

ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ. IV¹

БОНДАРЕНКО М. Ф., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО С. Ю.

Рассматривается теория цветового зрения человека. Изучаются и формулируются экспериментально проверяемые условия линейности предикатной модели цветового зрения для случая, когда конечномерный линейный предикат задан на воспроизводящем конусе или на декартовом квадрате выпуклого множества. Предложена экспериментальная процедура для нахождения линейного предиката.

4.1. Предикаты, определенные на декартовом квадрате воспроизводящего конуса

Теорема 4.1. Пусть предикат Φ определен в декартовом квадрате воспроизводящего конуса K пространства $L^2[0,1]$ и удовлетворяет условиям

4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi(x + x', y + y') = 1;$$

5) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, что для каждого $x \in K$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n \subset K$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$\Phi(x + \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i) = 1, \quad \alpha_i > 0 \text{ при } i \in I; \quad (4.1)$$

6) если $x, y \in K$, $\gamma > 0$ и при некотором i $\Phi(x + \gamma e_i, y + \gamma e_i) = 1$, $\Phi(x, y) = 1$;

7) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны на K .

Тогда существуют такие векторы $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n \subset L^2[0,1]$, что

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 \alpha_k(t) X(t) dt, \quad x \in K, \quad (4.2)$$

системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ являются линейно-независимыми и пара систем $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату (понятие присоединенности было введено в п. 2.1. Формулы, разделы и утверждения, имеющие номер, который начинается единицей, относятся к работе [1], двойкой – к работе [2], тройкой – к работе [3]).

Это утверждение вытекает из теоремы 2.4 и леммы 2.10. Обратное утверждение также верно. Если $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – пара систем, присоединенная к предикату Φ , то для предиката Φ выполняются условия 4–7. Этот факт также вытекает из комбинации теоремы 2.4 и леммы 2.10.

Следствие 4.1. Для того чтобы пара $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к n -мерному предикату Φ , определенному на квадрате воспроиз-

водящего конуса K , необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам

$$\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt = \int_0^1 \alpha_k(t) e_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

(т. е. система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определяла предикат Φ) и чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \alpha_i(t) e_j(t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Это утверждение вытекает из следствия 2.13 и теоремы Рисса.

В работе [3] при изучении предикатов, определенных на квадрате всего пространства, мы видели, что для любой системы линейно независимых функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, определяющих предикат Φ , существует система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ . В рассматриваемом сейчас случае это уже не так. Это видно из простого примера. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in L^2[0,1]$, $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), $s_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $s_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $K = \{x | (s_1, x) \geq 0, (s_2, x) \geq 0\}$, предикат Φ определен условием $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 1, 2$. Тогда не существует векторов $e_1, e_2 \subset K$, удовлетворяющих условию

$$(\alpha_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2).$$

Следствие 4.2. Пусть Φ – n -мерный линейный предикат на воспроизводящем конусе K , $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо линейно-независимая система функционалов, определяющая предикат Φ , $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система. Для того чтобы существовала система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ , необходимо и достаточно, чтобы существовали такие векторы γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), что

$$\beta_k + \gamma_k \in K, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

и

$$\int_0^1 \gamma_i(t) \alpha_j(t) dt = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Доказательство. Пусть система $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существует. Положим $\beta_k - \gamma_k \in K$, $k = 1, 2, \dots, n$. Поскольку система $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ биортогональна к системе $\{\alpha_k\}$, из (4.6) вытекает (4.4). Тогда из следствия 4.1 вытекает, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ . Положим $\gamma_k = e_k - \beta_k \in K$, $k = 1, 2, \dots, n$. Условие (4.5) очевидно выполняется. Согласно следствию (4.1), справедливо (4.4). Отсюда вытекает (4.6).

¹ Ч. I см. в журнале "Радиоэлектроника и информатика", 1998. №1. С. 106–117; ч. II и III см. в том же журнале, 1998. №4. С. 110–132.

Следствие 4.2 доказано.

Задача о нахождении какой-либо системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ при известной системе $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ сводится к решению n систем уравнений при дополнительном условии $x \in K$. Система с номером j имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha_1(t)x(t)dt &= 0, \\ \int_0^1 \alpha_{j-1}(t)x(t)dt &= 0, \\ \int_0^1 \alpha_j(t)x(t)dt &= 0, \\ \int_0^1 \alpha_{j+1}(t)x(t)dt &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \int_0^1 \alpha_n(t)x(t)dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эта задача является частным случаем задачи бесконечномерного линейного программирования – отсутствует целевая функция. В качестве целевой функции можно взять любой линейный функционал. Непустота множества допустимых точек полученной таким образом задачи линейного программирования эквивалентна наличию вектора x , удовлетворяющего условию (4.7). На практике функции $\alpha_k(t), t \in [0, 1]$ не могут быть известны в точности. Обычно известны их конечномерные аппроксимации. Пусть $\{t_m\}_{m=0}^p$ – одномерная сетка на отрезке $[0, 1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{p-1} < t_p = 1,$$

$\tilde{\alpha}_k$ – кусочно-постоянная функция на $[0, 1]$

$$\tilde{\alpha}_k(t) = \alpha_{k,m+1}, t_m \leq t < t_{m+1},$$

достаточно близкая к функции α_k в метрике $L^2[0, 1]$.

