УДК 621.391

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ПО КРИТЕРИЮ СКО АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С УЧЕТОМ ОШИБОК В ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

С.А. ДЕМИДОВ, А.М. РЫБАЛКО

Проведен анализ и синтез оптимального выходного сигнала адаптивной антенной решетки с учетом возмущения вектора весовых коэффициентов (ВВК). Учет наличия ошибок ВВК в постановке задачи синтеза уменьшает оптимальное значение среднеквадратической ошибки (СКО) на величину, пропорциональную квадрату дисперсии ошибок.

Analysis and synthesis of optimum output signal of an adaptive array in view of disturbance of weighting factor vector (WFV) is performed. Taking WFV errors into account in the definition of a synthesis problem reduces root-mean-square error (RMSE) optimum value by a magnitude proportional to the error dispersion square.

Повышенный интерес к адаптивным антенным решеткам (ААР) обусловлен прежде всего тем, что системы с ААР позволяют повысить эффективность приема полезных сигналов при наличии помех, поступающих как по боковым, так и по главному лепестку диаграммы направленности, в радио-, гидролокации, сейсмологии, связи и ряде других областей. Основная причина этого интереса к ААР заключается в способности таких систем без наличия априорной информации о помеховой обстановке автоматически обнаружить присутствие источников помех и подавить их сигналы на выходе антенны, улучшая тем самым качество приема полезного сигнала. Сущность адаптации антенной решетки в зависимости от критерия эффективности антенны и сигнально-помеховой обстановки заключается в выборе вектора весовых коэффициентов (ВВК), с помощью которого управляется диаграммообразующая схема [1] для получения максимальной эффективности.

При наличии априорной информации об опорном сигнале критерием эффективности адаптивной решетки, работающей в узкополосном режиме, выбирается минимум средней квадратической ошибки (СКО) [1, 2].

В реальной линии передачи сигнала существуют возмущения характеристик антенной решетки, вызванные механизмом распространения электромагнитных волн в среде, рассогласованием фактического угла прихода сигнала с предполагаемым, отличием реального фронта от плоского, ошибками метода обработки сигнала процессором, его реализации и т. д. [3, 4]. Следует указать, что априорная информация об опорном сигнале также носит приближенный характер [2]. Исследование влияния указанных ошибок на характеристики антенн достаточно полно проведено в статистической теории антенн [5].

При реализации существующих алгоритмов пространственной фильтрации [6] вследствие ошибок обработки сигнала может возникнуть расхождение между реальными и проектируемыми характеристиками антенны. Поэтому возникает целесообразность в разработке более адекватной математической модели оптимальной обработки сигнала ААР, учитывающей наличие возмущений компонент ВВК, которая позволила бы провести анализ влияния возмущений на выходной сигнал.*

Рассмотрим адаптивную решетку, состоящую из N элементов, на вход которой поступает узкополосный сигнал, представленный в виде N-мерного комплексного вектора $\vec{x}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t)\right)$. Сигнал $y(t)$ на выходе ААР можно представить в виде скалярного произведения в N-мерном комплексном пространстве

$$y(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)w_i^*=\left(\vec{x}(t),\vec{w}\right),$$

где $\vec{w}=\left(w_1,w_2,\dots,w_N\right)=\vec{w}_0+\Delta\vec{w}$ – вектор весовых коэффициентов, состоящий из оптимального ВВК по критерию минимума СКО $\vec{w}_0$ и аддитивной составляющей вектора ошибок весовых коэффициентов $\Delta\vec{w}$; $*$ – знак комплексного сопряжения.

Пусть $d(t)$ – опорный сигнал, тогда модуль квадрата сигнальной ошибки равен

$$\left|\Delta(t)\right|^2=\left|d(t)-y(t)\right|^2= \\ =d^2(t)-2\operatorname{Re}\left(d(t)\vec{x}(t),\vec{w}\right)+\left|\left(\vec{x}(t),\vec{w}\right)\right|^2. \quad (1)$$

Будем считать, что сигнальный вектор $\vec{x}(t)$ допускает представление

* Как было указано в частной беседе В.Р. Хачатуровым, одним из примеров источника возмущения ВВК могут служить ошибки квантования АЦП при малых объемах выборки. При проектировании многоканальных ААР также целесообразно учитывать наличие на выходе антенны нормально распределенной суммарной ошибки квантования.

$$\vec{x}(t)=\vec{x}^{c}(t)+\vec{x}^{ш}(t),$$

где $\vec{x}^{c}(t)$ – полезный вектор, а $\vec{x}^{ш}(t)=\vec{x}^{n}(t)+\vec{x}_{ш}(t)$ – шумовой вектор, состоящий из вектора помех $\vec{x}^{n}(t)$ и вектора собственных шумов $\vec{x}_{ш}(t)$.

Путем усреднения случайных процессов в правой части соотношения (1) имеем

$$\begin{aligned}\overline{|\Delta(t)|^2} &= \overline{d^2(t)}-2\operatorname{Re}\left(\vec{r}_{xd}(t),\vec{w}_0\right)-2\operatorname{Re}\left(\vec{r}_{xd}(t),\Delta\vec{w}\right)+\\ &+2\operatorname{Re}\left(R_{xx}\vec{w}_0,\Delta\vec{w}\right)+\\ &+\left(R_{xx}\vec{w}_0,\vec{w}_0\right)+\left(R_{xx}\Delta\vec{w},\Delta\vec{w}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $R_{xx}=\overline{\vec{x}^{T}(t)\vec{x}(t)^{*}}$ – ковариационная матрица входных сигналов;

$\vec{r}_{xd}(t)=\left(\overline{d(t)x_1(t)},\overline{d(t)x_2(t)},...,\overline{d(t)x_N(t)}\right)$ – усредненный нормированный вектор входного сигнала; T – знак транспонирования. Так как вектор ошибок $\Delta\vec{w}$ центрирован, то из соотношения (2), взяв математическое ожидание и воспользовавшись значением для оптимального ВВК $\vec{w}_0=R_{xx}^{-1}\vec{r}_{xd}$ [2], имеем следующее значение минимального СКО:

$$M\left[\overline{|\Delta(t)|^2}\right]_{мин}=\overline{d^2(t)}-\left(\vec{r}_{xd},R_{xx}^{-1}\vec{r}_{xd}\right)+P_{доп}, \tag{3}$$

где $P_{доп}=M\left[\left(R_{xx}\Delta\vec{w},\Delta\vec{w}\right)\right]$ – дополнительная мощность на выходе антенны, вызванная наличием возмущений компонент оптимального ВВК. Можно провести ее оценку, воспользовавшись спектральным свойством положительно определенной эрмитовой матрицы R_{xx} [7]:

$$R_{xx}\vec{w}_i=\lambda_i\vec{w}_i\quad\left(\lambda_i>0, i=\overline{1,N}\right).$$

Исходя из цепочки неравенств

$$\lambda_{мин}\|\Delta\vec{w}\|^2\le\left(R_{xx}\Delta\vec{w},\Delta\vec{w}\right)\le\lambda_{макс}\|\Delta\vec{w}\|^2,$$

имеем

$$\lambda_{мин}M\left[\|\Delta\vec{w}\|^2\right]\le P_{доп}\le\lambda_{макс}M\left[\|\Delta\vec{w}\|^2\right].$$

Здесь $\lambda_{мин},\lambda_{макс}=мин,макс\{\lambda_i\}_i^N$, а

$\|\Delta\vec{w}\|^2=\left(\Delta\vec{w},\Delta\vec{w}\right)=\sum_{i=1}^{N}|\Delta w_i|^2$ – квадрат нормы вектора ошибок.

В модели ошибок будем полагать, что дисперсии вещественной $\left(M[\operatorname{Re}\Delta w_i]^2, i=\overline{1,N}\right)$, а также дисперсии мнимой части компонент ошибок $\left(M[\operatorname{Im}\Delta w_i]^2, i=\overline{1,N}\right)$ одинаковы между собой и соответственно равны σ_1^2 и σ_2^2. Тогда

$$M\left[\|\Delta\vec{w}\|^2\right]=N\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$$

и дополнительную мощность можно приближенно оценить

$$P_{доп}\approx\frac{\lambda_{мин}+\lambda_{макс}}{2}N\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right), \tag{4}$$

где минимальное и максимальное собственные значения матрицы R_{xx} легко находятся из предельных соотношений:

$$\lambda_{мин}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(R_{xx}^{(c)}\vec{w}^{(n)},\vec{w}^{(n)}\right)}{\left(\vec{w}^{(n)},\vec{w}^{(n)}\right)}+c,$$

$$\lambda_{макс}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(R_{xx}\vec{w}^{(n)},\vec{w}^{(n)}\right)}{\left(\vec{w}^{(n)},\vec{w}^{(n)}\right)}.$$

Здесь $R_{xx}^{(c)}=R_{xx}-cE$, где E – единичная матрица, а $c\gg1$ – достаточно большое положительное число; $\vec{w}^{(n)}=R_{xx}^{(c)}\vec{w}^{(n-1)}$ – в первом случае и $\vec{w}^{(n)}=R_{xx}\vec{w}^{(n-1)}$ – во втором случае, а в качестве начального приближения можно взять вектор $\vec{w}^{(0)}=(1,1,...,1)$. Для нахождения $\lambda_{мин}$ и $\lambda_{макс}$ с достаточной точностью обычно требуется несколько итераций.

Дополнительную мощность $P_{доп}$, приводящую к размыванию выходного сигнала, можно уменьшить, если в постановке задачи нахождения минимального значения СКО учитывать наличие возмущений компонент ВВК. С этой целью положим, что $\Delta w_j=\varepsilon_j w_j$ $\left(j=\overline{1,N}\right)$. Относительно ошибок $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_N$ будем полагать, что они попарно независимы и

$$M\left[\varepsilon_j\varepsilon_k^{*}\right]=\begin{cases}0, & \text{если } j\ne k,\\ \sigma^2(\varepsilon), & \text{если } j=k.\end{cases}$$

Тогда из равенства (3) следует соотношение

$$M\left[\overline{|\Delta(t)|^2}\right]=\overline{d^2(t)}-2\operatorname{Re}\left(\vec{r}_{xd}(t),\vec{w}\right)+\left(\left(R_{xx}+\sigma_r^2E\right)\vec{w},\vec{w}\right), \tag{5}$$

где $\sigma_r^2=r\cdot\sigma^2(\varepsilon)$, а $r=r_{xx}^{(i,i)}$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$ – диагональные элементы ковариационной матрицы входных сигналов. Минимизируя правую часть равенства (5), получаем, что оптимальный ВВК $\vec{w}_0$ имеет вид

$$\vec{w}_0=\left(R_{xx}+\sigma_r^2E\right)^{-1}\vec{r}_{xd},$$

а минимальное значение математического ожидания СКО определяется выражением

$$M\left[\overline{|\Delta(t)|^2}\right]_{мин}=\overline{d^2(t)}-\left(\vec{r}_{xd}\left(R_{xx}+\sigma_r^2E\right)^{-1}\vec{r}_{xd}\right). \tag{6}$$

Если переписать равенство (6) в виде

$$\begin{aligned}M\left[\overline{|\Delta(t)|^2}\right]&=\overline{d^2(t)}-2\operatorname{Re}\left(\vec{r}_{xd},\vec{w}\right)+\left(R_{xx}\vec{w},\vec{w}\right)+\\ &+\sigma_r^2\left(\vec{w},\vec{w}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

то из него следует, что мощность $P_{доп}$, вызванная неточностью задания оптимального ВВК, равна

$$P_{доп} = \sigma_r^2 \left\| \vec{w}_0 \right\|^2 . \qquad (8)$$

Полученная формула позволяет провести качественный сравнительный анализ мощностей для оптимальных токов, найденных без учета наличия ошибок в ВВК и с их учетом. Введем в первом случае для дополнительной мощности обозначение $P_{доп}^{(1)}$, а во втором — $P_{доп}^{(2)}$. Для проведения анализа разложим усредненный вектор входного сигнала $\vec{r}_{xd}$ по собственным векторам $\vec{w}_i \left(i = \overline{1,N} \right)$ матрицы ковариации входных сигналов:

$$\vec{r}_{xd} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{w}_i \quad \left(\alpha_i = \left(\vec{r}_{xd}, \vec{w}_i \right) \right).$$

Тогда оптимальные векторы весовых коэффициентов, найденные для первого и второго случаев, в выбранном базисе имеют вид

$$\vec{w}_0^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \vec{w}_i , \quad \vec{w}_0^{(2)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\lambda_i + \sigma_r^2} \vec{w}_i .$$

Подставив полученные выражения для оптимальных ВВК в (8), имеем в силу ортонормированности базиса

$$P_{доп}^{(1)} = \sigma_r^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\lambda_i^2} ; \quad P_{доп}^{(2)} = \sigma_r^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\left(\lambda_i + \sigma_r^2\right)^2} .$$

Так как с точностью до второго порядка относительно σ_r^2

$$\frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\left(\lambda_i + \sigma_r^2\right)^2} \approx \frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\lambda_i^2} - 2\sigma_r^2 \frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\lambda_i^4} , 3$$

$$\lambda_i^2 + 2\lambda_i\sigma_r^2 = \lambda^2\left(1 + \frac{2\sigma_r^2}{\lambda_i}\right)$$

то

$$P_{доп}^{(1)} \approx P_{доп}^{(2)} + 2\sigma_r^4 \sum_{i=1}^{N} \frac{\left|\alpha_i\right|^2}{\lambda_i^4} .$$

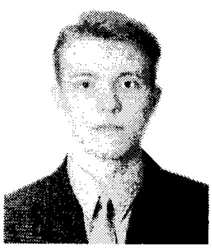
Сравнение полученных мощностей показывает, что не учет в постановке задачи минимизации СКО возмущений в весовых коэффициентах приводит к ошибке, пропорциональной квадрату дисперсии ошибок ВВК.

Выводы

В реальных условиях работы ААР вследствие наличия возмущений оптимального по критерию минимума СКО вектора весовых коэффициентов на выходе антенны появляется дополнительная мощность, пропорциональная дисперсии ошибок, приводящая к искажению сигнала. Учет наличия ошибок ВВК в постановке задачи минимизации СКО уменьшает эту мощность на величину, пропорциональную квадрату дисперсии ошибок.

Литература: 1. *Пистолькорс А.А., Литвинов О.С.* Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991. 200 с. 2. *Монзинго А.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с. 3. *Gershman A.B., Nickel U. and Bohme I.F.* Adaptive beamforming algorithms with robustness against jammer motion // IEEE Trans. Sig. Proc., 1997, vol. 45, pp. 1878–1885. 4. *Bresler Y., Reddy U.V. and Kailark T.* Optimum beamforming for coherent signal and interferences // IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Proc., 1988, vol. 36, pp. 833–843. 5. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории аненн. – М.: Сов. радио, 1970. – 384с. 6. *Гершман А.Б.* Робастные адаптивные антенные решетки // Антенны. 2000. Вып. 2(45). С. 5–14. 7. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973. 631 с.

Поступила в редколлегию 03.02.2003 г.



Демидов Сергей Александрович, аспирант, ХНУРЭ. Область научных интересов: анализ и синтез антенных решеток.

Рыбалко Александр Митрофанович, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. ОРТ, ХНУРЭ. Область научных интересов: анализ и синтез антенных решеток.