number of examples of the application of the policy of quotas, as well as describes situations that require urgent intervention by the state. Offered forms of calculation and charging of quotas for example, greenhouse gas emissions and energy intensity of gross domestic product. Describes the principle of building a boundary zone of stability.

Ref.: 8 items.

УДК 519.81

К.Э. Петров

Харьковский национальный университет внутренних дел, Украина, kept@mail.ru

ФОРМИРОВАНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПРИНИМАЕМЫХ РЕШЕНИЙ И ИХ РАНЖИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается решение задачи определения многокритериальных оценок альтернатив в ситуациях, когда переменные модели оценивания характеризуются интервальной неопределенностью. Предложен метод ранжирования альтернативных вариантов решений на основе полученных нечетких интервальных оценок с помощью разбиения их на α -уровни.

МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ, ПОЛИНОМ КОЛМОГОРОВА-ГАБОРА, НЕЧЕТКИЙ ИНТЕРВАЛ, α -УРОВЕНЬ

Введение

Практически любой вид человеческой деятельности связан, так или иначе, с выбором ”наилучшего”, с точки зрения некоторых критериев, решения из допустимых альтернативных вариантов. Поэтому формализация интеллектуального процесса выбора наиболее эффективных решений является одной из самых актуальных проблем современности.

Одним из важнейших с практической точки зрения классом задач выбора являются многокритериальные задачи, в которых ”качество” принимаемого решения оценивается по нескольким критериям одновременно. Успешное решение таких задач невозможно без использования различного рода информации о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР). При этом в силу особенностей процесса синтеза интеллектуальных моделей главным источником такой информации являются сведения ЛПР об относительной важности критериев. Однако прежде чем использовать эту информацию, необходимо выяснить, что она собой представляет.

Ключевым этапом решения проблемы выбора является определение оценок альтернативных вариантов решений, которые позволяют сравнивать их между собой по ”качеству” (так называемая задача многокритериального оценивания).

Один из общепринятых подходов, который используется для решения этой задачи, состоит в формировании обобщенной скалярной оценки, учитывающей все разнородные частные критерии, для каждой из альтернатив. Реализация этого подхода сопряжена со значительными трудностями, которые связаны со структурной и параметрической идентификацией модели формирования такой обобщенной оценки.

Информация об относительной важности частных критериев, полученная от ЛПР и экспертов, чаще всего носит более или менее неопределенный характер, что еще больше затрудняет процесс построения формальной модели оценивания. Для формализации интервальной неопределенности параметров и переменных синтезируемой модели обычно используют их представление в виде случайных, нечетких или интервальных величин. Общим для перечисленных выше форм представления неопределенности является то, что они обязательно характеризуются интервалами возможных значений переменных, а отличие состоит в способе задания предпочтительности этих возможных значений внутри интервала.

В настоящее время при решении практических задач для оперирования с неопределенностью наиболее часто используются методы теории нечетких множеств, а также интервального анализа.

Цель настоящей статьи состоит в разработке подхода к получению оценок альтернатив и их последующему ранжированию в ситуации, когда параметры модели многофакторного оценивания и критерии, по которым оцениваются альтернативные варианты решений, характеризуются интервальной неопределенностью.

1. Постановка задачи

Пусть имеется некоторое ограниченное множество допустимых вариантов альтернативных решений $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Каждая альтернатива $x_i \in X$, $i=\overline{1,n}$ оценивается кортежем частных критериев (факторов) $K(x_i)=\langle k_1(x_i),k_2(x_i),..., k_m(x_i)\rangle$, которые допускают их объективное количественное измерение.

В соответствии с основными гипотезами теории полезности каждой альтернативе x_i, $i=\overline{1,n}$ можно поставить в соответствие некоторую обобщенную многофакторную оценку $P(x_i)$, выражающую ее ”полезность” для ЛПР. Математическую модель такой обобщенной оценки (функции полезности), в общем виде, можно представить следующим образом

$$P(x_i)=F\left[A, K(x_i)\right],\ i=\overline{1,n},$$

где $A=\langle a_1,a_2,..., a_t\rangle$ — кортеж параметров модели (коэффициенты относительной важности частных критериев и их комплексов).

Задача состоит в определении значений обобщенных оценок альтернатив $P(x_i)$, $i=\overline{1,n}$ в ситуации, когда параметры модели многофакторного оценивания, а также частные критерии характеризуются различного рода интервальной неопределенностью и в последующем ранжировании альтернатив по степени их ”полезности” для ЛПР в соответствии с полученными оценками.

2. Определение значений многофакторных оценок в условиях интервальной неопределенности переменных

В общем случае модель многофакторного оценивания, как показано в работе [1], может быть адекватно представлена в виде некоторого фрагмента полинома Колмогорова—Габора:

$$P(x_i)=a_0+\sum_{j=1}^{m}a_j k_j^N(x_i)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}a_{jq}k_j^N(x_i)k_q^N(x_i)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}a_{jqr}k_j^N(x_i)k_q^N(x_i)k_r^N(x_i)+\ldots, \qquad (1)$$

где $k_j^N(x_i)$ — нормированные значения частных критериев, т. е. безразмерные, с единым интервалом изменения, и инвариантные к направлению доминирования; a_j, a_{jq}, ... — безразмерные коэффициенты относительной важности частных критериев и их комплексов (произведений). Выбор именно такой структуры модели связан с тем, что с помощью многочлена (1) можно реализовать как традиционные аддитивные и мультипликативные, так и различные более сложные формы функций полезности.

Рассмотрим процесс идентификации и формализации параметров модели (1).

Параметры модели могут быть получены с помощью непосредственного опроса экспертов. На основе своего опыта и интуиции они часто могут достаточно уверенно количественно охарактеризовать интервалы допустимых значений параметров, а также области их наиболее предпочтительных значений. Получить же от экспертов более детальную информацию о распределении предпочтений внутри интервалов достаточно затруднительно. Это связано с тем, что для получения достоверных статистических характеристик распределения значений параметров внутри интервала необходимо достаточно большое количество экспертов, что чаще всего недостижимо. Поэтому формализация интервальной неопределенности в виде случайных величин на практике оказывается проблематичной. Попытки формализовать интервальную неопределенность в виде нечетких величин также наталкиваются на ряд трудностей, связанных прежде всего с необходимостью получения от экспертов конкретной информации о форме функции принадлежности значений нечеткому интервалу.

Параметры модели многофакторного оценивания в точечном или интервальном виде могут быть также получены в ходе реализации различных косвенных методов их параметрической идентификации (наблюдение за поведением экспертов без непосредственного контакта). Например, в [1] описаны методы получения интервальных параметров с помощью метода компараторной параметрической идентификации.

Как показала практика, наиболее адекватной формой представления интервальной неопределенности является ее формализация в виде нечетких чисел и интервалов. Кроме того, к такой форме можно привести значения параметров, заданных в виде случайных величин и четких интервалов. Возможные способы трансформации указанных величин рассмотрены в [2, 3].

Формализацию интервальных групповых предпочтений на основе множества индивидуальных точечных оценок можно осуществить следующим образом.

Пусть для каждого весового коэффициента a_s, $s=\overline{1,t}$ известен набор точечных значений (оценка j-ого эксперта s-ой частной характеристики или комплекса характеристик) $0\le a_{ij}\le 1$, $s=\overline{1,t}$, $j=\overline{1,k}$.

Чтобы определить интервалы возможных значений для каждого a_s, $s=\overline{1,t}$ необходимо определить их нижние и верхние границы:

$$a_s=\min_j a_{sj},\ a_s=\max_j a_{sj},\ s=\overline{1,t},\ j=\overline{1,k}.$$

Таким образом, для каждого весового коэффициента получим интервал:

$$a_s\le a_s\le a_s,\ s=\overline{1,t}. \qquad (2)$$

Полученную от экспертов информацию предлагается формализовать в виде нечеткого числа либо интервала [4]. Для этого необходимо определить функцию принадлежности $\mu(a_s)$ различных значений переменной a_i нечеткому множеству.

Учитывая, что функция принадлежности является отражением субъективных эвристических представлений экспертов, а ее объективный вид неизвестен, из всего многообразия наиболее часто используемых в настоящее время форм [2, 4, 5] (гауссовой, колоколообразной, сигмоидальной, треугольной и трапециевидной) целесообразно выбрать наиболее простые — треугольную и трапециевидную.

В качестве основания нечеткого числа используем интервал (2), а его ядра m_{si} — это модальное значение a_s на интервале (2). Если модальных значений m_{si}, $i=\overline{1,r}$ несколько, в качестве ядра нечеткого интервала выбираем (см. рис. 1 и рис. 2):

$$m_s=\min_i m_{si},\ m_s=\max_i m_{si},\ s=\overline{1,t},\ i=\overline{1,r}.$$

Формализацию интервальных групповых предпочтений на основе множества индивидуальных интервальных оценок в виде нечетких интервалов предлагается осуществлять следующим образом.

