

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу двобічних наближень на основі
використання квазіфункції Гріна-Рвачова до розв'язання еліптичних
крайових задач з ізотонними нелінійностями
(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи ПМм-19-1
Юхименко В. Є.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)

Керівник Тевяшев А.Д.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Тевяшев А.Д.
(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Юхименку Владиславу Євгеновичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова до розв'язання еліптичних крайових задач з ізотонними нелінійностями

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи крайова задача

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q \quad \forall x \in \Omega,$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0,$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}.$$

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання та постановка задачі дослідження

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Тевяшев А.Д.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 65 с., 8 табл., 16 рис., 1 дод., 9 джерела.

ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД КВАЗІФУНКЦІЇ ГРІНА-РВАЧОВА,
ДВОБІЧНІ НАБЛИЖЕННЯ, ГЕТЕРОТОННИЙ ОПЕРАТОР.

Об'єкт дослідження – процеси, що описуються нелінійним еліптичним рівнянням.

Мета роботи – розробка методу чисельного розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь.

Метод дослідження – метод квазіфункції Гріна-Рвачова.

Атестаційна робота присвячена дослідженню можливості застосування методу квазіфункції Гріна-Рвачова до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь. Обчислювальний експеримент проведено для конкретної задачі, було отримано наближений розв'язок, який порівнювався з розв'язком, отриманим у роботі Границі Юлії методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Програмна реалізація здійснювалася за допомогою математичного пакету «Mathematica 10.0».

ABSTRACT

Introductory note: 64 pages, 8 tables, 16 figures, 1 appendixes, 9 sources.

ELLIPTICAL EQUATIONS, GREEN-RVACHOV QUASIFUNCTION METHOD, BILATERAL APPROXIMATIONS, HETEROTON OPERATOR.

The object of study – the processes described by a nonlinear elliptic equation.

The aim of the work is to develop a method of numerical connection of boundary value problems for nonlinear elliptical levels.

The research method is the Green-Rvachev quasi-function method.

Attestation work devoted to the study of the possibilities of applying the Green-Rvachev quasi-function method to the separation of boundary value problems for nonlinear elliptic levels. A computational experiment performed for specific problems obtained an approximate solution, which received the damage obtained in the work of the Julia Boundary methodology of two-sided approximations based on the use of Green's functions. The software implementation is used for the auxiliary mathematical package "Mathematica 10.0".

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та постановка задачі дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та постановка задачі дослідження	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	12
1.1.4 Інформаційна модель системи	17
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми знаходження розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач	19
1.2.1 Модель аналізу проблеми	19
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	20
1.2.3 Модель вирішення проблеми.....	24
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.3.1 Змістовна постановка задачі	24
1.3.2 Формальна постановка задачі	27
1.4 Постановка задач дослідження	27
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	29
2.1 Розв'язність нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором та метод двобічних наближень	29
2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$ на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова	32
2.3 Застосування методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова до розв'язання нелінійних еліптичних	

	7
рівнянь з параметрами	39
2.4 Алгоритм розв’язання задачі	42
3 Програмна реалізація	44
3.1 Mathematica 10 як система символьної математики	44
3.2 Опис програми	45
4 Результати обчислювального експерименту	46
5 Аналіз можливих застосувань	50
Висновки	51
Перелік джерел посилання	52
Додаток А Лістинг програми	53

ВСТУП

Багато явищ в різних галузях природознавства таких, як фізика, хімія, біологія та інші, достатньо точно можуть бути описані диференціальними рівняннями, зазвичай, нелінійними. Однак точні розв'язки крайових задач для диференціальних рівнянь можна отримати для дуже вузького класу задач. Зазвичай, це доволі прості рівняння, задані в простих областях.

В сучасній науці спостерігається велика зацікавленість до процесів, які відбуваються у нелінійних середовищах. Математичними моделями процесів у нелінійних середовищах є саме нелінійні крайові задачі математичної фізики, оскільки лінійні задачі не зовсім адекватно описують фізичну реальність.

Метою атестаційної роботи є застосування двобічних ітераційних методів на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова для розв'язання задач для нелінійних еліптичних рівнянь. Цей ітераційний метод дозволяє побудувати дві послідовності функцій, які наближують шуканий розв'язок зверху та знизу, а також довести існування єдиного додатного розв'язку задачі.

Складність світу та структури людського суспільства створюють сукупність проблем, розв'язання яких можливе лише при їх глибокому аналізі. Діяльність людини, яка напрямлена на пізнання і перетворення світу, з точки зору сучасної науки має системний характер. В процесі системного аналізу реалізується багатосторонній розгляд ситуації, відбувається розумний вибір цілей діяльності, способів їх досягнення та організаційних форм реалізації і об'єктивне зіставлення вже отриманих та бажаних результатів. В розділі “Системний аналіз проблеми математичного моделювання та постановка задач дослідження” даної атестаційної роботи було розроблено морфологічний, функціональний та інформаційний опис системи “Розв'язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння”. Побудовані морфологічна, інформаційна, функціональна моделі об'єкта дослідження.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь

1.1.1 Вербальна модель системи

Теорія наближених методів розв'язання математичних проблем стала на даний момент одним із найважливіших розділів прикладної математики. Теоретичним підґрунтям наближених методів є функціональний аналіз. Ідеї функціонального аналізу не тільки дозволили істотно спросити погляд на багато чисельних методів, але й привели до розробки принципово нових обчислювальних схем в проблемах лінійної алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, нелінійного аналізу, тощо. Особлива увага приділяється розробці методів наближеного розв'язання задач для нелінійних рівнянь з частинними похідними, бо саме вони є математичними моделями багатьох фізичних процесів, що протікають у нелінійних середовищах. Якщо такі процеси є стаціонарними, то для їх опису зазвичай використовують нелінійні еліптичні рівняння.

Об'єкт аналізу – «крайова задача для нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами».

Предмет аналізу – «методи послідовних наближень розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами».

Точка зору: дослідник.

Ціль: метою даної системи є знаходження розв'язку крайової задачі для нелінійного еліптичних рівняння.

Головним виходом системи є отримання розв'язку у аналітичному виді. На вхід подається крайові умови, область, у якій рівняння розглядається, та параметри. Управління системи здійснюється ззовні дослідником.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Досліджувана система – система «Крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння».

Метафункція системи – застосування методу квазіфункції Гріна-Рвачова для розв’язання крайових задач для нелінійного еліптичного рівняння.

Призначення цієї системи – отримання розв’язку крайової задачі.

Морфологічний опис системи розглянутий в описі зовнішнього середовища, наведеного на рис. 1.1.

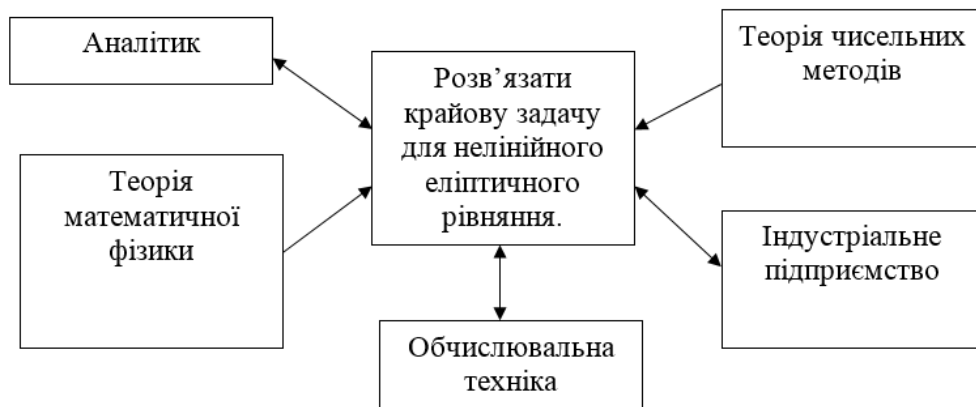


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – сукупність факторів (умов і організацій), які надають впливу на роботу системи [1].

На рис. 1.2 представлена модель типу «чорний ящик».

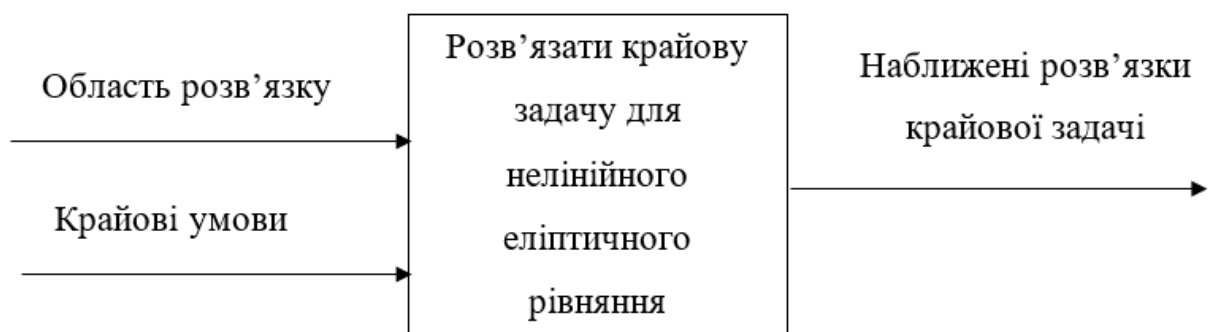


Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

Модель типу «чорний ящик» відображає входи і виходи системи без надання інформації про внутрішні елементи та зв'язки системи. Така модель особливо корисна при наданні системи на макрорівні, коли важливим є провести аналіз зовнішніх зв'язків системи з іншими системами. При складанні моделі типу «чорний ящик» важливо врахувати всі входи і виходи системи, що має необхідне значення з точки зору призначеної системи [1].

В моделі типу «білий ящик», наведеній на рис. 1.3, описаний «вміст системи», вказані взаємозв'язки між елементами системи.