Пусть, далее, $\tilde{x}$ – кусочно-постоянная функция

$$\tilde{x}(t) = x_{m+1}, t_m \leq t < t_{m+1}.$$

В наиболее важном в приложениях частном случае K – положительный конус в $L^2[0, 1]$. В этом случае аппроксимация задачи (4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1p}x_p &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{j-11}x_1 + \dots + \alpha_{j-1p}x_p &= 0, \\ \alpha_{j1}x_1 + \dots + \alpha_{jp}x_p &= 1, \\ \alpha_{j+11}x_1 + \dots + \alpha_{j+1p}x_p &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{np}x_p &= 0, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_p &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решение этой задачи, если оно существует, является конечномерным приближением вектора e_j . Таким образом, нам нужно указать способ, позволяющий выяснить, имеет ли решение каждая

($j = 1, 2, \dots, n$) из задач (4.8), и в положительном случае найти это решение.

Лемма 4.1. Для того чтобы каждая из задач (4.8) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы система неравенств

$$\begin{aligned} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{n1}y_n &\geq 0, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{n2}y_n &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\alpha_{1p-1}y_1 + \alpha_{2p-2}y_2 + \dots + \alpha_{np-2}y_n \geq 0$$

не имела решений, не удовлетворяющих условию $y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0$.

Этот факт легко выводится из теории линейных неравенств.

Для практического решения задачи (3.8) удобно добавить искусственную переменную y . Рассмотрим вспомогательную каноническую задачу линейного программирования

$$\min y \quad (4.9)$$

при условии

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1p}x_p &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{j-11}x_1 + \dots + \alpha_{j-1p}x_p &= 0, \\ \alpha_{j1}x_1 + \dots + \alpha_{jp}x_p &= 1, \\ \alpha_{j+11}x_1 + \dots + \alpha_{j+1p}x_p &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{np}x_p &= 0, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Множество допустимых точек этой задачи не пусто – оно содержит точку

$$(0, \dots, 0, 1). \quad (4.11)$$

Поскольку целевая функция этой задачи неотрицательна на множестве допустимых точек, задача (4.9), (4.10) имеет решение. Пусть μ – минимальное значение целевой функции. Очевидно $\mu \geq 0$.

Проверим, что задача (4.8) имеет решение тогда и только тогда, когда $\mu = 0$. Действительно, пусть $\mu = 0$. Обозначим через $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{y})$ какое-либо решение этой задачи. Из равенства $\mu = 0$ следует, что $y = 0$. Но тогда $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ удовлетворяет условиям (4.8). Обратно, пусть существует точка $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$, удовлетворяющая условиям (4.8). В этом случае точка $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, 0)$ удовлетворяет условиям (4.10). Значение целевой функции в этой точке равно 0. Тогда по определению числа μ должно быть $\mu \geq 0$. Следовательно, $\mu = 0$.

Итак, вопрос о нахождении вектора e_j сводится к задаче линейного программирования (4.9), (4.10). Точка (4.11) является опорным планом этой задачи, поскольку n -мерный вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с числом 1 на j -м месте, связанный с единственной положительной координатой этого плана, есть ненулевым. Набор из всех n -мерных векторов вида $(0, \dots,$

0, 1, 0, ..., 0) (число 1 в k -м векторе стоит на k -м месте) – удобный объект для применения симплекс-метода.

Коснемся еще нескольких вопросов, аналогичных рассматриваемым в п. 3.5 для случая задания предиката на квадрате всего пространства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, \{e_k\}_{k=1}^n$ – одна, а $\{u_k\}_{k=1}^n, \{g_k\}_{k=1}^n$ – другая пара систем, присоединенных к предикату Φ , определенному на $K \times K$. Если системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ известны, то система $\{u_k\}_{k=1}^n$ может быть найдена по формулам (3.44) с матрицей (3.43), обратной матрице (3.61), т. е., в этом случае ситуация такая же, как и в п. 3.5. Это, однако, не так по отношению к следующему вопросу. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, \{e_k\}_{k=1}^n$ – пара, присоединенная к предикату Φ , $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо система функционалов, определяющая этот предикат, система $\{g_k\}_{k=1}^n$ вычислена по формуле (3.66) с матрицей (3.64) – обратной к сопряженной матрице (3.43). В случае конуса пара $\{u_k\}_{k=1}^n, \{g_k\}_{k=1}^n$ уже не обязательно присоединена к Φ , поскольку может не выполняться условие $\{g_k\}_{k=1}^n \subset K$.

4.2. Предикаты на декартовом квадрате выпуклого множества

Теорема 4.2. Пусть предикат Φ определен на декартовом квадрате открытого выпуклого множества V и удовлетворяет следующим условиям:

- 4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

- 5) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$, что для каждого $x \in V$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{i = 1, 2, \dots, n+1\}$ такие, что

$$\Phi\left(\alpha_0 x + \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i\right) = 1; \quad (4.12)$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i > 0; i \in I, \alpha_0 + \sum_{i \in I} \alpha_i = 1; \sum_{i \notin I} \alpha_i = 0; \quad (4.13)$$

- 6) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны.

Тогда существуют такие векторы $\{\beta_k\}_{k=1}^{n+1} \subset L^2[0, 1]$ и такие числа $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$I(x) = \left\{ \frac{i}{\beta_i(x)} < 0 \right\}, \quad \alpha_0(x) = \left(\sum_{i \in I} \beta_i(x) \right)^{-1},$$

$$\alpha_i(x) = \alpha_0(x) |\beta_i(x)|, \quad (4.14)$$

где

$$\beta_i(x) = \int_0^1 b_i(t) x(t) dt + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.15)$$

система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ аффинно-независима,

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0, \quad (4.16)$$

пара систем точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}, I(x)$ присоединены к предикату Φ .

Действительно, при выполнении условий 4–6, согласно теореме 3.1, предикат Φ является n -мерным линейным. Тогда из леммы 2.11 следует, что $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ – однородные координаты, система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ аффинно-независима и пара $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ . Из (2.25), (2.22) и теоремы Рисса вытекают равенства (4.14), (4.15). Условие

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1, \quad x \in V, \quad (4.17)$$

в совокупности с условием разрешимости системы (2.24) при любых правых частях, для которых $s_1 + \dots + s_{n+1} = 1$, эквивалентно условию аффинной независимости точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ в совокупности с равенствами (4.16).

Верно и обратное утверждение. Если $\{e_k\}_{k=1}^{n+1} \in V$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ – аффинно-независимые системы: $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$ – числа, выполняются равенства (4.16), отображения $I(x)$ и $\alpha_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) вычислены по формулам (4.44), (4.45) и пара $\{c_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ , то предикат Φ удовлетворяет условиям 4÷6.

Этот факт также следует из комбинации теоремы 3.1 и леммы 2.11.

Если множество V не является открытым, но $\text{aff } V = L^2[0, 1]$, теорема 4.2 будет справедлива при замене условий 4÷6 на условия 4÷7 теоремы 3.2.

Следствие 4.3. Для того чтобы пара однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и аффинно-независимых точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1} \in V$ была присоединена к n -мерному линейному предикату Φ , определенному на квадрате выпуклого множества V с $\text{aff } V = L^2[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам

$$\int_0^1 b_k(t) x(t) dt = \int_0^1 b_k(t) y(t) dt,$$

$$k = 1, 2, \dots, n+1, \quad x, y \in V \quad (4.18)$$

и чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^1 b_i(t) e_j(t) dt = -c_i + \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (4.19)$$

Этот результат вытекает из следствия 2.14.

Так же, как и в случае конуса, в рассматриваемой ситуации, вообще говоря, нельзя утверждать, что для любой системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$, определяющей предикат Φ , существует система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ такая, что пара $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ . Положительный ответ на этот вопрос означает, что каждая из систем равенств-включений $(i, j = 1, 2, \dots, n+1) \quad x \in V$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 b_1(t)x(t)dt = -c_1, \\
& \dots\dots\dots \\
& \int_0^1 b_{j-1}(t)x(t)dt = -c_{j-1}, \\
& \int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j + 1, \quad (4.20) \\
& \int_0^1 b_{j+1}(t)x(t)dt = -c_{j+1}, \\
& \dots\dots\dots \\
& \int_0^1 b_{n+1}(t)x(t)dt = -c_{n+1},
\end{aligned}$$

имеет решение. Заметим, что в силу равенств (4.46), уравнение

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j + 1$$

является следствием остальных уравнений (4.20) и поэтому может быть опущено. Вопрос о существовании решения системы (4.20) может быть различным образом сформулирован в виде бесконечномерной задачи выпуклого программирования. Например, формализация может иметь следующий вид. Найти минимум (более точно, инфимум) квадратичного функционала $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{i \neq j} \left(\int_0^1 b_i(t)x(t)dt + c_i \right)^2$$

при условии $x \in V$. Если минимум положителен, то исходная задача (4.20) не имеет решения, если минимум равен нулю, то решение $\bar{x}$ задачи $g(x) \rightarrow \min, x \in V$ является решением задачи (4.20). На практике, разумеется, не может быть найден точный минимум и критерий должен быть загрублен в следующей форме: если минимум меньше наперед заданного малого положительного числа ϵ , то задача (4.20) имеет решение, в противном случае – не имеет. Вспомогательная задача может быть эффективно решена методами нелинейного программирования, если реализовано отображение проектирования Q_V на выпуклое множество $\bar{V}$ – замыкание множества V . Например, если V – положительный конус, то $Q_V x = x_+$,

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & x(t) \geq 0, \\ 0, & x(t) < 0, \end{cases}$$

если V – шар $\{x \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, то

$$Q_V x = \begin{cases} x, & \|x - x_0\| \leq R, \\ x_0 + R \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & \|x - x_0\| > R. \end{cases}$$

Для решения вспомогательной задачи может быть применен, например, метод проекции градиента.

Отметим, что в основных интересующих нас частных случаях существуют более простые способы решения задачи. Рассмотрим случай

$V = \{x \mid \|x - x_0\| \leq R\}$. Поставим в соответствие системе (4.20) задачу

$$\min \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \quad (4.21)$$

при условиях

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j, \quad i \neq j. \quad (4.22)$$

Пусть μ – минимальное значение целевой функции. Если $\mu > \frac{1}{2} R^2$, то система (4.20) не имеет

решения, если $\mu \leq \frac{1}{2} R^2$, то решение задачи (4.21), (4.22) является решением системы (4.20). Решение задачи (4.21), (4.22) нетрудно выписать. Сделаем это.

Заметим, что система $\{b_k\}_{k \neq j}$ является линейно-независимой. Действительно, из (4.16) следует, что $b_j \in L(\{b_k\}_{k \neq j})$. Поэтому $L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{b_k\}_{k \neq j})$ и следовательно, $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \subset L(\{b_k\}_{k \neq j})$. Если система $\{b_k\}_{k \neq j}$ линейно зависима, то, как видно из последнего включения, размерность $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$ меньше n , что противоречит аффинной независимости системы $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$. Поскольку система $\{b_k\}_{k \neq j}$ линейно-независима, существует двойственная к ней система $\{g_k\}_{k \neq j}$. Функция Лагранжа задачи (4.21), (4.22) имеет вид

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i ((b_i, x) + c_i), \quad \lambda = \{\lambda_i\}_{i \neq j}$$

необходимое и достаточное условие минимума этой задачи заключается в выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(x, \lambda) = 0, \quad i \neq j,$$

т.е.

$$x - x_0 + \sum_{j \neq i} \lambda_i b_i = 0, \quad (b_i, x) + c_i = 0, \quad i \neq j \quad (4.23)$$

Первое из этих условий означает, что $x - x_0 \in L(\{b_i\}_{i \neq j})$. Поэтому оно может быть переписано в виде

$$x - x_0 + \sum_{j \neq i} \mu_i g_i = 0, \quad (4.24)$$

где $\{\mu_k\}_{k \neq j}$ – некоторые числа. Найдем их. Для этого умножим скалярно равенство (4.24) на вектор $b_k (k \neq j)$. С учетом второго равенства (4.23) и биортогональности систем $\{b_i\}_{i \neq j}$ и $\{g_i\}_{i \neq j}$, получаем

$$\mu_k = c_k + (b_k, x_0), \quad k \neq j.$$

Тогда из (4.24) следует, что решение задачи (4.21), (4.22) имеет вид

$$x = x_0 + \sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0)) g_i.$$

При этом $\mu = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0)) g_i \right\|^2$.

Итак, если $\|\sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0))g_i\| > R$, то система

(4.20) не имеет решения. Если же при любом γ выполняется обратное неравенство, то задача имеет решение и $e_i = x_0 + \sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0))g_i$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда множество является пересечением положительного конуса и шара $\|x - x^0\| \leq R$. В этом случае (4.20) можно переписать в виде

$$x \geq 0, \|x - x^0\| \leq R, (b_i, x) = -c_i, i \neq j.$$

Поставим в соответствие этой задаче вспомогательную задачу

$$\frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \rightarrow \min, x \geq 0, (b_i, x) = -c_i, i \neq j. \quad (4.25)$$

Пусть μ – минимальное значение целевой функции в этой задаче. Тогда, как и в рассматриваемой ранее ситуации, если $\mu > \frac{1}{2} R^2$, то система (4.20) не имеет решения, если $\mu \leq \frac{1}{2} R^2$, то решение задачи (4.25) является решением системы (4.20). Конечномерная аппроксимация задачи (4.25), соответствующая одномерной сетке, описанной в предыдущем параграфе, имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^p (x_s - x_s^0)^2 \rightarrow \min$$

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{ip}x_p + c_i = 0, i \neq j \quad (4.26)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_p \geq 0,$$

где $(x_1, \dots, x_p)$, $(x_1^0, \dots, x_p^0)$, $(b_{i1}, \dots, b_{ip})$ – конечномерные приближения векторов x, x^0 и b , соответственно. Задача (4.26) является задачей квадратичного программирования. Для ее решения существуют конечные методы.