В данном случае по каждому весовому коэффициенту a_s, $s=\overline{1,t}$ имеется информация в виде набора из j интервалов, представленных в виде $a_{sj}^{\min} \le a_{sj} \le a_{sj}^{\max}$, $j=\overline{1,k}$, где $a_{sj}^{\min}$, $a_{sj}^{\max}$ – соответственно минимальная и максимальная оценки j-ого эксперта i-ого частного критерия. Таким образом, имеется множество точечных значений границ интервалов $0 \le a_{sj}^{\min} \le a_{sj}^{\max} \le 1$, $j=\overline{1,k}$.

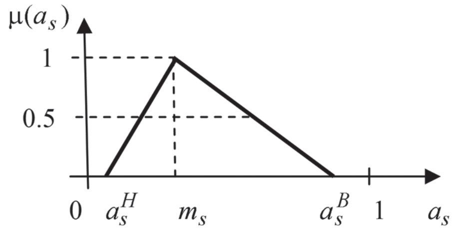


Рис. 1. Функция принадлежности нечеткому числу

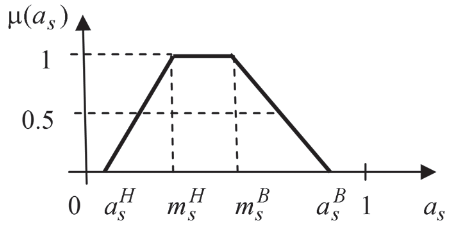


Рис. 2. Функция принадлежности нечеткому интервалу

Основание нечеткого интервала определяется как:

$$a_s = \min_j a_{sj}^{\min},\ a_s = \max_j a_{sj}^{\max},\ s=\overline{1,t},\ j=\overline{1,k}.$$

Графическая иллюстрация процесса выделения основания нечеткого интервала представлена на рис. 3.

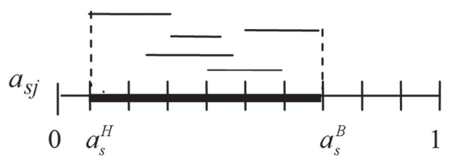


Рис. 3.

Ядро нечеткого интервала можно найти следующим образом:

$$m_s = \max_j a_{sj}^{\min},\ m_s = \min_j a_{sj}^{\max},\ s=\overline{1,t},\ j=\overline{1,k}.$$

Получающийся при этом интервал показан на рис. 4.

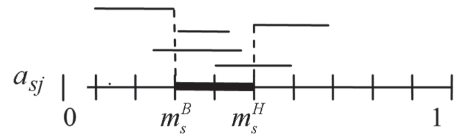


Рис. 4.

Как видно из рис. 4, иногда может возникнуть ситуация, когда $m_s > m_s$. В этом случае границы меняют местами.

В результате получим нечеткий интервал с трапециевидной функцией принадлежности $\mu(a_s)$ (рис. 2).

В частном случае, когда $m_i = m_i$, трапециевидная функция принадлежности (рис. 2) вырождается в треугольную (рис. 1). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать нечеткие интервалы с трапециевидной функцией принадлежности.

Возможные формы функций принадлежности, которые могут получится в ходе применения описанного выше подхода представлены на рис. 5.

Интервальный характер могут носить не только параметры модели многофакторного оценивания a_s, $s=\overline{1,t}$, но и, частично или полностью, критерии по которым оцениваются альтернативы $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$. Эти критерии измерены в различных шкалах, имеют разную размерность, интервалы возможных значений, вид экстремума. Поэтому для вычисления многофакторных оценок альтернатив необходимо привести характеристики $k_j(x_i)$ к некоторому изоморфному виду, что связано с их нормированием, т. е. приведением к безразмерному виду, одинаковому интервалу изменения и обеспечением инвариантности к виду экстремума.

Это можно сделать следующим образом. Предположим, что для каждого интервально заданного частного критерия $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$ известны границы его возможных значений $\left[k_j^{\min}(x_i), k_j^{\max}(x_i)\right]$, тогда нормализацию можно провести, используя формулу [1]:

$$k_j^N(x_i) = \frac{H_{k_j(x_i)} - V^-_{k_j(x_i)}}{V^+_{k_j(x_i)} - V^-_{k_j(x_i)}}, \qquad (3)$$

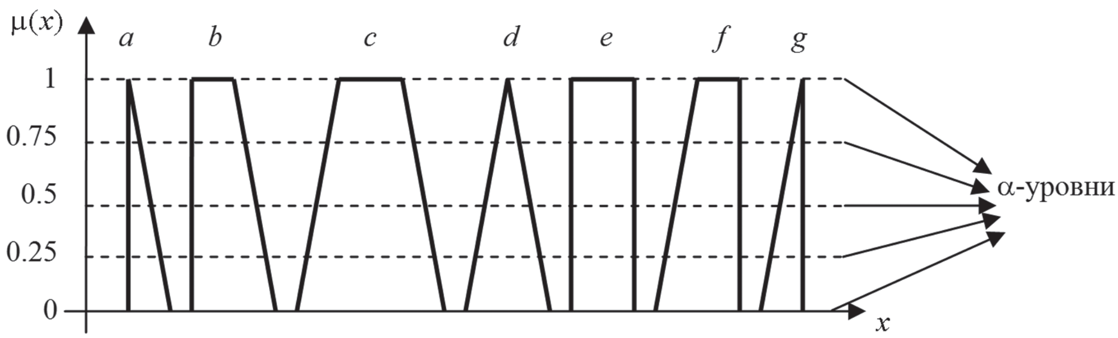


Рис. 5. Формы кусочно-линейных функций принадлежности

где $H_{k_j(x_i)}$ для каждого $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$ последовательно принимает значения: $H_{k_j(x_i)}=k_j^{\min}(x_i)$ и $H_{k_j(x_i)}=k_j^{\max}(x_i)$.

Величины $V_{k_j(x_i)}^-$, $V_{k_j(x_i)}^+$ являются соответственно наихудшими и наилучшими значениями критериев $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$ на всем множестве допустимых альтернатив $x_i\in X$, $i=\overline{1,n}$. Они определяются по формулам:

$$V_{k_j(x_i)}^- = \begin{cases} \max\limits_{x_i\in X} k_j^{\min}(x_i), \text{ если } k_j(x_i)\to\min, \\ \min\limits_{x_i\in X} k_j^{\min}(x_i), \text{ если } k_j(x_i)\to\max; \end{cases}$$

$$V_{k_j(x_i)}^+ = \begin{cases} \max\limits_{x_i\in X} k_j^{\max}(x_i), \text{ если } k_j(x_i)\to\max, \\ \min\limits_{x_i\in X} k_j^{\max}(x_i), \text{ если } k_j(x_i)\to\min. \end{cases}$$

Аналогичный подход можно использовать в случае, когда частные критерии $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$ заданы в виде точечных значений.

После нормализации критериев $k_j(x_i)$, $j=\overline{1,m}$ по формуле (3) для каждого из них получаем четкий интервал с границами возможных значений [0, 1]. Как показано в [2, 3], эти интервалы легко трансформировать в нечеткие интервалы с прямоугольной функцией принадлежности (рис. 5 е).

Таким образом, в общем случае, параметры и частные критерии модели многофакторного оценивания (1) могут быть формализованы в виде нечетких интервалов с трапециевидными функциями принадлежности.

В результате, обобщенная многофакторная оценка каждой альтернативы может быть получена с использованием модели (1) в виде нечеткой интервальной величины.

Для вычисления значений оценок, исходя из (1), используются только три арифметические операции – сумма, произведение нечетких интервалов и умножение их на число.

Проведение арифметических операций с нечеткими интервалами предполагает реализацию следующих действий:

– определение результирующего интервала, на котором определен нечеткий интервал – результат арифметической операции;

– формирование функции принадлежности полученному новому нечеткому интервалу.

Для определения арифметических операций с нечеткими интервалами общепринятым является подход, основанный на использовании принципа расширения Л.Заде [6]. Однако на практике, реализация этого ”классического” подхода наталкивается на значительные трудности связанные со сложностью формирования функции принадлежности новому нечеткому интервалу, полученному в ходе проведения соответствующей бинарной арифметической операции.

В работе [2] предложен концептуально иной подход к выполнению операций над нечеткими интервалами. Он предполагает разложение нечеткого интервала на α-уровни (рис. 4) с последующей реализацией арифметических операций над полученными четкими интервалами, которые соответствуют этим α-уровням. Таким образом, нечеткий интервал C, являющийся результатом бинарных арифметических операций $\circ=\{+,-,\times,/\}$ над нечеткими интервалами A и B, можно представить в виде:

$$C=A\circ B=\bigcup_\alpha C_\alpha=\bigcup_\alpha A_\alpha\circ B_\alpha,$$

где A_α, B_α, C_α – α-уровни соответствующих нечетких интервалов A, B и C, т. е. четкие интервалы с одинаковыми значениями функции принадлежности нечеткому интервалу.

Таким образом, проблемы нечетко-интервальной арифметики сводятся к проблемам прикладного интервального анализа [7].

Очевидно, что разбиение нечеткого интервала на α-уровни является дискретизацией проблемы и соответственно вносит погрешности. Однако, как показали вычислительные эксперименты, описанные в [2, 7] эти погрешности не столь существенны.

