УДК 62.506.2

*В. А. ЛОВИЦКИЙ, канд. техн. наук, М. С. БАРЕНБОЙМ*

## О СТРАТЕГИИ ПОИСКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ В ИСКУССТВЕННЫХ СИСТЕМАХ. СООБЩЕНИЕ 1

В последние годы интенсивно развивается подход, основанный на использовании узкого исчисления предикатов при построении естественноязыковых искусственных систем. В настоящей работе на основании теорем о чистоте и о поглощении, полученных Дж. Робинсоном [1], предлагаются новые приемы автоматизированного поиска решения задач из исчисления предикатов 1-го порядка либо доказательство того факта, что соответствующее данной задаче множество предложений непротиворечиво (т. е. невозможность на основании данной системы аксиом получить решение задачи).

Как показывает наш опыт, приведенные методы во многих случаях быстрее достигают цели, чем предлагаемые ранее [2, 3]. Иногда полученные методы позволяют утверждать, что найденное решение — самое короткое из всех решений рассматриваемой задачи.

В статье в основном использованы обозначения, приведенные в работе [2]: символы $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, кванторы всеобщности и существования соответственно; $n$-местные предикаты ($n \geqslant 0$) обозначим заглавными буквами латинского алфавита: $A$, $B$, $C$, $D$, ...; переменные — символами $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, $u_1$, $v_1$, $w_1$, ...; $n$-местные функции ($n \geqslant 0$) — $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $k$, $a_1$, $b_1$, ...

Напомним [2], что литералом называется атомарная формула либо ее отрицание. Предложение — это дизъюнкция литералов. Предложение, состоящее из пустого множества литералов обозначается через nil.

Пусть даны два предложения

$$C_1 = A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \vee B(x_1, \ldots, x_n);$$

$$C_2 = \sim B(y_1, \ldots, y_m) \vee C(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

где $B$ и $\sim B$ — литералы, зависящие соответственно от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$; $A$, $C$ — дизъюнкции остальных литералов, составляющих данное предложение. Пусть существуют такие значения переменных $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, $y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$, при которых $B(a_1, \ldots, a_n)$ совпадает с $B(b_1, \ldots, b_m)$. Тогда предложение $C_3 = A(a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots, u_m) \vee C(v_1, \ldots, v_n, b_1, \ldots, b_m)$ называется резольвентой. В таком случае будем говорить, что $B(x_1, \ldots, x_n)$ и $\sim B(y_1, \ldots, y_m)$ образуют контранарную пару (контрапункт). Процесс нахождения значения таких переменных, при которых соответствующие литералы совпадают, осуществляется с помощью алгоритма унификации [1, 2].

*Постановка* задачи: пусть дано выражение $A \vdash B$ **(1)**, где $A$, $B$ формулы из исчисления предикатов 1-го порядка. Требуется либо доказать (1) либо определить те значения переменных, при которых (1) имеет место.

Выражению (1) соответствует некоторое множество предложений $S$. Пусть $R(S)$ — объединение $S$ и множества всех резольвент, которые можно получить из $S$ $R^2(S) = R(R(S))$ и т. д. (1) имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $n$ $R^n(S)$ содержит пустое предложение [1].

Если (1) не наблюдается, то будем говорить, что $S$ выполнимо.

Отсюда следует, что нашей задачей является нахождение тех предложений, с помощью которых мы можем получить nil.

Верны следующие теоремы.

**Теорема о чистоте** [1]. *Если $S$ — множество предложений, а $C$ — предложение из $S$, в $C$ содержится литерал $L$, который ни с каким литералом из $S \setminus \{C\}$ не может образовать контрапункт, то $S$ выполнимо тогда и только тогда, когда выполнимо $S \setminus \{C\}$.*

В таком случае говорят, что литерал $L$ чист в $S$.

Будем говорить, что предложение $D$ поглощается предложением $C$, если при некоторых значениях переменных, содержащихся в $C$, $D$ совпадает с $C \vee C_1$, где $C_1$ — дизъюнкция литералов.