Обсудим теперь вопрос о замене координат. Пусть $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ – одна, а $\{u_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n+1}, J(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ – другая система однородных координат и точек, присоединенные к предикату Φ . Предположим, что системы $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}, \{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ известны. Требуется найти систему $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, J(x)$. Оказывается, что эта задача имеет однозначное решение даже при отсутствии информации о системе $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$.

Положим, как и ранее

$$-\alpha(x)/\alpha_0(x), i \in I(x), \alpha(x)/\alpha_0(x), i \notin I(x) \quad (4.57)$$

Аналогичным образом определим

$$\lambda_i = \begin{cases} -u_i(x)/u_0(x), i \in J(x), \\ u_i(x)/u_0(x), i \notin J(x). \end{cases} \quad (4.28)$$

Знание системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ равносильно знанию системы $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$.

Вычисления в одну сторону проводятся по формулам (4.27), в другую – по формулам (4.14).

Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$. Имеем

$$\beta_i(x) = (b_i, x) + c_i, \lambda_i(x) = (l_i, x) + s_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} l_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} s_i = 1. \quad (4.29)$$

Поскольку каждая из однородных координат определяет один и тот же предикат Φ , то при всех $x, y \in V$ равенства $\beta_i(x) = \beta_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$, $j = 1, 2, \dots, n+1$. В терминах векторов $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$ этот факт означает, что при всех $x, y \in V$ равенства $(b_i, x-y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда $(l_i, x-y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Поскольку $\text{aff } V = L^2[0, 1]$, откуда вытекает, что

$$L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (4.30)$$

Проверим, что

$$\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (4.31)$$

Включение $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \subset L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$ очевидно.

Проверим обратное включение. Пусть $x \in L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$.

Тогда существуют такие числа $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$x = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n+1} b_{n+1}. \quad (4.32)$$

Из третьего равенства (4.29) при любом γ следует, что

$$0 = \gamma b_1 + \dots + \gamma b_{n+1}.$$

Вместе с (4.32) это дает

$$x = t_1 b_1 + \dots + t_{n+1} b_{n+1}, t_i = \gamma_i + \gamma. \quad (4.33)$$

Положим

$$\gamma = \frac{1}{n+1} (1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_{n+1}).$$

Тогда $t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} = 1$ и из (4.33) следует, что

$x \in \text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Равенство (4.31) доказано. Аналогичное равенство справедливо для системы $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$.

Поэтому из (4.31) следует, что $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = \text{aff}(\{l_k\}_{k=1}^{n+1})$. Но тогда и

$$T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = T(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (4.34)$$

Поскольку система точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ аффинно-независима, то система векторов $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^n$ является базисом в $T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^n$. Поэтому из (4.34) следует, что системы $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^n$ и $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^n$ являются базисами одного и того же подпространства. Значит, существует невырожденная матрица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

такая, что

$$l_i - l_{n+1} = \sum_{j=1}^n g_{ij} (b_j - b_{n+1}). \quad (4.36)$$

Для любого вектора x , очевидно, выполняются равенства $(l_i, x) - (l_{n+1}, x) = \lambda_i(x) - \lambda_{n+1}(x)$ и $(b_j, x) - (b_{n+1}, x) = \beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)$. Поэтому из (3.60) следует, что при всех x будет

$$\lambda_i(x) - \lambda_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^n g_{ij} (b_j(x) - \beta_{n+1}(x)). \quad (4.37)$$

Найдем матрицу (4.35). При $x = g_k$, $k=1, 2, \dots, n$ следует, что

$$\lambda_i(g_k) - \lambda_{n+1}(g_k) = \sum_{j=1}^n g_{ij} (\beta_j(g_k) - \beta_{n+1}(g_k)). \quad (4.38)$$

Но согласно следствию 4.3 $\lambda_i(g_k) = \delta_{ik}$. Поэтому (4.38) может быть следующим образом переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \dots & \beta_n(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \dots & \beta_n(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \dots & \beta_n(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица (4.35) является обратной к матрице

$$\begin{pmatrix} \beta_1(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \beta_2(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \dots & \beta_n(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \beta_2(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \dots & \beta_n(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \beta_2(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \dots & \beta_n(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Из (4.37) и равенства $\lambda_1(x) + \dots + \lambda_{n+1}(x) = 1$ следует

$$\lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \left[1 - \sum_{i,j=1}^n q_{ij} (\beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)) \right], \quad (4.40)$$

$$\lambda_i(x) = \lambda_{n+1}(x) + \sum_{j=1}^n q_{ij} (\beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.41)$$