В результате проведения описанных выше действий для каждой альтернативы $x_i\in X$, $i=\overline{1,n}$ получаем ее многофакторную оценку в виде нечеткого интервала, представленного совокупностью его α-уровней.

Далее рассмотрим задачу ранжирования альтернатив исходя из полученных для каждой из них нечетких многофакторных оценок.

3. Ранжирование нечетких интервальных величин

Сравнение нечетких чисел и интервалов по отношению ”больше – меньше” является нетривиальной задачей, решению которой посвящены многочисленные исследования [9,10, 11, 12, 13]. Однако до настоящего времени не разработано универсальной методологии ее решения.

Перспективным является развитие теоретико-вероятностного подхода [9, 14] к формализации отношений в классах четких и нечетких интервалов.

В результате реализации описанного выше подхода к определению нечетких многофакторных оценок альтернатив эти оценки были получены в виде совокупности α-уровней нечетких интервалов. Поэтому в данной ситуации можно перейти от сравнения самих нечетких интервалов к сравнению их соответствующих α-уровней и затем на основе этого сравнения сделать вывод о степени равенства или неравенства нечетких интервалов.

Для решения задачи сравнения интервалов $A=[a_1,a_2]$ и $B=[b_1,b_2]$ в [1, 2] предлагается использовать следующий подход. Предполагается, что A и B – независимые интервалы, а $a\in A$ и

$b \in B$ – случайные величины, которые равномерно распределены на этих интервалах. Никакое другое распределение в данном случае не имеет смысла, так как речь идет о четких интервалах. В случае, когда интервалы не имеют областей пересечения друг с другом, их сравнение не вызывает трудностей. Если интервалы пересекаются, то на основе образующихся подинтервалов определяются вероятности $P(A<B)$, $P(A=B)$ и $P(A>B)$. Под вероятностью $P(A<B)$ будем понимать вероятность того, что случайная точка $a \in A$ будет меньше случайной точки $b \in B$. Интерпретация вероятностей $P(A=B)$ и $P(A>B)$ – аналогична. Нетривиальные случаи сравнения интервалов и значения соответствующих вероятностей представлены в табл. 1.

Перейдем теперь к сравнению нечетких интервалов.

Пусть A и B – нечеткие интервалы, $A_\alpha = \left\{x\big|_{x\in X}, \mu_A(x) \ge \alpha\right\}$ и $B_\alpha = \left\{y\big|_{y\in Y}, \mu_B(y) \ge \alpha\right\}$, $\alpha \in [0,1]$ – множества α-уровней соответствующих нечетких интервалов A и B. Как было отмечено выше, задача сравнения нечетких интервалов можно свести к поуровневому сравнению четких интервалов, полученных для соответствующих α-уровней. Таким образом, вероятности $P_\alpha(A_\alpha < B_\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$ для каждой пары четких интервалов A_α и B_α могут быть вычислены описанным выше способом. Множество P_α будем интерпретировать как нечеткое подмножество $P(A<B) = \left\{\alpha, P_\alpha(A_\alpha < B_\alpha)\right\}$, где значение α рассматривается как степень принадлежности к нечеткому интервалу $P(A<B)$. Аналогично могут быть определены нечеткие подмножества $P(A=B)$ и $P(A>B)$.

В практических приложениях более удобно пользоваться действительными числами, которые характеризовали бы в вероятностном смысле степень равенства или неравенства сравниваемых нечетких интервалов. В качестве такого числа, характеризующего данное нечеткое подмножество, в [2] предлагается использовать значение, которое может быть получено в процессе дефаззификации:

$$\tilde{P}(A<B) = \frac{\sum\limits_\alpha \alpha \cdot P_\alpha(A_\alpha < B_\alpha)}{\sum\limits_\alpha \alpha}. \qquad (4)$$

Таким же образом можно вычислить значения $\tilde{P}(A=B)$ и $\tilde{P}(A>B)$.

Для отыскания максимального $z_{\max}$ в группе нечетких интервалов z_1, z_2, ..., z_k можно воспользоваться следующим алгоритмом:

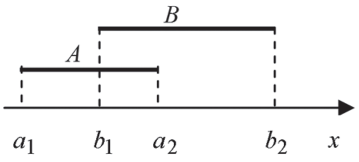
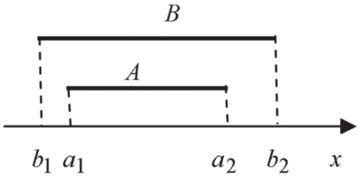
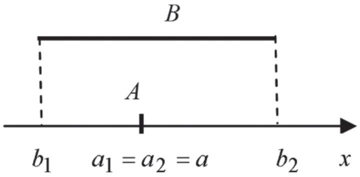
1) $z_{\max} := z_i$;
2) for i:=2 to k;
3) if $\tilde{P}(z_{\max} < z_i)$ >0.5 then $z_{\max} := z_i$.

Ранжирование группы нечетких интервалов можно осуществить, используя классические алгоритмы сортировки, заменяя в них операторы сравнения действительных чисел описанными выше операторами сравнения нечетких интервалов (4).

Выводы

Построение моделей многофакторных оценок альтернативных вариантов принимаемых решений в условиях неопределенности задания как параметров моделей, так и частных критериев, по которым они оцениваются, является достаточно сложной задачей. Это связанно, в том числе, и с проблемой учета и корректной формализации неопределенностей разных типов при задании переменных моделей. Предложенный в работе подход к получению многофакторных оценок альтернатив позволяет формализовать параметры модели и частные критерии в виде нечетких чисел и интервалов, определить нечетко-интервальные обобщенные оценки альтернатив, а также провести ранжирование альтернатив на основе этих оценок.

Таблица 1

Ситуация	$P(A<B)$	$P(A=B)$	$P(A>B)$
	$1-\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	$\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	0
	$\dfrac{b_2-a_2}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_1-b_1}{b_2-b_1}$
	$\dfrac{b_2-a}{b_2-b_1}$	0	$\dfrac{a-b_1}{b_2-b_1}$

Достаточно плодотворным является подход, позволяющий представлять нечеткие интервалы в виде совокупности α-уровней, что существенно упрощает проведение арифметических операций с такими величинами и позволяет корректно сравнивать их между собой по отношению ”больше-меньше”. В статье рассматриваются нечеткие величины с трапециевидными и треугольными функциями принадлежности, однако предложенный подход может быть эффективно использован и в ситуациях, когда функции принадлежности имеют иную форму.

С помощью предложенного подхода можно выделить альтернативу с максимальным значением ее нечеткой многофакторной оценки, однако информацию о вероятности, с которой эта оценка является максимальной, получить не удастся. Это же в полной мере относится и к процессу ранжирования альтернатив. Таким образом, при реализации данного подхода мы получаем лишь ординальный порядок альтернатив. Информация о значениях вероятностей имеет большое значение в ситуациях, когда лица, принимающие решения в условиях неопределенности, хотели бы количественно оценить степень адекватности (доверия) принимаемых решений. Поэтому в перспективе необходимо будет решить и эту проблему.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке различных автоматизированных систем поддержки принятия решений для обоснования выбора наиболее эффективного решения.

Список литературы: **1.** *Петров, К.Э.* Компараторная структурно-параметрическая идентификация моделей скалярного многофакторного оценивания [Текст]/ К.Э. Петров, В.В. Крючковский. – Херсон: Олди-плюс, 2009. – 294 с. **2.** *Дилигенский, Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология [Текст]/ Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Машиностроение, 2004. – 397 с. **3.** *Крючковский, В.В.* Связь и взаимная трансформация величин с различными видами неопределенности при принятии решений [Текст]/ В.В. Крючковский, К.Э. Петров // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. Дніпропетровського національного університету. – Дніпропетровськ, 2010.– С. 183 – 191. **4.** *Раскин, Л.Г.* Нечеткая математика. Основы теории. Приложения [Текст]/ Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с. **5.** *Зайченко, Ю.П.* Исследование разных видов функций принадлежности параметров нечетких прогнозирующих моделей в нечетком методе группового учета аргументов [Текст]/ Ю.П. Зайченко, И.О. Заец, А.В. Камоцкий, Е.В. Павлюк // УСиМ. – 2003. – №2. – С. 56–67. **6.** *Zadeh, L. A.* Fuzzy sets [Текст]/ L. A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353. **7.** *Жолен, Л.* Прикладной интервальный анализ [Текст]/ Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.: РХД, 2007. – 468 с. **8.** *Piegat, A.* Modelowanie i sterowanie rozmyte [Текст]/ A. Piegat. – Warszawa, 2000. – 678 p. **9.** *Wang, X.* Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), (II) [Текст]/ X. Wang, E. Kerre // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – № 122. – P. 375-385, 387-405. **10.** *Севастьянов, П.В.* Конструктивная методика сравнения нечетких чисел и ее применение в задачах оптимизации [Текст]/ П.В. Севастьянов, А.В. Венберг // Информационные сети, системы и технологии: тр. VII междунар. конф., БГЭУ, 2–4 окт. 2001 г. – Т. 3. – Минск, 2001. – С. 52-57. **11.** *Кофман, А.* Пошаговые методы принятия решений на моделях с неопределенностями [Текст]/ А. Кофман, Х. Хил Алуха: пер. с исп.; под ред. В.В. Краснопрошина, Н.А. Лепишинского. – Минск: ООО «Скарына», 1995. – 259 с. **12.** *Banas, J.* Method of Putting Trapezoidal Fuzzy Number in Order [Текст]/ J. Banas, M. Machovska-Szewczyk // Advanced Computer Systems: Proceedings of the Sixth International Conference / Technical University of Szczecin – Szczecin, 1999. – P. 175-179. **13.** *Ахрамейко, А.А.* Обобщение метода анализа иерархий Саати для использования нечетко-интервальных экспертных данных [Текст]/ А.А. Ахрамейко, Б.А. Железко, Д.В. Ксеневич, С.В. Ксеневич // Новые информационные технологии: материалы V междунар. науч. конф., Минск, 29 – 31 окт. 2002 г. : в 2 т. / Белорус. гос. экон. ун-т ; под ред. А.Н. Морозевича [и др.]. – Минск, 2002. – Т. 1. – С. 217–222. **14.** *Sevastjanov, P.V.* A probabilistic approach to fuzzy and crisp interval ordering [Текст]/ P.V. Sevastjanov , P. Rog // Task quarterly. – 7. – № 1. – 2003. – P. 147-156.

Поступила в редколлегию 01.06.2011

УДК 519.81

Формування багатокритеріальних оцінок рішень, що приймаються та їх ранжирування в умовах невизначеності / К.Е. Петров // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 123-128.

Розглядається проблема визначення значень багатокритеріальних оцінок альтернативних варіантів рішень на базі моделей, структура яких описується фрагментами полінома Колмогорова-Габора. Запропоновано підхід, який дозволяє формалізувати невизначеність завдання параметрів моделі багатофакторного оцінювання, а також часткових критеріїв, за якими оцінюються альтернативи у вигляді нечітких інтервалів; визначити багатокритеріальні нечіткі оцінки альтернатив та провести їх ранжирування, виходячи з цих оцінок, на основі розкладання нечітких інтервалів на α-рівні.

Табл.:1. Іл.: 5. Бібліогр.: 14 найм.

UDC 519.81

Forming the multicriterion estimations of making decisions and their rangingin in the conditions of uncertainly / K.E. Petrov // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 123-128.

The problem of determination of values of multicriterion estimations of alternative variants of decisions on the base of models, the structure of which is described the fragments of Kolmogorov-Gabor polynomial is examined. Offered approach, which allows to formalize the uncertainly sets the parameters of model of multifactor estimation, and also detail criteria on which alternatives are estimated as fuzzy intervals; to define the multifactor fuzzy estimations of alternatives and made their ranging in accodance with these estimations on the basis of decomposition of fuzzy intervals on the α-levels.

Tab 1. Fig.: 5. Ref.: 14 items.

УДК 004.82

Е.А. Оробинская[1], Н.В. Шаронова[2]
[1, 2] НТУ «ХПИ», г. Харьков, Украина

МЕТОД FCA ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОНТОЛОГИИ НА ОСНОВЕ ТЕКСТОВОГО КОРПУСА

В статье рассматривается полуавтоматический метод построения онтологии на основе текстового корпуса для специальной предметной области. Предлагаемый метод основан на возможности классификации объектов, исходя из их общих свойств, с применением метода анализа формальных понятий АФП (FCA) для построения решетки понятий. Построенная решетка служит основанием для преобразования найденных терминов в концепты онтологии. Предлагается новая методика, которая позволяет дополнить построение онтологии определением внешних (трансверсальных) отношений между концептами, используя реляционный анализ понятий (RCA). Каждый концепт создаваемой онтологии описывается с помощью дескрипторной логики (ДЛ). В качестве предметной области применения методики была использована область понятий в радиологии.

ОНТОЛОГИЯ, КОНЦЕПТ, РЕШЕТКА ПОНЯТИЙ, АНАЛИЗ ФОРМАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ (FCA), РЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КОНЦЕПТОВ (RCA)

Введение

Важным этапом развития любой предметной области является структурированное представление знаний, аккумулированных в данной области, в виде базы знаний (БЗ). Это позволяет специалистам области лучше манипулировать знаниями, обнаруживать новые закономерности, обмениваться опытом. Например, в области радиационной защиты, при медицинском облучении важным является понимание свойств радиоактивных изотопов и специфики их использования для диагностики и лечения различных заболеваний, от чего зависит как терапевтический эффект для пациентов, так и безопасность персонала.

Одним из эффективных способов представления знаний являются онтологии, к разработке которых в последнее время проявляется большой интерес [1]. Понятие онтологии в интерпретации для задач обработки информации наиболее кратко и выразительно определил Т. Грубер [2]. Он определил онтологию как «...явную спецификацию некоторой концептуализации». Под концептуализацией у Грубера понимается совокупность общих понятий, объектов и связей, характерных для некоторой предметной области (ПО). Построение онтологии предполагает определение классов объектов и описание их отношений с помощью одного из формальных языков, например, дескриптивной логики, что позволяет отвечать на запросы, или так называемые компетентные вопросы (*competency questions*), которые изначально составляются на естественном языке и затем «переводятся» на используемый формальный язык.

Исходя из этого, процесс построения онтологии («ручной», полуавтоматический или автоматический) предполагает исходное создание базовой онтологической структуры, представляющей основные понятия ПО и связи между ними. Традиционно для этих целей привлекаются эксперты соответствующих предметных областей. Однако в последние годы специалисты в области искусственного интеллекта (ИИ) ставят перед собой задачу найти эффективные методы извлечения знаний из специализированных текстовых корпусов без дорогостоящего привлечения специалистов. Основанием для этого может служить то, что именно в текстах хранится значительная часть всех знаний в стабильной, относительно упорядоченной форме. При этом доля электронных текстов, доступных для непосредственной обработки, все время возрастает.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является обоснование выбора языка описания концептов и разработка метода построения онтологии для некоторой предметной области, представленной текстовым корпусом. В данном случае был использован текстовый корпус, состоящий из статей, стандартов и других источников из области радиологии и радиационной защиты, доступных в электронном виде, допускающих использование инструментов терминологического анализа для автоматического обнаружения и определения свойств терминов [3]. Конкретные задачи, стоящие перед авторами, заключаются в следующем. Во-первых, было интересно предложить описание концептов с помощью дескриптивной логики (ДЛ) [4] с последующим сравнительным анализом описания. Во-вторых, предложить метод построения правил вывода для концептов базовой онтологии, позволяющих получить ответы на компетентные вопросы следующего типа:

– *Какие объекты относятся к тому же классу, что и «опухоль печени»?*

– *Принадлежат ли объекты «бронхогенная карцинома» и «опухоль желудка» одной группе?*

– *Является ли объект «легкие» органом?*

И, наконец, предложить новый подход – анализ реляционных понятий, являющийся расширением анализа формальных понятий (FCA), который позволяет описать так называемые внешние, или трансверсальные, отношения между концептами. Предложенный подход позволяет классифицировать объекты на основании отношений, которые они разделяют с другими объектами, чтобы получить ответы на вопросы типа:

– *Что разрушает радиация?*

– *Что диагностируется при помощи радиоактивных изотопов?*

Данная статья организована следующим образом. В разделе 2 описывается общая методика построения онтологии. Далее, в разделе 3 рассмотрены некоторые процедуры обработки текста, позволяющие перейти от текстового корпуса к входным данным, пригодным для построения онтологии. В разделе 4 описывается метод FCA для построения иерархии концептов. В разделе 5 представлен метод формирования внешних отношений между концептами онтологии. И, наконец, раздел 6 завершается выводами о возможных перспективах использования предлагаемого метода.

2. Методика построения онтологии

В работе предлагается использовать технологию «Methontology» [5, 6], разработанную в лаборатории искусственного интеллекта Политехнического университета Мадрида для построения прикладных онтологий.

Процесс построения онтологии на основе этой технологии, проиллюстрированный на рис.1, состоит из следующих этапов:

– извлечение терминов: этот этап состоит в том, чтобы обнаружить и извлечь из входного корпуса термины и их свойства. Для этого используются специализированные информационные ресурсы – глоссарий медицинских терминов и терминов по радиационной безопасности, синтаксические шаблоны. С помощью синтаксического анализатора извлекаются пары (*объект*, *свойство*) и триплеты (*объект*, *свойство*, *объект*), относящиеся к общим смысловым блокам (см. раздел 3);

– построение основы онтологии: на этом этапе найденные пары (*объект*, *свойство*) используются для построения иерархии концептов на основе метода FCA (см. раздел 4);

– извлечение внешних отношений: на этом этапе применяется реляционный анализ понятий для извлечения внешних отношений;

– в завершение, результаты выполнения двух предыдущих этапов объединяются для получения более полной онтологии.

3. Методы формирования концептов онтологии

Несмотря на разнообразие существующих подходов, предлагающих автоматическую группировку понятий, эта задача продолжает оставаться в значительной степени открытой. Одним из рациональных подходов, на взгляд авторов, является подход, основанный на гипотезе Харриса (Harris) [6]. Согласно ему, изучение синтаксических закономерностей в научном текстовом корпусе, т.е. состоящем из текстов, написанных на «подъязыке», характерном для данной ПО, позволяет обнаружить специфичные синтаксические структуры, формируемые терминами, которые отражают знания исследуемой ПО. Несколько похожих методов [7, 8], основанных на этой гипотезе, предлагают группировать термины в классы на основе их совместного появления в синтаксических структурах с одинаковыми группами глаголов. Использование одного из этих методов позволяет объединять названия объектов в классы в соответствии с группами глаголов, при которых они выступают в качестве подлежащего или дополнения. Например, объекты {*щитовидная железа*, *желудок*} объединены в один класс, так как они появляются в качестве подлежащего (или субъекта) при глаголе {*поглощать*} и в качестве дополнения (или объекта) при глаголе {*повреждать*}. С другой стороны, данный метод позволяет также извлекать отношения между разными объектами, появляющимися в качестве подлежащего или дополнения одного и того же глагола. Например, объект {*радиоактивный йод*} является дополнением, связанным с объектом {*щитовидная железа*}, который, в свою очередь, является подлежащим для глагола {*поглощать*}.

В результате обработки текстового корпуса требуется получить пары (*субъект*, *предикат*), (*объект*, *предикат*) и триплеты (*субъект*, *предикат*, *объект*), содержащие ключевые слова. Отбор терминов был выполнен с помощью программы Monoconc. Синтаксический анализ выполнен с помощью анализатора АОТ. Извлеченные пары и триплеты были

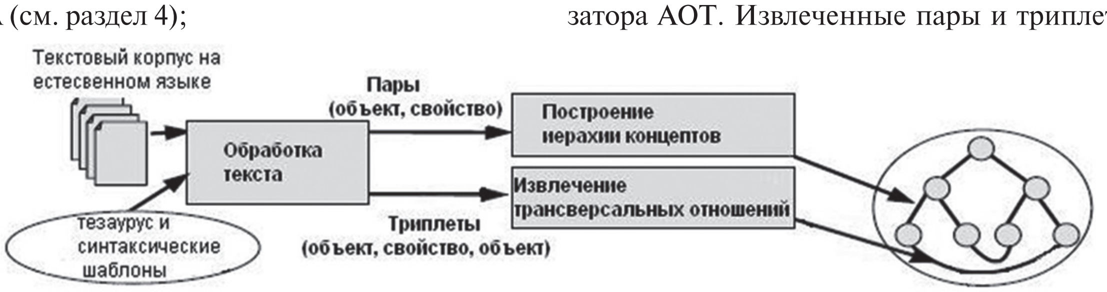


Рис. 1. Методика построения онтологии

предложены эксперту для отбора среди них наиболее релевантных. Слова в парах и триплетах приведены к нормальной форме.

Представим несколько примеров фрагментов текста из области медицинской радиологии:

1. «Радионуклиды разрушают клетки, повреждают органы и ткани и являются причиной скорой гибели организма, однако они же разрушают и злокачественные опухоли».

Из текста были извлечены пары (*ткани*, *повреждать*), (*органы*, *повреждать*), (*опухоли*, *разрушать*), (*радионуклиды*, *разрушать*).

2. «Щитовидная железа детей в три раза активнее поглощает попавший в организм радиоактивный йод».

Извлечены пары (*щитовидная железа, поглощать*) и (*радиоактивный йод*, *поглощать*).

3. «Радиоактивный йод использовался, чтобы диагностировать рак щитовидной железы и другие, связанные с ней заболевания».

Извлечены пары (*радиоактивный* йод, *диагностировать*), (*рак щитовидной железы, диагностировать*).

4. Построение основы онтологии с помощью метода FCA

В работе была использована идея Ф. Симиано [1], предлагающего строить онтологию на основе метода FCA [3]. Далее сформулирован переход от решетки свойств к онтологии и дано определение каждого концепта с помощью дескриптивной логики, что позволяет получить ответы на вопросы, сформулированные в разделе 1.

По собственному замечанию Ф. Симиано [7], наиболее узким местом (*knowledge acquisition bottleneck*) при построении онтологии является именно моделирование предметной области, т.е. определение отношений между ее концептами.

Основой онтологии является множество основных понятий или концептов предметной области, связанных между собой бинарными отношениями. Метод FCA позволяет визуализировать зависимости между объектами с помощью решетки формальных понятий [8]. Его можно использовать при анализе данных для обнаружения отношений между элементами (в данном случае концептами) некоторой системы (в данном случае текстового корпуса). Отношения обнаруживаются через атрибуты, описывающие свойства. В свою очередь, атрибуты должны быть близки к обычным категориям человеческого мышления и должны допускать наглядную и понятную интерпретацию. Таким образом, FCA можно рассматривать как технологию кластеризации концептов, которая позволяет определить интенсионалы для отдельных блоков данных.

Основными в FCA являются понятия *формального контекста* и *формального концепта*.

Определение 1 (формальный контекст)

Множество (G, M, I) называется формальным контекстом, если G и M являются множествами, элементы которых связаны бинарным отношением I: $I \subseteq G \times M$. Элементы множества G называются объектами, элементы множества M называются атрибутами, а элементы множества I определяют инцидентность объектов и атрибутов или, другими словами, принадлежность атрибута объекту, определяя, таким образом, формальный контекст.

Определение 2

Пусть имеется формальный контекст (G, M, I). Определим A’ для $A \subseteq G$ следующим образом $A' := \{m \subseteq M \mid \forall g \in A : (g,m) \in I\}$;

аналогично определим B’ для $B \subseteq M$ как $B' := \{g \subseteq G \mid \forall m \in B : (g,m) \in I\}$.

Проще говоря, A’ – это множество атрибутов, общих для всех объектов множества A, и B’ – это множество объектов, обладающих всеми атрибутами из B.

Оператор «’» называется оператором деривации и применяется для обозначения подмножеств множеств G и M.

На основании вышесказанного можно определить понятие *формального концепта* следующим образом:

Определение 3 (формальный концепт)

Пара (A,B) является формальным концептом (G,M,I) тогда и только тогда, когда $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, A’=B и A=B’.

Другими словами, (A, B) является формальным концептом, если множество всех атрибутов, описывающих объекты A, совпадает с B и, с другой стороны, все объекты A описываются всеми атрибутами B. В этом случае A называют ***экстентом***, а B называют ***интентом*** формального концепта (A, B).

Множество формальных концептов в данном контексте реализует отношение подчиненности, определенное следующим образом:

$$(A_1, B_1) \le (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1).$$

Отношение подчиненности позволяет организовать формальные концепты в полную матрицу, называемую решеткой концептов, которая обозначается следующим образом: *B(G;M; I)*.

В качестве примера в табл. 1 приведен фрагмент формального контекста (G,M,I) для области медицинской радиологии, где G – это множество органов человека и их онкологических патологий, M – множество их свойств. I – это множество бинарных отношений между M и G, такое что *I*(*g,m*) означает, что g является субъектом или объектом в текстовом корпусе.

Результирующая решетка представлена на рис. 2. Такое размещение узлов решетки отражает наследование объектами свойств. Свойство обозначено над узлом решетки, а элемент, обладающий данным свойством – под узлом.

Все элементы, размещенные под некоторым элементом g, помеченным свойством m, наследуют это свойство. Аналогичным образом, все последователи, размещенные под узлом решетки, помеченным объектом g, являются более специфичными понятиями по отношению к g.

Таблица 1

Фрагмент формального контекста

	Разрушаемый	Диагностируемый	Повреждаемый	(Хорошо) поддающийся лечению
Опухоль желудка	×	×		
Бронхогенная карцинома	×	×		×
Легкие	×		×	
Опухоль щитовидной железы	×	×		×
Желудок	×		×	
Печень	×		×	
Щитовидная железа	×		×	
Опухоль печени	×	×		

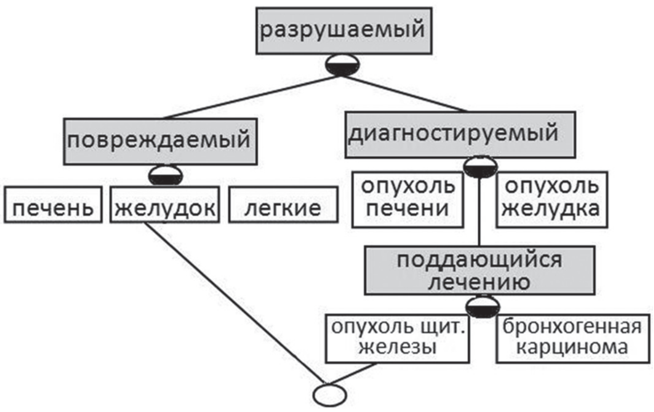


Рис. 2. Решетка, соответствующая заданному формальному контексту

Таким образом достигается расширение экстента A концепта (A, B) по отношению ко всем объектам, появляющимся ниже узла n в решетке, и интента B по отношению ко всем атрибутам наследников узла n. Такое представление позволяет идентифицировать свойства и экземпляры каждого концепта.