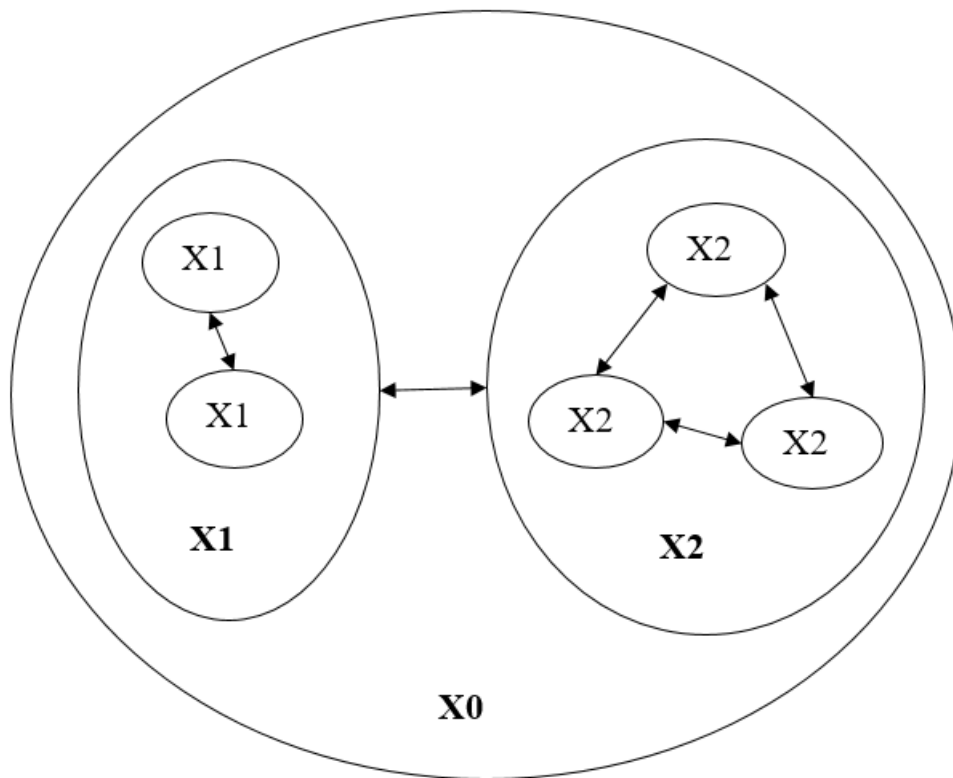


Рисунок 1.3 – Модель типу «білий ящик»

Дана система складається з двох підсистем – $X1$ і $X2$, де:

а) $X1$ – керуюча система, яка складається з:

- 1) $X11$ – дослідник;
- 2) $X12$ – засоби керування.

б) $X2$ – система, якою керують, складається з:

- 1) $X21$ – математичний апарат;

- 2) X22 – програмне забезпечення;
- 3) X23 – апаратне забезпечення.

1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма моделює систему найбільш загальним чином. Зазвичай контекстна діаграма має зіркоподібну структуру. У центрі знаходиться головний процес, сполучений з джерелами і одержувачами інформації, яким відповідають зовнішні сутності. У загальному випадку кожен проект повинен мати тільки одну контекстну діаграму і її єдиний процес не нумерується. Однак для складної інформаційної системи обмежитися єдиною контекстною діаграмою важко, тому що вона буде містити дуже велику кількість зовнішніх сутностей, які буде складно розташувати на діаграмі [1].

Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому. Для системи «Крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння» початкова контекстна діаграма зображена на рис. 1.4. В IDEF0 система представляється як сукупність взаємодіючих робіт або функцій. Така чисто функціональна орієнтація є принциповою – функції системи аналізуються незалежно від об'єктів, якими вони оперують. Це дозволяє більш чітко змодельовати логіку і взаємодію процесів організації [1].

Під моделлю в IDEF0 розуміють опис системи (текстовий і графічний), який має дати відповідь на деякі певні питання.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагменти. Цей процес називається функціональною декомпозицією, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодію фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції (рис. 1.5).

Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, до досягнення потрібного рівня детального опису (рис. 1.6).

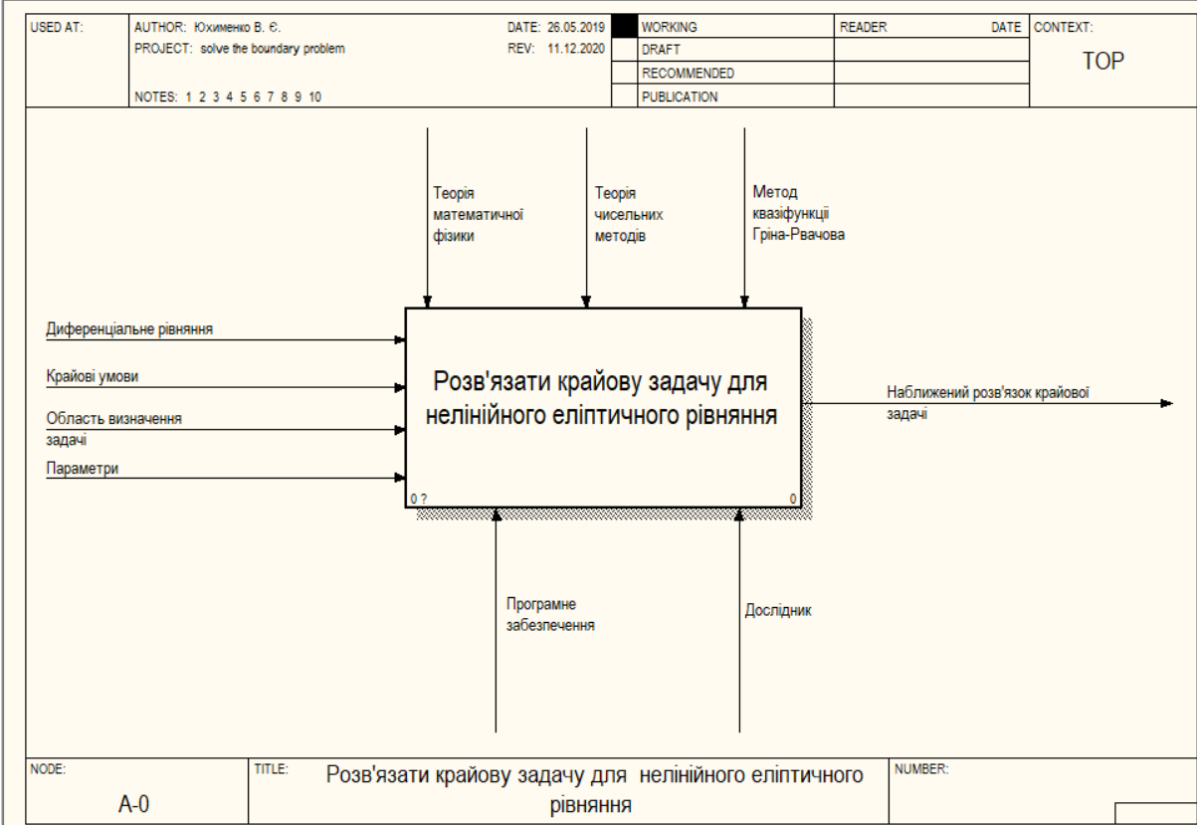


Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма (рівень A-0)

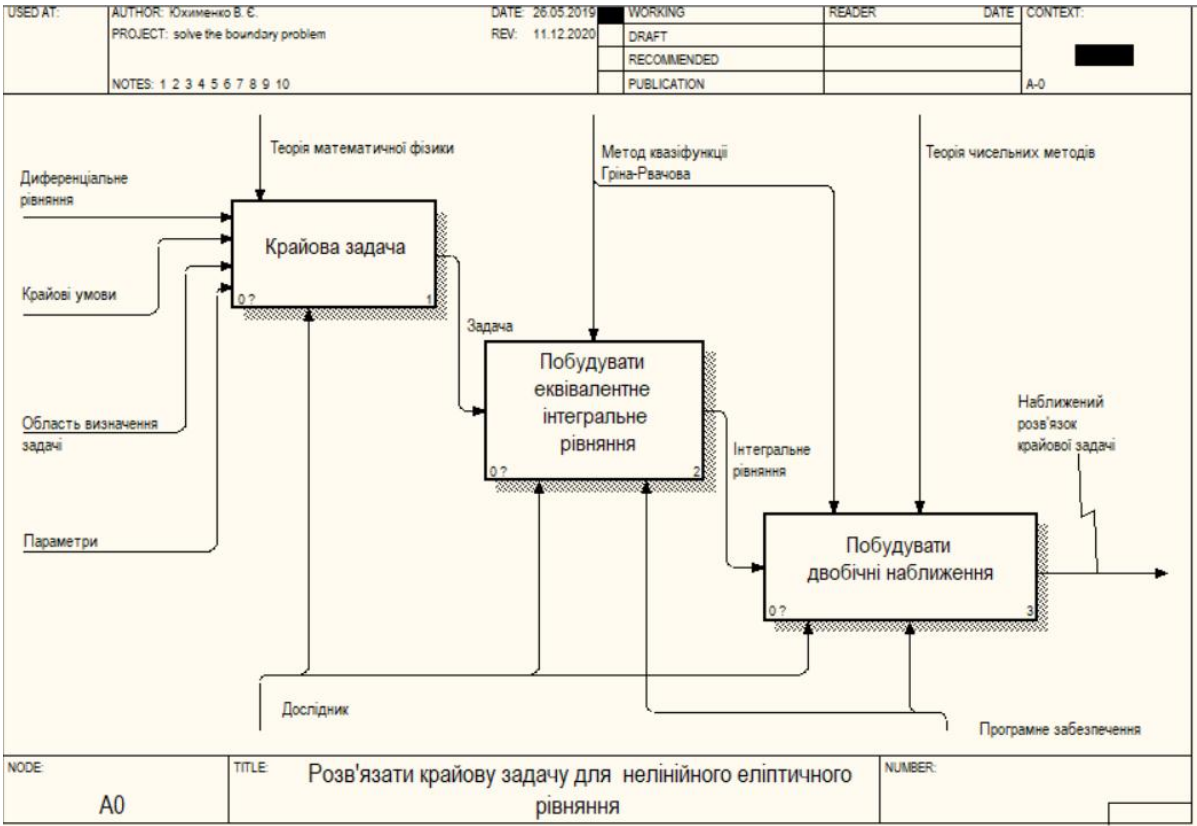


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Розв'язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння»: рівень A0