**Теорема о поглощении** [1]. *Если $S$ — конечное множество предложений, а $D$ — предложение из $S$, которое поглощается некоторым предложением из $S \setminus \{D\}$, то $S$ выполнимо тогда и только тогда, когда выполнимо $S \setminus \{D\}$.*

На основании изложенного сформулируем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если из каждого предложения из $S$ можно выбрать литерал таким образом, что в полученном множестве литералов никакие два из них не могут образовать контрапункт, то $S$ выполнимо.*

Доказательство: пусть $S = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$; $L_1, \ldots, L_m$ — соответствующие литералы. Если $S$ невыполнимо, то невыполнимо и множество предложений $S \cup \{L_1, \ldots, L_m\}$. На основании теоремы о поглощении невыполнимо множество $S_1 = \{L_1, \ldots, L_m\}$. С другой стороны, из теоремы о чистоте следует, что $S_1$ выполнимо, т. е. мы пришли к противоречию. Следовательно, $S$ выполнимо.

Пусть $S$ — невыполнимое множество предложений; $S^{(2)}$ — множество предложений, которые фактически использовались при получении nil; $S^{(3)}$ — множество тех и только тех предложений из $S^{(2)}$, которые необходимо использовать для получения nil (назовем такое множество предложений доказательством невы-

полнимости $S$); $S^{(1)}$ — множество предложений, которое содер-
жится в любом доказательстве невыполнимости $S$.

По определению $S^{(1)} \subset S^{(3)} \subset S^{(2)} \subset R^n(S)$. Перенумеруем п
порядку все литералы предложений из $S$. Поставим в соотве
ствие каждому литералу множество номеров следующим образо
каждому литералу из $S$ соответствует множество, состоящ
из его номера. В полученных резольвентах каждому литера
соответствует то же множество, что и в предложении, с п
мощью которого образовалась данная резольвента. Если предл
жение вида $L_1 \vee L_2 \vee C$ заменяется на предложение вида $L \vee C$,
причем литералам $L_1$ и $L_2$ соответствуют множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$,
то литералу $L$ соответствует множество $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$.

$L_{\mathfrak{M}}$ будем обозначать литерал $L$, которому соответствуе
множество номеров $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ резольвенту, полученную с пом
щью предложений, где соответствующие множествам $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ лит
ралы используются при образовании контрапункта.

На основании изложенного выше получены следующие сво
ства.

**Свойство 1.** Пусть $S_1$ — невыполнимое множество предл
жений, и из каждого предложения из $S_1$ выбрали произвольн
по одному литералу $L_{\mathfrak{M}_1}; L_{\mathfrak{M}_2}, \ldots, L_{\mathfrak{M}_S}$. Тогда для некоторы
$L_{\mathfrak{M}i}$ и $L_{\mathfrak{M}j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant S)$ произвольное доказательство $S^{(3)}$ со
держит одну из резольвент, где для образования соответствую
щего контрапункта используются литералы $L_{\mathfrak{M}}$ и $L_{\mathfrak{N}}$, для ко
торых $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{N}$ вместе с предложениями, ее образую
щими.

Действительно, из определения множества номеров $\mathfrak{M}$, соо
ветствующего литералу $L$, и из метода математической индукци
следует, что если $L_{\mathfrak{M}}$ входит в предложение, с помощью кото
рого образуется резольвента $R$, и если $L_{\mathfrak{M}}$ не участвует
образовании контрапункта для получения $R$, то $R$ содерж
литерал $L_{\bar{\mathfrak{M}}}$, где $\mathfrak{M} \subset \bar{\mathfrak{M}}$. Но тогда, если утверждение свойст
1 не выполняется, получаемые в доказательстве невыполнимост
$S_1$, резольвенты всегда будут содержать литералы $L_{\mathfrak{M}}$ или $L_{\mathfrak{N}}$
где $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{N}$. То есть мы не получим nil, что прот
воречит условию.

**Свойство 2.** Пусть для некоторого доказательства $S^{(3)}$ $C_1 =$
$= L_{\mathfrak{M}_1} \vee \ldots \vee L_{\mathfrak{M}k} \in S_1 \subset S^{(3)}$, где $S_1$ — невыполнимое множ
ство предложений. Тогда для каждого $L_{\mathfrak{M}i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ сущес
вует такое предложение $C_2 \in S_1$, содержащее литерал $L_{\mathfrak{N}j}$, что
$S^{(3)}$ содержит резольвенту $R$, для которой литералы $L_{\mathfrak{M}}$ и $L$

где $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$ используются для образования соответствующего контрапункта.