4.1. Переход от решетки к онтологии, разметка с помощью экспертов

Определим функцию преобразования: $\alpha : B(G,M,I) \rightarrow TBox \cup ABox$, где $B(G,M,I)$ – это решетка концептов, полученная на основе FCA. Tbox представляет терминологический словарь ПО и Abox – это множество утверждений об экземплярах, т.е. описание их свойств. Совокупность Tbox и Abox, терминов и утверждений составляет базу знаний. [4]. Формально Tbox и Abox определены следующим образом определения 4,5).

Определение 4 (основа онтологии)

Основа онтологии представляет собой триплет O:= (C, $\subseteq$c , A) где C – это ансамбль концептов онтологии, $\subseteq$ c – отношение подчиненности (*is-a*) между концептами, являющееся транзитивным и несимметричным. A – это множество свойств или атрибутов концептов.

Определение 5 (база знаний)

База знаний для онтологии O:= (C, $\subseteq$ c, A) представляет собой структуру:

$KB := (I, i_C, i_A)$, где I – это множество экземпляров, $i_C : C \rightarrow 2^I$ – это функция создания экземпляров, i_A – это функция создания атрибутов.

Функция преобразования α, формализующая этот переход, представлена с помощью табл. 2.

Таблица 2

Формализация перехода Решетка – Онтология

Решетка концептов	Онтология (описание в ДЛ)
Контекст K	Атомарный концепт $c \equiv \alpha(K)$
Свойство $m \in M$	Атомарная роль $\alpha(m) \equiv \exists m.\mathrm{T}$ в Tbox
Объект $g \in G$	Экземпляр α(g) в Abox $\perp(g)$
Элемент $(g;m) \in I$	Утверждение $\alpha(m)(\alpha(g)$ в Abox
Концепт $c = (X; Y) \in C$	Концепт определенный в Tbox, т.е. $\alpha(c) \equiv \cap_{m \in Y} \alpha(m)$
$\forall (c,\bar{c}) \in C \times C$, так что, $c \prec \bar{c}$	Включение аксиом $\alpha(m) \subseteq \alpha(\bar{m})$ в Tbox
Множество атрибутов концептов ($\Lambda_{i=1}^{n} c_i$)	Конъюнкция концептов $\alpha(c_1 \prec \cap \ldots \cap \alpha(c_n)$

Полученная онтология предлагается эксперту, который должен определить соответствие общего концепта каждому множеству элементов, исходя из свойств, которыми обладают все элементы множества. Например, группа объектов, обладающих свойствами {*разрушаемый*, *повреждаемый*}, может быть промаркирована понятием *орган*; а группа, обладающая свойствами {*разрушаемый*, *диагностируемый*} – понятием *опухоль*. Такая маркировка осуществляется для того, чтобы облегчить восприятие и чтение онтологии другими специалистами.

4.2. Представление концептов с помощью дескриптивной логики

Определение концепта в ДЛ получается путем конъюнкции его атрибутов квантором существования $\exists$. Результат преобразования решетки понятий в онтологию представлен на рис. 3. В табл. 3 даны определения каждого концепта для полученного фрагмента онтологии.

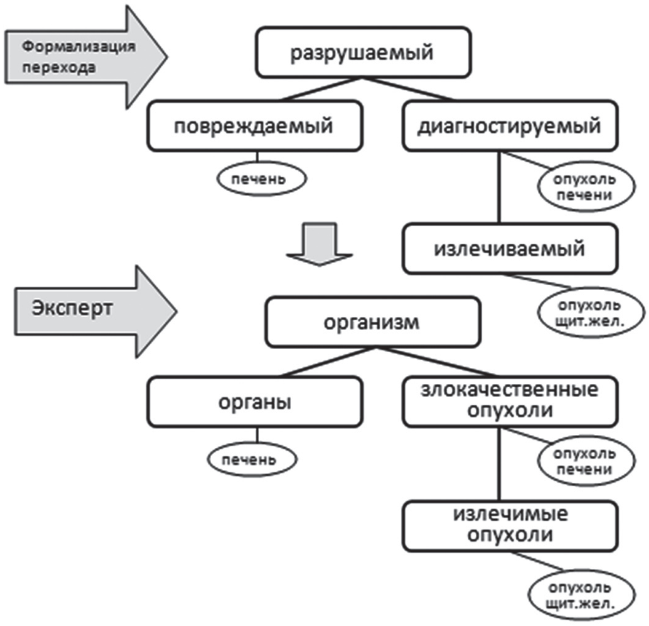


Рис. 3. Преобразование решетки в онтологию и определение концептов

Таблица 3

Определение концептов онтологии в ДЛ

Определение концепта	Определение концепта
Объект:= ∃ исследуемый	Злокачественная опухоль:= ∃ исследуемый ∩ ∃ диагностируемый
Орган:= ∃ исследуемый ∩∃повреждаемый	Излечиваемая злокачественная опухоль:= ∃ исследуемый ∩ ∃ диагностируемый ∩ ∃ излечиваемый

Такое представление позволяет использовать возможности ДЛ для получения ответов на запросы нижеследующих типов.

Население онтологии (ontology population). Пусть o_1 – это объект, обладающий свойствами {a,b}. Экземпляром какого класса (каких классов) является объект o_1? Ответ может быть следующим: это самый верхний класс, который обладает свойствами {a,b}, т. е. класс $C_1 \subseteq \exists$ a.T ∩∃b.T [4]. Например, на вопрос «*Является ли опухоль щитовидной железы злокачественной опухолью, если этот объект обладает следующими свойствами* {*исследуемый, диагностируемый, излечиваемый*}?» Ответ: соответствующий класс C_1, обладающий теми же свойствами – это класс «излечиваемая злокачественная опухоль», который в свою очередь является подклассом класса «злокачественная опухоль». Поэтому опухоль щитовидной железы является злокачественной опухолью.

Сравнение экземпляров онтологии: Пусть имеются два объекта o_1 и o_2. Принадлежит ли o_1 тому же классу, что и o_2? Ответом на этот вопрос будет определение того, каков класс C_1, которому принадлежит o_1, каков класс C_2, которому принадлежит o_2 и последующая проверка: справедливо ли, что C1 ≡ C2. Например, на вопрос, какие объекты принадлежат тому же классу, что и «печень»? Ответ: это множество объектов того же класса, что и объект «печень». Объект «печень» принадлежит классу «орган». Ко множеству других объектов этого же класса относятся «желудок», «щитовидная железа», «легкие».

Вопрос «*Принадлежат ли объекты «печень» и «бронхогенная карцинома» одному и тому же классу?*». Ответ: объект «печень» принадлежит классу *орган*:= ∃ *исследуемый* ∩ ∃ *повреждаемый*; объект «бронхогенная карцинома» принадлежит классу *излечиваемая злокачественная опухоль* := ∃*исследуемый* ∩ ∃ *диагностируемый* ∩ ∃ *излечиваемый*.

В свою очередь, *орган* ∩ *излечиваемая злокачественная опухоль* = ⊥. Следовательно, объекты «печень» и «бронхогенная карцинома» не принадлежат одному и тому же классу.

Однако представление объектов не ограничивается одним лишь описанием их свойств. Они могут быть определены через отношения, которые их связывают с другими объектами. Поэтому возникает необходимость расширить основу онтологии внешними отношениями между концептами (классами онтологии). В этом случае предлагается использовать дополнительный метод: реляционный анализ концептов (RCA) с тем, чтобы учесть внешние (трансверсальные) отношения в онтологии.

5. Извлечение внешних отношений

Извлечение внешних (трансверсальных) отношений позволяет давать концептам более точные определения. Благодаря этому концепт определяется не только по общим свойствам отдельных экземпляров, но и по отношениям, которые его связывают с другими концептами. Осенак-Жилль (Aussenac-Gilles) предлагает использовать метод обучения онтологии для синтаксических образцов [3]. На основе триплетов (*термин$_1$, отношение$_1$, термин$_2$*), извлеченных вручную из текстового корпуса, эксперты пытаются прежде всего обобщить *отношение$_1$*, извлекая триплеты типа (*термин$_1$, отношение$_k$, термин$_2$*). Определяется отношение R, наиболее общее для терминов (*термин$_1$, термин$_2$*). Затем извлекают все термины, связанные отношением R в формате (*термин$_i$, R, термин$_j$*). Таким образом, можно заменить одно частное отношение, связывающее экземпляры, другим, более общим. Однако в [9] не предлагается дополнительно использовать некоторую базовую онтологическую структуру, чтобы обобщить термины. Другой подход, предложенный в [10], основан на извлечении ассоциативных правил. Из текстового корпуса извлекаются пары (*термин$_1$, термин$_2$*), для них определяется ассоциативное правило (*термин$_1$, ⇒ термин$_2$*) с тем, чтобы сохранить лишь наиболее часто встречающиеся и наиболее достоверные пары. Метод, предложенный в [10], определяет наличие общих отношений между концептами онтологии, однако сами отношения никак не определены. Известно только, что концепт C_1 связан с концептом C_2, но не известно, каким отношением.

5.1. Анализ формальных концептов

В работе предлагается формальный метод извлечения внешних отношений, т.е. отношений между концептами. Этот метод позволяет приписать некоторый маркер каждому извлеченному отношению. Он требует также наличия базовой онтологии для обобщения терминов. Данный метод является расширением метода FCA, который, как было отмечено выше, позволяет группировать объекты не только по их общим свойствам, но и по отношениям, которые их связывают. Идея метода, описанного в [12], заключается в том, чтобы сконструировать формальный контекст для каждого внешнего (трансверсального) отношения, извлеченного из текстового корпуса. Элементами каждого контекста являются (см. определение 1) множество экземпляров, множество атрибутов, и связывающее их бинарное отношение. Такое расширение называется реляционным анализом концептов (ARC). Центральным понятием ARC является реляционное множество контекстов.

Определение 6 (ARC)

Реляционное множество контекстов представляет собой пару (K,R), где

– K – это множество контекстов $K_i = (G_i, M_i, I_i)$, причем каждое множество экземпляров имеет один единственный контекст;

– R – это множество отношений $r_k \subseteq G_i \times G_j$, где G_i и G_j – это два множества экземпляров K.

Приведем пример для рассматриваемой предметной области – медицинской радиологии. Пусть имеются два контекста, сконструированных на основе метода FCA: $K_1 = (G_1, M_1, I_1)$, представленный в табл. 1 – множество органов человека и их опухолевых патологий, и $K_2 = (G_2, M_2, I_2)$, представленный в табл 4 – множество радионуклидов, применяемых в медицине. Имеется также два отношения r_1 и r_2, которые описаны в табл. 5.

Интеграция отношений r_1 и r_2 и решетки свойств для органов выполнена на основе процесса взвешивания, подробно описанного в [12]. Результирующая решетка демонстрирует такие внешние отношения: *диагностируемый_с_помощью* между экземплярами «опухоль щитовидной железы» и «йод 131» и *излечиваемый_с_помощью* между экземплярами «бронхиальная карцинома» и «кобальт 60».

Таблица 4

Фрагмент формального контекста для радионуклидов

	Период полураспада < 2 часов	Период полураспада > 24 часов и < 10 суток	Период полураспада от 100 суток до 10 лет
Йод 131		×	
Кобальт 60			×
Углерод 11	×		

Таблица 5

Решетка для внешних отношений между концептами

Диагностируемый_с _помощью			
	Йод 131	Кобальт 60	Углерод 11
Опухоль щитовидной железы	×		
Опухоль печени			×
Излечиваемый_с _помощью			
	Йод 131	Кобальт 60	Углерод 11
Бронхиальная карцинома		×	
Опухоль щитовидной железы		×	

На основе внешних отношений структура онтологии может быть расширена и преобразована в более сложную онтологию (рис. 4), описанную с помощью ДЛ.

Определение 7 (полная онтология)

Полная онтология представлена следующим набором из пяти элементов O:=(C, $\subseteq_C$, A, R, σ), где (C, $\subseteq_C$, A) представляет основу онтологии, R – это множество отношений и σ – это сигнатуры отношений.

Определение 8 (база знаний)

База знаний, соответствующая полной онтологии типа O:=(C, $\subseteq_C$, A, R, σ) – это структура $CB := (I;\ i_C;\ i_A;\ i_R)$, где I – множество экземпляров, $i_C : C \to 2^I$ – так называемая функция установки концептов, i_A – функция установки свойств и i_R: $C \to 2^{I+}$ - это функция определения отношений.

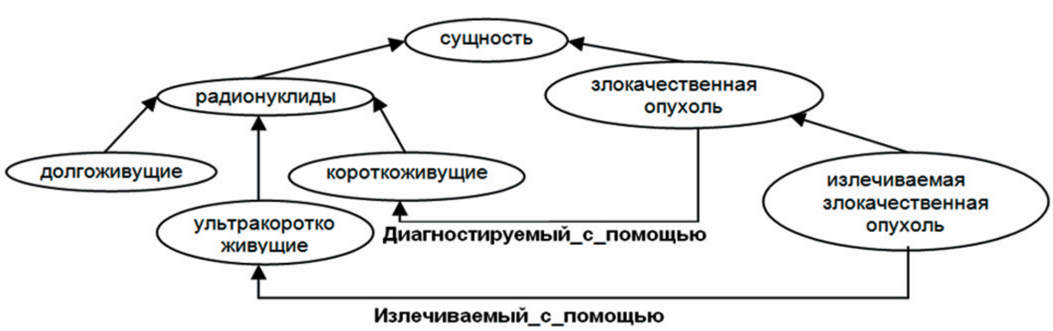


Рис. 4. Онтология, дополненная внешними отношениями

5.2. Представление концептов в дескриптивной логике

Извлечение внешних (трансверсальных) отношений позволяет улучшить и обогатить определение концептов на основе ДЛ. Два концепта «злокачественная опухоль» и «излечиваемая злокачественная опухоль» были переопределены с помощью двух отношений *диагностируемый_с_помощью* и *излечиваемый_с_помощью*:

– *злокачественная опухоль:=* $\exists$ *исследуемый* $\cap$ $\exists$ *диагностируемый* $\cap$ $\exists$ *диагностируемый_с_помощью.Радионуклиды короткоживущие*;

– *излечиваемая злокачественная опухоль: =*$\exists$ *исследуемый* $\cap$ $\exists$ *диагностируемый* $\cap$ $\exists$ *излечиваемый* $\cap$ $\exists$ *излечиваемый_с_помощью.Радионуклиды долгоживущие.*

Приведем еще один пример запроса: «*Что диагностируется с помощью короткоживущих радионуклидов*?» Ответ может быть получен из онтологии, обогащенной внешними отношениями между концептами, фрагмент которой представлен на рис. 4. Экземпляры концепта «злокачественная опухоль» являются подмножеством отношения *диагностируемый_с_помощью* и служат ответом на данный запрос.

Заключение

В работе описаны методы, позволяющие построить онтологию на основе текстового корпуса, представляющего некоторую предметную область. Показано, что на основе метода FCA можно корректно группировать объекты, рассматривая их общие свойства, и строить таксономию концептов, связанных транзитивным отношением подчиненности (*is-a*). Второй предлагаемый метод позволяет извлекать внешние отношения между концептами с помощью реляционного анализа концептов и, таким образом, расширить возможности использования онтологии, например получать ответы на более сложные запросы. Дескрипторная логика была выбрана в качестве языка описания онтологии благодаря относительной простоте построения правил вывода. Достоинством метода является его универсальность и независимость от области применения.

Дальнейшими задачами авторов являются следующие: исследовать возможности использования в данном методе других языков описания онтологий, в т.ч. алгебрологические средства; уточнить требования к текстовому корпусу, являющемуся информационным ресурсом для построения онтологии; усовершенствовать данный метод за счет добавления синтаксических шаблонов для терминов предметной области.

Список литературы: **1.** Buitelaar P. Ontology Learning from Text: An Overview [Текст]: / P. Buitelaar, P. Cimiano, B. Magnini reviewed by C. Brewster; US, IOS Press, 2005. – 180 p. **2**. Gruber T. Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing [Текст] / T. Gruber // In International Journal Human-Computer Studies.– 1995.– Vol. 43.– P. 907-928. **3.** Aussenac-Gilles N. Methodes ascendantes pour l'ingenierie des connaissances. [Текст] : Habilitation a diriger des recherches / N. Aussenac-Gilles.– France: Universitй Toulouse Paul Sabatier.– 2005.– 226 p. **4**. Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications [Текст] / F. Baader, D. Calvanese, D. McGuinness and all.– UK.: Cambridge University Press, 2003.– 572 p. **5**. Gomez-Perez A. Ontological Engineering [Текст] / A. Gomez-Perez, M. Fernandez-Lopez, O. Corcho.– London Ltd.: Springer, 2004.–432 p. **6**. Fernandez-Lopez M. Bilding a Chemical Ontology Using Methontology and the Ontology Gesign Environment [Текст] / M. Fernandez-Lopez, *A. Gomez-Perez, J. P. Sierra* // In IEEE intelligent systems & their applications.– 1999.– Vol. 1.– P. 37-45. **7**. Cimiano Ph. Learning concept hierarchies from text corpora using formal concept analysis [Текст] / Ph. Cimiano, A. Hotho, S. Staab //In Journal of Artificial Intelligence Research.– 2005.– V. 24.– P. 305–339. **8**. Ganter B. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [Текст] / B. Ganter, R. Wille.– London Ltd.: Springer-Verlag, 1999. – 346 p. **9.** Noun classification from predicate-argument structures [Текст]: proceedings of the 28th Annual Meeting of the ACL.–1999.– p.268-275. **10**. Discovering conceptual relation from text [Текст]: Proceeding of the 14th European Conference on artificial intelligence, 20-25August 2000. Germany, Berlin.– p.321–325. **11**. Extracting formal concepts out of relational data [Текст]: proceedings of the 4th Int. Conf. Knowledge Discovery and Discrete Mathematics, 3-6 September 2003. France, Metz.– p.37-49. **12.** Proposal for combining formal concept analysis and description logics for mining relational data [Текст]: proceedings of the 5th Int. Conf., 12-16 February 2007. France, Clermont-Ferrand.– 327 p.

Поступила в редколлегию 15.06.2011.

УДК 004.82

Метод FCA для побудови онтології на основі тесктовго корпусу / О.О. Оробінська, Н.В.Шаронова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 129-135.

Розглянуто напівавтоматичний метод побудови онтології на основі текстового корпуса для спеціальної предметної області. Запропонований метод оснований на можливості класифікації об'єктів на базі їхніх загальних властивостей із застосуванням методу аналізу формальних понять – АФП (FCA) для побудови решітки понять. Побудована решітка використовується для перетворення знайдених термінів у концепти онтології. Розроблено методику, що дозволяє доповнити онтологію шляхом визначення зовнішніх (трансверсальних) відношень між концептами з використанням реляційного аналізу понять (RCA). Кожний концепт онтології описується за допомогою дескрипторної логіки (ДЛ). Метод був застосований на текстах з радіології.

Табл. 5. Іл. 4. Бібліогр.: 12 найм.

UDC 004.82

Ontology construction from text's corpus with FCA / O.O. Orobinska, N.V. Sharonova // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 129-135.

In this paper the semi-automatic method of ontology creation from the text corpora for special data domain is considered. With proposed method the objects classification is performed from their commons properties. The method of the formal concepts analysis (FCA) is on the base. The constructed grid is transformed in ontology concepts. New technique allows to add the exteriors (transversals) relations between the concepts is offered. This, technique is based on relational concepts analysis (RCA). The ontology concepts are described with a logic descriptive. The applied domain is the radiology.

Tab. 5. Fig. 4. Ref. 12 items.

ОБ АВТОРАХ

Бондаренко Михаил Федорович	3, 10, 24, 33, 52, 65, 79, 86, 98	член-корреспондент НАН Украины, д-р техн. наук, профессор, ректор Харьковского национального университета радиоэлектроники
Вечирская Ирина Дмитриевна	109	канд. техн. наук, старший научный сотрудник кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Губаренко Евгений Витальевич	114	аспирант кафедры системотехники Харьковского национального университета радиоэлектроники
Кругликова Наталья Павловна	24	аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Оробинская Елена Александровна	129	аспирант кафедры интеллектуальных компьютерных систем Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»
Петров Константин Эдуардович	123	д. т. н., доцент кафедры прикладной математики и аналитического обеспечения ОВД Харьковского национального университета внутренних дел
Петров Эдуард Георгиевич	114	д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой системотехники Харьковского национального университета радиоэлектроники
Русакова Наталья Евгеньевна	3, 10	аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич	33, 52, 65, 79, 86, 98	д-р техн. наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович	3, 10, 24, 33, 52, 65, 79, 86, 98	д-р техн. наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники
Шаронова Наталья Валерьевна	129	д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой интеллектуальных компьютерных систем Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

ПРАВИЛА
оформлення рукописів для авторів науково-технічного журналу «БІОНІКА ІНТЕЛЕКТУ»

Науково-технічний журнал «Біоніка интелекту» приймає до друку написані спеціально для нього оригінальні рукописи, які раніше ніде не друкувались. Структура рукопису повинна бути такою: індекс УДК, заголовок, відомості про авторів, анотація, ключові слова, вступ, основний текст статті, висновки, список використаної літератури.

Відповідно до Постанови ВАК України від 15.01.2003 №7-05/1 (Бюлетень ВАК, №1, 2003, с. 2), стаття повинна мати такі необхідні елементи: постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій і виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми в даній області; формулювання цілей та завдань дослідження; виклад основного матеріалу досліджень з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з даного дослідження та перспективи подальших досліджень у даному напрямку.

Статті мають бути виконані в редакторі Microsoft Word. Формат сторінки – А4 (210х297 мм), поля: верхнє – 25 мм, нижнє – 20 мм, ліве, праве – 17 мм. Кількість колонок – 2, з інтервалом між ними 5 мм, основний шрифт Times New Roman, кегль основного тексту – 10 пунктів, міжрядковий інтервал – множник (1,1), абзацний відступ – 6 мм. Обсяг рукопису – від 4 до 12 сторінок (мови: російська, українська, англійська).

УДК друкується з першого рядка, без відступів, вирівнювання по лівому краю.

Назва статті друкується прописними літерами; шрифт прямий, напівжирний, кегль 12. *Назви розділів* нумерують арабськими цифрами, виділяють жирним шрифтом. Відступи для назви статті, ініціалів та прізвищ авторів, відомостей про авторів, назв розділів, вступу та висновків, списку літератури: зверху – 6 пт, знизу – 3 пт.

Анотацію (мовою статті, абзац 4-10 рядків, кегль 9) розміщують на початку статті, в ній має бути розміщена інформація про результати описаних досліджень.

Ключові слова (4-10 слів з тексту статті, які з точки зору інформаційного пошуку несуть змістовне навантаження) наводять мовою рукопису, через кому в називному відмінку, кегль 9.

Малюнки та *таблиці* (чорно-білі, контрастні) розміщуються у тексті після першого посилання у вигляді окремих об'єктів і нумерують арабськими цифрами наскрізною нумерацією за наявності більше ніж одного об'єкта. Невеликі схеми, що складаються з 3-4 елементів виконують, використовуючи вставку об'єкта Рисунок Microsoft Word. Більш складні виконують у графічних редакторах у вигляді чорно-білих графічних файлів форматів .tiff, .jpg, .wmf, .cdr із розділенням 300 dpi. Рисунки мають міститися у текстовому файлі й обов'язково подаватися окремим файлом з відповідною назвою (наприклад, Рис.1.cdr).

Усі елементи малюнка, включаючи написи, повинні бути згруповані. Усі написи в малюнках і таблицях мають бути виконані шрифтом Times New Roman, кегль у малюнках – 10, у таблицях – 9.

Малюнок повинен мати центрований підпис (поза малюнком), шрифт 9, відступи зверху і знизу по 6 пт. Ширина малюнка має відповідати ширині колонки (або ширині сторінки).

Формули, символи, змінні, повинні бути набрані в редакторі формул MathType або Microsoft Equation. Формули розміщують посередині рядка й нумерують за наявності посилань на них у рукописі. Шрифт – Times New Roman. Висота змінної – 10 пунктів, великих і малих індексів – 8 пт, основний математичний символ – 12 (10) пт. Змінні, позначені латинськими літерами, набирають курсивом, грецькі літери, скорочення російських слів і цифри – прямим написанням. Змінні, які є в тексті, також набирають у редакторі формул.

Список літератури вміщує опубліковані джерела, на які є посилання в тексті, укладені у квадратні дужки, друкують без абзацного відступу, кегль 9 пт, відступ зверху – 6 пт.

Після списку літератури з відступом зверху 6 пт зазначають дату подання статті до редколегії. Число та місяць задають двозначними числами через крапку. Розмір шрифта – 9 пт, курсив, вирівнювання по правому краю.

Реферати (Times New Roman, кегль – 9 пунктів, 3-4 речення) подають російською та англійською мовами. Реферат не повинен дублювати текст анотації.

Разом із рукописом (на аркушах білого паперу формату А4 щільністю 80-90 г/м2, надрукований на лазерному принтері, у 2-х примірниках) необхідно подати такі документи:

1. Заяву, яку повинні підписати всі автори.
2. Акт експертизи про можливість опублікування матеріалів у відкритому друці.
3. Рецензію, підписану доктором наук.
4. Відомості про авторів.
5. Електронний варіант рукопису, реферату та відомостей про авторів.
6. Оплату за публікацію.

Необхідно також зазначити один з наступних тематичних розділів, якому відповідає рукопис:

1. Теоретичні основи інформатики та кібернетики. Теорія інтелекту
2. Математичне моделювання. Системний аналіз. Прийняття рішень
3. Інтелектуальна обробка інформації. Розпізнавання образів
4. Інформаційні технології та програмно-технічні комплекси
5. Структурна, прикладна та математична лінгвістика
6. Дискусійні повідомлення

БІОНІКА ІНТЕЛЕКТУ

інформація, мова, інтелект

Науково-технічний журнал

№ 2 (76)

2011

Рекомендовано Вченою радою
Харківського національного університету радіоелектроніки
(протокол № 4 від 31.08.2011)

Коректор — *Л. М. Денісова*

Комп’ютерне верстання — *О. Б. Ісаєва*

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 12072-943 ПР від 07.12.2006

Підп. до друку 10.10.2011. Формат 60 х 84 $^1/_8$. Друк ризографічний.
Папір офсетний. Гарнітура Newton. Умов. друк. арк. 16,04. Обл.-вид. арк. 15,8.
Тираж 100 пр. Зам. № .

Надруковано в навчально-науковому видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 1409 від 26.06.2003

Адреса редакції та видавця:

просп. Леніна, 14, Харків-166, 61166, Україна,
Харківський національний університет радіоелектроніки, к. 127
тел. 702-14-77, факс 702-10-13,
e-mail: bionics@kture.kharkov.ua