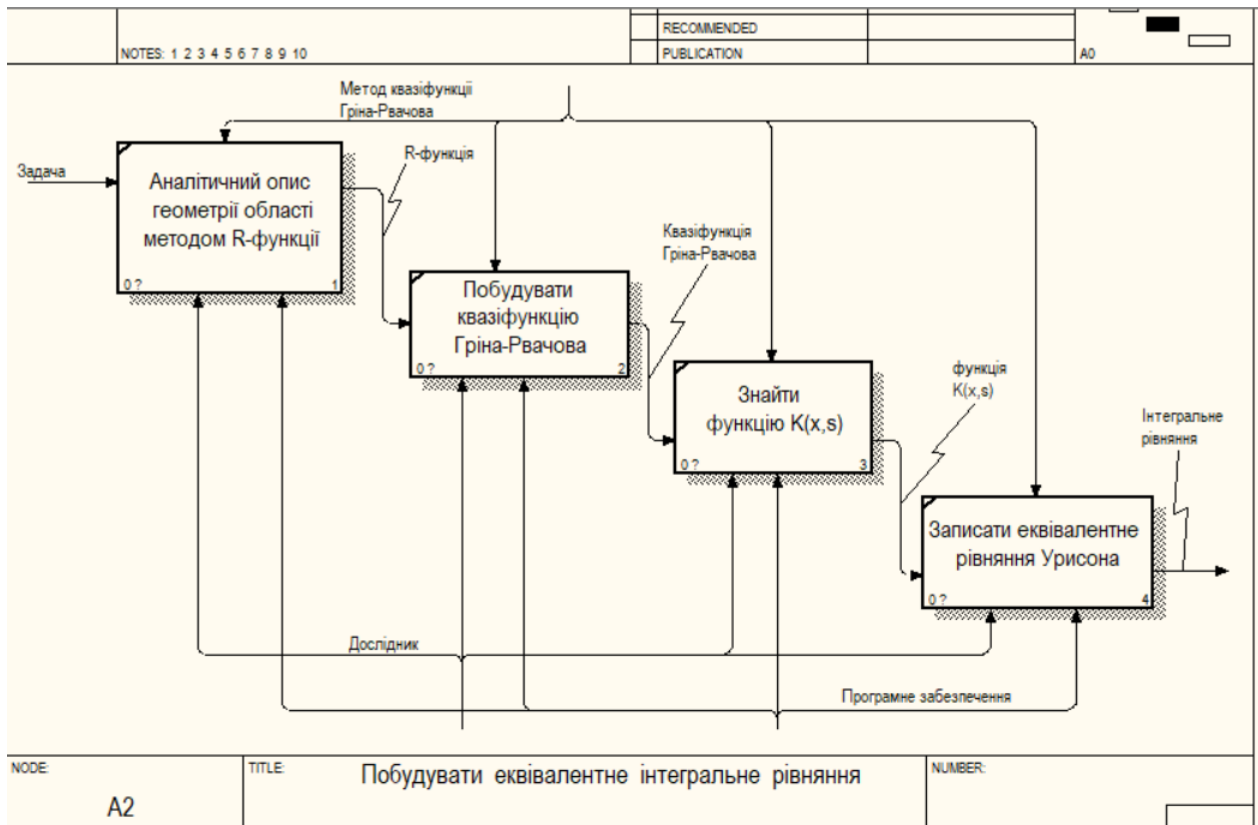


Рисунок 1.6 – Декомпозиція роботи «Побудувати еквівалентне інтегральне рівняння»: рівень A2

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт вищестоящої діаграми. При цьому, ширина та довжина обстеження процесів в системі вирішується саме дослідником, що дозволяє не перевантажувати створювану модель зайвими даними.

IDEF3 – метод документування процесів системи, що відбуваються в системі. Наприклад, опис послідовності етапів обробки деталі в цеху і зміна її властивостей після проходження кожного етапу. За допомогою IDEF3 описуються сценарій та послідовність операцій для кожного процесу. Для ефективного управління будь-яким процесом, необхідно мати детальне уявлення про його сценарії і структурі. IDEF3 має прямий взаємозв'язок із методологією IDEF0 – кожна функція (функціональний блок) може бути подана у вигляді окремого процесу засобами IDEF3.

Використовуючи метод IDEF3 були зроблені рис. 1.7 – 1.10.

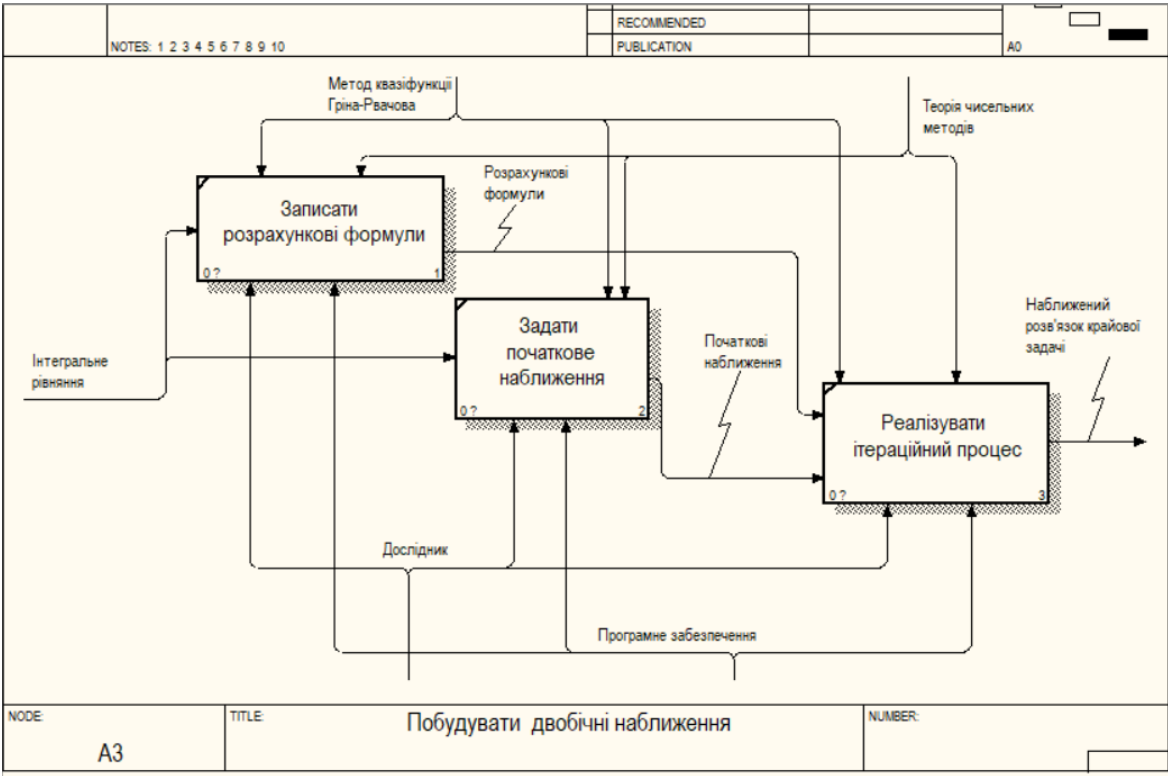


Рисунок 1.7 – Декомпозиція роботи «Побудувати двобічні наближення»
рівень A3

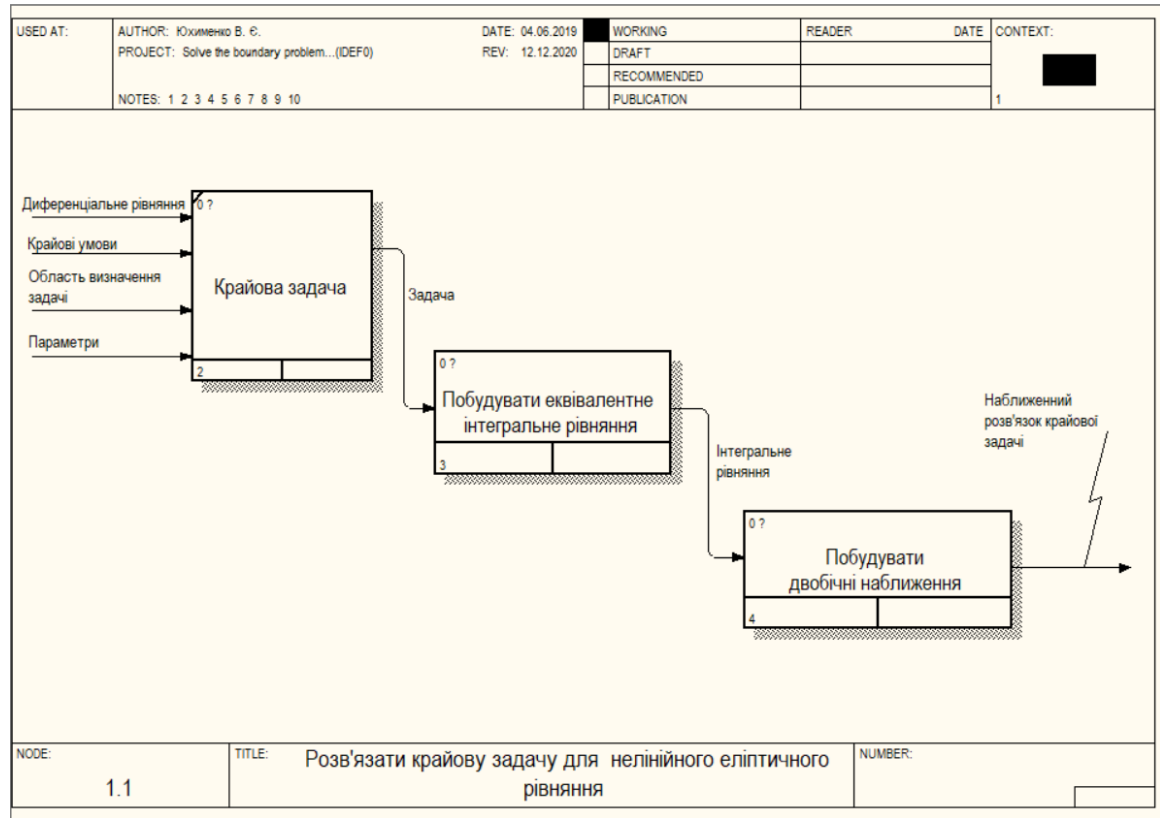


Рисунок 1.8 – Опис роботи «Розв'язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

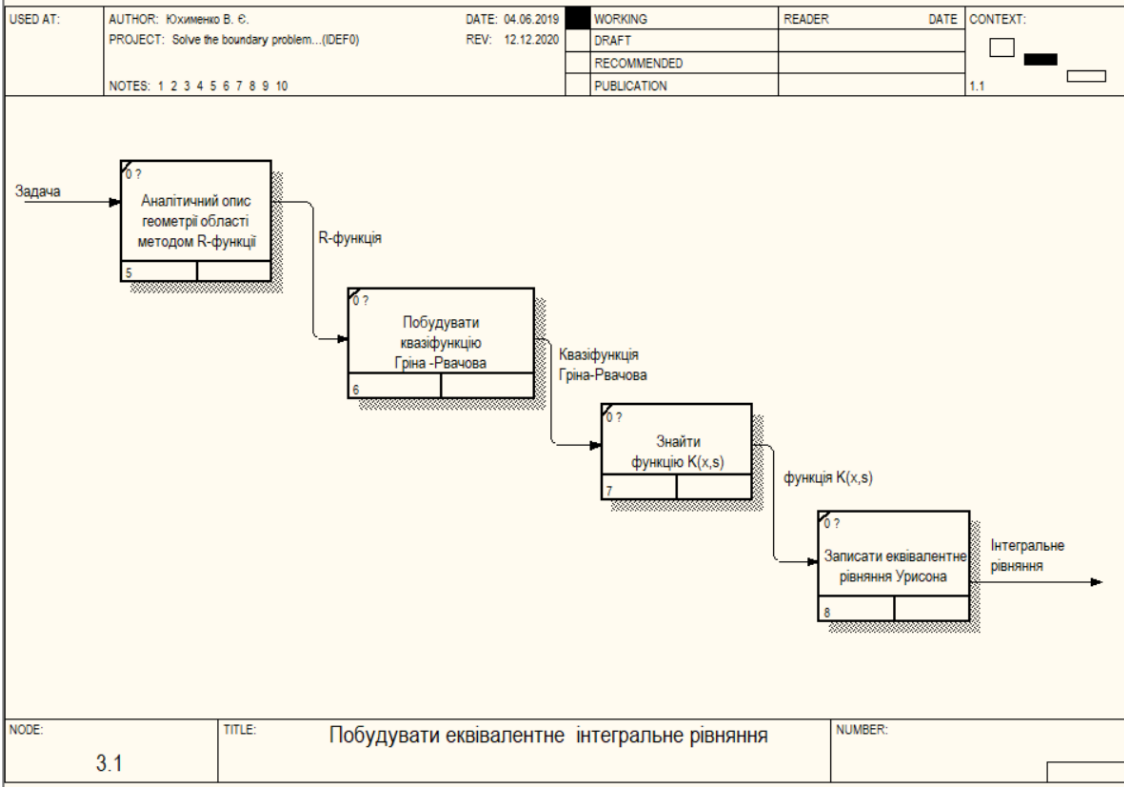


Рисунок 1.9 – Опис роботи «Побудувати еквівалентне інтегральне рівняння»: рівень A3 (в нотації IDEF3)

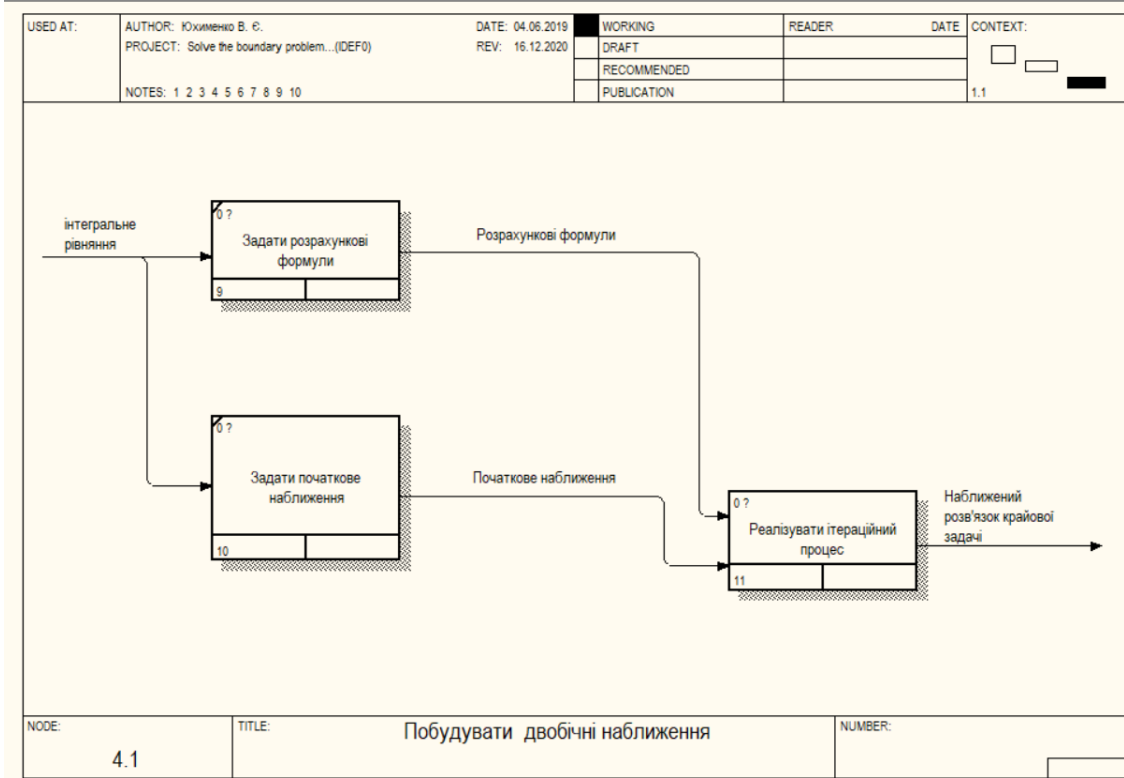


Рисунок 1.10 – Опис роботи «Побудувати двобічні наближення»: рівень A4 (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційні моделі відображають різні типи систем об'єктів, в яких реалізуються різні структури взаємодії і взаємозв'язку між елементами системи. Для відображення системи з різними структурами використовують різні типи інформаційних моделей: табличні, ієрархічні та мережні [1].

DFD (DataFlowDiagrams) діаграми потоків даних. Інструменти методології DFD дозволяють відображати джерела й адресати даних, ідентифікувати процеси і групи даних, що зв'язують в потоки одну функцію з іншою, і ефективно використовуються для опису процесів при впровадженні процесного підходу до управління організацією, так як дозволяє максимально знизити суб'єктивність опису бізнес-процесів. Крім того, нотація DFD дозволяє описувати потоки документів і потоки ресурсів [1].

DFD-діаграма представлена на рис. 1.11. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.12.

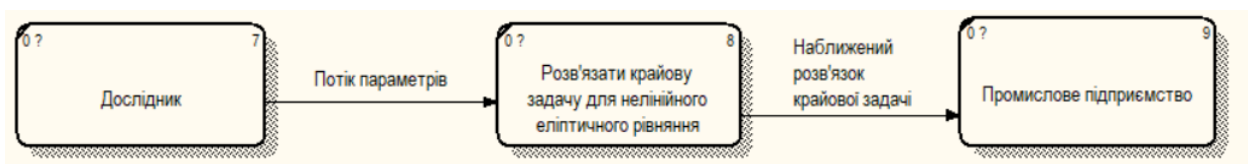


Рисунок 1.11 – DFD-діаграма

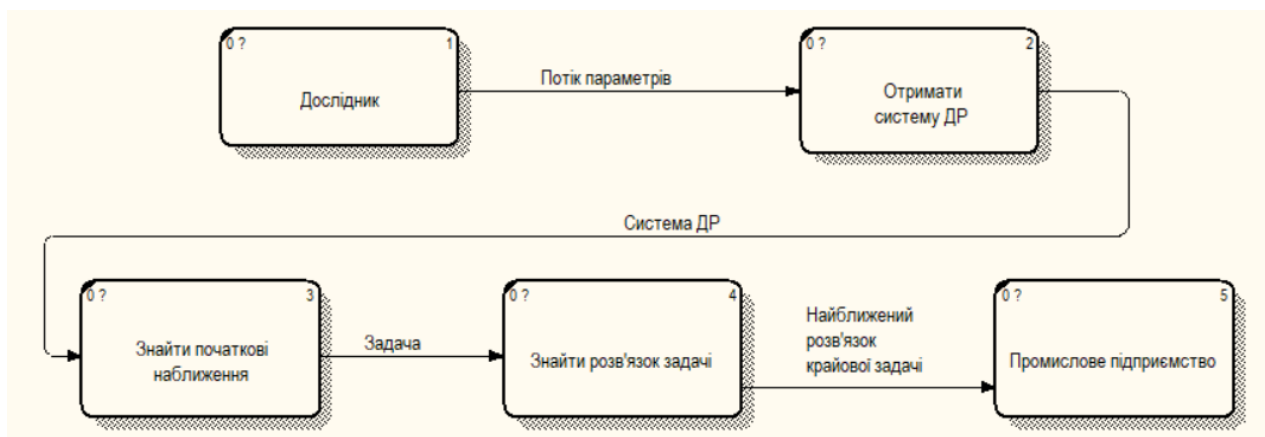


Рисунок 1.12 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

Інформаційна модель (в широкому, загальнонауковому сенсі) – це сукупність інформації, що характеризує суттєві властивості і стан об'єкта, процесу, явища, а також взаємозв'язок із зовнішнім світом.

Діаграми, отримані в результаті кожного кроку декомпозиції, передаються на експертизу експертам предметної області. Експерти оцінюють відповідність реальних процесів створеним діаграмам. Знайдені невідповідності виправляються автором діаграми. Після проходження експертизи без зауважень виконується наступний сеанс декомпозиції.

Діаграма дерева вузлів відображає ієрархічну взаємозв'язок блоків (функцій, робіт) без опису взаємозв'язків між ними. Процес створення моделі робіт є ітераційним, отже, роботи можуть міняти своє розташування в дереві вузлів багаторазово. Щоб не заплутатися і перевірити спосіб декомпозиції, слід після кожної зміни створювати діаграму дерева вузлів. У моделі може бути побудовано довільну кількість діаграм дерев вузлів, оскільки їх коренем може бути будь-який блок моделі (не обов'язково контекстна діаграма) і вони можуть бути побудовані на довільну глибину.

На рис 1.13 зображене дерево вузлів після всіх зроблених декомпозицій інформаційної моделі.

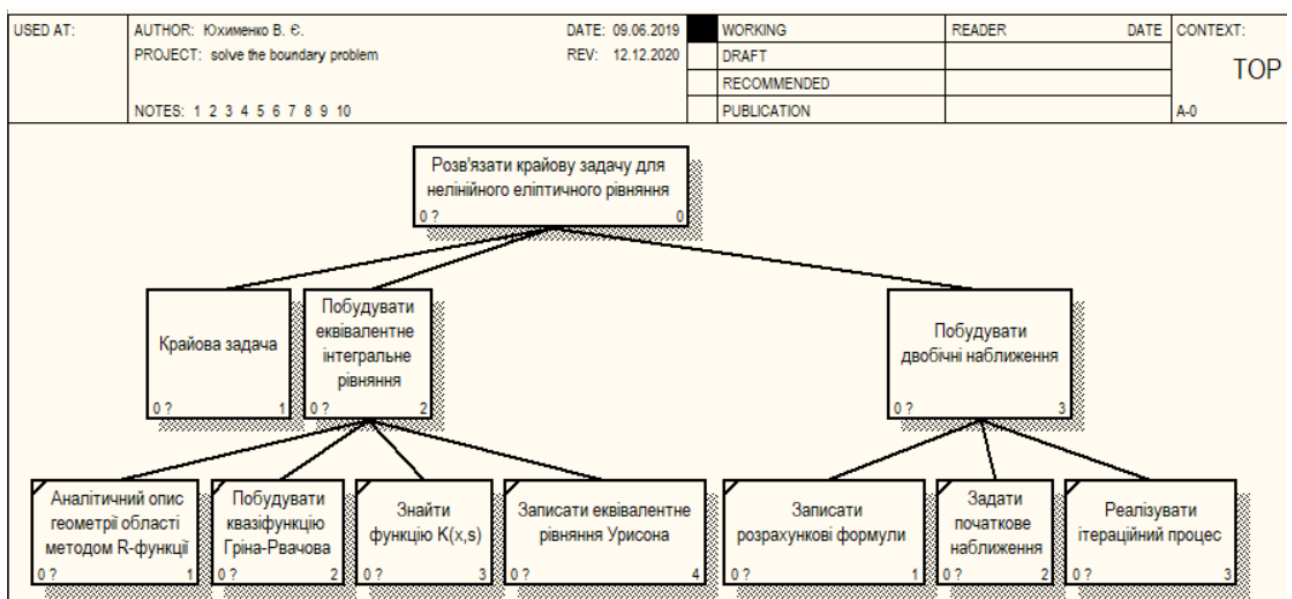


Рисунок 1.13 – Діаграма дерева вузлів

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми знаходження розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде розв'язуватися крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння. Існує незадоволеність проблеми отримання інформації від експертів і множина вибору. Необхідно досліджувати дану проблему і виявити шляхи її вирішення. Спочатку формалізуємо проблему, виділивши в системі ряд незадоволеностей, які можуть породжувати цю проблему. Проблема буде вирішуватися за наступними критеріями:

- критерій 1 (K1): час роботи програми;
- критерій 2 (K2): складність алгоритму при програмуванні;
- критерій 3 (K3): швидкість збіжності методу;
- критерій 4 (K4): точність отриманого розв'язку.