Доказательство свойства 2 аналогично доказательству свойства 1.

**Свойство 3.** Пусть имеет место (1) и пусть $A$ соответствует множество предложений $S_1$, а $B$ — множество предложений $S_2$. Тогда, если $A$ непротиворечиво, произвольное доказательство невыполнимости $S_1 \cup S_2$ содержит одно из предложений $C \in S_2$.

Доказательство очевидно.

**Свойство 4.** Пусть для некоторого множества предложений $S_1$, $C = C_1 \vee C_2 \in S_1$ и предложение $C_1$, поглощает предложение $C_2$. При этом $S_1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнимо $S_1 \setminus \{C\} \cup \{C_2\}$.

Например, предложение $P(x_1, c) \vee P(x_2, c) \vee P(x_2, x_3)$ можно заменить на предложение $P(x_2, c) \vee P(x_2, x_3)$.

**Доказательство свойства 4.** Пусть $S_1$ невыполнимо. Тогда невыполнимо $S_1 \cup \{C_2\}$. Так как $C_2$ поглощает $C$, то $S_1 \cup \{C_2\} \setminus \{C\}$ также невыполнимо. Обратно, пусть невыполнимо $S_1 \setminus \{C\} \cup \{C_2\}$. Тогда $S_1 \cup \{C_2\}$ невыполнимо. Так как $C$ поглощает $C_2$, то $S_1$ также невыполнимо. Таким образом свойство 4 доказано.

Пусть $S^{(3)}$ — произвольное доказательство невыполнимости $S = \{C_1, \ldots, C_k\}$. Если в этом доказательстве некоторое предложение $C$ участвует $n$ раз в образовании резольвент, то добавим в $S^{(3)}$ еще $(n-1)$ предложений $C$. Образуем множество $S_1^{(3)}$ таким образом, чтобы в нем каждое предложение участвовало при образовании резольвент только один раз. Для такого множества будет справедливо.

**Свойство 5.** Если $S_1^{(3)} = \{C_1, \ldots, C_k, (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}), \ldots, (\mathfrak{M}_l, \mathfrak{N}_l)\}$ такое доказательство невыполнимости $S$, в котором каждое предложение участвует в образовании резольвент не более одного раза, то и множество $S_1^{(3)} = \{C_1, \ldots, C_k, (\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{N}'_1), \ldots, (\mathfrak{M}'_l, \mathfrak{N}'_l)\}$, полученное в результате перестановок в $S_1^{(3)}$ пар $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ также будет доказательством невыполнимости $S$.

Такие доказательства будем считать эквивалентными.

*Замечание 1.* При перестановке следует учитывать, чтобы каждой паре $(\mathfrak{M}'_i, \mathfrak{N}'_i)$ предшествовало появление в $S_1^{(3)}$ литералов, соответствующих $\mathfrak{M}'_i$, $\mathfrak{N}'_i$.

*Замечание 2.* Паре $(\mathfrak{M}'_i, \mathfrak{N}'_i)$ соответствуют последние из полученных в $S_1^{(3)}$ литералов $L_{\mathfrak{M}'_i}$ и $L_{\mathfrak{N}'_i}$.

Доказательство свойства 5 следует из теоремы об унификации [1].

Заметим, что из свойств 1, 2, 3, 5 следует полнота приводимых в [2 — 3] стратегий поддерживающего множества, опорного множества и $P_1$-опровержения. Приведем теперь алгоритм, позволяющий выбрать из данного множества предложений $S$

литералы, удовлетворяющие условию теоремы 1, либо сделат вывод о невозможности такой выборки (см. блок А).

**Блок** А: 1. Присваиваем каждому предложению номер $N=m$, гд $m$ число предложений в $S$. Полагаем $M(1)=m$.

2. Полагаем $n=1$, $\mathrm{ind}=0$.

3. Если $n>m$, перейти к п. 20.

4. Среди предложений с номером $N>n$ выбираем предложе ния с наименьшим числом литералов.

5. Если выбранных в п. 4 в предложений больше одного, вы бираем предложение, содержащее литерал $L$, для которого имеетс наибольшее количество предложений с номером $N>n$, содержа щих литералы, поглощаемые $L$.