Итак, для нахождения системы $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$ известным системам $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ следует:

- 1) найти систему $\{\beta_j(x)\}_{j=1}^{n+1}$ по формулам (4.27);
- 2) вычислить элементы матрицы (4.39);
- 3) найти матрицу (4.35) обращением матрицы (4.39);
- 4) вычислить функцию $\lambda_{n+1}(x)$ по формуле (4.40);
- 5) вычислить функции $\lambda_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$ по формуле (4.41);

$$6) \text{ положить } J(x) = \{i/\lambda_i < 0\}, \quad u_0(x) = \left(\sum_{i \in J} \lambda_i(x) \right)^{-1},$$

$$u_i(x) = u_0(x) |\lambda_i(x)|.$$

4.3. Экспериментальная процедура для нахождения линейного предиката

Предыдущие результаты указывают способ экспериментальной проверки того, что предикат является линейным и, тем самым, определяется каким-то набором (конечным или счетным) интегралов вида (3.39). Предположим, что нам известны функции $\alpha_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, являющиеся весовыми для этих интегралов. Зная эту систему, можно найти двойственную к ней систему функций $\beta_k(t)$ (в конечном случае для этого существует эффективная процедура), определить ортопроектор P равенством

$$P(x) = \sum_{k \in J} \left(\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt \right) \beta_k$$

и задать предикат Φ формулой $\Phi(x, y) = D(Px, Py)$, где D – тождественный предикат.

Таким образом, вопрос сводится к нахождению функций $\alpha_k \in L^2[0, 1]$, фигурирующих в интегралах. При этом единственно доступная из эксперимента информация заключается в значениях $\alpha_k(x)$ интеграла при тех или иных значениях $x \in L^2[0, 1]$. Всюду выше, пользуясь взаимно-однозначным каноническим соответствием между линейными функционалами и элементами L^2 , мы обозначали одним и тем же символом α_k линейный функционал и его весовую функцию в интегральном представлении. Начиная с настоящего места это становится неудобным, поэтому мы обозначим интеграл (4.3) другим символом. Кроме того, для простоты обозначений мы опустим индекс K . Итак, пусть

$$\epsilon(x) = \int_0^1 \alpha(x) x(t) dt, \quad x \in L^2[0, 1]. \quad (4.42)$$

Требуется по информации о величине $\alpha(x)$ найти функцию $\alpha(t) \in L^2[0, 1]$.

Покажем, что эта задача может быть решена с помощью функции Хевисайда (функции единичного скачка):

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_0^\tau \alpha(t) dt = u(\tau), \quad (4.43)$$

где $u(\tau) = a(x_\tau)$ – известный отклик на единичный скачок (переходная функция). Функции $\alpha(t)$ по предположению являются суммируемыми с квадратом. Отсюда вытекает, что они суммируемы. Но интеграл от суммируемой функции, как функция верхнего предела, является абсолютно непрерывной функцией. Следовательно, эта функция почти везде имеет конечную производную. Более того, эта производная почти везде равна подынтегральной функции. Таким образом, почти всюду

$$\alpha(t) = u'(t) = \frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau). \quad (4.44)$$

Заметим, что вопрос о значении функции $\alpha(t)$ во всех точках не имеет физического смысла: если две

функции $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ отличаются лишь на множестве меры нуль, то при любых $x(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)dt = \int_0^1 \bar{\alpha}(t)x(t)dt,$$

другими словами, величины $\alpha(x)$ для них совпадают. Поскольку в эксперименте для наблюдения доступны лишь эти величины, отсюда вытекает, что функции $\alpha(t)$ принципиально не могут быть восстановлены в каждой точке. Таким образом, равенство (4.44) теоретически полностью решает задачу о нахождении весовой функции.

На практике, однако, равенство (4.44) не может быть применено непосредственно, так как в экспе-

рименте измеряется не значение производной $\frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau)$,

а значение самой функции $a(x_\tau)$. Поэтому непосредственное применение формулы (4.44) на практике означает использование приближенной формулы

$$\alpha(\tau) \approx \frac{a(x_\tau + t) - a(x_\tau)}{t}, \quad (4.45)$$

где t – достаточно малое число. Но процедура численного дифференцирования является некорректной задачей – сколь угодно малые погрешности в вычислении функции могут вести к сколь угодно большим погрешностям в вычислении производной. Для того чтобы обойти это препятствие, используются различные методы решения некорректно поставленных задач.

Один из них, принадлежащий М.М. Лаврентьеву, в применении к рассматриваемой задаче состоит в замене уравнения (4.43) уравнением

$$\int_0^\tau \alpha(t)dt + \lambda \cdot \alpha(\tau) = u(\tau), \quad (4.46)$$

где λ – положительный малый параметр. Это интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $k(\tau - t)$, где

$$k(\xi) = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Оно является корректным при любом $\lambda \neq 0$. Выпишем явное решение. Дифференцируя, получаем

$$\lambda \alpha'(t) + \alpha(t) = u'(t), \quad \alpha(0) = \frac{1}{\lambda} u(0).$$

Пользуясь известной формулой для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, находим

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\tau u'(t) e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}} dt + \frac{1}{\lambda} u(0) e^{-\frac{\tau}{\lambda}}.$$

Производя интегрирование по частям в правой части, получаем

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\lambda} u(\tau) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\tau u(t) e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}} dt. \quad (4.47)$$

Эта формула уже может быть использована в практических вычислениях. Для этого следует проинтегрировать дискретную аппроксимацию функции $u(t)$ и заменить интеграл в (4.47) какой-либо формулой приближенного интегрирования (например, Симпсона или трапеций).

Приведенный метод обладает тем недостатком, что не указывает способ подбора параметра λ . Приведем другой метод, находящийся в кругу тех же идей, но снабженный эффективной процедурой нахождения регуляризующего параметра. Речь идет об обобщенном методе невязки. Рассматривается некорректное уравнение

$$A\alpha = u, \quad (4.48)$$

где A – линейный инъективный оператор в $L^2[0, 1]$, обратный к которому не является ограниченным. Правая часть уравнения известна приближенно, т. е. известна некоторая функция u_ε такая, что

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon, \quad (4.49)$$

где ε – известное положительное число. Метод состоит в решении вспомогательной задачи

$$\|\alpha\| \rightarrow \inf, \quad \|A\alpha - u_\varepsilon\| = 2\varepsilon. \quad (4.50)$$

Эта задача имеет единственное решение α_ε , причем, если уравнение (4.48) имеет решение, то α_ε стремится к какому-либо решению (4.48) при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т. е., метод является регуляризующим по А.И. Тихонову). В нашем случае оператор A имеет вид

$$[0,1](t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau. \quad (4.51)$$

Найдем сопряженный вектор A^* . Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$(A\alpha, \beta) = \int_0^1 \left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \beta(t) dt = \int_0^1 \left(\int_0^t \beta(t) dt \right) \alpha(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$[A^*\beta](\xi) = \int_\xi^1 \beta(t) dt. \quad (4.52)$$

Правило Лагранжа сводит экстремальную задачу (4.50) к системе уравнений относительно α и λ (λ – число):

$$\alpha + \lambda A^*(A\alpha - u_\varepsilon) = 0. \quad (4.53)$$

Используя (4.51) и (4.52), перепишем первое из этих уравнений в виде

$$\alpha(\xi) + \lambda \int_\xi^1 \int_0^t \alpha(\tau) d\tau = \lambda \int_\xi^1 u_\varepsilon(t) dt. \quad (4.54)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha''(\xi) - \lambda \alpha(\xi) &= -\lambda u_\varepsilon'(\xi), \\ \alpha(1) &= 0, \quad \alpha'(0) = -\lambda u_\varepsilon(0). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Нетрудно проверить, что общее решение дифференциального уравнения (4.55) имеет вид

$$\alpha(t) = c_1 ch\sqrt{\lambda}t + c_2 sh\sqrt{\lambda}t - \lambda \int_0^t u_\varepsilon(\tau) ch(\sqrt{\lambda}(t-\tau)) d\tau$$

Тогда частным решением, удовлетворяющим краевым значениям (4.55) будет

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \lambda \int_0^1 u_\varepsilon(\tau) ch(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau \frac{ch\sqrt{\lambda}t}{ch\sqrt{\lambda}} - \\ &- \lambda \int_0^t u_\varepsilon(\tau) ch(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Второе уравнение (4.50) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_0^1 \left[\int_0^\xi \alpha(t) dt - u_\varepsilon(\xi) \right]^2 d\xi = 4\varepsilon^2.$$

Подставляя сюда (4.56), получаем

$$\int_0^1 (\sqrt{\lambda} \int_0^1 u_\varepsilon(\tau) ch(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau \frac{sh\sqrt{\lambda}\xi}{ch\sqrt{\lambda}} - \lambda \int_0^\xi dt \int_0^t u_\varepsilon(\tau) ch(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau - u_\varepsilon(\xi))^2 d\xi = 4\varepsilon^2.$$

Обозначим левую часть этого равенства через $f(\lambda)$. По экспериментально найденному приближению $u_\varepsilon(t)$ для функции $u(t)$ можно, пользуясь приближенными формулами интегрирования, вычислить значения $f(\lambda)$ при любом λ . Это позволяет, используя метод одномерного поиска, приближенно найти число λ , удовлетворяющее условию $f(\lambda) = 4\varepsilon^2$. Подставляя найденное значение λ в (4.56), получаем требуемое приближение для $\alpha(t)$.

Укажем два метода, которые могут быть применены для решения некорректной задачи (4.44). Один из них предназначен специально для уравнений типа свертки, другим является общий прокс-алгоритм.

Рассмотрим теперь пробные функции вида

$$x_{\tau,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & t \in [\tau, \tau+h], \\ 0, & t \notin [\tau, \tau+h]. \end{cases} \quad (4.57)$$

Имеем из (4.42)

$$\frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} \alpha(t) dt = u(\tau), \quad (4.58)$$

где $u(\tau) = a(x_{\tau,h})$. В силу теоремы о точках Лебега суммируемых функций для почти всех точек τ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} \alpha(t) dt = \alpha(\tau). \quad (4.59)$$

Сравнивая (4.58) и (4.59), получаем

$$\alpha(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} a(x_{\tau,h}). \quad (4.60)$$

Формула (4.60) теоретически решает задачу о нахождении целевой функции. Ее использование на практике означает применение при достаточно малых h приближенной формы

$$\alpha(\tau) \approx a(x_{\tau,h}). \quad (4.61)$$

Отметим, что с математической точки зрения формулы (4.45) и (4.61) совпадают, однако экспериментальные процедуры, предусматривающие их использование, резко отличаются. В первом случае используются сигналы с равномерно распределенной плотностью, во втором – с плотностью, сосредоточенной в окрестности фиксированной точки (т. е. почти монохроматические). Заметим еще, что конкретный вид функции с плотностью, сосредоточенной в окрестности точки, не является существенным. Взамен функции (4.57) можно использовать любую неотрицательную функцию $d\tau$, носитель которой находится в малой окрестности точки τ , а площадь соответствующей криволинейной трапеции равна 1. Любая такая функция является приближенной реализацией импульсной функции (δ -функции Дирака), для которой почти всюду

$$\alpha(\tau) = a(\delta_\tau). \quad (4.62)$$

Последнее равенство вытекает из формулы

$$\int_0^1 \alpha(t) \delta(t-\tau) dt = \alpha(\tau). \quad (4.63)$$

Формула (4.62) является обобщением (4.60). Для любой приближенной реализации d_τ функции Дирака имеет место приближенная формула

$$\alpha(\tau) = a(d_\tau), \quad (4.64)$$

которая обобщает (4.91)

С формулами (4.60) и (4.62) дело обстоит так же, как и с (4.44) – их непосредственное применение ведет к решению некорректно поставленных задач – интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. В случае (4.62) ядром уравнения является δ -функция, в случае (4.60) ядро имеет вид

$$k(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-h, 0], \\ 0, & \xi \notin [-h, 0]. \end{cases}$$

Отметим, что к таким же вопросам приводят задачи определения: 1) формы радиоимпульса, излученного источником, по результатам записи его на больших расстояниях от источника; 2) формы электрического импульса на входе кабеля по результатам записи на выходе; 3) переходных функций в линейных преобразователях автоматического регулирования и многие другие. Для решения этих задач могут быть применены те же методы, что и описанные выше в применении к задаче (4.44). Укажем еще один способ нахождения функции $\alpha(t)$. Будем пользоваться срезками любой непрерывной положительной на $[0, 1]$ функции $\varphi(t)$. Положим

$$\varphi_\tau(t) = \varphi(t) x_\tau(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда (4.42) дает

$$a(\varphi_\tau) = \int_0^\tau \varphi(t) \alpha(t) dt.$$

Как и в случае равенства (4.43), имеем почти всюду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a(\varphi_\tau) = \varphi(\tau) \alpha(\tau), \quad \text{откуда} \quad \alpha(\tau) = \frac{1}{\varphi(\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} a(\varphi_\tau). \quad (4.65)$$

При использовании формулы (4.65) возникают те же вопросы, связанные с некорректностью, что и при использовании (4.44), (4.60) или (4.62).

Литература. 1. Походенко В.А., Тарасова Т.Г., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. Теория цветового зрения. I. Радиоэлектроника и информатика. 1998. №1. С. 106–117. 2. Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. Теория цветового зрения. II. Радиоэлектроника и информатика. 1998. №4. С. 110–122. 3. Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю. Теория цветового зрения. III. Радиоэлектроника и информатика. 1998. №4. С. 123–132.

Поступила в редколлегия 12.01.99

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Левыкин В.М.

Бондаренко Михаил Федорович, д-р техн. наук, профессор, академик АН ВШ, ректор ХТУРЭ. Научные интересы: информатика. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина 14, тел. 43–30–53.

Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов интеллекта человека. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина 14, тел. 40–94–46.