Вибиратимемо з наступної множини альтернатив:

- альтернатива 1 (A1): метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова;
- альтернатива 2 (A2): метод послідовних наближень за нелінійністю;
- альтернатива 3 (A3): метод малого параметра;
- альтернатива 4 (A4): метод скінченних елементів.

Опишемо метод двобічних наближень з використанням методу квазіфункції Гріна-Рвачова. По-перше, ми робимо заміну диференційної задачі еквівалентним інтегральним рівням Урисона. Далі, використовуючи метод двобічних наближень, знаходимо наближений розв'язок задачі. Двобічний метод наближень дає деякі переваги. Зокрема, таку, як наявність зручної апостеріорної оцінки похибки наближеного розв'язку на кожній ітерації.

Метод послідовних наближень за нелінійністю – це чисельний метод розв'язання нелінійних задач, заснований на частковій лінеаризації рівняння. Так, якщо нелінійне операторне рівняння має вигляд $Tu = f$, де оператор

$T = A + B$, причому A – лінійний оператор, а B – нелінійний оператор, то ітераційна схема послідовних наближень за нелінійністю матиме вигляд $Au_{n+1} = -Bu_n + f$, $n = 0, 1, 2, \dots$, u_0 – початкове наближення. Збіжність методу залежить від вдалого вибору начального наближення.

Метод називають методом малого параметра, тому що в ньому виконують розкладання рішення в ряд за степенями малого параметра. Наскільки цей параметр повинен бути малий в кожному прикладі, заздалегідь сказати не можна. Важливо, щоб ряди збігалися. Якщо ряди будуть збігатися повільно або взагалі не будуть збіжними, то користуватися цим методом не має сенсу.

Метод скінченних елементів – це чисельний метод знаходження розв’язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також інтегральних рівнянь, що виникають при розв’язанні задач прикладної фізики. Головна ідея цього методу – це поділ області, у якій розглядається задача, на скінченну кількість підобластей (елементів). Кожному елементу відповідає алгебраїчна функція, а всій області відповідає система лінійних алгебраїчних рівнянь. Після розв’язання цієї системи ми отримаємо наближений розв’язок задачі.

Ієрархічна модель проблеми вибору методу розв’язання крайової задачі наведена на рис. 1.14.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу необхідно побудувати матриці парних порівнянь моделі, а також критеріїв системи (табл. 1.1).

Для прийняття рішення про використання методу, необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив. Оцінивши їх щодо кожної з альтернатив, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.5. Випадкова узгодженість для матриць дорівнює 0,90. Для кожної з матриць було розраховано індекс узгодженості та відносну узгодженість.

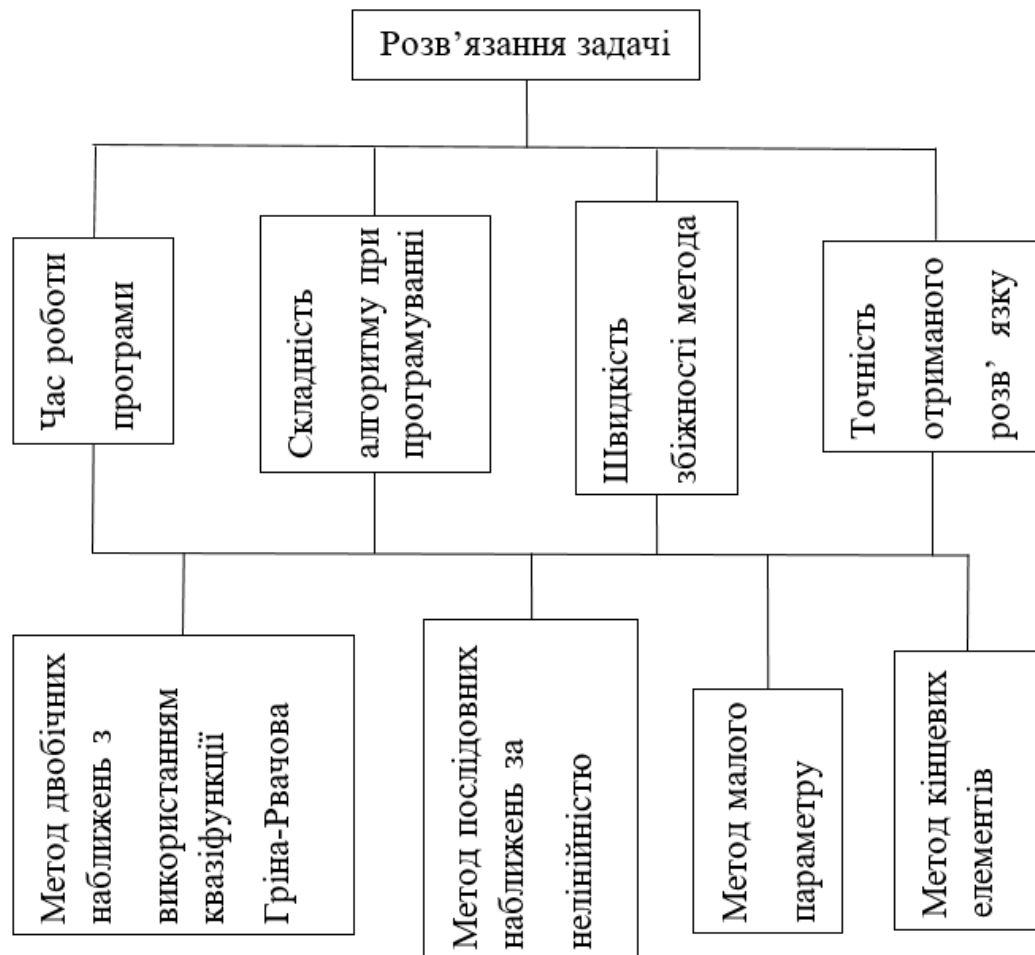


Рисунок 1.14 – Ієрархічна модель процесу аналізу рішення задачі

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
K1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	0,27	0,042
K2	3	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0,5	0,078
K3	7	6	1	$\frac{1}{2}$	2,141	0,336
K4	9	8	2	1	3,464	0,543
Всього					6,375	

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,104 - 4}{4 - 1} = 0,035.$$

Випадкова узгодженість = 0,90.

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,1035}{1,24} = 0,0384 = 3,84\%.$$

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	0,334	0,054
A2	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0,537	0,086
A3	5	4	1	$\frac{1}{5}$	1,414	0,227
A4	8	6	5	1	3,936	0,633
Всього					6,222	

$$\text{ІУ} = 0,088, \text{ ВУ} = 0,097 = 9,7\%.$$

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	0,0,289	0,049
A2	3	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	0,622	0,105
A3	8	5	1	3	3,31	0,561
A4	6	4	$\frac{1}{3}$	1	1,682	0,285
Всього					5,903	

$$\text{ІУ} = 0,053, \text{ ВУ} = 0,0586 = 5,86\%.$$

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	6	5	7	3,807	0,632
A2	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{3}$	3	0,639	0,106
A3	$\frac{1}{5}$	3	1	4	1,245	0,207
A4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	0,33	0,055
Всього					6,021	

$$IU = 0,078, VU = 0,087 = 8,7\%.$$

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 4	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	4	8	6	3,722	0,615
A2	$\frac{1}{4}$	1	5	3	1,392	0,230
A3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	0,302	0,050
A4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	3	1	0,639	0,106
Всього					6,055	

$$IU = 0,053, VU = 0,0586 = 5,86\%.$$

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві підрахунки. І підсумувати висновки. У таблиці 1.6 наведені результати, що дозволяють нам сказати, що кращою для нас буде перша альтернатива, а саме – метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова.

Таблиця 1.6 – Кінцеві дані

Критерій / Альтернатива	K1	K2	K3	K4	Узагальнені пріоритети
A1	0,054	0,049	0,632	0,615	0,553
A2	0,086	0,105	0,106	0,230	0,172
A3	0,227	0,561	0,207	0,050	0,15
A4	0,633	0,285	0,055	0,106	0,125

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Математичне моделювання процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології, екології тощо призводить до необхідності дослідження задач для нелінійних рівнянь математичної фізики [2].

Розглянемо, наприклад, процес теплопровідності. Нехай функція $u(\mathbf{x}, t)$ задає температуру в точці $\mathbf{x}$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в момент часу t ($t \geq 0$). У загальному випадку крім залежності від $\mathbf{x}$ і t треба враховувати залежність щільності ρ , питомої теплоємності c , коефіцієнта теплопровідності середовища k та потужності теплових джерел F від температури u . Це призводить до того, що

математичною моделлю розглядуваного теплофізичного процесу буде квазілінійне рівняння теплопровідності вигляду [3]

$$\rho(\mathbf{x}, t, u) c(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t, u) \operatorname{grad} u) = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Коли $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, рівняння (1.1) спрощується і набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t, u) \operatorname{grad} u) = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

де через k та F перепозначено відповідно функції $\frac{k}{c\rho}$ та $\frac{F}{c\rho}$.

Якщо припустити, що нелінійність рівняння (1.2) викликана лише потужності теплових джерел F (тобто $k = \text{const}$), то рівняння (1.2) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = F(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Для стаціонарного процесу, коли величина u та інші характеристики процесу не залежать від часу t , рівняння (1.2) – (1.3) набувають відповідно вигляду

$$-k \Delta u = F(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.4)$$

Після ділення обох частин рівнянь (1.4), на $k > 0$ і позначення

$$f(\mathbf{x}, u) = \frac{F(\mathbf{x}, u)}{k} \text{ отримаємо рівняння}$$

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega.$$

Розглядувані рівняння у нестационарному випадку ще слід доповнити початковими та крайовими умовами, а у стаціонарному випадку – тільки крайовими. Початкова умова матиме вигляд

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

і відповідатиме задаванню в $\bar{\Omega}$ розподілу температур в момент часу $t = 0$.

Крайові умови задають зазвичай одного з наступних трьох типів. Перша крайова умова (умова Діріхле) відповідатиме задаванню на $\partial\Omega$ розподілу температур при $t \geq 0$, друга крайова умова (умова Неймана) – задаванню на $\partial\Omega$ теплового потоку при $t \geq 0$, а третя крайова умова (умова Ньютона або Робена) – задаванню на $\partial\Omega$ лінійної комбінації температури і теплового потоку при $t \geq 0$. Однорідна умова Діріхле, наприклад, має вигляд

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ще однією з фізичних постановок, що зводяться до задач розглядуваного вигляду, є задача про розподіл температури в тілі, якщо крізь нього пропускається сталий електричний струм $i = \sqrt{\lambda}$, тобто відбувається так званий джоулів підогрів [4]. Якщо тіло неоднорідне і має теплопровідність $K(\mathbf{x})$, а його електричний опір $R(\mathbf{x}, T)$ є функцією температури $T(\mathbf{x}, t)$ і випромінюванням можна знехтувати, то відповідна задача у безрозмірній формі зводиться до рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} T) = \lambda R(\mathbf{x}, T)$$

з відповідними початковою та крайовою умовами. Зокрема, якщо для дослідника інтерес представляють стаціонарні стани, їх стійкість і залежність від струму

λ , то приходять до рівняння вигляду

$$-\operatorname{div}(K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} T) = \lambda R(\mathbf{x}, T)$$

з відповідною крайовою умовою.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Припустимо, що теплопровідність $K(\mathbf{x})$ є сталою величиною, а електричний опір $R(\mathbf{x}, T)$ є степенною функцією температури. Тоді ми приходимо до такої крайової задачі (позначимо $u = T$)

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega, \quad (1.6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.7)$$

де $\lambda > 0$, $0 < q < 1$.

Тут вважаємо, що поверхня тіла, крізь яке пропускається сталий електричний струм, підтримується при нульовій температурі (цього можна завжди отримати, якщо зробити заміну у задачі з неоднорідними крайовими умовами).

Зауважимо, що у задачі (1.5) – (1.7) нелінійність $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(1+u)^q$ зростає зі збільшенням u , тобто є ізотонною.

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу системи «Розв’язати крайову задачу для нелінійних еліптичних рівнянь», а також аналізу проблеми вибору ефективного методу її розв’язання, сформулюємо завдання дослідження даної

атестаційної роботи:

- сформулювати крайову задачу;
- розглянути чисельні методи, якими можна отримати наближений розв’язок розглядуваної задачі, а саме – метод двобічних наближень на основі використанням квазіфункції Гріна-Рвачова;
- застосувати обраний метод до розв’язання розглядуваної задачі та скласти алгоритм;
- розробити програмний продукт, який реалізує метод двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова для нелінійного еліптичного рівняння зі складної геометрією області;
- зробити аналіз ефективності запропонованого методу.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДА РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Розв'язність нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором та метод двобічних наближень

Нехай $\mathcal{U}$ – дійсний банахів (повний нормований) простір, θ – нульовий елемент простору $\mathcal{U}$. Розглянемо основні відомості з теорії напівупорядкованих просторів та нелінійних операторів, що діють у цих просторах [5].

Сукупність елементів виду $tu + (1-t)w$ при $0 \leq t \leq 1$, що з'єднує точки u і w банахового простору $\mathcal{U}$, називають відрізком $[u, w]$.

Якщо, разом з кожними двома точками, деяка множина $M \subset \mathcal{U}$ повністю містить відрізок, то таку множину називають опуклою.

Замкнена опукла множина $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ називається конусом, якщо виконуються декілька наступних умов:

- а) $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $\gamma u \in \mathcal{K}$ для всіх $\gamma \geq 0$;
- б) $u \in \mathcal{K}$ і $u \neq \theta$, то $-u \notin \mathcal{K}$.

Сукупності невід'ємних функцій у просторах $C(\bar{\Omega})$, $L_p(\Omega)$ ($p \geq 1$), де $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна область, є конусами, а також конусом є сукупність векторів з невід'ємними координатами у $\mathbb{R}^m$.

Напівупорядкованим простором $\mathcal{U}$ називається такий простір, в якому, для деяких пар елементів $v, w \in \mathcal{U}$ визначено бінарне відношення $\leq$ таке, що:

- а) з $u \leq v$ випливає, що $\alpha u \leq \alpha v$ при $\alpha \geq 0$ і $\alpha v \leq \alpha u$ при $\alpha < 0$;
- б) з $u \leq v$ і $u \geq v$ випливає, що $u = v$;
- в) з $u_1 \leq v_1$ і $u_2 \leq v_2$ випливає, що $u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$;
- г) з $u \leq v$ і $v \leq w$ випливає, що $u \leq w$.

Будь-який конус $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ дозволяє ввести у просторі $\mathcal{U}$ напівупорядкованість за правилом: $u \leq w := w - u \in \mathcal{K}$. Зокрема, напівупорядкованість, що вводиться у $C(\bar{\Omega})$ конусом $\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{U}$ невід'ємних функцій, означає, що $u(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x})$

для всіх $x \in \bar{\Omega}$.

Конус $\mathcal{K}$ називається нормальним, якщо існує таке число $N(\mathcal{K}) > 0$, що з $\theta \leq u \leq w$ випливає, що $\|u\| \leq N(\mathcal{K})\|w\|$. Також кажуть, що норма напівмонотонна. Якщо $N(\mathcal{K}) = 1$, то конус називають гострим і кажуть, що норма монотонна.

Зауважимо, що конуси $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій у $C(\bar{\Omega})$ або у $L_p(\Omega)$ також нормальні, а конус $\mathcal{K}_+$ у $C(\bar{\Omega})$ є навіть гострим.

Оператор T , що діє в $\mathcal{U}$, називається гетеротонним, якщо він допускає діагональне подання $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, причому супровідний оператор $\hat{T}$ визначений на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ і $\hat{T}(v, w)$ монотонно зростає по v та спадає по w , тобто:

а) із $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$, $v_1 \geq v_2$ випливає $\hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w)$;

б) із $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$, $w_1 \geq w_2$ випливає $\hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2)$.

Конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , якщо

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \quad (2.1)$$

Введемо таку умову (A) [5]: система рівнянь

$$\hat{T}(v, w) = v, \quad \hat{T}(w, v) = w. \quad (2.2)$$

на множині $M \subset \mathcal{U}$ не має розв'язків таких, що $v \neq w$.

Має місце така теорема [5].

Теорема 2.1. Нехай конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T і $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконується умова (A). Нехай, крім того, конус $\mathcal{K}$ є нормальним, а оператор $\hat{T}$ є цілком неперервним. Тоді у оператора T існує нерухома точка $x^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$, тобто рівняння $u = T(u)$ має принаймні

один розв'язок, що належить $\langle v_0, w_0 \rangle$.

При вивченні збіжності ітераційних процесів вигляду $u_{n+1} = T(u_n)$, де T – гетеротонний оператор, зручно розглядати допоміжний ітераційний процес

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \quad (2.3)$$

який починається в точці (v_0, w_0) .

Має місце твердження [5].

Теорема 2.2. Нехай конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T і конус $\mathcal{K}$ є нормальним, а оператор $\hat{T}$ є цілком неперервним. Тоді ітераційний процес (2.2) збігається, тобто $v_n \rightarrow v^*$, $w_n \rightarrow w^*$, причому

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

Нехай оператор $\hat{T}$ є неперервним. Тоді пара (v^*, w^*) є розв'язком системи (2.2). Якщо ж до того виконується умова (А), то виключено, що $v^* \neq w^*$. Це означає, що $u^* := v^* = w^*$ є нерухомою точкою оператора T , тобто розв'язком рівняння $u = T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, і ми приходимо до наступного результату [5].

Теорема 2.3. Нехай виконані умови теореми 2.2. Крім того, нехай оператор $\hat{T}$ є неперервним і на $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконується умова (А). Тоді у T на $\langle v_0, w_0 \rangle$ існує єдина нерухома точка x^* , до якої збігаються послідовні ітерації $T^n(u)$ незалежно від $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Зазначимо, що за виконання умов теореми 2.3 $v_n \rightarrow v^*$, $w_n \rightarrow w^*$, причому

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 \quad (2.4)$$

Якщо для послідовностей $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ справджується ланцюг нерівностей (2.4), то казатимемо, що ітераційний процес (2.2) двобічно збігається до u^* , а відповідний ітераційний метод називатимемо методом двобічних наближень.

Зауважимо також [5], що якщо за реалізацією процесу (2.2) або з якихось інших міркувань вдається встановити існування та рівність границь v^* і w^* , то необхідність у будь-яких припущеннях (крім нормальності $\mathcal{K}$) відпадає.

Зауважимо також, що достатньою умовою виконання умови (A) є умова [6] існування такого $\gamma \in (0;1)$, що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\| \text{ для всіх } v, w \in \langle v_0, w_0 \rangle. \quad (2.5)$$

2.2 Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$ на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Розглянемо крайову задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.8)$$

де Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$);

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Вважатимемо також, що

$f(\mathbf{x}, u)$ неперервна і додатна при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $u > 0$.

Областю визначення оператора $-\Delta$ крайової задачі (2.6) – (2.8) вважати-

мемо множину функцій $D_{-\Delta}$, яка складається з функцій $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ таких, що $u|_{\partial\Omega} = 0$ і $-\Delta u \in L_2(\Omega)$.

Нехай межа області $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція. Тоді за допомогою методу R-функцій [7] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

- а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω ;
- б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;
- в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

У цьому випадку казатимемо, що функція $\omega(\mathbf{x})$ аналітично описує геометрію області Ω .

Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ назовемо функцію

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}, \quad (2.9)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$;

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2};$$

$\omega(\mathbf{x})$ – функція, яка аналітично описує геометрію області Ω .

Квазіфункція Гріна-Рвачова вигляду (2.9) має такі властивості [7]

- а) $Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ на $\partial\Omega$;
- б) є симетричною функцією: $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = Q(\mathbf{s}, \mathbf{x})$;
- в) має таку ж особливість при $\mathbf{x} = \mathbf{s}$, що і звичайна функція Гріна;
- г) додатна в області Ω : $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$.

Використовуючи інтегральне подання функцій класу C^2 та другу формулу Гріна, можна отримати [7], що задача (2.6) – (2.8) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона вигляду

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (2.10)$$

де позначено $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_s \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$.

Рівняння (2.10) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$.

Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (2.6) – (2.8) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.10).

Для інтегрального рівняння (2.10) побудуємо процес двобічних наближень знаходження його розв'язку (а отже, і розв'язку крайової задачі (2.6) – (2.8)). Введемо до розгляду нелінійний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (2.11)$$

Позначимо

$$K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Тоді $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$, $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$), причому

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \quad |K(\mathbf{x}, \mathbf{s})| = K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

і оператор T вигляду (2.11) набуде вигляду

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (2.12)$$

Припустимо, що функція $f(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання

$f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$, причому неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v , w невід’ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор T вигляду (2.12) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \\ & - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Зрозуміло, що оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Виділимо у конусі $\mathcal{K}^+$ сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ умовами (2.1), які для оператора, що визначається рівністю (2.13), набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далі за схемою (2.2) сформуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Оскільки конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$ є сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , для якого оператор $\hat{T}$ є супровідним, то послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}^+$, а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}^+$. Крім того, з нормальності конуса $\mathcal{K}^+$ і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Тоді справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $\langle v^0, w^0 \rangle$ нерухома точка оператора T , а отже, u^* – єдиний на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв'язок крайової задачі (2.6) – (2.8).

Функції $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ є розв'язком системи рівнянь (2.2), яка у розглядуваному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\
& + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) d\mathbf{s}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є те, що система (2.18), (2.19) не має

на $\langle v^0, w^0 \rangle$ таких розв'язків, що $v \neq w$.

Отже, справджується така теорема [8].

Теорема 2.4. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (2.12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (2.13) і система рівнянь (2.18), (2.19) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (2.16) – (2.17) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.6) – (2.8), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Уточнимо умови існування єдиного додатного розв'язку крайової задачі (2.6) – (2.8) та двобічної збіжності до нього послідовних наближень (2.16) – (2.17) за рахунок з'ясування умов, за яких система рівнянь (2.18), (2.19) не має на $\langle v^0, w^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Так, умовою, яка забезпечить рівність $v^* = w^*$, є умова (2.5).

Нехай існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)| \leq L|w - v|. \quad (2.20)$$

Має місце така теорема.

Теорема 2.5. Нехай $\langle v^0, w^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (2.12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (2.13) і має місце умова (2.20), причому $\gamma = M_1 + LM < 1$, де сталі M і M_1 визначаються рівностями

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (2.21)$$

$$M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s}. \quad (2.22)$$

Тоді ітераційний процес (2.16) – (2.17) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.6) – (2.8).

Якщо виконано k ітерацій, то за наближений розв'язок крайової задачі (2.6) – (2.8) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (2.23)$$

Тоді для похибки для наближеного розв'язку (2.23) ми матимемо зручну апостеріорну оцінку:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})). \quad (2.24)$$

Наявність оцінки вигляду (2.24) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

Крім того, за умов теореми 2.5 можна вказати і апіорну оцінку похибки:

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})).$$

Тоді з нерівності

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\gamma^k}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\frac{\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x}))}{\ln \frac{1}{M_1 + LM}}}{\frac{2\varepsilon}{\ln \frac{1}{M_1 + LM}}} \right\rceil + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа [8].

2.3 Застосування метода двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова до розв'язання нелінійних еліптичних рівнянь з параметрами

Розглянемо крайову задачу

$$-\Delta u = \lambda(1+u)^q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.25)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.26)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.27)$$

Задача (2.25) – (2.27) еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + u(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}. \quad (2.28)$$

Оскільки функція $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(1 + u)^q$ монотонно зростає за u , тобто є ізотонною, то обираємо $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \lambda(1 + v)^q$ і супровідний оператор $\hat{T}$ задається рівністю

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + v(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}.$$

Умови (2.14), (2.15), які виділяють сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$, набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + v^0(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + w^0(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Система рівнянь (2.18), (2.19) для ізотонної за u функції $f(\mathbf{x}, u)$ має вигляд

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + v(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}, \\ w(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + w(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Умова (2.20) стане звичайною умовою Ліпшиця для функції $f(\mathbf{x}, u)$.

З'ясуємо, з якою константою L ця умова виконуватиметься для $f(\mathbf{x}, u) = \lambda(1+u)^q$. Оскільки $f'_u(\mathbf{x}, u) = \lambda q(1+u)^{q-1} = \frac{\lambda q}{(1+u)^{1-q}}$, то за сталу L , якщо $0 < q < 1$, можна обрати

$$L = \sup_{u>0} f'_u(\mathbf{x}, u) = \sup_{u>0} \frac{\lambda q}{(1+u)^{1-q}} = \lambda q.$$

Отже, якщо існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v^0, w^0 \rangle$, що виділяється умовами (2.29), (2.30), і виконується умова $\gamma = M_1 + LM = M_1 + \lambda q M < 1$, де сталі M і M_1 визначаються рівностями (2.21), (2.22), то послідовні наближення, які формуються за схемою

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ &+ \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + v^{(k)}(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ w^{(k+1)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ &+ \lambda \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + w^{(k)}(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)}(\mathbf{x}) &= v^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

двобічно збігаються до єдиного на $\langle v^0, w^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.6) – (2.8).

Оскільки шуканий розв'язок задачі дорівнює нулю на межі $\partial\Omega$ області Ω , то кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді $v^0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ ($0 < \alpha < \beta$), де функція $\omega(\mathbf{x})$, побудована методом R -функцій, є такою, що $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Тоді відповідно до (2.29), (2.30) для визначення α , β отримаємо систему нерівнос-

тей

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \beta \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + \alpha \omega(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s} \geq \alpha \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \alpha \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \\ & + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) (1 + \beta \omega(\mathbf{s}))^q d\mathbf{s} \leq \beta \omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Якщо система нерівностей (2.31), (2.32) має розв'язок (α, β) такий, що $0 < \alpha < \beta$, то конусний відрізок $\langle \alpha \omega(\mathbf{x}), \beta \omega(\mathbf{x}) \rangle$ буде сильно інваріантним для гетеротонного оператора T вигляду (2.12) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (2.13).

Оскільки для більш швидкої збіжності ітерацій величина $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = (\beta - \alpha) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x})$ має бути якомога меншою, то при практичній реалізації ітераційного процесу (2.16) – (2.17) слід взяти найбільше α і найменше β , $0 < \alpha < \beta$, що задовольняють нерівностям (2.31), (2.32).

2.4 Алгоритм розв'язання задачі

Для знаходження розв'язку крайової задачі (2.6) – (2.8), яка є еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона (2.28), методом двобічних наближень на основі використання методу квазіфункції Гріна-Рвачова використаємо наступний алгоритм:

а) обираємо параметри $\lambda > 0$, $0 < q < 1$ та точність $\varepsilon > 0$;

б) виражаємо квазіфункцію Гріна-Рвачова $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ згідно з області Ω за формулою (2.9);

в) будуємо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, для чого розраховуємо $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, s) ds$, $M_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(\mathbf{x}, s) + K^-(\mathbf{x}, s)] ds$ та $L = \lambda q$, а також перевіряємо умову збіжності $\gamma = M_1 + LM < 1$;

г) для визначення кінців сильно інваріантного конусного відрізка обираємо α і β ($0 < \alpha < \beta$) з системи нерівностей (2.31), (2.32);

г) проводимо ітерації відповідно до ітераційного процесу (2.16), (2.17), доки не буде виконана умова $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$;

д) за формулою $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$ знаходимо наближений розв'язок крайової задачі (2.6) – (2.8);

е) використовуючи формулу $\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$ досліджуємо апостеріорну оцінку наближеного розв'язку задачі (2.16), (2.17).

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 10 як система символьної математики

Система символьних обчислень Mathematica дуже широка і багатогранна. Незважаючи на свою спрямованість на серйозні математичні обчислення, системи класу Mathematica прості в освоєнні і можуть використовуватися досить широкою категорією користувачів – студентами і викладачами вузів, інженерами, аспірантами, науковими працівниками та навіть учням математичних класів загальноосвітніх і спеціальних шкіл. Всі вони знайдуть в подібній системі численні корисні можливості для застосування.

Mathematica була задумана як система, яка максимально автоматизує працю науковців і математиків-аналітиків, тому вона заслуговує вивчення навіть в якості типового представника елітних і високоінтелектуальних програмних продуктів вищої міри складності. Однак куди більший інтерес вона представляє як потужний і гнучкий математичний інструментарій, який може надати неоціненну допомогу більшості науковців, викладачів університетів і вищих навчальних закладів, студентів і інженерів.

З самого початку велика увага приділялася графіці, в тому числі динамічній, і навіть можливостям мультимедіа – відтворення динамічної анімації та синтезу звуків. Набір функцій графіки і змінюють її дію опцій дуже обширно. Графіка завжди була сильною стороною різних версій системи Mathematica і забезпечувала їм лідерство серед систем комп'ютерної математики.

В результаті Mathematica швидко зайняла провідні позиції на ринку символьних математичних систем. Особливо привабливі великі графічні можливості системи і реалізація інтерфейсу типу Notebook. При цьому система забезпечувала динамічний зв'язок між осередками документів в стилі електронних таблиць навіть при вирішенні символьних завдань, що принципово і вигідно відрізняло її від інших подібних систем.

Система також здійснює чисельні розрахунки: визначає значення функцій

(в тому числі спеціальних) з довільною точністю, здійснює поліноміальних інтерполяцію функції від довільного числа аргументів по набору відомих значень, розраховує ймовірності.

Таким чином, Mathematica – це, з одного боку, типова система програмування на базі одного з найпотужніших проблемних мов функціонального програмування високого рівня, призначена для вирішення різних завдань (в тому числі і математичних), а з іншого – інтерактивна система для розв’язання більшості математичних задач в діалоговому режимі без традиційного програмування [9].

3.2 Опис програми

Для розв’язання крайової задачі (2.6) – (2.8) для реалізації методу двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова була складена програма. Дана програма виконана з використанням можливостей пакета Mathematica 10.0, які дозволяють створювати програмні продукти у формі електронних документів.

Порядок використання електронного документу для розглянутого метода:

- а) задання початкових даних (задання параметрів задачі, вигляд нелінійної правої частини рівняння, початкового наближення);
- б) обчислення коефіцієнтів формули Гауса;
- в) обчислення коефіцієнтів першого наближення;
- г) реалізація ітераційного процесу (в результаті виводиться похибка між поточним та попереднім наближенням, а також час виконання кожної ітерації);
- г) побудова поверхні наближеного розв’язку, його ліній рівня.

Лістинг програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

У одиничному квадраті $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$ розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(1 + u^q), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &> 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

де $\lambda > 0$, $0 < q < 1$.

До задачі (4.1) приводить багато фізичних, хімічних процесів, зокрема, задача вибору моделі популяції у генетиці. Проводячи експерименти з різними значеннями параметрів q та λ цієї моделі, матимемо змогу більш детально проаналізувати застосування методу двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна для знаходження розв'язку задачі (4.1) та з'ясувати вплив значень параметрів на результати обчислень.

Для отримання розв'язку задачі використовуємо пакет Mathematica 10.0. За критерій зупинки ітерацій оберемо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon,$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Для розглядуваної області функція $\omega(x_1, x_2)$, яка описує її геометрію та побудована відповідно до методу R -функцій, матиме вигляд

$$\omega(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1) \wedge_0 x_2(1 - x_2),$$

де $x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ – знак R -кон'юнкції.

Нехай $\lambda = 1$, $q = 0.1$.

Точність $\varepsilon = 10^{-4}$ була досягнута на дев'ятій ітерації. В таблиці 4.1 представлено значення похибок для кожної ітерації. На рис. 4.1 представлено поверхню наближення $u^{(9)}$, а на рис. 4.2 – лінії рівня:

Таблиця 4.1 – Значення похибки ε_k для кожної ітерації k

Номер ітерації k	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Похибка ε_k	$\varepsilon_1 = 0,30 \cdot 10^{-1}$	$\varepsilon_2 = 0,16 \cdot 10^{-1}$	$\varepsilon_3 = 0,82 \cdot 10^{-2}$
Номер ітерації k	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
Похибка ε_k	$\varepsilon_4 = 0,39 \cdot 10^{-2}$	$\varepsilon_5 = 0,18 \cdot 10^{-2}$	$\varepsilon_6 = 0,85 \cdot 10^{-3}$
Номер ітерації k	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$
Похибка ε_k	$\varepsilon_7 = 0,39 \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_8 = 0,18 \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_9 = 0,8 \cdot 10^{-4}$

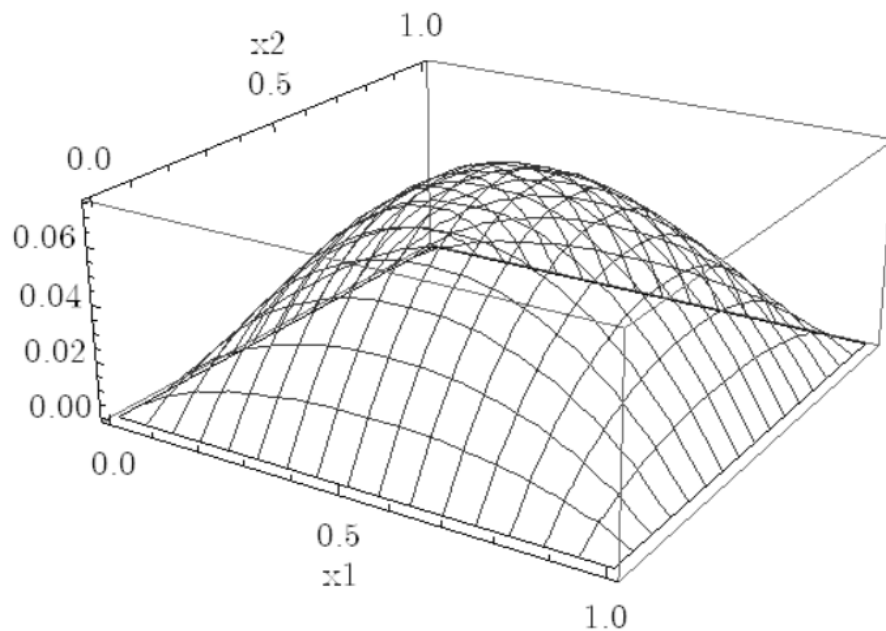


Рисунок 4.1 – Поверхня наближення $u^{(9)}$,
область визначення – квадрат ($\lambda = 1$, $q = 0,1$)

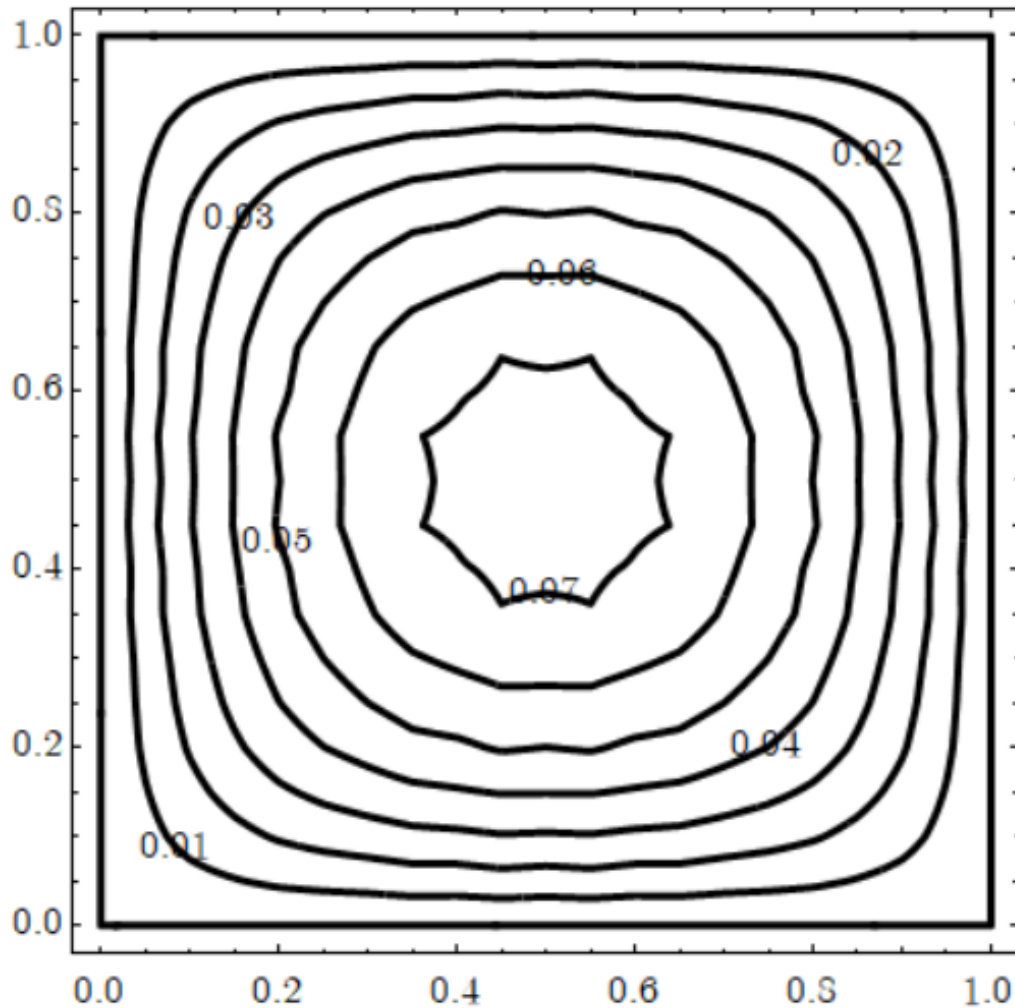


Рисунок 4.2 – Лінії рівня наближення $u^{(9)}$,
область визначення – квадрат ($\lambda = 1$, $q = 0,1$)

Випадки з іншими значеннями параметрів, наведеної в таблиці 4.2.

Як бачимо, зі збільшенням значення q збільшується як кількість ітерацій, так і норма розв'язку.

Отримані результати було порівняно з результатами з атестаційної роботи ст. гр. ПМм-19-1 Границі Ю.А. Результати добре узгоджені. Відносна розбіжність результатів складає близько кілька відсотків.

Таблиця 4.2 – Значення норми наближеного розв’язку для різних значень параметра q

λ	q	Кількість ітерацій	$\ u\ $
1	0,1	9	0,07422
1	0,2	9	0,07463
1	0,3	9	0,07505
1	0,4	10	0,07548
1	0,5	10	0,07591
1	0,6	10	0,07635
1	0,7	10	0,07679
1	0,8	10	0,07725
1	0,9	10	0,07771

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Багато явищ в різних галузях природознавства таких, як хімія, фізики, біологія та інші, достатньо точно можуть бути описані диференціальними рівняннями, зазвичай, нелінійними. Але, точні розв'язки крайових задач можна отримати для дуже малого класу задач. Зазвичай, це доволі прості задачі, задані в простих областях.

У сучасній науці спостерігається велика зацікавленість до процесів, які відбуваються у нелінійних середовищах. Математичними моделями процесів у нелінійних середовищах є саме нелінійні крайові задачі математичної фізики, оскільки лінійні задачі не зовсім адекватно описують фізичну реальність.

Також слід зауважити, що є досить велика кількість моделей в математичній фізиці, для дослідження поведінки яких можна використовувати метод двобічних наближень на основі використання квазіфункцій Гріна-Рвачова.

Результати, отримані у атестаційній роботі, можуть знайти своє застосування у практиці розв'язання різних задач математичного моделювання. Також отримані результати можна розповсюдити на області більш складної геометрії, області у тривимірному просторі, а також на нелінійності іншого вигляду.

ВИСНОВКИ

У ході даної атестаційної роботи був зроблений системний аналіз системи «Розв’язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння»: наведені вербальна, морфологічна, функціональна, інформаційна та технологічна моделі системи. За допомогою методу аналізу ієрархій проведена оцінка і рекомендації щодо вибору методу вирішення задачі.

З розглянутих методів для розв’язання крайової задачі математичної фізики з крайовими умовами, було обрано метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова.

У результаті виконання даної атестаційної роботи був отриманий розв’язок крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння за допомогою методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова та порівняно з розв’язком, отриманим методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Для обчислень та графічного представлення результатів роботи використовувався математичний пакет Mathematica 10.0.

У теоретичній частині надані доведення існування єдиного додатного розв’язку крайової задачі та умови його існування. Також було проведено декілька експериментів, що підтвердило висновки з теорії.

В атестаційній роботі студента групи ПМм-19-1 Харківського національного університету радіоелектроніки Границі Ю. А. розглядається розв’язання тієї ж крайової задачі, але для цього застосовується метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Була проведена перевірка результатів, яка виявила, хоча, деякі різні значення, але незначні. На основі цього, можна зробити висновок о достовірності отриманих результатів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
2. Gazzola F., Malchiodi A. Some remarks on the equation $-\Delta u = \lambda(1+u)^p$ for varying λ , p and varying domains // Comm. Partial Differential Equations. 2002. № 27. P. 809-845.
3. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
4. Cohen D. S., Keller H. B. Some positive problems suggested by nonlinear heat generation // Journal of Mathematics and Mechanics. 1967. V. 16. P. 1361-1376.
5. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
6. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1987. V. 11, № 5. P. 623-632.
7. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
8. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2017. № 2. С. 250-259.
9. Wolfram Language&System. Documentation Center. URL : <https://reference.wolfram.com/language/> (дата звернення: 02.12.2020).