6. Если полученных в п. 5 предложений больше одного выбираем предложение, содержащее литерал $L$, для которого предложениях с номером $N>n$ содержится наибольшее коли чество литералов, способных с $L$ образовать контранарную пар

7. Если полученных в п. 6 предложений не меньше одного выбираем любое из них и присваиваем ему номер $N=n$.

8. Если в предложении с $N=n$ не все литералы зачеркнуты перейти к п. 10.

9. Полагаем $n=n-1$. Если $n>0$, перейти к п. 19, инач перейти к п. 21.

10. Если $\mathrm{ind}=0$, перейти к п. 11. Восстанавливаем до пер воначального состояния все предложения с номером $N>n$. По лагаем $m=M(n)$, $\mathrm{ind}=0$.

11. Выбираем в предложении с $N=n$ среди незачеркнуты литералов литерал $L$, удовлетворяющий условию п. 5.

12. Если выбранных в п. 11 литералов больше одного, вы бираем среди них литерал $L$, для которого удовлетворяетс условие п. 6.

13. Если выбранных в п. 12 литералов не меньше одного выбираем любой из них.

14. Если среди предложений с $N>n$ нет литералов, погло щаемых $L$, положить $M(n+1)=m$. Перейти к п. 16.

15. Из предложения, содержащего поглощаемый литерал, вы бираем этот литерал. Вычеркиваем данное предложение и пола гаем $m=m-1$. Перейти к п. 14.

16. Если $n=m$, перейти к п. 20.

17. Вычеркиваем из незачеркнутых предложений с номеро $N>n$ литералы, которые могут образовать контрапункт с лите ралом $L$.

18. Если нет предложения, у которого зачеркнуты все лите ралы, полагаем $n=n+1$; перейти к п. 3.

18*а*. Положить $\mathrm{ind}=1$.

19. Вычеркиваем из предложения с номером $n$ литерал $L$; перейти к п. 8.

20. $m$-ка выбрана. Выйти из блока.

21. Искомую выборку литералов выбрать нельзя. Выйти из блока.

Покажем теперь, как из каждого предложения из $S$ можно выбрать по литералу таким образом, чтобы из них можно было образовать $n$-ку контрапунктов (см. блок В).

**Блок В:** 1. Выбираем из каждого предложения из $S$ по литералу, с помощью которых можно образовать нерассмотренную ранее $n$-ку контрапунктов (выборку производим снизу вверх). Если выборку сделать невозможно, перейти к п. 7.

2. Вычеркиваем из $S$ предложения, содержащие выбранные литералы.

3. Вычеркиваем из $S$ все литералы, способные с выбранными образовать контрапункты.

4. Выполнить блок А.

5. Если из оставшегося множества $S$ нельзя выбрать литералы, удовлетворяющие теореме 1, восстановить все предложения до первоначального состояния и перейти к п. 1.

6. Искомые литералы выбраны. Выйти из блока.

7. Для данного $n$ искомая выборка невозможна. Выйти из блока.

**Список литературы:** 1. Robinson J. A., A Machine — Oriented Logic Based on the Resolution Principle.— J.AC M, **12**, № 1, p. 23—41. 2. *Нильсон Н.* Искусственный интеллект.— М.: Мир, 1973.—270 с. 3. *Слейгл Дж.* Искусственный интеллект.— М.: Мир, 1973.—319 с.

*Поступила 29 февраля 1980 г.*

УДК 62.506.2

*В. А. ЛОВИЦКИЙ*, канд. техн. наук,
*М. С. БАРЕНБОЙМ*

## О СТРАТЕГИИ ПОИСКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ В ИСКУССТВЕННЫХ СИСТЕМАХ. СООБЩЕНИЕ 2

Рассмотрим алгоритм, реализующий предлагаемую стратегию поиска доказательства теорем.

В последующем изложении литералы будут нумероваться. Через $L_i$ обозначим литерал с номером $i$, а через $(i, j)$ — резольвенту, для которой при образовании соответствующего контрапункта использовались литералы $L_i$, $L_j$.

В приводимом ниже алгоритме поиска решения задач вида (1) на основании свойств 1, 2 [1], а также формул для вероятности независимых событий, приближенно определяются вероятности резольвирования соответствующих пар литералов. Резольвента образуется с помощью тех пар, которые (за исключением некоторых случаев) в данный момент имеют наибольшую вероятность.