МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ НАГРЕВА ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Мартыненко М.С.
Научный руководитель – к.т.н., доц. Гибкина Н.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел.(057)702-14-36, e-mail: michael.cookie@hotmail.com)

One of the possible statements of problems of optimal control of homogeneous plate heating is presented in the article. Control of the temperature inside the plate is set up by setting such temperature conditions on its borders, which at the final moment of the time would set the temperature inside the plate as close as possible to the specified temperature distribution.

Задачи теплопереноса занимают важное место среди задач математической физики, поскольку возникают в различных областях технической деятельности, в частности, в задачах тепловой защиты энергетических и других технологических установок; при расчете тепловых режимов в бытовой и промышленной технике, использующей радиаторы пластинчатого типа; при обслуживании компьютерных плат; в микроэлектронике; космонавтике и др.

В большинстве случаев процессами распространения тепла можно управлять с целью формирования таких температурных режимов, которые будут обеспечивать наиболее эффективное протекание рассматриваемых процессов. Задачи оптимального управления теплопереносом заключаются в том, чтобы из множества допустимых управлений выбрать наилучшее в определенном смысле управление.

Рассмотрим математическую модель теплопереноса в однородной пластине. Процесс распространения тепла в двумерном случае задается параболическим уравнением [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ \forall\, 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \tag{1}$$

с краевыми и начальными условиями:

$$\begin{gathered} u|_{y=0} = \mu_1(x,t), \qquad u|_{x=0} = \nu_1(y,t), \\ u|_{y=b} = \mu_2(x,t), \qquad u|_{x=a} = \nu_2(y,t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y). \end{gathered} \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) является функция $u(x,y,t)$, которая определяет температуру в момент времени t в точке с координатами (x,y). Это решение может быть получено методом Фурье, для чего с помощью замены $u(x,y,t) = v(x,y,t) + w(x,y,t)$, где $w(x,y,t) = \dfrac{\mu_1(x,t)(b-y)(a-x)x}{y+(b-y)(a-x)x}$, а $v(x,y,t)$ – новая неизвестная функция, необходимо перейти от задачи (1),

(2) к задаче с однородными краевыми условиями [1].

Сформулируем задачу оптимального управления процессом нагрева однородной пластины с целью установления в ней наилучшего в определенном смысле температурного режима в конечный момент времени. Эта задача сводится к следующему: необходимо так определить краевые и начальные условия $\mu_1(x,t)$, $\mu_2(x,t)$, $\nu_1(y,t)$, $\nu_2(y,t)$, $\varphi(x,y)$ чтобы распределение температуры $u(x,y,t)$, полученное как решение задачи (1), (2), в конечный момент времени T было сколь угодно близко к заданному распределению температуры $z(x,y)$. Рассмотрим один из возможных случаев, когда в (2) $\mu_2(x,t)=0$, $\nu_1(y,t)=0$, $\nu_2(y,t)=0$, $\varphi(x,y)=0$, то есть краевые и начальные условия для уравнения теплопроводности (1) имеют вид:

$$\begin{gathered} u|_{y=0}=\mu_1(x,t), \quad u|_{x=0}=0, \\ u|_{y=b}=0, \quad u|_{x=a}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, нагрев пластины будет осуществляется только за счет нагрева одной из ее граней, задаваемого выражением $\mu_1(x,t)$.

Неизвестную функцию $\mu_1(x,t)$ будем искать в виде

$$\mu_1(x,t)=\sum_{k=1}^{m} r_k R_k(x,t),$$

где $R_k(x,t)$ – базисные функции, r_k – неизвестные параметры, $k=\overline{1,m}$.

Для нахождения оптимального выражения для функции $\mu_1(x,t)$ необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\int_0^a\int_0^b \left(u(x,y,\mathrm{T})-z(x,y)\right)^2 dxdy \to \min_{r_k,k=\overline{1,m}}. \tag{4}$$

Здесь $u(x,y,T)$– распределение температуры в пластине, полученное методом Фурье как решение задачи (1) с краевыми условиями (3), в момент времени T.

Минимизация функционала (4) по переменным r_k, $k=\overline{1,m}$, позволяет найти такие значения этих параметров, которые обеспечивают оптимальное протекание процесса распространения тепла в пластине в смысле близости значения фактической и заданной температуры в ней в конечный момент времени T.

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. –368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII).