

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

О.М. Нікітенко

MAPLE: РОЗВ’ЯЗАННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ТА НАУКОВИХ ЗАДАЧ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів спеціальностей напрямків
"Метрологія та вимірювальна техніка", "Специфічні категорії",
"Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології", "Метрологія,
стандартизація та сертифікація"

Харків 2014

УДК 004.94

*Гриф надано Міністерством
освіти і науки України
(Лист від 16 квітня 2010 р. № 1/11–3189)*

Нікітенко О.М. Maple: Розв’язання інженерних та наукових задач: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 289 с.

ISBN 978–966–659–177–0

Навчальний посібник присвячено математичному пакету Maple – найновішій системи символьної (аналітичної) математики. Розглянуто основні правила роботи в середовищі цього пакета, методи та засоби розв’язання задач з моделювання процесів вимірювання, графічним побудовам та математичній статистиці. Окремий розділ присвячено математичним моделям у наукових дослідженнях. Посібник побудовано на досвіді викладання автора. Наведено багато прикладів розв’язання задач.

Посібник призначено для студентів, науково-технічних співробітників та викладачів вищих навчальних закладів.

Іл.: 113. Табл.: 13. Бібліогр. наймен.: 41

Рецензенти

Д.М. Ваврів, д-р фіз-мат. наук, проф., чл.-кор. НАНУ

О.М. Литвин, д-р фіз-мат. наук, проф. (Українська інженерно-педагогічна академія)

О.В. Грицунов, д-р фіз-мат. наук, проф. (Харківська національна академія міського господарства)

ISBN 978–966–659–177–0

© О.М. Нікітенко, 2014

ЗМІСТ

Вступ.....	6
Частина 1. Основи роботи Maple.....	14
1 Інтерфейс Maple.....	14
1.1 Інтерфейс робочого документа.....	15
1.2 Інтерфейс довідкової системи.....	17
1.3 Інтерфейс двовимірної графічної системи.....	18
1.4 Інтерфейс тривимірної графічної системи.....	21
Завдання до самоперевірки.....	23
2 Синтаксис мови Maple.....	24
2.1 Прості обчислення.....	24
2.2 Обчислення суми ряду, добутку та границі.....	27
2.3 Основні типи даних.....	29
2.4 Операції з формулами.....	33
2.5 Похідні та інтеграли.....	37
2.6 Пакети розширень	38
Задачі	41
3 Графіка в Maple.....	47
3.1 Двовимірна графіка	48
3.1.1 Суміщення графіків	53
3.1.2 Анімація графіків	53
3.1.3 Побудова графіка неявної функції	54
3.1.4 Побудова графіка функції, яку задано параметрично	54
3.1.5 Побудова графіків лініями однакового рівня	55
3.1.6 Графік щільності	56
3.1.7 Графік векторного поля градієнта	57
3.1.8 Графік векторного поля	58
3.1.9 Побудова набору точок	58
3.1.10 Побудова графіків у логарифмічному масштабі	59
3.1.11 Суміщення графіків, які побудовано різними функціями	60
3.2 Тривимірна графіка	61
3.3 Геометричні пакети	67
3.3.1 Планіметрія	67
3.3.2 Стереометрія	70
3.4 Фазові портрети	71
Задачі	75
Частина 2. Чисельні методи та їх реалізація в Maple	77
4 Інтерполяція	77
4.1 Метод поліномів	78
4.2 Метод Ньютона	80
4.3 Метод Лагранжа	81
4.4 Метод сплайнів	83
4.5 Метод найменших квадратів	88

Задачі	94
5 Обчислення коренів рівнянь та систем рівнянь	95
5.1 Метод дихотомії	96
5.2 Метод хорд	98
5.3 Метод простої ітерації	99
5.4 Метод дотичних	101
5.5 Системи рівнянь	106
5.5.1 Метод Гауса	106
5.5.2 Ітераційний метод Гауса-Зейделя	107
Задачі	111
6 Чисельне інтегрування	112
6.1 Метод прямокутників	112
6.2 Метод трапецій	113
6.3 Метод Сімпсона	114
Задачі	120
7 Звичайні диференційні рівняння	121
7.1 Метод Ейлера (метод Рунге-Кутта першого порядку)	121
7.2 Метод Рунге-Кутта четвертого порядку	122
7.3 Методи прогнозу-корекції	124
7.4 Метод диференційних перетворень	126
Задачі	141
8 Диференційні рівняння з частинними похідними	142
8.1 Метод відокремлення змінних	142
8.2 Метод R-функцій	147
8.3 Розв'язання диференційних рівнянь у частинних похідних за допомогою пакета Maple	151
8.4 Чисельне розв'язання диференційних рівнянь у частинних похідних	161
Задачі	164
9 Статистична обробка даних у Maple	176
9.1 Визначення вибірки	176
9.2 Чисельні характеристики випадкових величин	179
9.3 Визначення функції та щільності розподілу випадкових величин	182
9.4 Критерії згоди	188
9.5 Регресійний аналіз	193
Задачі	205
10 Наукові дослідження з Maple	209
10.1 Рух заряджених частинок у системах зі схрещеними полями	209
10.1.1 Рух заряджених частинок у плоских системах	209
10.1.2 Рух заряджених частинок у циліндричних системах	210
10.2 Динамічні системи	215
10.2.1 Рівняння Ван дер Поля	215
10.2.2 Рівняння Дюффінга	219
10.2.3 Рівняння Лоренця	223

10.3 Моделювання та розрахунки електронних схем	238
10.3.1 Аналоговий фільтр	239
10.3.2 Цифровий фільтр	241
10.3.3 Тунельний діод	246
Перелік посилань	249
Додатки	255
Предметний покажчик	283

ВСТУП

Широке проникнення інформаційних технологій в усі галузі людської діяльності висуває підвищені вимоги щодо комп'ютерної підготовки фахівців у вищих навчальних закладах.

Математичне моделювання фізичних процесів та явищ є однією з можливостей отримання нових наукових, технічних та технологічних знань. Одним з найдосконаліших та найефективніших засобів моделювання є моделювання за допомогою сучасних комп'ютерів. Для використання такого моделювання фахівець повинен володіти засобами та навичками реалізації математичних моделей з використанням сучасних комп'ютерів [1].

Ми стали свідками докорінних змін у науці. Ще ніколи наукові досягнення не створювали такого впливу на економіку, світогляд, спосіб життя. Наука стала однією з небагатьох галузей, де економічний ефект у кілька разів перевищує вкладені кошти. Витрати на наукові дослідження у бюджетах розвинених країн вже перевищують десятки мільярдів доларів.

Наразі не тільки в науці, але й у багатьох галузях техніки „період напіврозпаду знань” (той час, за який має оновитися половина знань, які є необхідними для успішної роботи) не перевищує 3 – 5 років.

Особливо важливим є ознайомлення з науковими досягненнями, які докорінним чином змінюють технологію наукових досліджень. Багато з них пов'язані з використанням обчислювальної техніки, застосуванням методів інформатики, з обчислювальним експериментом.

Комп'ютери, якщо їх ефективно використовувати, дозволяють під час проведення наукових досліджень отримати нові дані швидше, дешевше й з більш високою якістю. Вони здатні активізувати процес навчання, зробити більш доступними багато математичних досягнень. Сьогодні персональний комп'ютер надає можливість здійснювати змістовні дослідження, використовуючи велику частину математичних моделей фізики, хімії, біології.

Комп'ютери дозволяють не тільки здійснювати обчислення з великою точністю й досліджувати найскладніші процеси. Вони допомогли по-новому подивитися на багато фізичних та математичних теорій, призвели до виникнення нових ідей, методів, до розробки міждисциплінарних підходів тощо [2].

Навіть невеличка дослідницька або конструкторська проблема складається з ряду етапів, для виконання яких необхідно багаторазово звертатися за допомогою до комп'ютера. Постановка задачі, її уточнення, аналіз найпростіших моделей та ключових факторів, детальне дослідження, побудова обчислювальної моделі, отримання результатів тощо.

За Р.В. Гемінгом [3] сформулюємо кілька загальних зауважень про розв'язання задачі за допомогою комп'ютера. Перед тим як розпочинати комп'ютерне дослідження математичної задачі, необхідно детально продумати декілька запитань:

- Що відомо про вихідну задачу? Тобто, які властивості вона має й чи вся інформація враховується під час розв'язання задачі. Якими є вхідні дані, який інтервал їх зміни і як ці зміни можуть вплинути на процес розв'язання?
- Що приблизно ми хочемо отримати в результаті розв'язання, як повинен виглядати розв'язок?
- Як досягнути результату? У першу чергу це вимагає вибору засобу (аналітичне дослідження або чисельний аналіз) й методів розв'язання задачі, необхідного інструмента (програмного продукту). Бажано поміркувати про вибір найкращого методу, тобто такого, який призводить до правильного результату за найкоротший час. З'ясувати, як перевірятимуться результати, які отримані на кожному кроці розв'язання. Це стосується як безпосередньо програмування, так і коректності отриманих результатів.

- Скільки зусиль потребує розв'язання поставленої задачі? Під зусиллями тут вважається кількість витраченого часу для створення і відлагоджування обчислювальної програми, або освоєння пакета, витрат машинного часу на розв'язання задачі. Завжди слід задумуватися, коли будуть отримані остаточні результати [1].

У науковому дослідженні базою обчислювальної науки слугує математична модель фізичного явища, що нас цікавить. Рівняння математичної моделі перетворюють у дискретну алгебраїчну форму, яку можна розв'язувати чисельно. Дискретні алгебраїчні рівняння описують обчислювальну модель, яка, якщо її перекласти на послідовність машинних команд, надає програму моделювання для обчислювальної машини. Після цього комп'ютер та програма дозволяють дослідити еволюцію модельної фізичної системи в обчислювальних експериментах.

Поєднання обчислювального експерименту, фізичного експерименту та теорії виявляється значно більш ефективним при отриманні фізично корисних результатів, ніж будь-який з цих методів окремо або поєднання будь-яких двох з них. Для отримання результатів теорія використовує математичний аналіз та чисельну оцінку, фізичний експеримент використовує прилади та обробку даних, а обчислювальний експеримент використовує комп'ютер та програму моделювання. Недоліки кожного методу досліджень компенсуються перевагами інших методів. Роль обчислювального експерименту визначається його перевагами: можливістю доповнити теоретичні дослідження у випадках, коли важливу роль відіграють нелінійність, велика кількість ступенів волі або відсутність симетрії, а також доповнити експериментальні дослідження, коли прилади є дорогими, дані є недоступними для безпосереднього вимірювання або явища надто складні.

Базовим пунктом усіх обчислювальних експериментів є якесь фізичне явище. Їх мета полягає в отриманні фізично корисних результатів. Між цими двома пунктами можна виділити ряд етапів.

Кожен етап додає свої обмеження. Як завжди, математичне формулювання є лише наближеним описом фізичного явища. Не можна безпосередньо сприйняти рівняння у готовому вигляді. Необхідно знати, які спрощуючі припущення зроблено, щоб визначити ті випадки, коли є справедливими ці рівняння, а отже, й його обчислювальна модель.

Етапи, що призводять до чисельного експерименту, містять процес “самонастроювання”, в якому знаходять найкращий компроміс між якістю зображення та обчислювальними витратами. Після того, як його встановлено, можна будувати “прилад” – програму моделювання. Як й з реальним приладом, необхідно приділяти багато уваги побудові програми для того, щоб гарантувати, що вона працює належним чином [4].

Наразі у науковому програмуванні відбувається серйозна трансформація: розвиваються інтегровані середовища, які базуються на алгоритмічних мовах, й зростає застосування універсальних математичних систем (Maple, Mathematica, MATLAB, MatCad тощо). Ці системи мають дружній інтерфейс, реалізують багато стандартних та спеціальних математичних операцій, мають потужні графічні засоби й власні мови програмування. Все це надає широкі можливості для ефективної роботи фахівцям різноманітних галузей, про що свідчить активне застосування математичних пакетів у наукових дослідженнях та у викладанні. За допомогою цих пакетів простіше виконувати завдання, здійснювати демонстрації, презентації й значно швидше розв’язувати наукові та інженерні задачі.

Пакети надають можливість швидко здійснити необхідний чисельний експеримент, перевірити ту чи іншу гіпотезу, швидко випробувати різноманітні методи й підходи щодо розв’язання задач, з’ясувати межі використання методів.

При організації комп’ютерної підтримки освіти та науки можна виділити два напрямки:

- розробка комп’ютерних програм відповідного призначення;

- використання програмного забезпечення, яке розроблено для професійної діяльності у відповідній галузі знань; для більшості природничих наук – це професійні математичні пакети.

Під професійними математичними пакетами розуміють системи, середовища, мови типу Mathematica, Maple, MATLAB, Derive, Mathcad, а також сім'ю систем статистичного аналізу даних – таких як SPSS, Statistica, Statgraphics, Stadia тощо. Професійні математичні пакети – це програми (пакети програм), які мають засоби для виконання різноманітних чисельних та аналітичних (символьних) математичних розрахунків, від найпростіших арифметичних обчислень, до розв'язання рівнянь з частинними похідними, розв'язання задач оптимізації, перевірки статистичних гіпотез, засобів конструювання математичних моделей та іншими інструментами, що є необхідними для здійснення різноманітних технічних розрахунків. Всі вони мають розвинені засоби наукової графіки, зручну довідкову систему, а також засоби оформлення звітів.

Математичні пакети Maple та MATLAB є інтелектуальними лідерами на ринку математичних пакетів. Самі пакети постійно вдосконалюються, розвиваючи апарат й поповнюючи ресурси. Пакет Maple та обчислювальне середовище MATLAB є універсальними, потужними й добре організованими системами, надійними й простими в роботі. Великою перевагою пакетів є незмінність набору основних команд та конструкцій мови при з'явленні нових версій, що дозволяє суміщати файли різних версій.

Методи та форми застосування комп'ютерних технологій у навчальному та науковому процесах є актуальною задачею.

Враховуючи, що під час навчання увага приділяється розв'язанню задач у загальному вигляді, то доцільно використовувати саме пакет Maple. Перед усім його орієнтовано саме на аналітичне розв'язання задач, з іншого боку пакет Maple з великим успіхом використовується більше, ніж у 400 провідних університетах світу [5].

Спектр задач, які можна розв'язувати за допомогою пакета Maple:

- здійснення математичних досліджень, які вимагають обчислень та математичних викладок;
- розробка та аналіз алгоритмів;
- математичне моделювання та комп'ютерний експеримент;
- аналіз та обробка даних;
- візуалізація, наукова та інженерна графіка;
- розробка графічних та розрахункових застосунків.

Математичний опис фізичних процесів призводить до диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь. Широкий клас фізичних процесів описується лінійними диференціальними рівняннями другого порядку.

Через безперервно зростаючі потреби щодо якості, економічності, надійності, швидкодії, зниження матеріалоемності устаткування, сучасні інженерні обчислення все більше ускладнюються. Вони повинні враховувати всі фактори, які здійснюють вплив на роботу сучасного устаткування: режими експлуатації, властивості матеріалів, оточуючі умови тощо.

При цьому необхідно дотримуватися базових показників надійності, міцності та довговічності.

Через це в обчисленнях все ширше застосовуються теоретичні результати, які точно математично описують задачу, і все менше використовуються орієнтовні, наближені залежності.

Розв'язання математичних задач, які виникають перед фахівцем, неможливо без застосування обчислювальної техніки та її програмного забезпечення. Суттєво полегшити обчислення в інженерних задачах, підвищити їх якість та швидкість виконання може універсальний математичний пакет Maple компанії *Waterloo Maple*, який вважається однією з кращих програм для виконання, у першу чергу, аналітичних математичних обчислень, хоч і існує можливість здійснювати чисельні обчислення. Цінність суто аналітичних конструкцій, з якими маніпулює Maple, дозволяє уникнути похибок, що

виникають під час чисельних розв'язань, отримати зручні обчислювальні залежності, збільшити продуктивність обчислювальних експериментів. Однак у деяких випадках без застосування чисельних методів неможливо отримати розв'язок багатьох сучасних інженерних задач. У цьому випадку з успіхом можна використовувати універсальні чисельні алгоритми, які містяться в системі Maple з можливістю регулювати точність обчислень до порядків, що не доступні максимальним апаратним значенням сучасних комп'ютерів.

Досвід застосування комп'ютерної математики у ВНЗ свідчить про те, що з відомих математичних пакетів Maple є оптимальним для освітніх цілей. Ряд особливостей Maple висуває його на лідируюче місце для реалізації освітніх програм: відносно невисока вартість пакета, простий та зрозумілий інтерфейс, мова програмування є досить близькою до мови математичної логіки, надзвичайні графічні можливості. Всі ці особливості дозволяють зобразити математичну модель об'єкта або явища, які вивчають, у наочній інтерактивній графічній формі. При цьому суттєвим є те, що отримані результати легко експортуються в інші формати.

Тому метою навчального посібника є допомога студентам набути навичок роботи з пакетом символьних обчислень Maple для подальшого використання під час самостійної роботи, виконання індивідуальних завдань, курсових робіт тощо.

Використання пакета Maple в навчальному процесі дозволяє вдосконалювати форми та методи самостійної роботи студента під час вивчення теоретичних засад дисциплін. Виникає можливість більше уваги приділяти розгляду вузлових питань курсу завдяки зменшенню витрат на рутинну обчислювальну роботу, що дозволяє розвивати творчі здібності студентів.

Цей навчальний посібник присвячено аналітичним та чисельним методам розв'язання інженерних задач за допомогою пакета символьних обчислень Maple в обсязі програми технічних ВНЗ і адресується студентам та аспірантам

радіотехнічних спеціальностей і є записом лекцій, які прочитано в ХНУРЕ з 2000 р. Крім того цей посібник буде корисним для студентів та викладачів вищих навчальних закладів, а також може бути рекомендовано інженерам та науково-технічним співробітникам, які використовують у своїй роботі персональний комп'ютер.

Структура цього посібника є зручною й мотивованою тому що відповідає прийнятому у ВНЗ принципу освіти: подання теоретичного матеріалу на лекційних заняттях чергується з наступним закріпленням його на практичних та лабораторних заняттях і під час самостійної роботи. Теоретичне обґрунтування методів наведено лише для кращого розуміння та засвоєння й практичного застосування. Основну увагу приділено набуттю практичних навичок в розв'язанні обчислювальних задач, які зустрічаються в курсі вищої математики та математичної статистики.

Кожен метод, який описано в теоретичному розділі, має детально розглянуті приклади й закінчується набором практичних завдань.

1 ІНТЕРФЕЙС MAPLE

Maple є універсальним математичним пакетом.

У пакеті Maple можна працювати без знань програмування, зосереджуючи увагу на математичній суті задач. Пакет має потужні можливості графічної візуалізації обчислень.

Проста та дуже ефективна мова програмування Maple дозволяє в режимі інтерпретатора створювати складні програми як символьних обчислень (комп'ютерна алгебра), так і чисельних розрахунків. Алгоритми процедур можна автоматично перекласти у коди C, Fortran, MATLAB або Java.

Maple надає можливість в інтерактивному режимі виконувати як аналітичні, так і чисельні розрахунки, будучи, при цьому гарним науковим редактором, який виводить формули та графіку в поліграфічному форматі.

Інтерфейс програми інтуїтивно зрозумілий, правила роботи є гранично простими, а можливості величезні.

Maple є не тільки незамінним засобом у професійній роботі математиків, наукових співробітників та інженерів, студенти за його допомоги легко виконують найскладніші завдання, а наукові редактори – набір наукових текстів. Робочі документи Maple перетворюються у формати TEX, HTML, RTF, XML та ряд інших форматів, які широко використовуються. Програма підтримує мову MathML для розташування математичних публікацій в Internet.

Тут описано деякі можливості пакета Maple 11, але багато з цих можливостей є й у більш ранніх версіях, при цьому пробну версію пакета Maple можна отримати на сервері компанії *Waterloo Maple* <http://www.maplesoft.com> [5 – 7].

Як будь-яке *Windows* – застосування Maple має віконний інтерфейс, рядки команд якого дещо відрізнятимуться в залежності від таких дій:

- редагування робочого документа – стандартний інтерфейс;
- робочого аркуша;
- перегляд довідки – інтерфейс довідкової системи;
- двовимірні побудови – інтерфейс двовимірної графічної системи;
- тривимірні побудови – інтерфейс тривимірної графічної системи.

1.1 Інтерфейс робочого документа

Інтерфейс робочого документа з'являється на екрані, якщо користувач працює в робочому документі й там же розташовано курсор вводу. Вигляд такого інтерфейсу наведено на рис. 1.1. Як видно з рисунка, в рядку команд міститься вісім пунктів меню:

- ***File*** – команди для роботи з файлами сесії Maple;
- ***Edit*** – команди для роботи з окремою частиною;
- ***View*** – зміна вигляду змісту робочого документа й панелей керування;
- ***Insert*** – вставка різноманітних об'єктів і тексту у відкритий документ;
- ***Format*** – команди форматування тексту;
- ***Spreadsheet*** – команди для роботи з електронними таблицями;
- ***Window*** – команди для закриття, впорядкування та виводу списку відкритих робочих документів;
- ***Help*** – команди для роботи з довідковою системою та зміни бази даних допомоги.

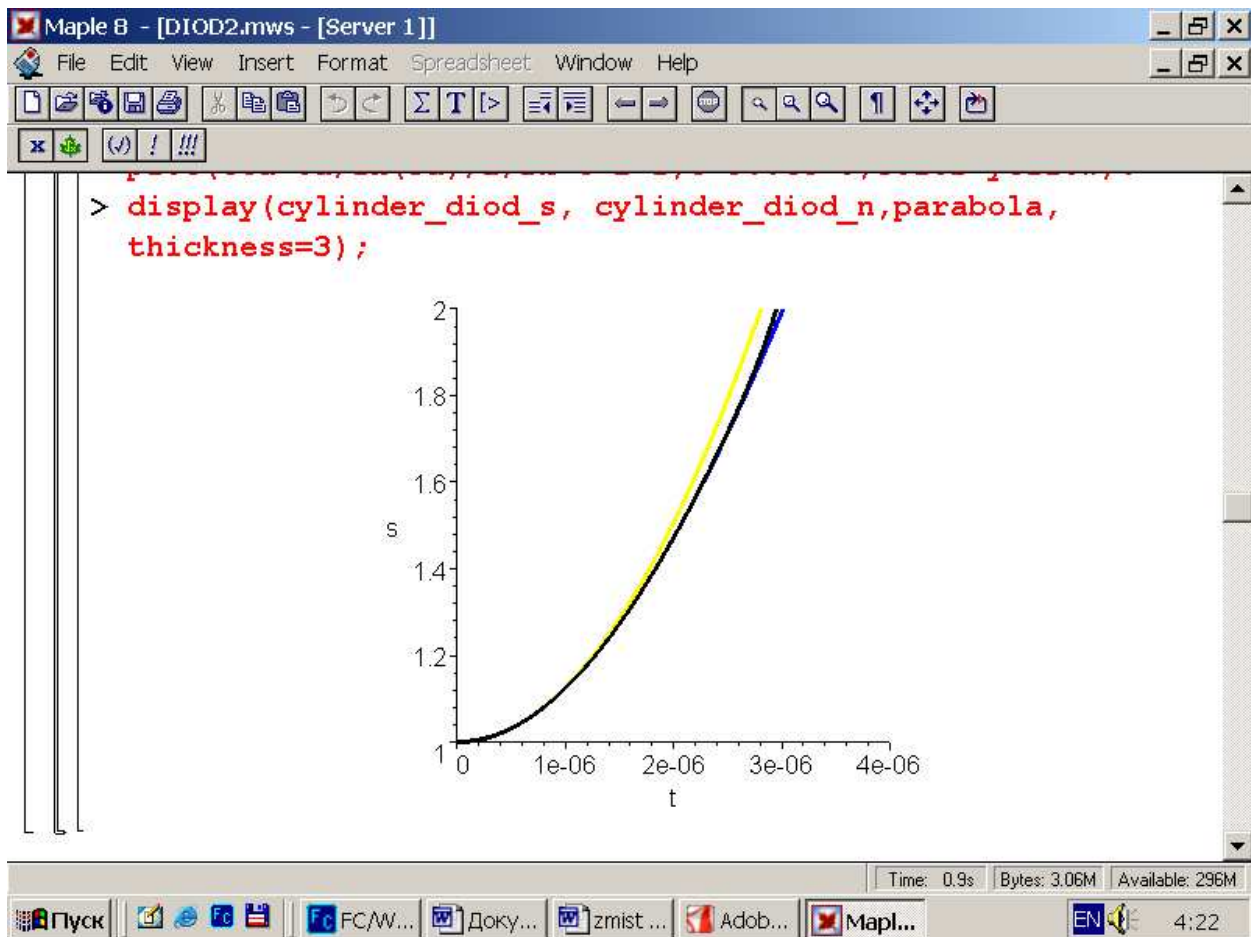





























Рисунок 1.1 – Інтерфейс робочого документа

Команди, які найчастіше використовуються під час керування робочим документом, винесено у піктографічне меню, їх опис наведено нижче.

-  – відкриття нового документа;
-  – відкриття вже існуючого документа;
-  – відкриття URL;
-  – збереження поточного документа у файлі на диску;
-  – друкування активного документа;
-  – вирізати певну частину документа та відіслати його у буфер обміну;
-  – копіювати виділену частину документа в буфер обміну;
-  – вставити зміст буфера обміну в активний документ;
-  – відмінити останню операцію редагування;
-  – повернути відмінену операцію;

-  – вставка команди Maple безпосередньо в ту частину документа, де знаходиться курсор;
-  – вставка та форматування текстового коментарю;
-  – вставка групи команд, які виконуються;
-  – перетворити виділене у підсекцію;
-  – дія, зворотна до попередньої;
-  – крок назад під час роботи з гіперпосиланнями;
-  – крок вперед під час роботи з гіперпосиланнями;
-  – перервати обчислення;
-  – мірило відображення робочого документа (100%, 150% та 200% відповідно);
-  – показати / прибрати спеціальні символи;
-  – збільшити розмір активного вікна;
-  – очистити внутрішню пам'ять;
-  – перемикає відображення рядка команд з математичної у Maple нотацію й навпаки;
-  – виконувати / не виконувати вираз;
-  – автоматична корекція синтаксису виразу;
-  – виконати поточний вираз;
-  – виконати робочий документ.

1.2 Інтерфейс довідкової системи

Maple має потужну діалогову систему контекстної допомоги. Під час роботи з довідковою системою можна побачити її інтерфейс (рис. 1.2).

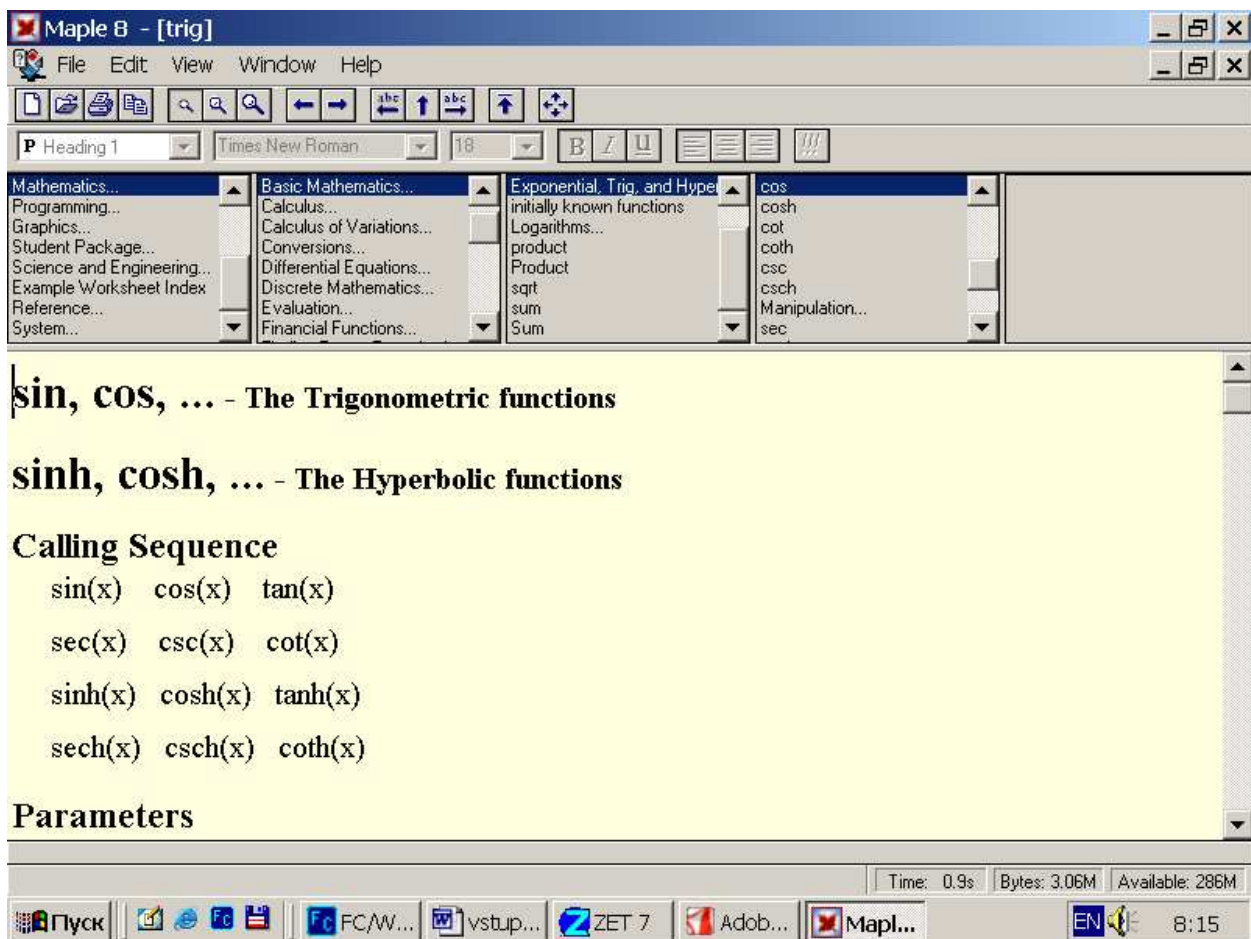


Рисунок 1.2 – Інтерфейс довідкової системи

Довідкову інформацію можна шукати за певною темою або за командою, а також за широким діапазоном доступних команд. Для отримання довідки з конкретної команди необхідно у робочому документі ввести "?" та ім'я команди, або встановити курсор на команду, яка нас цікавить, і натиснути клавішу **F1**.

1.3 Інтерфейс двовимірної графічної системи

Під час виконання графічних побудов на площині перед користувачем з'являється інтерфейс двовимірної графічної системи (рис. 1.3).

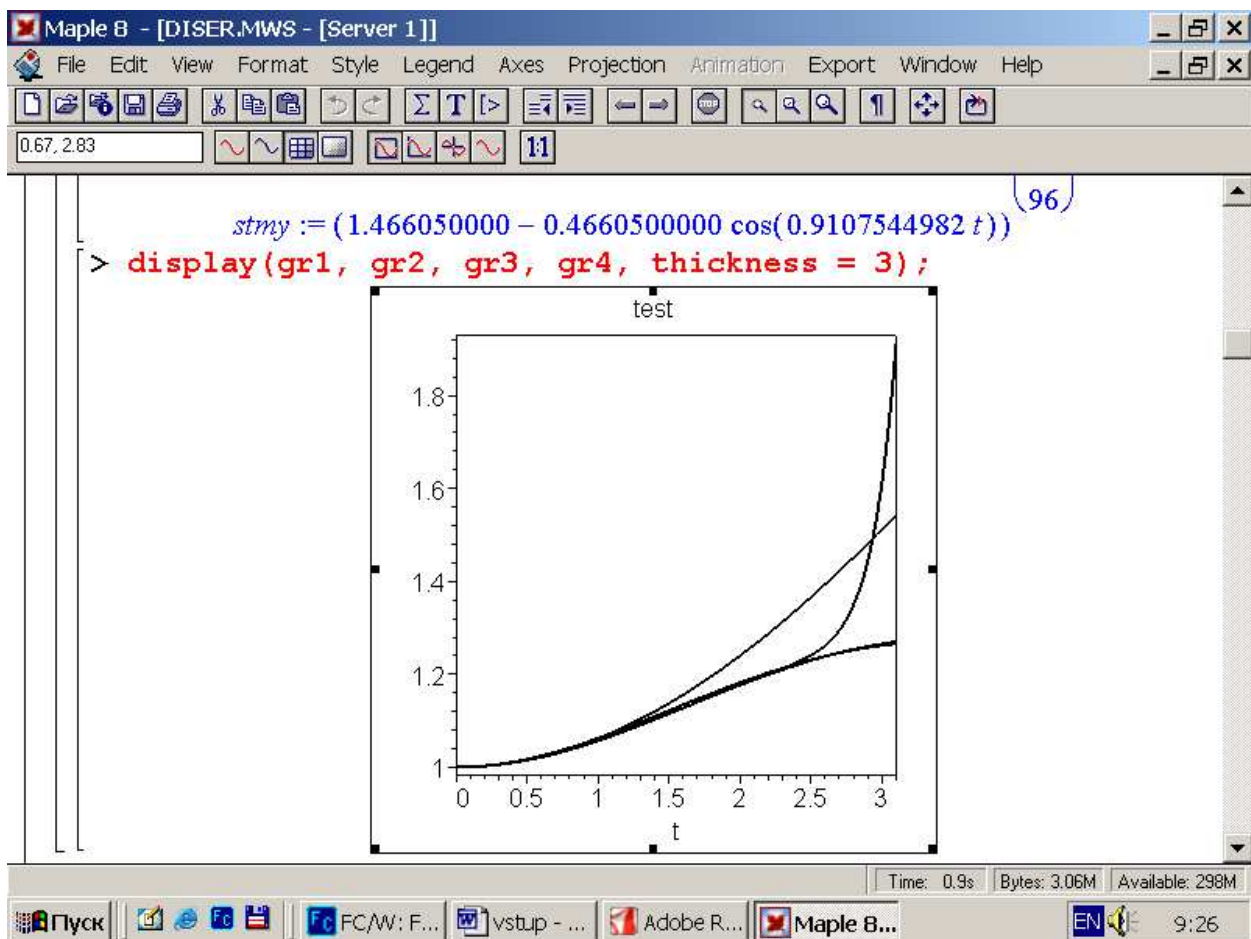


Рисунок 1.3 – Інтерфейс двовимірної графічної системи

При цьому командний рядок містить такі команди меню:

- **File** – команди для роботи з файлами сесії Maple (див. п. 1.1);
- **Edit** – команди для роботи з окремою частиною (див. п. 1.1);
- **View** – зміна вигляду змісту робочого документа й панелей керування (див. п. 1.1);
- **Format** – команди форматування;
- **Style** – визначає стиль побудови;
- **Legend** – редагування та показ легенди;
- **Axes** – керує стилем координатних осей;
- **Projection** – визначає мірило зображення;
- **Animation** – анімація графіків;
- **Export** – збереження графіки у файли різних форматів;

- **Window** – команди для закриття, впорядкування та виведення списку відкритих робочих документів (див. п. 1.1);
- **Help** – команди для роботи з довідковою системою та зміни бази даних допомоги (див. п. 1.1).

Команди керування двовимірної графічної системи, які найчастіше використовуються, винесено в піктографічне меню, опис яких наведено нижче.

 – координати курсору;



– стилі побудови;



– стилі координатних осей;



– масштабування зображення.

Керувати двовимірною графічною системою можна, використовуючи контекстне меню. Воно викликається натисканням правої клавіші мишки на полі зображення (рис. 1.4).

1.4 Інтерфейс тривимірної графічної системи

За будь-якого вигляду тривимірної побудови перед користувачем виникає інтерфейс тривимірної графічної системи (рис. 1.5).

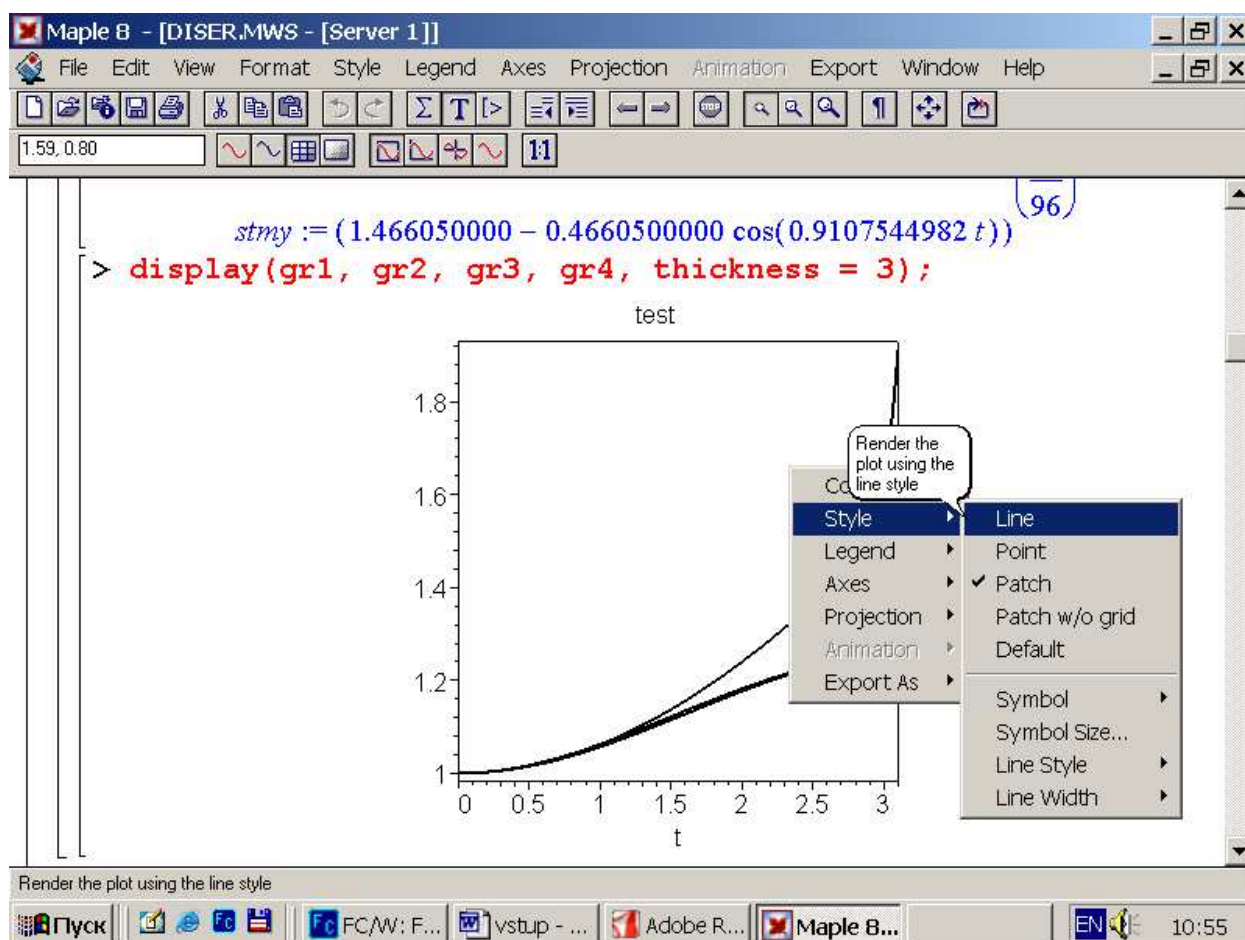


Рисунок 1.4 – Контекстне меню двовимірної графічної системи

1.4 Інтерфейс тривимірної графічної системи

За будь-якого вигляду тривимірної побудови перед користувачем виникає інтерфейс тривимірної графічної системи (рис. 1.5).

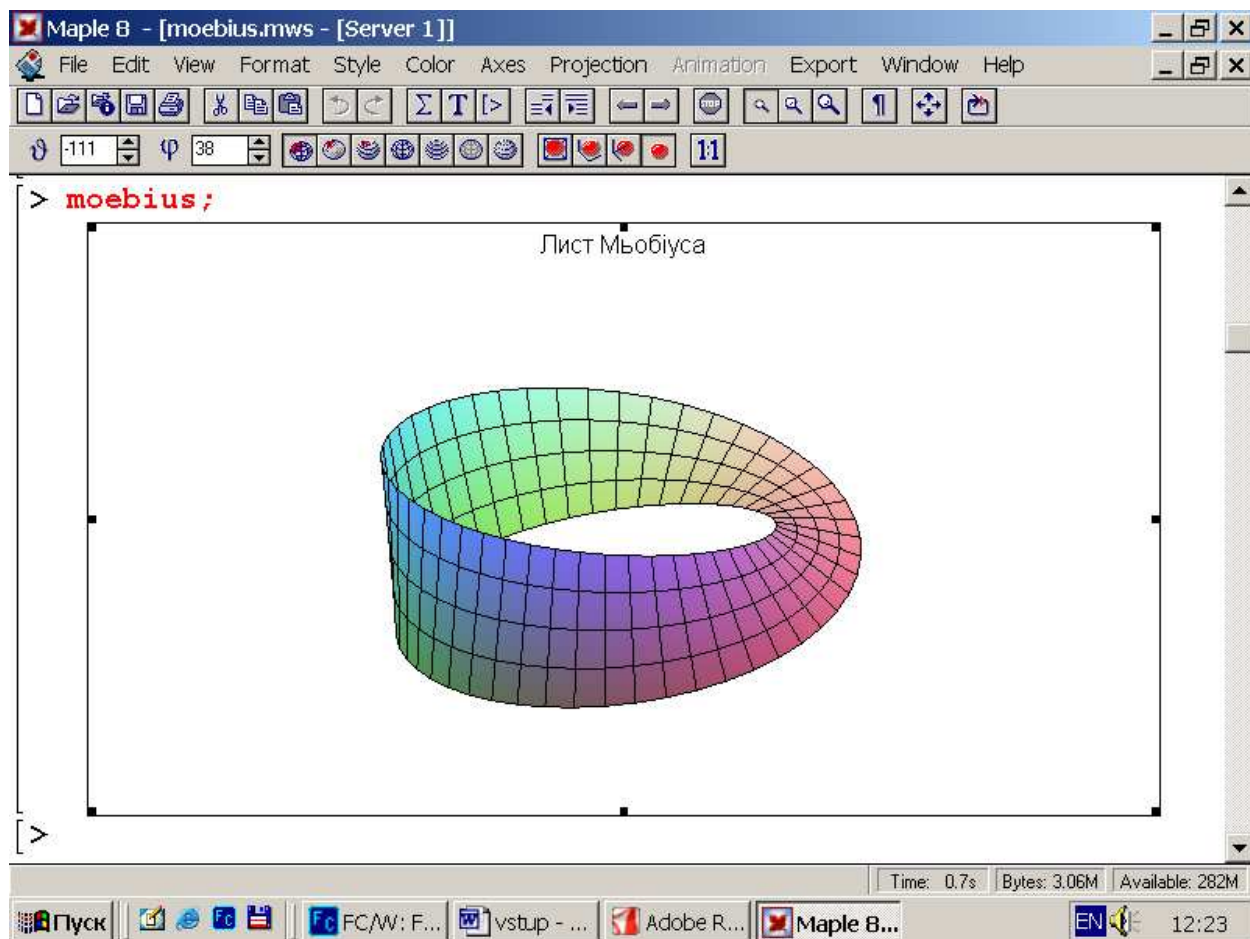



Рисунок 1.5 – Інтерфейс тривимірної графічної системи

Перелічимо пункти меню, які не описано в стандартному інтерфейсі робочого документа:

- **Style** – визначає стиль побудови;
- **Color** – визначає колір побудови;
- **Axes** – керує стилем координатних осей;
- **Projection** – визначає мірило зображення;
- **Animation** – анімація графіків;
- **Export** – збереження графіки у файли різноманітних форматів.

До піктографічного меню винесено такі команди:

 – напрямок погляду на об'єкт;

 – стилі побудови;

 – стилі координатних осей;

11 – масштабування зображення.

Завдання для самоперевірки

1. Опишіть інтерфейс робочого документа.
2. Опишіть команди інтерфейсу робочого документа.
3. Опишіть інтерфейс довідкової системи.
4. Опишіть інтерфейс двовимірної графічної системи.
5. Опишіть команди інтерфейсу двовимірної графічної системи.
6. Опишіть інтерфейс тривимірної графічної системи.

2 СИНТАКСИС МОВИ MAPLE

2.1 Прості обчислення

У Maple математичні вирази, які виконуються, вводяться завжди після символу `>`, а закінчуються крапкою з комою або двокрапкою, якщо результат не треба виводити на екран. Щоб продовжити запис речення у наступному рядку використовують комбінацію клавіш "Shift + Enter". При натисканні клавіші "Enter" речення виконується. Виявивши помилку, Maple виводить повідомлення про неї у наступному рядку.

```
> 3+5;
```

8

```
> 23*10/5;
```

46

```
> 6-4/3;
```

$\frac{14}{3}$

```
> 2.75/4;
```

0.6875000000

```
> 8/0;
```

Error, numeric exception: division by zero

Цілі числа в Maple мають найвищий пріоритет, тому $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, а не 2,5.

Завжди можна отримати результат у вигляді десяткового дробу за допомогою функції перетворення **evalf** (*вираз*, [точність]).

```
> evalf(3-1/2);
```

2.500000000

```
> evalf(235/213);
```

1.103286385

```
> evalf(235/213,5);
```


1.1033

```
> evalf(235/213,25);
```

1.103286384976525821596244

За замовчуванням Maple здійснює обчислення з точністю до десятого знака після коми, однак, задаючи необов'язковий параметр *точність* у функції **evalf**, можна як зменшити, так і збільшити це значення.

Якщо є потреба змінити точність обчислень для всіх виразів, то для цього необхідно присвоїти відповідне значення змінній **Digits**.

> Digits := 15:

```
> evalf(35/17);
```

2.05882352941176

Крім звичайних знаків математичних операцій використовують додаткові, які наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Додаткові математичні операції

** або ^	піднесення до степеня
!	факторіал
:=	знак присвоювання
<, >, <=, >=, =	логічні операції
%	результат попередньої операції

Якщо число, яке отримано в результаті обчислень, не вміщується в одному рядку, Maple використовує символ "\" щоб показати, що число є неперервним.

$$> 90!$$

148571596448176149730952273362082573788556996128468876694221686370498

93094065876545992131370884059645617234469978112000000000000000000

У Maple використовують загальноприйняті назви основних математичних функцій, що наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Основні математичні функції

Функція	Опис
abs	модуль
sqrt	квадратний корінь
log	звичайний логарифм
log10	десятинний логарифм
ln	натуральний логарифм
exp	експонента
round	округлення
trunc	відкидання дробової частини
frac	дробова частина
Re	дійсна частина комплексного числа
Im	умовна частина комплексного числа
argument	аргумент комплексного числа

Тригонометричні функції, які використовуються в Maple, наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Тригонометричні, гіперболічні та зворотні функції

Функція	Опис
sin	синус
cos	косинус
tan	тангенс
cot	котангенс
sec	секанс
csc	косеканс
sinh	гіперболічний синус
cosh	гіперболічний косинус
tanh	гіперболічний тангенс
coth	гіперболічний котангенс
sech	гіперболічний секанс
csch	гіперболічний косеканс
arcsin	арксинус
arccos	арккосинус
arctan	арктангенс
arccot	арккотангенс
arcsec	арксеканс
arcsec	арккосеканс
arcsinh	арксинус гіперболічний
arccosh	арккосинус гіперболічний

arctanh	арктангенс гіперболічний
arccoth	арккотангенс гіперболічний
arcsech	арксеканс гіперболічний
arccsch	арккосеканс гіперболічний

Математичні константи наведено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 –Математичні константи

Константа	Опис
Pi	π
I	$i = \sqrt{-1}$
exp	експонента
infinity	∞

У Maple відрізняють малі і великі літери.

2.2 Обчислення суми ряду, добутку та границі

Обчислення суми членів якоїсь послідовності $f(k)$ при зміні цілочисельного індексу k від значення m до значення n , тобто

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n-1) + f(n)$$

є досить розповсюдженою операцією в математиці. Для обчислення та зображення сум у Maple слугують функції **sum** і **Sum**.

Обчислення суми

> sum(k^3,k=1..10);

3025

Зображення суми

> Sum(k^3,k=1..10);

$$\sum_{k=1}^{10} k^3$$

Багато нескінчених сум збігаються до певних значень і Maple здатен їх обчислити.

> Sum(1/k!,k=0..infinity)= sum(1/k!,k=0..infinity);

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

> Sum(1/k^2,k=1..infinity)= sum(1/k^2,k=1..infinity);

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Для обчислення та зображення добутку у Maple слугують функції **product** і **Product**.

> Product(k^3,1..4)= product(k^3,1..4);

$$\prod_{k=1}^4 k^3 = 13824$$

Для обчислення границь слугують функції **limit** та **Limit**.

Обчислимо границю функцію $y = \frac{x^2}{x+3}$ у точці $x = 2$.

> Limit(x^2/(x+3),x=2)=limit(x^2/(x+3),x=2);

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

Границя функції $\frac{2}{x^2}$ в точці $x = 0$.

> Limit(2/x^2,x=0)=limit(2/x^2,x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = \infty$$

Праворуч від нуля

> Limit(2/x^2,x=0,right)=limit(2/x^2,x=0,right);

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} = \infty$$

Ліворуч від нуля

> Limit(2/x^2,x=0,left)=limit(2/x^2,x=0,left);

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} = \infty$$

Перша важлива границя

> **Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x)/x),x=0);**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Друга важлива границя

> **Limit((1+1/n)^n,n=infinity)=limit((1+1/n)^n,n=infinity);**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2.3 Основні типи даних

Розглянемо основні типи даних, з якими оперують під час виконання різноманітних обчислень. Для перевірки приналежності виразу до певного типу даних слугують дві функції:

- **whattype(вираз)** повертає тип виразу;
- **type(вираз, тип)** повертає *true* (істина), якщо *вираз* належить до вказаного *типу*, й *false* (хибність) у протилежному випадку.

Цілі. Вираз належить до цілого типу (тип ***integer***), якщо він складається з послідовності цифр, які не розділені між собою ніякими знаками. У Maple 10 обмеження на довжину цілих чисел – 228 цифр.

Числа типу ***integer*** можуть бути як додатними, так і від’ємними.

Дробові. Дроби (тип ***fraction***) зображуються у вигляді:

$$\frac{a}{b},$$

де *a* – ціле число зі знаком, *b* – ціле число без знака.

У виразі типу ***fraction*** обов’язково є два поля: чисельник та знаменник, які можна отримати функцією **op**.

```
> op(-11/16);
```

```
-11, 16 .
```

Числа з плаваючою точкою. Числа з плаваючою точкою (тип *float*) можна визначити так:

1. послідовність чисел, які розділено крапкою:

а) *<integer>.<integer>*

б) *<integer>.*

в) *.<integer>*

2. у вигляді: *Float(M, E)*, тобто $M \cdot 10^E$.

```
> Float(3,2);
```

```
300.
```

Рядкові типи. Вираз рядкового типу (тип *string*) – це послідовність символів, які містяться між подвійними лапками.

```
> str:="Це рядок!";
```

```
str := "Це рядок!"
```

Над виразами рядкового типу можна здійснювати ряд операцій.

Можна визначити довжину рядка за допомогою функції **length**

```
> length(str);
```

```
9 .
```

З рядка можна добути підрядок за допомогою функції **substring(рядок,діапазон)**

```
> substring(str,4..8);
```

```
"рядок" .
```

Булеві вирази. Булеві вирази (тип *boolean*) можуть мати одне з двох значень: *true* (істина) або *false* (хибність). У булевих виразах можна

використовувати такі оператори **and**, **or**, **xor**, **implies**, **not**, а також оператори відношень **<**, **<=**, **>**, **>=**, **=**, **<>**. Функція **evalb** обчислює складні логічні вирази.

```
> evalb(5>3);
```

true

Послідовності. Послідовність (тип *exprseq*) – набір елементів, які розділено комами, без дужок.

```
> S:=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;
```

S := 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Для генерації послідовностей слугує функція **seq(вираз, діапазон):**

```
> seq(i,i=1..10);
```

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

```
> seq(i^3,i=1..10);
```

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

Послідовність можна також отримати за допомогою оператора формування послідовності – **\$**.

```
> $1..5;
```

1, 2, 3, 4, 5

```
> a[i] $ i=1..5;
```

a₁, a₂, a₃, a₄, a₅

```
> x$5;
```

x, x, x, x, x

Порожня послідовність позначається як **NULL**.

Множини. Множина (тип *set*) – набір елементів, які розділено комами та містяться у фігурних дужках. Для множин є дійсними всі правила перетворення, які прийнятні у класичній математиці.

Визначення множини

```
> mnog:={1,2,3,4,7,5};
```

кількість елементів множини визначається функцією **nops**(вираз)

```
> nops(mnog);
```

6

Об'єднання (логічне додавання або диз'юнкція) множин

```
> {1, 2, 3, 4} union {3, 4, 5, 6};
```

{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 } .

Перетин (логічне множення або кон'юнкція) множин

```
> {1, 2, 3, 4} intersect {3, 4, 5, 6};
```

{ 3, 4 } .

Різниця множин

```
> {1, 2, 3, 4} minus {3, 4, 5, 6};
```

{ 1, 2 }

Списки. Список (тип *list*) – набір елементів, які розділено комами й містяться у квадратних дужках.

```
> z:=[q,w,e,r,t];
```

Масиви. Масив (тип *array*) – кінцевий список з цілочисельними індексами. Для створення масиву слугує функція **array**.

```
> C:=array(1..2, 1..2, [[x^3, 3], [sin(x), 2.33]]);
```


$$C := \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ \sin(x) & 2.33 \end{bmatrix}.$$

Функція **map**(процедура, вираз, аргументи) дозволяє виконувати будь-яку операцію над усіма елементами масиву.

Продиференціювати

> **map(diff,C,x);**

$$\begin{bmatrix} 3x^2 & 0 \\ \cos(x) & 0 \end{bmatrix}$$

добути корінь

> **map(sqrt,C);**

$$\begin{bmatrix} \sqrt{x^3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{\sin(x)} & 1.526433752 \end{bmatrix}.$$

Таблиці. На відміну від масиву, де індекси мають цілочисельні значення, які розташовані за порядком номерів, індекси у таблиці (тип *table*) – будь-які значення.

Якщо індекси не визначено, то Maple присвоює за порядком цілочисельні індекси

> **A:=table([Аврамова,Влащенко,Грищенко]);**

A := table(1 = Аврамова, 2 = Влащенко, 3 = Грищенко)

> **A[2];**

`Влащенко`

Індекси таблиці можна присвоювати задовільно.

> **B:=table([(перша)=Аврамова, (друга)=Влащенко, (третя)=Грищенко]);**

B:=table({перша = Аврамова, друга = Влащенко, третя = Грищенко})

> **B[друга];**

`Влащенко`

2.4 Операції з формулами

Під час роботи з математичними виразами виконують такі операції, як зведення подібних членів, розкриття дужок, розвинення на множники. В пакеті Maple це можна зробити за допомогою спеціальних функцій, перелік яких наведено в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5 – Спеціальні функції

Функція	Опис
simplify	спростити вираз
factor	розвинути на множники
expand	розкрити дужки
normal	звести вираз до „нормального” вигляду
convert	переписати у заданому вигляді
coeff	виділити коефіцієнти поліному
collect	зібрати разом частини виразу
combine	перетворення виразів

Спростити вирази

```
> vyr := sin(x)^2+cos(x)^2;
```

$$\text{vyr} := \sin(x)^2 + \cos(x)^2$$

```
> simplify(vyr);
```

$$1$$

```
> vyr := cos(x)^5+sin(x)^4+2*cos(x)^2-2*sin(x)^2-cos(2*x);
```

$$\cos(x)^5 + \sin(x)^4 + 2 \cos(x)^2 - 2 \sin(x)^2 - \cos(2x)$$

```
> simplify(vyr);
```

$$\cos(x)^4 (\cos(x) + 1)$$

Розвинути вираз на множники

```
> vyr:=x^2+18*x-24;
```

$$6x^2 + 18x - 24$$

> factor(vyr);

$$6(x + 4)(x - 1)$$

Розвинути число на множники

> ifactor(234);

$$(2)(3)^2(13)$$

Розкрити дужки

> vyr := (x+1)*(x+2);

$$vyr := (x + 1)(x + 2)$$

> expand(vyr);

$$x^2 + 3x + 2$$

> vyr := (x+1)/(x+2);

$$vyr := \frac{x + 1}{x + 2}$$

> expand(vyr);

$$\frac{x}{x + 2} + \frac{1}{x + 2}$$

Перетворення чисел в різні системи числення

> convert(1011, binary);

$$1111110011$$

> convert(1011, hex);

$$3F3$$

Перетворення десяткового дробу у звичайний

> convert(1.234567, fraction);

$$\frac{50737}{41097}$$

Перетворення виразу в елементарні дробки

> **convert** ((x^3+x)/(x^2-1), **parfrac**, x);

$$x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

Виділення коефіцієнтів поліному здійснюється за допомогою функції **coeff** (вираз, змінна, ступінь).

> **pn** := 3*x^3 - 8*x + 24;

$$pn := 3 x^3 - 8 x + 24$$

> **coeff**(pn, x, 0);

$$24$$

> **coeff**(pn, x, 1);

$$-8$$

> **coeff**(pn, x, 2);

$$0$$

> **coeff**(pn, x, 3);

$$3$$

Функція **collect** дозволяє зібрати разом коефіцієнти при однакових ступенях.

> **vyr** := a*ln(x)-b*ln(x)*x-c*x;

$$vyr := a \ln(x) - b \ln(x) x - c x$$

> **collect**(vyr,ln(x));

$$(a - b x) \ln(x) - c x$$

> **vyr**:=y/x+2*z/x+x^(1/3)-y*x^(1/3);

$$vyr := \frac{y}{x} + \frac{2 z}{x} + x^{(1/3)} - y x^{(1/3)}$$

> **collect**(vyr,x);

$$(1-y) x^{(1/3)} + \frac{y+2z}{x}$$

Перетворити вираз

Об'єднати показники степеневих функцій або зменшити ступінь тригонометричних функцій можна за допомогою команди **combine(eq,param)**, де **eq** – вираз, **param** – параметри, що визначають, який тип функцій перетворювати, наприклад, **trig** – для тригонометричних, **power** – для степеневих.

> **combine(4*sin(x)^3, trig);**

$$-\sin(3x) + 3 \sin(x)$$

2.5 Похідні та інтеграли

Обчислення похідних здійснюється за допомогою функцій **diff** і **Diff**.

Продиференціюємо функцію $ax^5 + bx^3 + cx$.

> **func := a*x^5+b*x^3+c*x;**

$$func := ax^5 + bx^3 + cx$$

> **diff(func,x);**

$$5ax^4 + 3bx^2 + c$$

Кратне диференціювання відбувається так

> **diff(func,x\$4);**

$$120ax$$

Диференціювання по кількох змінних здійснюється так

> **func := a*x^5*y^2*z^8;**

$$func := ax^5y^2z^8$$

> **diff(func,x,y,z);**

$$80ax^4yz^7$$

Для обчислення інтегралів використовуються функції **int** та **Int**.

> **Int(cos(x),x)=int(cos(x),x);**

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

> vyr:=exp(-x^2)*arcsin(x);

$$vyr := e^{(-x^2)} \arcsin(x)$$

> int(vyr,x);

$$\int e^{(-x^2)} \arcsin(x) dx$$

Якщо інтеграл не береться, то підінтегральний вираз можна розвинути у ступеневий ряд за допомогою функції **series**, що ми і зробимо.

> series(vyr,x,12);

$$x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{49}{120}x^5 - \frac{191}{1680}x^7 + \frac{499}{13440}x^9 + \frac{25}{59136}x^{11} + O(x^{13})$$

> int(%,x);

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{49}{720}x^6 - \frac{191}{13440}x^8 + \frac{499}{134400}x^{10} + \frac{25}{709632}x^{12} + O(x^{14})$$

При обчисленні визначених інтегралів необхідно задати межі інтегрування.

> Int(cos(x),x=0..Pi/4)=int(cos(x),x=0..Pi/4);

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Чисельне обчислення визначеного інтегралу здійснюється за допомогою функції **evalf**.

> evalf(int(exp(-x^2)*arcsin(x),x=0..1));

$$0.3512478356$$

Maple обчислює інтеграли з нескінченними границями

> Int(exp(-x^2),x=0..infinity)=int(exp(-x^2), x=0..infinity);

$$\int_0^{\infty} e^{(-x^2)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.6 Пакети розширень

Деякі функції Maple крім ядра можуть знаходитися в пакетах розширень, які містяться в базовій поставці системи. Перед використанням таких функцій їх необхідно завантажити. Для завантаження всіх функцій будь-якого пакета використовується функція **with** (*ім'я_пакету*). Для завантаження вибраних функцій пакета – **with** (*ім'я_пакету*, *функція_1*, *функція_2*, ...). Деякі функції пакетів розширень можуть перевизначати однойменні функції ядра. В таблиці 2.6 наведено перелік пакетів, які використовуються в Maple 11.

Таблиця 2.6 – Пакети Maple

Пакет	Призначення
algcures	алгебраїчні криві
codegen	перетворення програм у Maple до програм у інших мовах
CodeGeneration	перетворення програм у Maple до програм у інших мовах
combinat	комбінаторні функції
combstruct	комбінаторні структури
context	створення випадаючого меню
CurveFitting	пакет інтерполяції
DEtools	засоби роботи з диференціальними виразами
diffalg	диференціальна алгебра
diffforms	диференціальні форми
Domains	бібліотека для створення складних алгоритмів
finance	фінансова математика
GaussInt	гаусові цілі
genfunc	створення раціональних функцій
geom3d	евклідова тривимірна геометрія
geometry	евклідова геометрія
Groebner	базис Грьобнера
group	теорія груп

Продовження табл. 2.6

inttrans	інтегральні перетворення
LargeExpressions	засоби роботи зі створення обчислювальних виразів
LibraryTools	засоби роботи з бібліотеками
liesymm	симетрія Лі
linalg	лінійна алгебра
LinearAlgebra	лінійна алгебра
LinearFunctionalSystems	створення розв'язків лінійних функціональних систем рівнянь
LinearOperators	створення розв'язків лінійних функціональних рівнянь
ListTools	засоби роботи зі списками
LREtools	засоби роботи з лінійними рекурсивними відношеннями
Maplets	створення графічного інтерфейсу для Maple
MathML	експорт та імпорт виразів у вигляді MathML
Matlab	зв'язок з пакетом MATLAB
MatrixPolynomialAlgebra	символьна обробка поліноміальних матриць
networks	теорія графів
numapprox	чисельна апроксимація
numtheory	теорія чисел
Ore_algebra	базові обчислення в алгебрах лінійних операторів
OrthogonalSeries	засоби для роботи з рядами класичних ортогональних поліномів
orthopoly	ортогональні поліноми
padic	p-адичні числа
PDEtools	засоби розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними
plots	графічна бібліотека
plottools	базові графічні об'єкти
PolynomialTools	засоби роботи з поліномами
powseries	ступеневі ряди
process	Unix мультизадачність
RandomTools	засоби роботи з випадковими об'єктами

Продовження табл. 2.6

RationalNormalForms	раціональні нормальні форми як база для створення мінімальних репрезентацій та декомпозицій гіпергеометричних виразів
RealDomain	Maple працює з комплексними числами як з дійсними
Rif	підпакет DEtools для роботи з поліноміально нелінійними диференціальними рівняннями
ScientificConstants	фізичні сталі та таблиця періодичних елементів
simplex	оптимізація лінійних систем
Slode	створення розв'язків через ступеневі ряди для лінійних звичайних диференціальних рівнянь
SNAP	чисельно-символьні алгоритми для поліноміальної арифметики
Sockets	засоби для мережного зв'язку в Maple
SoftwareMetrics	аналіз складності процедур у Maple
SolveTools	засоби розв'язання алгебраїчних систем
Spread	область розкиду
stats	статистика
StringTools	засоби роботи з рядками
Student	набір елементарних математичних курсів
student	загально вживані математичні функції
Student[Calculus1]	набір елементарних математичних курсів з поясненнями
SumTools	засоби для роботи з сумами та рядами
sumtools	суми та ряди
tensor	тензори
TypeTools	засоби для розширення типів
Units	перетворення одиниць з однієї системи в іншу
VariationalCalculus	засоби варіаційного числення
VectorCalculus	засоби для роботи з векторами
Worksheet	засоби роботи в робочій області
XMLTools	засоби для використання XML документів

У наступних розділах за потребою ми детальніше ознайомлюватимемося з роботою окремих пакетів.

Задачі

Здійснити обчислення

$$1. \left[\frac{1,5 : 0,3}{0,6 : 5 : \frac{3}{5}} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{15}\right) \frac{30}{77}}{\left(2\frac{3}{25} + \frac{22}{7}\right) 25} \right] : \frac{1}{3} + 4.$$

$$2. \frac{\left(84,63 : 2,1 - \frac{7}{8} \cdot 35,2 + 2\frac{5}{42} - 7\frac{43}{48}\right) : 7\frac{25}{56}}{\left(14\frac{1}{6} - 3,2 : 4\right) : \left(17,25 : 2,3 + \frac{2}{15}\right) \frac{229}{802}}.$$

$$3. \frac{\left(12\frac{1}{5} - 8\frac{4}{9} + 2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{11}\right) 60 - 305,5 : 5,5}{2\frac{5}{8} + 15,175 - \left(0,652 + 7\frac{1}{5} \cdot 2,34\right)}.$$

$$4. \left\{ \frac{\left[2\frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} + (5 - 1,85) : 0,003 \right] \left(2\frac{5}{68} + 3\frac{4}{51} - 1\frac{11}{34} \right)}{32,75 \cdot 15,2 + 557,2 \cdot 5} \right\} : \frac{1}{51}.$$

$$5. \left[\frac{4,3 \cdot \frac{3}{43} + 11\frac{3}{5} \cdot 2,25}{2,75(354,2 - 342,2)} + \frac{104,5 \left(64,6 - 52\frac{1}{10} \right)}{50\frac{10}{11} \cdot 61,6 - 29,16 \cdot 100} \right] : 6\frac{59}{80}.$$

$$6. \left\{ \frac{\left(6 - 4\frac{1}{2} \right) : 0,003}{\left[\left(3\frac{1}{20} - 2,65 \right) 4 \right] : \frac{1}{5}} - \frac{\left(0,3 - \frac{3}{20} \right) 1\frac{1}{2}}{\left(1,88 + 2\frac{3}{25} \right) \frac{1}{8}} \right\} : 62\frac{1}{20}.$$

Обчислити границі

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Спростити вирази

$$24. \frac{\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2b} + \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{16ab} + \sqrt[3]{4b^2}}}{\frac{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{2b} + b\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}.$$

$$25. \left[x^{\frac{1}{2}} - 1 - \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{-1} \right] \left(x + 2x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right), \text{ де } x > 0.$$

$$26. \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} \right) \frac{x^4 y^4}{xy + y^2} \cdot \frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{x^3 - 3x^2 y + xy^2}.$$

$$27. \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}.$$

$$28. \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}.$$

$$29. \left\{ \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{a})^5 + (1-\sqrt{a})^5 \right] - (a\sqrt{5}-1)^2 \right\} : 2a.$$

$$30. \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{4 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$31. \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{13\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{13\pi}{2}\right)}.$$

$$32. \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}.$$

Розвинути на множники

$$33. x^{10} + x^5 + 1.$$

$$34. x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x.$$

$$35. x^3 + 5x^2 + 3x - 9.$$

$$36. x^3 - 6x^2 - x + 30.$$

$$37. 11x - 3x^2 + 70.$$

$$38. x^4 + 5x^3 + 15x - 9.$$

$$39. \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$40. \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta).$$

$$41. \frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2 \alpha - 4}.$$

Обчислити похідну

$$42. y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}.$$

$$43. y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x.$$

$$44. f(x) = e^x \cos x.$$

$$45. y = \frac{\operatorname{Arch} x}{1 - x^2}.$$

$$46. y = -\frac{1}{20} \cos(5x^2) - \frac{1}{4} \cos x^2.$$

$$47. y = \ln \arcsin x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \arcsin \ln x.$$

$$48. y = \frac{(x + 2)^2}{(x + 1)^3 (x + 3)^4}.$$

$$49. y = x^{x^x}.$$

$$50. y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}.$$

$$51. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Обчислити інтеграл

$$52. \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$53. \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2) \ln(x + \sqrt{1+x^2})}}.$$

$$54. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx.$$

$$55. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$56. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}.$$

$$57. \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$58. \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx.$$

$$59. \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)}.$$

$$60. \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$61. \int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

$$62. \int \frac{dx}{(x^2 + 4x) \sqrt{4 - x^2}}.$$

$$63. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 \varphi d\varphi.$$

$$64. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 5x^2}.$$

$$65. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}.$$

$$66. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx.$$

3 ГРАФІКА В MAPLE

Системи аналітичних обчислень приваблюють дослідників не тільки своїми можливостями реалізації алгоритмів побудови аналітичних розв'язків, але й розвиненою графікою, починаючи з побудови найпростіших двовимірних кривих й закінчуючи складними тривимірними поверхнями та анімацією двовимірних та тривимірних зображень. У будь-який момент часу користувач може зобразити результати своїх обчислень у вигляді графічних образів.

Одним з цікавих та ефективних застосувань Maple є застосування графічних можливостей під час розв'язання різноманітних задач: візуалізація результатів досліджень, графічної інтерпретації даних тощо.

Вихідними даними для побудови графічних образів можуть бути конструкції Maple (функції, масиви, графічні структури), результати обчислень, що отримано за допомогою інших програм.

У пакеті Maple існує багатий набір команд двовимірної та тривимірної графіки [8].

Одна з найбільш вражаючих властивостей Maple є графіка. Команди побудови графіків та анімації Maple дозволяє задовольнити більшість наукових та інженерних потреб, можуть слугувати чудовою ілюстрацією в навчальному процесі.

Програма має велику кількість функцій та опцій налаштувань для побудови як дво- так і тривимірних графічних об'єктів. Крім команд **plot** та **plot3d** основної бібліотеки є кілька спеціалізованих пакетів для цих цілей:

- пакет **plots**, який містить біля п'ятидесяти команд для побудови різноманітних графіків та анімації;
- додатковий пакет **plottools**, який дозволяє створювати різноманітні дво- та тривимірні графічні примітиви, що можна застосувати в інших графіках;

- пакет **stats[statplot]**, який містить команди для побудови спеціалізованих статистичних графіків;
- пакет **DEtools**, який містить команди побудови графіків розв'язків диференційних рівнянь, як у звичайних, так і в частинних похідних, фазових портретів, полів напрямків;
- геометричний пакет **geometry**, який містить команду **draw**, що дозволяє зобразити різноманітні геометричні побудови на площині [6].

Універсальні графічні команди зібрано у пакеті **plots** та підпакеті **statplot**, пакета **stats** знаходяться спеціальні команди відображення статистичних даних. Команди побудови графіків чисельних розв'язків звичайних диференційних рівнянь і рівнянь у частинних похідних можна знайти в пакетах **DEtools** та **PDEtools**. Пакет **student** містить кілька ілюстративних команд зображення визначених інтегралів у вигляді різноманітних сум, а також команду відображення дотичної до функції у заданій точці. Для того, щоб скористатися цими пакетами, обов'язково їх підключення через **with**. Але в Maple є дві команди основної бібліотеки, які завжди доступні: **plots()** та **plot3d**. Перша призначена для побудови графіків функції однієї змінної (двовимірна графіка), за допомогою другої можна будувати тривимірні графічні зображення поверхонь та просторових кривих (тривимірна графіка). Команди у згаданих вище пакетах також можна поділити на команди двовимірної та тривимірної графіки [7].

3.1 Двовимірна графіка

Основною функцією побудови графіків є пакет **plot** (див. табл. 2.6, рис. 3.1).

```
> plot(sin(x),x=0..2*Pi);
```

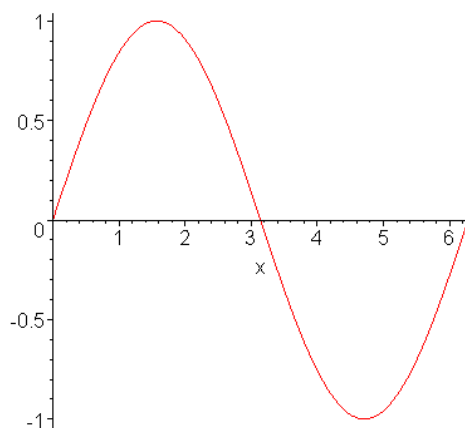



Рисунок 3.1 – Побудова графіка за допомогою функції plot

Крім самої функції, графік якої треба побудувати, обов'язковим параметром є область. *Область* – вікно декартової системи координат, в якому будується графік. Якщо в області задано тільки діапазон по x (як у попередньому прикладі), то діапазон по y розраховується автоматично (рис. 3.2, 3.3).

> plot(sin(x),x=0..2*Pi,y=-0.5..0.5);

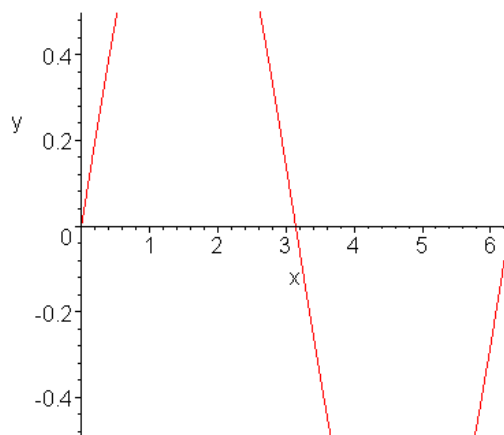


Рисунок 3.2 – Побудова графіка за допомогою функції plot
з визначенням обмежень

> plot(sin(x),x=0..2*Pi,y=-2..2);

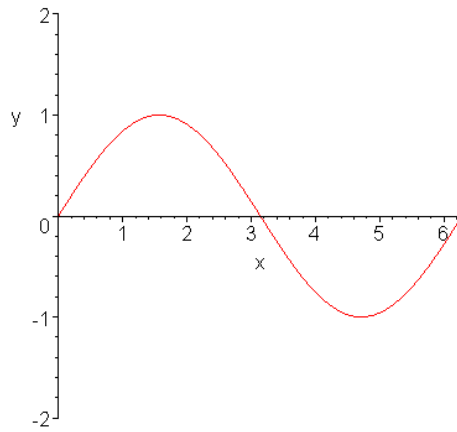


Рисунок 3.3 – Побудова графіка за допомогою функції `plot`
з визначенням обмежень

Області можна задавати з використанням констант, в тому числі *infinity* (рис. 3.4).

> plot(exp(-x),x=0..infinity);

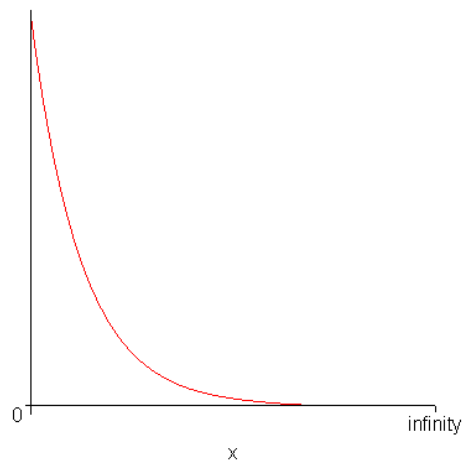


Рисунок 3.4 – Побудова графіка за допомогою функції `plot`
з визначенням обмежень константою *infinity*

Функція **plot** може мати 27 додаткових параметрів; деякі з них описано нижче.

При побудові графіків можна вибрати *стиль* інтерполювання. Стиль задається за допомогою ключового слова *style* (рис. 3.5). Існують три стилі:

- **POINT** – графік будується точками;
- **LINE** – точки з'єднуються прямими. Використовується за замовчуванням;

- PATCH – застосовується для побудови розфарбованих багатокутників.

> `plot(sin(x),x=0..2*Pi,style=POINT);`

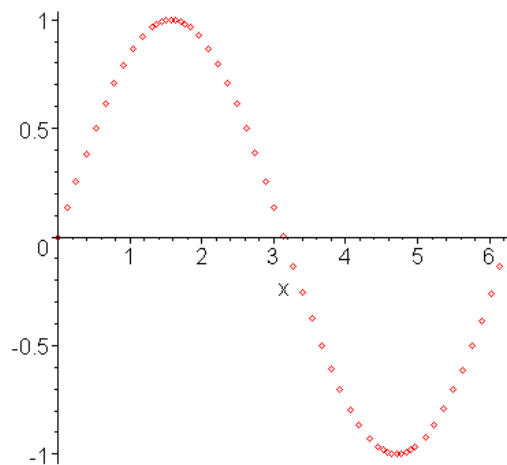


Рисунок 3.5 – Побудова графіка з використанням POINT

Тип лінії можна задати параметром *linestyle*. Доступні такі стилі:

- SOLID – суцільна лінія;
- DOT – лінія з точок;
- DASH – штрихова лінія;
- DASHDOT – штрих-пунктирна лінія.

Колір лінії задається параметром *color* або *colour*, товщина лінії – параметром *thickness* (рис. 3.6).

> `plot(sin(x),x=0..2*Pi,linestyle=DASH, color=blue,thickness=3);`

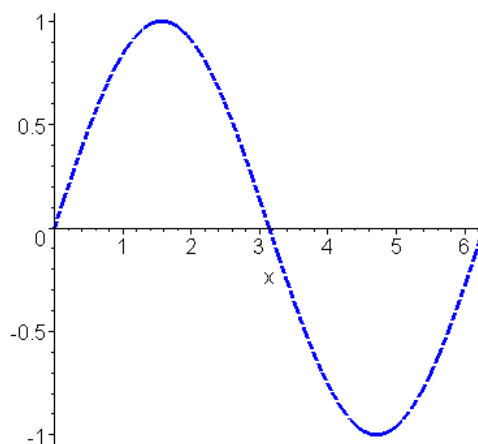


Рисунок 3.6 – Побудова графіка з використанням DASH

При відображенні графіків Maple вибирає масштаби по осях автоматично так, щоб графік був найбільш інформативним, але використовуючи параметр *scaling* (масштабування), можна заборонити використання різних масштабів по осях (рис. 3.7).

> plot(sin(x),x=0..2*Pi,scaling=CONSTRAINED);

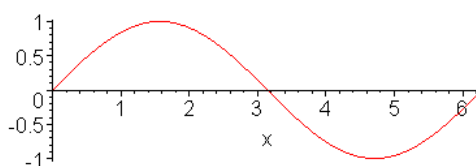


Рисунок 3.7 – Побудова графіка з використанням параметра масштабування

Параметр *coords* дозволяє вибрати систему координат. За замовчуванням Maple будує графіки в декартовій системі координат. У наступному прикладі графік функції $y = x$ побудовано в полярній системі координат (рис. 3.8).

> plot(x,x=0..4*Pi,coords=polar, scaling=CONSTRAINED);

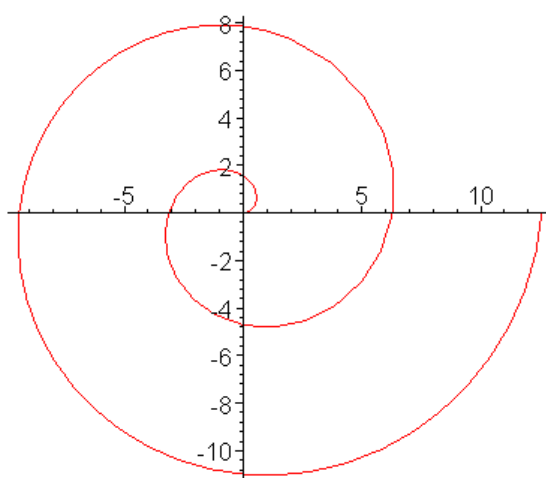


Рисунок 3.8 – Побудова графіка в полярних координатах

3.1.1 Суміщення графіків

Maple може побудувати кілька графіків на одній координатній площині. Для цього достатньо вказати у функції **plot** множину або список функцій, при цьому для різних графіків автоматично вибираються різні кольори. За необхідності для кожної функції можна вказати бажаний колір і стиль побудови (рис. 3.9).

```
> plot([x^2,exp(-x)],x=0..1,color=[blue,violet], linestyle=[DASH,DASHDOT]);
```

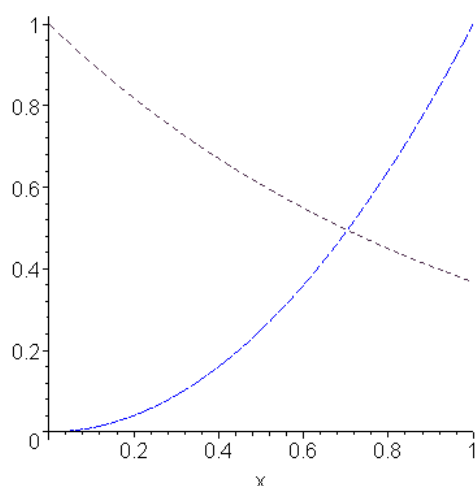


Рисунок 3.9 – Суміщення двох графіків

3.1.2 Анімація графіків

Функція **animate** дозволяє створити анімацію зображення. Ця функція знаходиться в пакеті *plots* (див. табл. 2.6), який попередньо повинен бути підключений. Суть анімації полягає у побудові ряду зображень, причому кожне зображення (фрейм) пов'язано зі змінною в часі t .

```
> with(plots):
```


```
animate( sin(x*t),x=-10..10,t=1..2);
```

або

```
animatecurve(sin(x),x=-Pi..Pi,numpoints=100,frames=100);
```

При виділенні отриманого зображення з'являється панель програвання анімаційних кліпів. Вона має кнопки керування з позначеннями, які прийнято у магнітофонів.



Натиснувши кнопку , можна спостерігати анімоване зображення.

3.1.3 Побудова графіка неявної функції

Для побудови графіка функції, яку задано неявно, слугує функція **implicitplot** (рис. 3.10) з пакета *plots* (див. табл. 6).

```
> implicitplot(2*x^2 + 3*y^2 = 1,x=-1..1,y=-1..1);
```

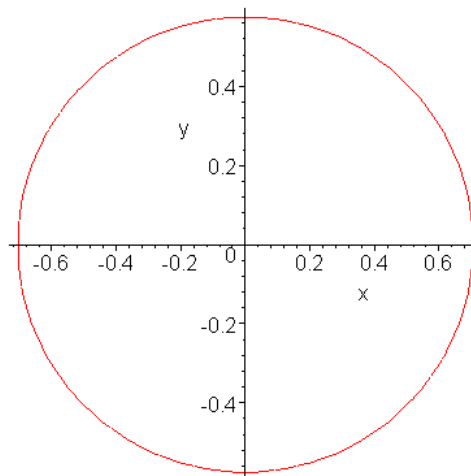


Рисунок 3.10 – Графік функції, яку задано неявно

3.1.4 Побудова графіка функції, яку задано параметрично

Для відображення графіка функції, яку задано параметрично, використовується такий формат команди **plot**:

plot([funcx(t), funcy(t),t=a..b], <options>);

де **funcx(t)**, **funcy(t)** – функції координат, які залежать від параметра **t**;

a..b – інтервал зміни параметра.

Приклад 3.1. Побудувати графік параметричної кривої $y = \sin 2t$, $x = \cos 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 3.11).

> plot([sin(2*t),cos(3*t),t=0..2*Pi], axes=BOXED, color=blue);

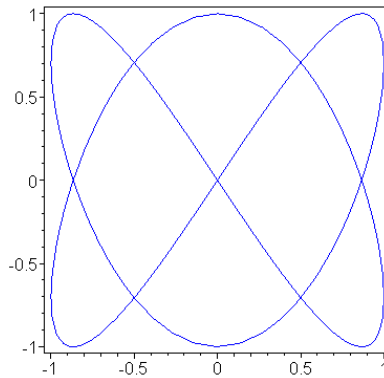


Рисунок 3.11 – Графік функції, яку задано параметрично

3.1.5 Побудова графіків лініями однакового рівня

Лінії однакового рівня утворюють, якщо уявно перетнути тривимірну поверхню площинами, які є паралельними до площини XY . Лінії перетину цих площин з тривимірною поверхнею і є лініями однакового рівня.

Для побудови таких графіків використовується функція **contourplot** (рис. 3.12) з пакета *plots* (див. табл. 2.6).

> contourplot(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3);

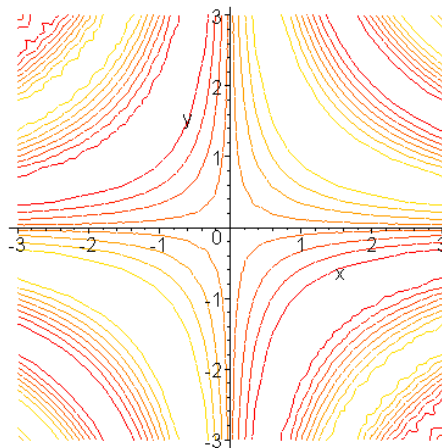


Рисунок 3.12 – Графік ліній однакового рівня

Як додаткові параметри можна задати розмір сітки (*grid*), яка використовуватиметься для побудови графіків й значень функції, що утворюватимуть лінії однакового рівня (*contours*) (рис. 3.13).

```
> contourplot(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3, grid=[50,50],  
contours=[-1/2,1/4,1/2,3/4]);
```

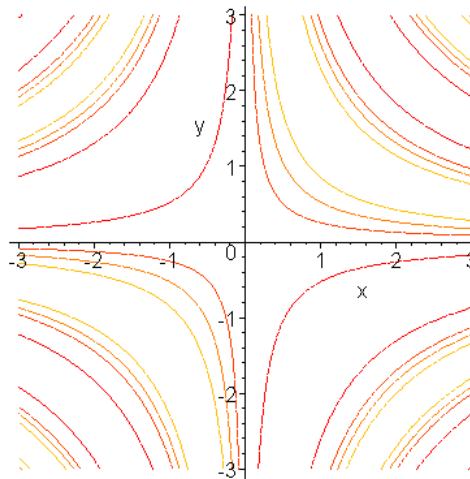


Рисунок 3.13 – Графік ліній однакового рівня з параметром contours

Опція *filled = true* забезпечує фарбування замкнених областей, які утворено лініями однакового рівня, що надає графіку більшу виразність.

3.1.6 Графік щільності

Іноді тривимірні поверхні необхідно відобразити на площині як графіки щільності фарбування – чим вища висота поверхні, тим густіше фарбування. Такий вигляд графіків утворюється функцією **densityplot** (рис. 3.14), яка також міститься у пакеті *plots*.

```
> densityplot(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi, grid=[25,25]);
```

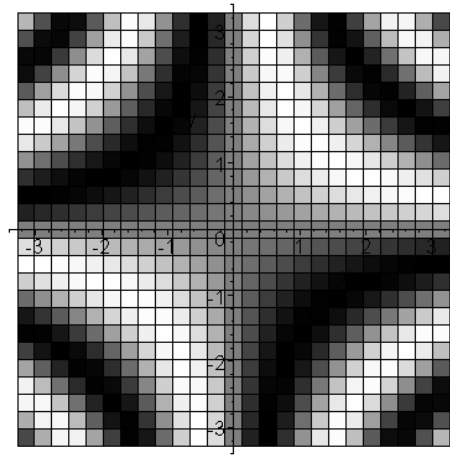



Рисунок 3.14 – Графік щільності

Зображення, що утворилося, розбите на прямокутники, кількість яких визначає параметр *grid*.

3.1.7 Графік векторного поля градієнта

Функція пакету *plots* – **gradplot**, слугує для відображення векторного поля градієнта (рис. 3.15). Параметр *arrow* дозволяє змінювати форму стрілок.

> gradplot(sin(x*y),x=-1..1,y=-1..1,arrows=THICK);

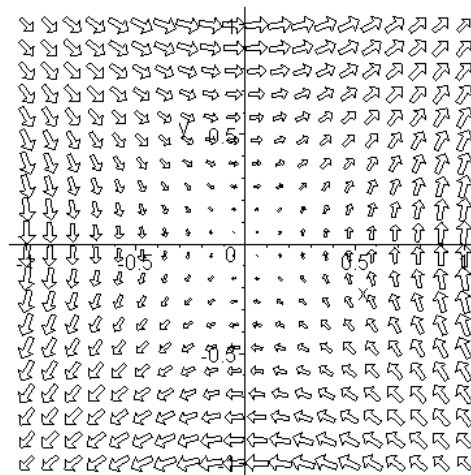


Рисунок 3.15 – Графік векторного поля градієнта

3.1.8 Графік векторного поля

Функція пакета *plots* – **fieldplot**, застосовується для відображення полів. Особливість таких графіків у тому, що для їх побудови використовуються стрілки, напрям яких відповідає напрямку зміни градієнта поля, а довжина – значенню градієнта (рис. 3.16).

```
> fieldplot([x/(x^2+y^2+4)^(1/2), -y/(x^2+y^2+4)^(1/2)], x=-1..1, y=-1..1,
arrows=THICK);
```

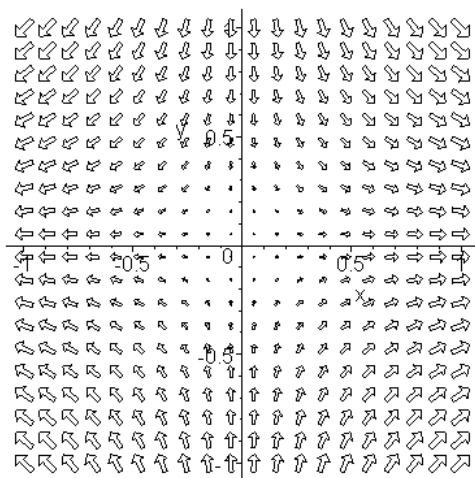


Рисунок 3.16 – Графік векторного поля

3.1.9 Побудова набору точок

Команда **plot** дозволяє відображати на графіку окремі точки, які задаються у вигляді списку (рис. 3.17). Для зображення набору точок використовується команда

```
plot([x1, y1, x2, y2, ...], x=a..b, y=c..d, <options>;
```

де $[x_1, y_1, x_2, y_2, \dots]$ – набір точок.

Приклад 3.2.

```
> plot([[1,1],[2,1],[3,4],[-3,2],[-1,4.5],[1.5,3],[1.1,2]], x=-3..5, y=0.5..5,
style=POINT, symbolsize=20, color=black, symbol=CIRCLE);
```

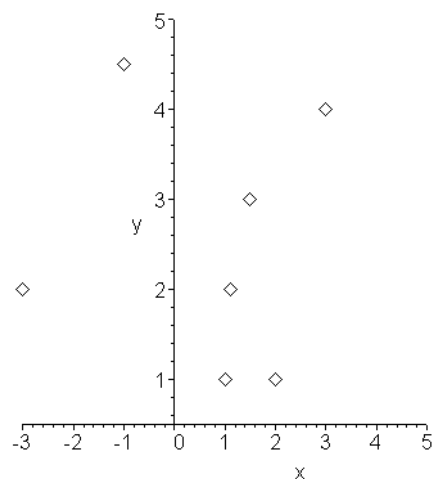


Рисунок 3.17 – Діаграма розкиду

3.1.10 Побудова графіків у логарифмічному масштабі

Часто під час відображення експериментальних даних використовуються логарифмічні осі координат, тобто по одній або обох осях відкладаються десяткові логарифми відповідних величин (рис. 3.18). У пакеті **plots** містяться три команди, які дозволяють працювати з подібним зображенням функцій:

loglogplot() – здійснює логарифмічне перетворення обох координат;

semilogplot() – здійснює логарифмічне перетворення тільки горизонтальної осі;

logplot() – здійснює логарифмічне перетворення тільки вертикальної осі.

Приклад 3.3

logplot(10^x, x=0..10, thickness=3);

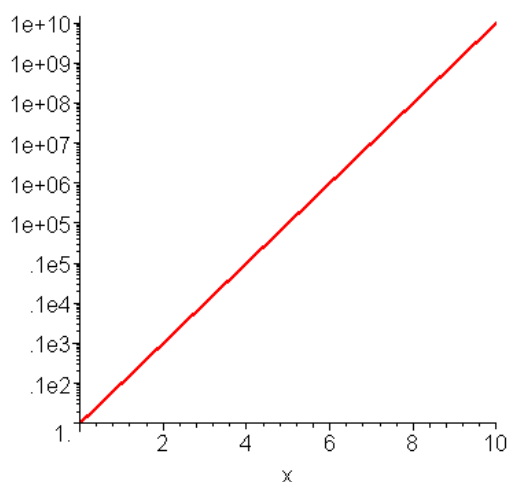


Рисунок 3.18 – Графік у логарифмічному масштабі

3.1.11 Суміщення графіків, які побудовано різними функціями

Часто існує необхідність сумістити на одній координатній площині графіки, які побудовано різними функціями Maple. Це можна зробити за допомогою функції **display** (рис. 3.19).

```
> Ris_1:=gradplot(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi, arrows=THICK):  
Ris_2:=contourplot (sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi, grid=[50,50],contours=4):  
display(Ris_1,Ris_2);
```

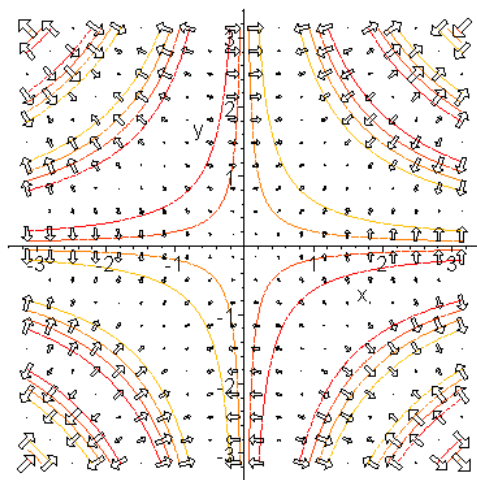


Рисунок 3.19 – Суміщення графіків векторного поля,
які побудовано різними функціями

Функція **display** з параметром *insequence* = *true* (за замовчуванням *insequence* = *false*) зображує послідовності, множини або списки з графічними даними, створюючи структуру, аналогічну **animate**. Фрейми відображуються один за одним, що у багатьох випадках дозволяє отримати ефект анімації.

У наступному прикладі створюється послідовність, яка містить графічні дані, й відбувається їх показ через функцію **display**. Кожен фрейм містить графік функції $\cos(x)$ й розвинення цієї функції у ступеневий ряд n -го ступеня в точці $x = 0$. Графіки будуються на інтервалі від $-\pi$ до π (рис. 3.20).

```
> f:=cos(x);  
L:=seq(plot([f,convert(series(f,x=0,n),polynom)], x=-Pi..Pi, y=-1..1, style=[line,  
point], color=[blue, black],title=cat('n=',n)), n=1..10):  
plots[display](L, insequence=true);
```

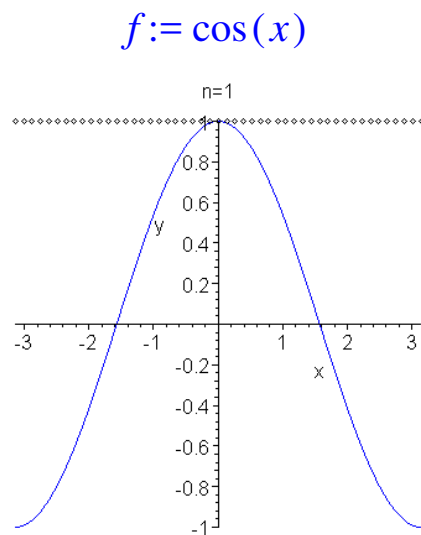


Рисунок 3.20 – Суміщення графіків, які побудовано різними функціями

Більш детальний опис опцій двовимірної графіки наведено у додатку Е.

3.2 Тривимірна графіка

Maple має величезну кількість функцій тривимірної графіки. Багато функцій тривимірної графіки є аналогічні до раніше розглянутих функцій двовимірної графіки. Основна функція тривимірної графіки – **plot3d** (рис. 3.21).

> **plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2, grid=[25,25]);**

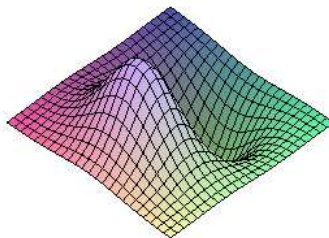


Рисунок 3.21 – Побудова графіка за допомогою функції plot3d

Використання параметра *style = CONTOUR* у функції **plot3d** дозволяє побудувати лінії однакового рівня (рис. 3.22)

```
> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2, grid=[25,25], style=CONTOUR);
```

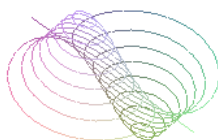


Рисунок 3.22 – Побудова ліній однакового рівня

Функція **plot3d** може будувати графік функції, яку задано параметрично (рис. 3.23).

```
> plot3d([x*sin(x)*cos(y),x*cos(x)*cos(y),x*sin(y)], x=0..2*Pi,y=0..Pi);
```

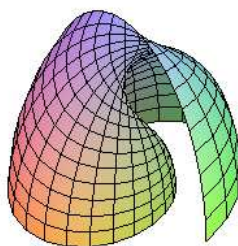


Рисунок 3.23 – Графік функції, яку задано параметрично

Для зручності в таблиці 3.1 подано основні функції тривимірної графіки.

Таблиця 3.1 – Основні функції тривимірної графіки пакета *plots*

Функція	Призначення
contourplot3	Будує лінії однакового рівня. Ідентична функції plot3d з параметром <i>style = CONTOUR</i>
gradplot3d	Будує тривимірне поле градієнту
fieldplot3d	Будує тривимірне векторне поле
implicitplot3d	Будує неявно задану функцію трьох змінних
matrixplot	Будує поверхню, яку задано таблицею
cylinderplot	Будує поверхню, яку задано в циліндричних координатах
sphereplot	Будує поверхню, яку задано в сферичних координатах
spacecurve	Будує криву в тривимірному просторі. Крива мусить бути задана параметрично
surfdata	Будує поверхню, яка проходить через задані точки
tuberplot	Будує поверхню, яка визначається параметрично заданою просторовою кривою та радіусом
display3d	Виводить тривимірні графічні структури в загальних осях координат

Приклади використання функцій тривимірної графіки

Приклад 3.4. Заповнимо масив *A* розміром 8×8 випадковими числами. Роздрукуємо його, побудуємо тривимірну гістограму (рис. 3.24) та поверхню (рис. 3.25).

```
> with(plots):
```

```
rnd:=rand(1..100):
```

```
A:=array(1..8,1..8,[]):
```

```
for i from 1 to 8 do
```

```
for j from 1 to 8 do
```

```
A[i,j]:= rnd():
```

```

end do:
end do:
print(A);
matrixplot(A,heights=histogram,axes=frame);

```

82	71	98	64	77	39	86	69
22	10	56	64	58	61	75	86
17	62	8	50	87	99	67	10
74	82	75	67	74	43	92	94
1	12	39	14	21	45	66	92
96	75	10	61	83	93	14	78
50	36	62	49	4	24	96	74
90	38	58	100	95	29	16	56

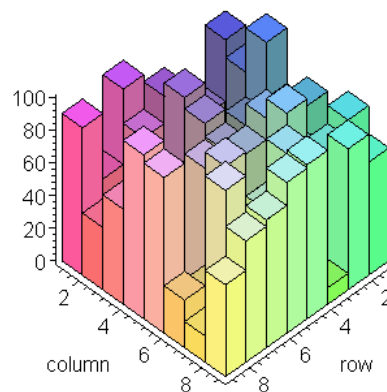


Рисунок 3.24 – Тривимірна гістограма

```

> S:=[seq([seq([i,j,A[i,j]],j=1..8)],i=1..8)];

```

```

surfdata(S,axes=frame);

```

У цьому приладі двовимірний масив A заповнюється завдяки двом вкладеним циклам, а функція Maple **rand** (1 ... 100) створює процедуру *rnd*(), яка генерує випадкові числа в діапазоні від 1 до 100. Функція **matrixplot** з параметром *heights = histogram* будує тривимірну гістограму, а **surfdata** – поверхню по точках, яка знаходиться у списку S .

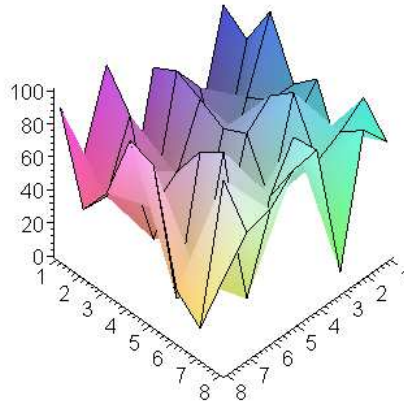


Рисунок 3.25 – Тривимірна поверхня

Використання функції **cylinderplot** (рис. 3.26).

```
> cylinderplot(1,theta=0..2*Pi,z=-1..1, axes=frame);
```

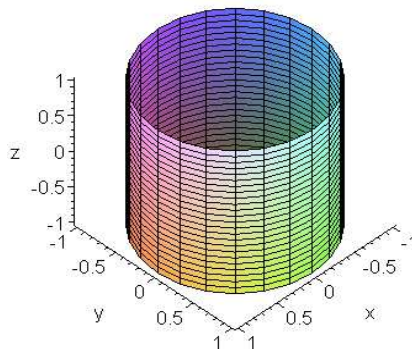


Рисунок 3.26 – Циліндрична поверхня

Використання функції **sphereplot** (рис. 3.27, 3.28).

```
> sphereplot(1,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi,axes=frame);  
  sphereplot((1.3)^z*sin(theta),z=-1..2*Pi, theta=0..Pi,  
style=patch,color=z,axes=frame);
```

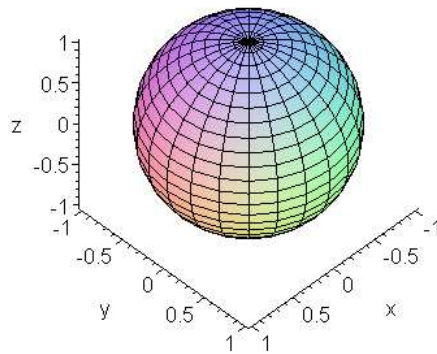


Рисунок 3.27 – Сфера

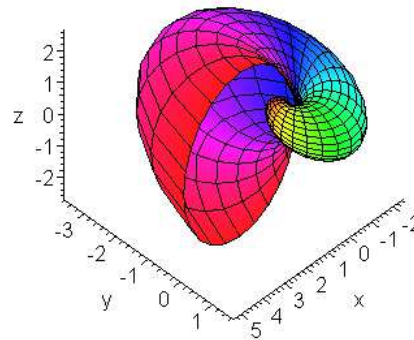


Рисунок 3.28 – Поверхня у сферичних координатах

3.3 Геометричні пакети

Maple має такі геометричні пакети: `geometry` – для задач планіметрії; `geom3d` – для задач стереометрії. Кожен пакет крім команд визначення геометричних об'єктів (лінії, площини, кола, кулі тощо) має команди для обчислення певних величин (площа, об'єм тощо).

Всі геометричні фігури, які визначено за допомогою одного з цих пакетів, можуть використовуватися тільки в межах дії цього пакета.

3.3.1 Планіметрія

Пакет *geometry* містить команди для розв'язання задач двовимірної евклідової геометрії. Перед початком роботи пакет необхідно завантажити.

Пакет геометричних розрахунків *geometry* в системі Maple має список, який складається більше, ніж зі 100 функцій. Цей пакет містить засоби розрахунків основних параметрів ряду геометричних об'єктів. Для кожного об'єкта можна задати різні вихідні величини, так що пакет охоплює практично всі види класичних геометричних розрахунків на площині.

Багато з функцій цього пакета не малюють на екрані відповідні фігури, а лише виконують типові геометричні обчислення, використовуючи результати цих обчислень, можна побудувати відповідну фігуру за допомогою графічних функцій. Ряд команд пакета, які наведено у табл. 3.2, визначає геометричні об'єкти та обчислює їх параметри

Таблиця 3.2 – Команди пакета *geometry*

Команда	Призначення
area	Обчислення площі об'єкта (трикутника, кола, квадрата)
bisector	Обчислення довжини бісектриси трикутника
center	Визначення центра кола
centroid	Обчислення центра ваги трикутника
circle	Обчислення кола, яке проходить через три точки
circumcircle	Коло, яке описано навколо трикутника
convexhull	Обчислення кола, яке проходить через три точки із заданої множини точок, що всі інші точки містяться всередині кола
coordinates	Відображення координат точки
detail	Відображення детальної інформації про об'єкт

Продовження табл. 3.2

diameter	Обчислення діаметру кола, яке містить задані точки
distance	Обчислення відстані між точкою та прямою
draw	Малювання графічного об'єкта
ellipse	Визначення еліпса
find_angle	Обчислення кута між двома прямими або колами
Hyperbola	Визначення гіперболи
incircle	Обчислення вписаного у трикутник кола
inter	Обчислення точки перетину двох прямих
line	Визначення прямої
median	Визначення медіани трикутника
midpoint	Обчислення середньої точки на відрізку
parabola	Визначення параболи
point	Визначення точки через координати
radius	Обчислення радіуса кола
sides	Обчислення периметра
triangle	Визначення трикутника

Приклад 3.5. Визначимо коло $c1$, яке проходить через три задані точки A , B і C , і знайдемо координати центра, радіус, рівняння, детальний опис цього кола й нарисуємо його.

Визначимо коло $c1$, яке проходить через три задані точки A , B і C .

```
> circle(c1,[point(A,0,0),point(B,2,0),point(C,1,2)], 'centername'=O);
```

$c1$

Знайдемо координати центра

```
> coordinates(center(c1));
```

$\left[1, \frac{3}{4}\right]$

Знайдемо радіус цього кола

```
> radius(c1);
```

$$\frac{\sqrt{25} \sqrt{16}}{16}$$

Знайдемо аналітичне рівняння цього кола

> **Equation(c1);**

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$$

Наведемо детальний опис цього кола

> **detail(c1);**

name of the object: c1

form of the object: circle2d

name of the center: O

coordinates of the center: [1, 3/4]

*radius of the circle: 1/16*25^(1/2)*16^(1/2)*

equation of the circle: $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$

Нарисуємо це коло (рис. 3.29)

> **draw(c1,axes=normal,colour=black,thickness=5);**

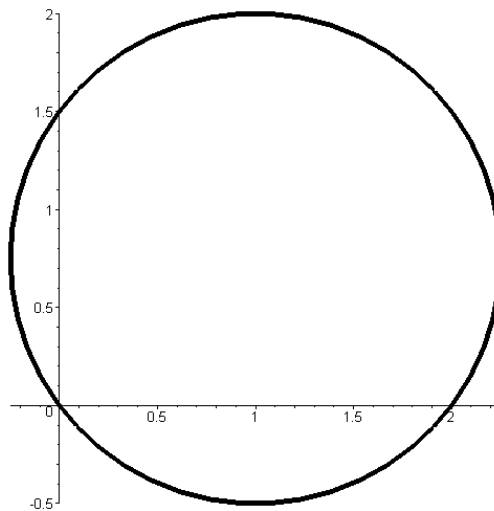


Рисунок 3.29 – Побудова плоскої геометричної фігури

3.3.2 Стереометрія

Команди пакету тривимірної геометрії є схожими з командами пакета двовимірної геометрії

Функції цього пакету забезпечують завдання та визначення характеристик і параметрів багатьох геометричних об'єктів: точок у просторі, сегментів, відрізків ліній та дуг, ліній, площин, трикутників, куль, поліедрів, тощо.

Приклад 3.6. Визначимо кулю, піраміду й площину, яка проходить через центр кулі, отримаємо інформацію про кулю та нарисуємо ці об'єкти (рис. 3.30).

```
> sphere(kula,[point(O,0,0,0),2]);
```

kula

```
> tetrahedron(tetr,point(OT,0,0,5),3);
```

tetr

```
> plane(pln,[O,[10,10,-10]]);
```

pln

```
> detail(kula);
```

Warning, assume that the name of the axes are _x, _y and _z

name of the object: kula

form of the object: sphere3d

name of the center: O

coordinates of the center: [0, 0, 0]

radius of the sphere: 2

*surface area of the sphere: 16*Pi*

*volume of the sphere: 32/3*Pi*

equation of the sphere: -4+_x^2+_y^2+_z^2 = 0

```
> draw({pln,kula,tetr});
```

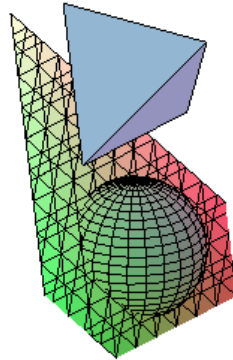


Рисунок 3.30 – Тривимірні об'єкти

3.4 Фазові портрети

Під час математичного моделювання фізичних явищ розв'язок системи диференціальних рівнянь зображуються у вигляді фазового портрета.

Звичайний розв'язок є більш наочним, однак для фахівців (наприклад, в теорії коливань) фазовий портрет надає більше інформації, ніж звичайний розв'язок. Побудова фазового портрета є більш трудомісткою, тому можливість швидкої побудови фазових портретів у Maple важко переоцінити.

Фазові портрети у Maple можна побудувати кількома способами.

За допомогою функції **odeplot** (рис. 3.31):

```
> sys := diff(y(x),x)=z(x),diff(z(x),x)=3*sin(y(x));
      sys :=  $\frac{d}{dx} y(x) = z(x), \frac{d}{dx} z(x) = 3 \sin(y(x))$ 

> tlo := [y(x),z(x)]:
> p := dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},tlo,type=numeric):
> odeplot(p,tlo,-4..4,numpoints=100,colour=black,thickness=3);
```

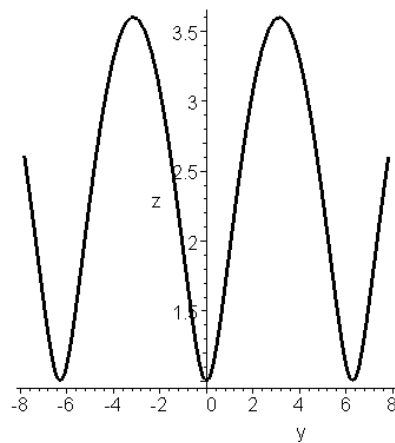


Рисунок 3.31 – Фазовий портрет, який побудовано функцією odeplot

За допомогою пакета DEtools (див табл. 2.6) (рис. 3.32 – 3.34).

```
> DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
diff(y(t),t)=0.3*y(t)*(x(t)-1)],[x(t),y(t)],t=-7..7,
[[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=0.7]],stepsize=0.2,
title=`Модель Лотки-Вольтерра`,method=rkf45,linecolor=t/10,
arrows=NONE);
```

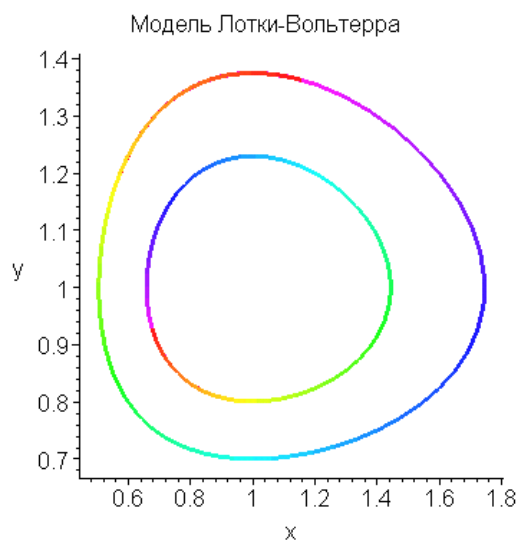


Рисунок 3.32 – Фазовий портрет моделі Лотки–Вольтерра

```
> DEplot({diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)=sin(x(t))},[x(t),y(t)], t=0..4*Pi, [[0,1,0], [0,-1,0], [0,Pi,1], [0,-Pi,1], [0,3*Pi,0.2], [0,3*Pi,1], [0,3*Pi,1.8], [0,-2*Pi,1],[0,2*Pi,-0.5]],
stepsize=0.1, title=`Коливання маятника`, linecolor=black,arrows=none);
```

```
> DEplot3d([diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)=-sin(x(t))],
[x(t),y(t)],t=0..10,
[[x(0)=0,y(0)=0.5],[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=0,y(0)=1.8],
[x(0)=-2*Pi,y(0)=1],[x(0)=2*Pi,y(0)=0.5],
```



```
[x(0)=-2*Pi,y(0)=2.1],[x(0)=2*Pi,y(0)=-2.1]],stepsize=0.2,
title=`Коливання маятника`,axes=normal,
method=classical[abmoulton],corrections=3,
linecolour=black, orientation=[0,90]);
```

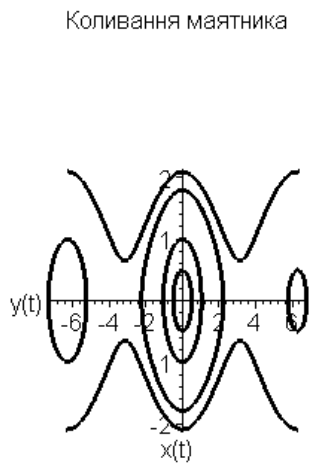
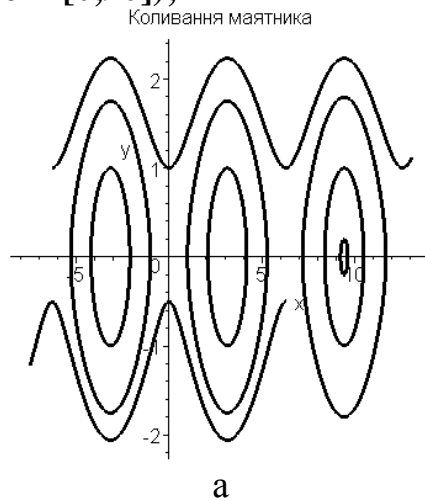


Рисунок 3.33 – Фазовий портрет коливання фізичного маятника

а – за допомогою **DEplot**; б – за допомогою **DEplot3d**

```
> DEplot3d([diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)=-sin(x(t))-y(t)/10],[x(t),y(t)],t=-10..20,
[[x(0)=0,y(0)=1]],stepsize=0.1, linecolour=t/3);
```

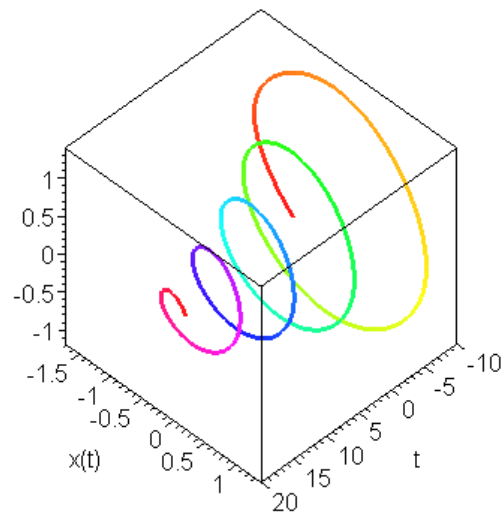


Рисунок 3.34 – Тривимірний фазовий портрет

Графічна функція **phaseportrait** слугує для побудови фазових портретів за результатами розв'язку диференційного рівняння або системи таких рівнянь (рис. 3.35).

```
> phaseportrait([D(x)(t)=y(t)-z(t),D(y)(t)=z(t)-x(t),
D(z)(t)=x(t)-2*y(t)],[x(t),y(t),z(t)],t=-2..2,
[[x(0)=1,y(0)=0,z(0)=2]],stepsize=0.05,scene=[z(t),x(t)],
linecolour=sin(Pi*t/2),method=classical[foreuler]);
```

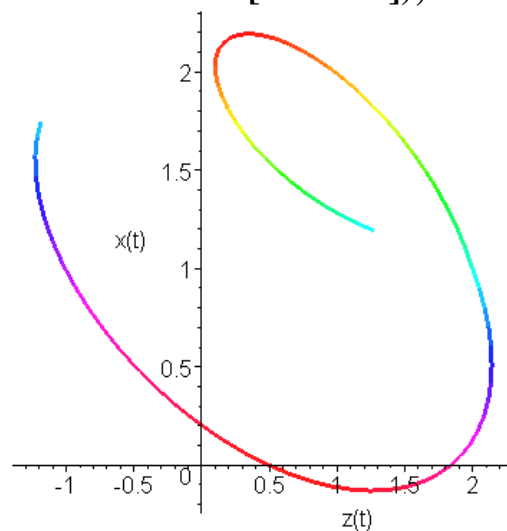


Рисунок 3.35 – Фазовий портрет, який побудовано функцією phaseportrait

Задачі

Побудувати графіки функцій

1. $y = \frac{10}{x^2 + 1}$ (локон Аньєзі).

2. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ (серпентин Ньютона).

3. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

4. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (тризуб Ньютона).

5. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (парабола Нейля).

6. $r = 1$ (коло).

7. $r = \frac{\varphi}{2}$ (спіраль Архімеда).

8. $r = e^\varphi$ (логарифмічна спіраль).

9. $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (гіперболічна спіраль).

10. $r = 2 \cos \varphi$ (коло).

11. $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ (пряма).

12. $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (парабола).

13. $r = 10 \sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

14. $r = \sin \varphi + 1$ (кардіоїда).

15. $x = t^3, y = t^2$ (напівкубічна парабола).

16. $x = 10 \cos t, y = \sin t$ (еліпс).

17. $x = 10(\cos t + t \sin t), y = 10(\sin t - t \cos t)$ (розгортка кола).

18. $x = \frac{5t}{1+t^3}, y = \sin \frac{5t^2}{1+t^3}$ (декартів лист).

19. $x = \frac{5}{\sqrt{1+t^2}}, y = \sin \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$ (напівколо).
20. $x = 2^t + 2^{-t}, y = 2^t - 2^{-t}$ (гілка параболи).
21. $x = 2 \cos^2 t, y = 2 \sin^2 t$ (відрізок прямої лінії).
22. $x = t - t^2, y = t^2 - t^3$.
23. $x = 10(2 \cos t - \cos 2t), y = 10(2 \sin t - \sin 2t)$ (кардіоїда).
24. $x^2 + y^2 = 25$ (коло).
25. $xy = 12$ (гіпербола).
26. $y^2 = 2x$ (парабола).
27. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ (еліпс)
28. $y^2 = x^2(100 - x^2)$
29. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 25^{\frac{2}{3}}$ (астроїда)
30. $x^2 = \cos y$.
31. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартів лист).

4 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Під час розв'язання багатьох прикладних задач виникає необхідність замість функції дійсної змінної $f(x)$, яка належить певному широкому класу функцій, розглядати функцію $\varphi(x)$, яка належить більш вузькому класу функцій й таку, що зображує функцію $f(x)$ на певному проміжку. У багатьох застосуваннях необхідно розв'язувати такі задачі:

- знайти аналітичний вираз для функції, яку задано таблицею, графіком або у вигляді складної для застосувань формули;
- обчислити значення функції $f(x)$, яку задано таблицею, у задовільній точці певного відрізка за допомогою порівняно нескладного алгоритму.

Такі задачі виникають під час експериментального вивчення явища, за якого функціональна залежність $y = f(x)$, що описує кількісний бік цього явища, встановлюється значеннями цієї функції y_0, y_1, \dots, y_n , за певних значень аргументу $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Задача полягає у тому, щоб знайти невідому функцію $f(x)$ [1, 3, 9, 10, 11].

Інтерполяцію можна розглядати як процес визначення для заданого аргументу x значення функції

$$y = f(x)$$

за її кількома відомими значеннями.

Якщо пари значень $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_n; y_n)$ відповідають вищеведеному рівнянню, то задача інтерполяції полягає в тому, щоб знайти наближене значення y для задовільного x . Але при цьому термін „інтерполяція” застосовують тільки тоді, коли значення x не виходить за межі ряду даних значень x_n . У протилежному випадку використовують термін „екстраполяція”.

Основне застосування інтерполяції – це обчислення значень табульованої функції для невузлових (проміжних) значень аргументу, тому інтерполяцію часто називають „мистецтвом читання таблиць між рядками” [9].

Уявімо собі, що нам треба обрахувати значення функції $f(x)$, яку визначено на відрізку $[a, b]$ у певній точці \bar{x} цього відрізка, але саму функцію $f(x)$ задано не у вигляді формули, а таблицею її значень для певної кінцевої кількості значень аргументу, які різняться між собою

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,$$

($x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$). З такою задачею ми стикаємося під час обробки даних вимірювань.

Зрозуміло, якщо точка \bar{x} збігається з якоюсь з вказаних точок x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), то для отримання необхідного результату достатньо скористатися таблицею. Проблема виникає тоді, коли \bar{x} знаходиться у проміжку між якими-небудь з цих точок. Досить природно спробувати знайти $f(\bar{x})$ таким чином: підібрати таку функцію $\varphi(x)$, значення якої ми можемо обчислити у будь-якій точці відрізка $[x_0, x_n]$, і таку, що $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Тоді можна вважати, що за правильного вибору функції $\varphi(x)$, буде $\varphi(\bar{x}) \approx f(\bar{x})$.

Отже, можна побудувати нескінченну кількість неперервних функцій, графіки яких проходять через задані вузлові точки x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), тому існують різні типи інтерполяції: поліноміальна, тригонометрична, експоненційна тощо.

4.1 Метод поліномів

Розглянемо найпростішу з них – поліноміальну інтерполяцію, яка здійснюється за допомогою поліномів. Існує багато причин, за якими $\varphi(x)$ доцільно вибирати у вигляді певного полінома. Однією з таких причин є відносна простота обчислень значень полінома. Ще звизимо проблему й

шукатимемо $\varphi(x)$ у вигляді полінома ступеня не вищого за n . Задача побудови такого полінома і є задачею інтерполяції поліномами, а сам поліном – інтерполяційним.

Нехай задано таблицю значень функції $f(x)$ у точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (ці точки називаються вузлами інтерполяції):

$x_0,$	x_1	$x_2,$	\dots	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$

Потрібно знайти поліном $P_n(x)$ ступеня не вищого за n , який збігався б з функцією $f(x)$ у вузлах інтерполювання, тобто $P_n(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Такий поліном називається інтерполяційним поліномом для функції $f(x)$ по вузлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Приклад 4.1. Побудувати інтерполяційний поліном для вузлів інтерполяції, які задано в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вузли інтерполяції

x	0	1	2	3
y	-5	-7	-7	1

Розв’язання. Для побудови інтерполяційного поліному в Maple задаємо масиви x та y .

```
> x:=array([0,1,2,3]);
```

```
> y:=array([-5,-7,-7,1]);
```

Власне інтерполяційний поліном будується за допомогою функції **interp(x, y, v)**,

де x – список або масив незалежних величин;

y – список або масив залежних величин;

v – змінна, яка використовуватиметься в інтерполяційному поліномі.

```
> interp(x,y,z);
```

$$z^3 - 2z^2 - z - 5.$$

Отже, розв'язок отримано.

У Maple 11 існує ще одна можливість отримання розв'язку прикладу 4.1, використовуючи пакет CurveFitting (див. табл. 2.6).

> **with(CurveFitting):**

> **PolynomialInterpolation(x, y, z);**

$$z^3 - 2z^2 - z - 5.$$

4.2 Метод Ньютона

Нехай $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – певні вузли, в яких задано значення функції $f(x)$. Необхідно побудувати поліном, який би надавав змогу інтерполювати функцію по вузлах. Інтерполяційний поліном Ньютона для нерівних проміжків має вигляд

$$l_n(x) = f(x_0) - \frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} \Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \Delta^2 f + \dots \\ + \frac{(x - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \Delta^n f.$$

Введемо позначення

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

.....

$$\Delta^n f_0 = f_n - nf_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{n-3} + \dots (-1)^n f_0$$

Інтерполяційний поліном Ньютона для рівновіддалених вузлів.

Тоді

$$l_n(x) = f_0 + q \frac{\Delta f_0}{1!} + q(q-1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + q(q-1) \dots (q-n+1) \frac{\Delta^n f_0}{n!},$$

$$\text{де } q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Інтерполяційний поліном Ньютона виражається не через значення функції $f(x)$, а через її роздільні різниці. При зміні ступеня n в інтерполяційного полінома Ньютона потрібно тільки додати або відкинути відповідну кількість стандартних доданків [9, 10, 12]. Це зручно з практичного боку.

Знайдемо розв'язок прикладу 1 за методом Ньютона, для цього слід скористатися пакетом CurveFitting (див табл. 2.6).

> with(CurveFitting):

> PolynomialInterpolation(x, y, z, form=Newton);

$$((z - 1)^2 - 2) z - 5$$

Для того, щоб отримати результат в остаточному вигляді, скористаємось функцією **expand** (див. табл. 2.5).

> expand(%);

$$z^3 - 2 z^2 - z - 5$$

4.3 Метод Лагранжа

Можна побудувати інтерполяційний поліном й безпосередньо, не розв'язуючи систему рівнянь для визначення коефіцієнтів цього полінома. Для цього спочатку знайдемо так звані фундаментальні поліноми, кожний з яких у точці $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) має значення $y_j = 1$, в усіх інших вузлах дорівнює нулю.

Як інтерполяційний поліном, візьмемо поліном n -го ступеня, який має вигляд

$$P(x) = C_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) + C_1(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n) + \\ + C_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) + \dots + C_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

й визначимо коефіцієнти C_0, C_1, \dots, C_n так, щоб виконувалися умови

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_n) = y_n.$$

Припускаючи, що $x = x_0$, отримаємо

$$y_0 = C_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n),$$

звідки

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Аналогічно отримуємо й інші коефіцієнти.

Таким чином, для задовільно заданих вузлів інтерполяції застосовується формула Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Якщо вузли інтерполяції є рівновіддаленими, то інтерполяційний поліном Лагранжа збігається з відповідним інтерполяційним поліномом Ньютона [12].

В інтерполяційного полінома Лагранжа видно явну залежність від кожного значення функції. Це у багатьох випадках буває корисним. Однак при зміні n інтерполяційний поліном Лагранжа необхідно будувати знову. У цьому полягає недолік цього методу [9, 10].

Знайдемо розв'язок прикладу 4.1 за методом Лагранжа, для цього треба скористатися пакетом CurveFitting (див. табл. 2.6).

> with(CurveFitting):

> PolynomialInterpolation(x, y, z, form= Lagrange);

$$\frac{5(z-1)(z-2)(z-3)}{6} - \frac{7z(z-2)(z-3)}{2} + \frac{7z(z-1)(z-3)}{2} + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}.$$

Для того, щоб отримати результат в остаточному вигляді, скористаємось функцією **expand** (див. табл. 2.5).

> expand(%);

$$z^3 - 2z^2 - z - 5.$$

4.4 Метод сплайнів

Інтерполяція кривих поліномами високого ступеня має свої недоліки. Тому розроблено інші, зручніші й більш швидкі (з точки зору витрат машинного часу) методи.

Сегментна апроксимація. Назва сегментної апроксимації об'єднує методи частинної апроксимації, які будуються на розбитті вихідного проміжку завдання функції на ряд інтервалів. Методи частинної апроксимації можна умовно поділити на три групи: проста сегментна апроксимація, телескопічна сегментна апроксимація, та ноніусна сегментна апроксимація.

Проста сегментна апроксимація. За простою сегментною апроксимацією вихідний проміжок $[a, b]$ розділяється на ряд інтервалів, що не перетинаються. На кожному підінтервалі функція $f(x)$, яку шукають, інтерполюється поліномом, дробово-раціональною або нелінійною функцією.

Просту сегментну апроксимацію найзручніше реалізувати на ЕОМ, якщо на всіх підінтервалах функція апроксимується виразом одного типу. Таке наближення є окремим випадком сплайну.

Сплайни. Нехай відрізок $[a, b]$ поділено на N рівних часткових відрізків $[x_i, x_{i+1}]$.

Назвемо звичайним кубічним сплайном кубічну функцію $S(x)$, яка задовольняє умову $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$. Доведено, що ця функція є єдиною, яка має властивість мінімальної кривизни серед кривих, які інтерполюють дані точки й мають другі похідні.

Сплайном називається функція, яка разом з кількома похідними є неперервною на всьому заданому відрізку $[a, b]$, а на кожному частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, зокрема, є якимось алгебраїчним поліномом.

Максимальний ступінь полінома з усіх частинних відрізків називається ступенем сплайна, а різниця між ступенем сплайна та порядком неперервної на $[a, b]$ похідної – дефектом сплайна.

На практиці широке застосування отримали сплайни третього ступеня, які мають на відрізку $[a, b]$ щонайменше неперервну першу похідну. Такі сплайни називаються кубічними й позначаються $S_3(x)$. Величина $m_i = S'_3(x_i)$ називається нахилом сплайна в точці (вузлі) x_i .

Способи завдання нахилу інтерполяційного кубічного сплайна

Спосіб 1 (спрощений)

Припустимо

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h},$$

$$m_0 = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, \quad m_N = \frac{3f_N + f_{N-2} - 4f_{N-1}}{2h}.$$

Ці формули є формулами чисельного диференціювання другого порядку

відносно кроку $h = \frac{(b-a)}{N}$.

Спосіб 2

Якщо є відомими значення f'_i похідної f' у вузлах x_i , то припускаємо $m_i = f'_i$.

Способи 1 та 2 є локальними, тому що сплайн будується окремо на кожному частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ за формулою

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2[2(x - x_i) + h]}{h^3} f_i + \frac{(x - x_i)^2[2(x_{i+1} - x) + h]}{h^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} m_i + \frac{(x - x_i)^2(x_{i+1} - x)}{h^2} m_{i+1}. \quad (4.1)$$

Дефект такого сплайна дорівнює 2.

Спосіб 3 (глобальний)

Позначимо як $S_3''(x_i + 0)$ значення S_3'' у вузлі x_i , яке отримують з виразу (4.1), а як $S_3''(x_i - 0)$ – значення S_3'' у вузлі x_i , ліворуч.

Тоді маємо

$$S_3''(x_i - 0) = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6 \frac{f_i - f_{i-1}}{h^2}$$

$$S_3''(x_i + 0) = -\frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6 \frac{f_{i+1} - f_i}{h^2}.$$

Вимагатимемо неперервності S_3'' у вузлах:

$$S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0)$$

й отримаємо таку систему рівнянь відносно нахилів

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 3 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h}, \quad (4.2)$$

де $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Через те, що невідомих $N + 1$, а рівнянь тільки $N - 1$, то необхідно задати ще дві умови, тобто записати два рівняння, які пов'язані з межовими точками m_0 та m_N .

Наведемо три варіанти таких межових умов:

1. Якщо відомі $f_0' = f'(a)$ та $f_N' = f'(b)$, то задаємо

$$m_0 = f_0', \quad m_N = f_N'. \quad (4.3)$$

2. Похідні f_0' , f_N' апроксимуємо через формули чисельного диференціювання третього порядку точності

$$f_0' = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{4}f(\xi)$$

$$f_1' = \frac{1}{6h}(-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3) - \frac{h^3}{12}f(\xi)$$

$$f_2' = \frac{1}{6h}(f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{12}f(\xi)$$

$$f_3' = \frac{1}{6h}(-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3) + \frac{h^3}{4}f(\xi)$$

відкиданням залишкових членів, й припускаємо

$$m_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) \quad (4.4)$$

$$m_N = \frac{1}{6h}(-2f_{N-3} + 9f_{N-2} - 18f_{N-1} + 11f_N).$$

3. У деяких випадках бувають відомі значення f'' на кінцях відрізка $[a, b]$. Тоді

вимоги $S_3''(a) = f_0''$, $S_3''(b) = f_N''$ призводять до межових умов

$$m_0 = -\frac{m_1}{2} + \frac{3}{2} \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{4} f_0'' \quad (4.5)$$

$$m_N = -\frac{m_{N-1}}{2} + \frac{3}{2} \frac{f_N - f_{N-1}}{h} - \frac{h}{4} f_N''.$$

Межові умови (4.3) – (4.5) можна комбінувати.

Система (4.2) за всіх розглянутих межових умов має єдиний розв'язок.

Нарешті, розв'язавши систему (4.2) за вибраних межових умов, знаходимо нахили в усіх вузлах. Потім за формулою (4.1) задаємо сплайн на кожному частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$. Побудований таким чином сплайн $S_3(x)$ має дефект не більший за одиницю, через те, що він має на відрізку $[a, b]$ неперервну другу похідну $S_3''(x)$ [10].

Знайдемо розв'язок прикладу 4.1 за методом сплайнів.

> readlib(spline);

proc (XX, YY, z, d) ... end proc

> spline(x,y,z, linear);

$$\begin{cases} -5 - 2z & z < 1 \\ -7 & z < 2 \\ -23 + 8z & \text{otherwise} \end{cases}$$

> spline(x,y,z, quadratic);

$$\begin{cases} -5 - \frac{20z^2}{7} & z < \frac{1}{2} \\ -\frac{29}{7} - \frac{24}{7}z + \frac{4}{7}z^2 & z < \frac{3}{2} \\ \frac{79}{7} - 24z + \frac{52}{7}z^2 & z < \frac{5}{2} \\ -\frac{821}{7} + \frac{552}{7}z - \frac{92}{7}z^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

> spline(x,y,z,cubic);

$$\begin{cases} -5 - 2z & z < 1 \\ -7 + 4z - 6z^2 + 2z^3 & z < 2 \\ 25 - 44z + 18z^2 - 2z^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

> spline(x,y,z, quartic);

$$\begin{cases} -5 - \frac{5050}{2743}z - \frac{3104}{13715}z^4 & z < \frac{1}{2} \\ -\frac{67651}{13715} - \frac{32642}{13715}z + \frac{22176}{13715}z^2 - \frac{29568}{13715}z^3 + \frac{2336}{2743}z^4 & z < \frac{3}{2} \\ -\frac{238561}{13715} + \frac{423118}{13715}z - \frac{433584}{13715}z^2 + \frac{172992}{13715}z^3 - \frac{4416}{2743}z^4 & z < \frac{5}{2} \\ \frac{1557689}{13715} - \frac{2450882}{13715}z + \frac{1290816}{13715}z^2 - \frac{286848}{13715}z^3 + \frac{23904}{13715}z^4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

У Maple 11 існує ще одна можливість отримання розв'язку прикладу 4.1 за методом сплайнів, використовуючи пакет CurveFitting (див. табл. 2.6).

> with(CurveFitting):

> Spline(x, y, z, degree=3);

$$\begin{cases} -5 - 2z & z < 1 \\ -7 + 4z - 6z^2 + 2z^3 & z < 2 \\ 25 - 44z + 18z^2 - 2z^3 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

4.5 Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів Гаус (Karl Friedrich Gauß, 1777 – 1855) розробив у 1794 р., але опублікував його тільки у 1808 р.

Двома роками раніше, а саме у 1806 р. Лежандр (Adrian Marie Legendre, 1752 – 1833) також запропонував цей метод.

З найчисельніших застосувань методу найменших квадратів тут ми розглянемо тільки найважливіші, які мають відношення до визначення найкращого наближення рівняння заданого типу для обробки результатів спостережень. При цьому ми обмежимося випадком, коли функцію знаходять у вигляді полінома.

Дуже часто виникає необхідність виразити у вигляді функціональної залежності зв'язок між величинами, що задано у вигляді набору точок.

Застосування інтерполяції (й, зокрема, інтерполяційних поліномів) не завжди виправдовується. У випадку емпіричних функцій може стати бажаним згладжування відхилень, які обумовлено випадковими похибками.

Припустимо, що в результаті якогось експерименту отримано набір точок. Якщо необхідно використати ці дані для обчислень за допомогою ЕОМ, то відразу ж виникають такі проблеми:

1. У значеннях y напевне існують похибки експерименту. Було б бажаним якимось чином “згладити” ті відхилення, які обумовлено похибками експерименту.
2. Може виявитися бажаним знати значення y , які відповідають проміжним значенням x .

3. Може виявитися, що необхідно екстраполювати функціональну залежність. Особливо це важливо для економічної інформації.

Всі ці роздуми призводять до висновку, що бажано було б встановити якусь функціональну залежність у вигляді щонайпростішої формули. Питання полягає у тому, яким чином знайти криву, яка наближено відповідає вихідній інформації з достатньою точністю. Отже, треба встановити критерій, за яким та чи інша крива є досить “гарним” наближенням вихідної інформації.

Введемо поняття відхилення експериментальної точки: різниця між експериментальною ординатою й тією, що обчислено з функціональної залежності. Питання про те, чи є крива досить “гарним” наближенням до експериментальних даних, можна поставити у такому вигляді: яку умову треба накласти на відхилення точок від кривої, щоб ця крива зображувала експериментальні дані з достатньою точністю?

Здавалося б, що найпростіша й логічна умова полягає в тому, щоб сума відхилень точок від кривої була найменшою. Якщо позначити через y' значення y , яке обчислене з функціональної залежності, то цю умову можна записати таким чином

$$\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)$$

і вона мусить бути мінімальною. Але привабливість цього простого критерію відразу ж стає сумнівною, якщо розглянути просту задачу про проведення лінії через дві точки, як це наведено на рис. 4.1.

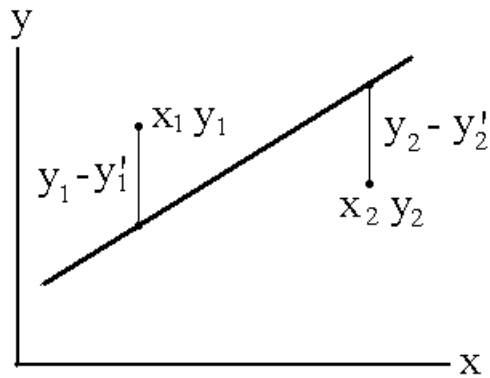


Рисунок 4.1 – Приклад проведення лінії через дві точки

Ми бачимо, що лінія відповідає нашому критерію, але її ніяк не можна визнати задовільним наближенням. Можна спробувати подолати це ускладнення, використовуючи як критерій суму абсолютних значень відхилень. Але у цьому випадку для знаходження мінімуму не можна скористатися похідною, через те, що абсолютне значення не має похідної у точці мінімуму.

Тому ми скористаємося критерієм найменших квадратів, тобто знаходитимемо таку функціональну залежність, за якої

$$\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2$$

має екстремум. Такий критерій у багатьох практичних випадках призводить до лінійних рівнянь, які легко розв'язувати.

Спочатку розглянемо загальний випадок, коли поліном, що шукаємо, є поліномом m -го ступеня:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_mx^m. \quad (4.6)$$

Задача полягає в тому, щоб визначити такі значення коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots a_m$, за яких крива (4.6) щонайближче проходила б від усіх n заданих точок.

Кількість точок є значно більшою за $m + 1$, тому не можна знайти таку криву (4.6), яка проходила б через усі задані точки. Більш того, жодна з точок, які розглядаються, не задовольняє точно рівняння (4.6), і якщо ми підставимо в нього координати цих точок, то отримаємо таку систему:

Перетворимо тепер систему (4.9) до вигляду, який є більш зручним для її розв'язання, тоді система (4.9) матиме вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} na_0 + \sum_{k=1}^n x_k a_1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 a_2 + \dots + \sum_{k=1}^n x_k^m a_m &= \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k a_0 + \sum_{k=1}^n x_k^2 a_1 + \sum_{k=1}^n x_k^3 a_2 + \dots + \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} a_m &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 a_0 + \sum_{k=1}^n x_k^3 a_1 + \sum_{k=1}^n x_k^4 a_2 + \dots + \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} a_m &= \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^m a_0 + \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} a_1 + \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} a_2 + \dots + \sum_{k=1}^n x_k^{2m} a_m &= \sum_{k=1}^n x_k^m y_k \end{aligned} \right.$$

Напишемо

$$y_1' = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2.$$

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - y_i')^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$$

Відомо, що в точці мінімуму функції її похідна дорівнює нулю. Розглядаючи S , як функцію a_0 , ми прирівнюємо нулю частинну похідну від S по a_0 , тоді отримаємо

$$Na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i .$$

$$Na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i.$$

Тепер для визначення коефіцієнтів достатньо обчислити суми та знайти розв'язок системи.

Цей метод можна використовувати для поліномів будь-якого ступеня, але це не використовується через наростання похибок округлення [9, 10, 13].

Приклад 4.2. Побудувати інтерполяційний поліном за методом найменших квадратів для вузлів інтерполяції, які задано в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Вузли інтерполяції

x	0	1	2	3	-0,1	0,8	1,6	2,4	3,3	3,9
y	-5	-7	-7	1	-4,9	-6,6	-7,6	-5	5,9	20

Розв'язання. Для побудови інтерполяційного поліному за методом найменших квадратів в Maple задаємо списки x та y .

```
> x:=[0,1,2,3,-0.1,0.8,1.6,2.4,3.3,3.9];
```

```
> y:=[-5,-7,-7,1,-4.9,-6.6,-7.6,-5,5.9,20];
```

Інтерполяційний поліном будується з використанням пакета **stats**, або пакета **CurveFitting**.

Розглянемо обидві можливості.

```
> with(stats):
```

```
> fit[leastsquare]([t,z],z=a*t^3+b*t^2+c*t+d,{a,b,c,d})([x,y]);
```

$$z = 0.9891909798t^3 - 1.943555407t^2 - 1.058646707t - 4.994899033$$

```
> with(CurveFitting):
```

```
> LeastSquares(x, y, t, curve=a*t^3+b*t^2+c*t+d);
```

$$\begin{aligned} & -4.994898978 - 1.05864727924956448t + 0.989190901172394832t^3 \\ & - 1.94355496928427307t^2 \end{aligned}$$

Як бачимо, обидва результати є однаковими.

Задачі

1. Побудувати інтерполяційний поліном для варіантів з таблиці А.1.
2. Побудувати інтерполяційний поліном за методом Ньютона для варіантів з таблиці А.1.
3. Побудувати інтерполяційний поліном за методом Лагранжа для варіантів з таблиці А.1.
4. Побудувати інтерполяційний поліном за методом сплайнів для варіантів з таблиці А.1.
5. Побудувати інтерполяційні поліноми першого, другого, третього, четвертого та п'ятого ступенів за методом найменших квадратів для варіантів з таблиці Б.1.

5 ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Знаходження коренів рівняння – одна з найдавніших математичних проблем, яка не втратила гостроти і в наші дні: вона часто зустрічається у найрізноманітніших областях науки й техніки.

У загальному випадку функції, які розглядатимуться, не мають аналітичних формул для своїх коренів. Тому ми змушені користуватися наближеними методами знаходження коренів. Використання цих методів передбачає два етапи:

1. Знаходження наближеного значення кореня.
2. Уточнення наближеного значення до певного заданого ступеня точності.

Часто наближене значення кореня буває відомим з фізичних уявлень, в інших випадках можна використати графічні методи. Крім того, існують спеціальні методи знаходження наближеного значення кореня для такого практично важливого випадку, коли функція є поліномом [13].

Тут ми розглянемо найпростіші методи обчислення дійсних коренів рівнянь. Знайти точні значення коренів рівняння можна тільки в окремих випадках, найчастіше коли є яка-небудь проста формула для коренів. Навіть для поліномів корені можна знайти через коефіцієнти полінома за допомогою кінцевих формул тільки у випадку, коли ступінь полінома не перевищує чотирьох. При цьому формули для обчислення коренів рівнянь третього та четвертого ступеня досить складні. Тому велике значення мають методи наближеного обчислення дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$. Припускатимемо, що нам наперед відомі інтервали, в яких знаходяться корені рівняння, при цьому у кожному інтервалі існує тільки один корінь рівняння. У практично важливих випадках відокремлення коренів можна здійснити графічно. Графічно корені рівняння $f(x) = 0$ – це точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю абсцис. Якщо ми побудуємо графік цієї функції, то зможемо вказати приблизно корені рівняння й досить малі інтервали, у кожному з яких міститься

один корінь рівняння, як це наведено у розділі 4. Подальша задача полягає в обчисленні потрібного нам кореня з необхідною точністю. Методи, що описано нижче, й призначені для розв’язання цієї задачі [1, 11, 14].

5.1 Метод дихотомії

Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$ й відомо, що рівняння $f(x) = 0$ має на цьому відрізку єдиний корінь x_0 , який нам поки що не є відомим. Наша задача полягає у досить точному знаходженні значення x_0 .

Припустимо, що $f(x)$ є монотонною на відрізку $[a, b]$ й $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 5.1). Для знаходження кореня робимо так: ділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Нехай точка ділення буде c_1 . Обчислюємо $f(c_1)$. Може бути так, що $f(c_1) = 0$, тоді $x_0 = c_1$. Якщо $f(c_1) \neq 0$, то необхідно визначати знак $f(c_1)$. Нехай $f(c_1) < 0$. У цьому випадку корінь x_0 обов’язково має знаходитися на відрізку $[c_1, b]$, через те, що на кінцях цього відрізка $f(x)$ має різні знаки й, отже, через неперервність обов’язково перетворюється на нуль у якійсь проміжній точці ξ відрізка $[c_1, b]$. Але корінь рівняння $f(x) = 0$ є єдиним на відрізку $[a, b]$. Тому обов’язково $x_0 = \xi$. Далі ділимо навпіл відрізок $[c_1, b]$. Нехай точка ділення – c_2 . В залежності від того, які знаки $f(x)$ має на кінцях відрізка $[c_1, c_2]$ та $[c_2, b]$, визначимо, у якому з них знаходиться корінь x_0 . Ділимо навпіл відповідний відрізок, отримуємо точку c_3 й робимо як у попередніх випадках. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність точок $\{c_i\}$. Легко побачити, що $|c_n - x_0| \leq \frac{b-a}{2^n}$, тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0.$$

Описаний метод знаходження кореня через свою простоту знаходить широке застосування для чисельного розв’язання рівнянь [11].

Якщо потрібно знайти корінь з точністю ϵ , то ділення навпіл продовжуємо доти, доки довжина відрізка не стане меншою за 2ϵ . Тоді координати середини відрізка й є значенням кореня потрібної точності ϵ .

Метод дихотомії – простий та надійний метод пошуку кореня рівняння $f(x) = 0$. Він збігається для будь-яких неперервних функцій $f(x)$, у тому числі таких, що не диференціюються (рис. 5.1). Швидкість збігання не є великою. Для досягнення точності ε необхідно здійснити N ітерацій, де $N \approx \log_2 \frac{ba}{\varepsilon}$ [10, 11, 13].

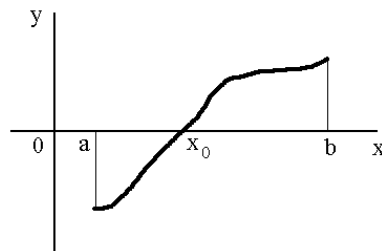


Рисунок 5.1 – Пояснення до методу дихотомії

Структурну схему програми обчислення кореня рівняння за методом дихотомії наведено на рис. 5.2.

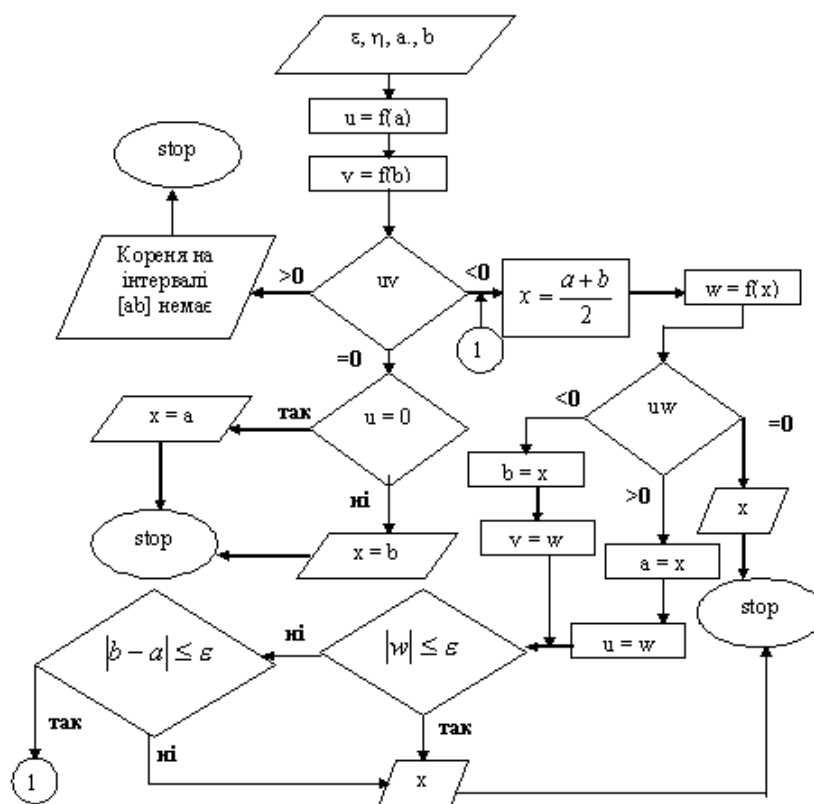


Рисунок 5.2 – Структурна схема обчислення кореня рівняння за методом дихотомії

5.2 Метод хорд

Нехай $f(x)$ має корінь ξ на відрізку $[a, b]$, $\frac{df}{dx} \neq 0$ $[a, b]$. Цей метод має наочний геометричний сенс (див. рис. 5.3). Геометрично цей метод є еквівалентним заміні кривої $f(x)$ хордою, яка проходить через точки $[a, b]$. Тоді для знаходження кореня за методом хорд маємо таку ітераційну формулу:

$$x_{n+1} = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)}.$$

При застосуванні цього методу нерухомим буде той кінець проміжку $[a, b]$, де знак функції збігається зі знаком її другої похідної [9, 11, 12].

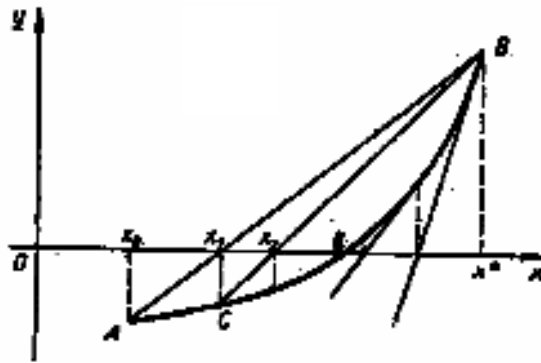


Рисунок 5.3 – Пояснення до методу хорд

Структурну схему програми обчислення кореня рівняння за методом хорд наведено на рис. 5.4.

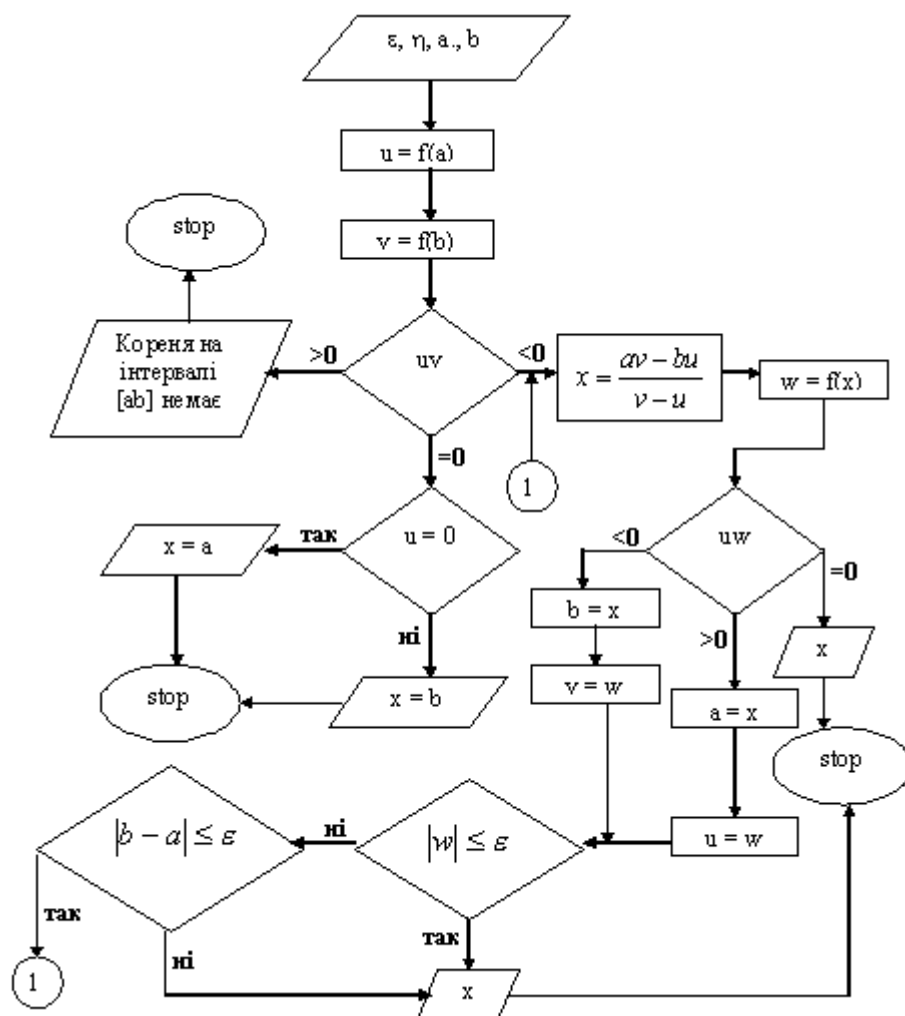


Рисунок 5.4 – Структурна схема обчислення кореня рівняння за методом хорд

5.3 Метод простої ітерації

Рівняння $f(x) = 0$ перетворюють у таке $x = \varphi(x)$. Вибираючи початкове наближення, обчислюють наступні наближення за формулою [9, 10, 12, 14]

$$x^{(i+1)} = \varphi(x^{(i)}).$$

Якщо на відрізку $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ має неперервну похідну та

$$|\varphi'(x)| < 1,$$

то ітераційна послідовність $x^{(i+1)} = \varphi(x^{(i)})$ збігається до єдиного на відрізку $[a, b]$ кореня рівняння.

Метод ітерації має геометричну інтерпретацію. Розв'язок рівняння x_0 є абсцисою точки перетину прямої $y = x$ та кривої $y = \varphi(x)$. Ітерації, що збігаються, наведено на рис. 5.5 [10].

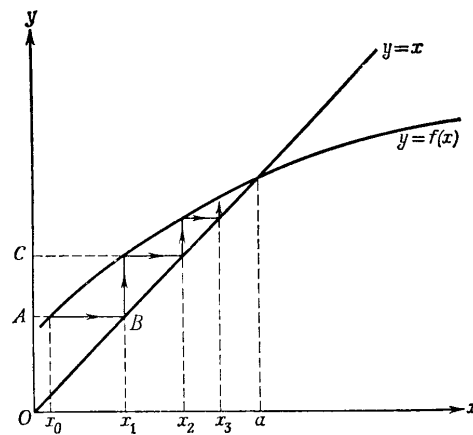


Рисунок 5.5 – Пояснення до методу простої ітерації

Структурну схему програми обчислення кореня рівняння за методом простої ітерації наведено на рис. 5.6.

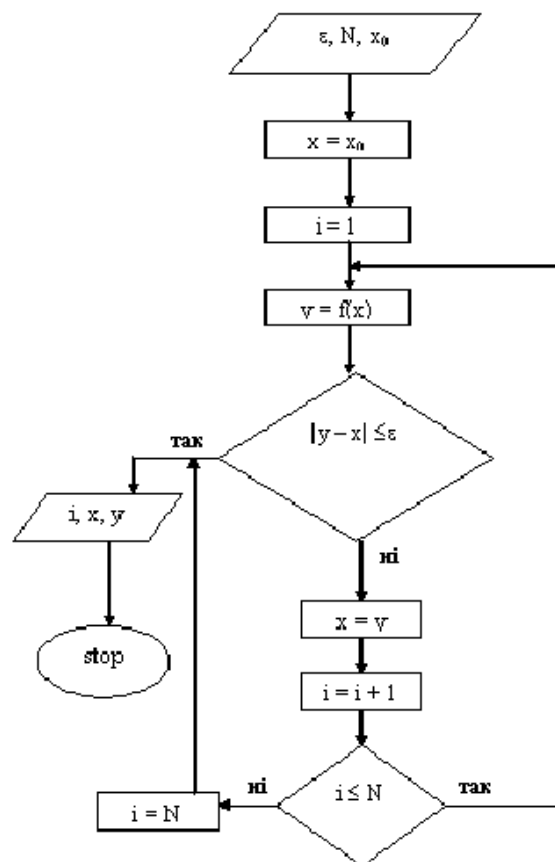


Рисунок 5.6 – Структурна схема обчислення кореня рівняння за методом простої ітерації

5.4 Метод дотичних

Метод дотичних, або метод Ньютона, належить до одного з методів, що найчастіше використовується для знаходження коренів.

Нехай корінь ξ рівняння $f(x) = 0$ знаходиться в інтервалі $[a, b]$, причому $\frac{df}{dx}$ та $\frac{d^2f}{dx^2}$ зберігають знаки у цьому проміжку.

Припустимо, що x_n – наближене значення кореня ξ .

Для його уточнення припустимо: $\xi = x_n + h_n$, де h_n – мала величина. Застосувавши формулу Тейлора, отримаємо:

$$0 = f(\xi) = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n \frac{df(x_n)}{dx}.$$

Звідси

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Тоді наступне наближення кореня ξ буде

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Геометрично метод дотичних означає заміну дуги кривої $y = f(x)$ дотичною, яку проведено в одному з кінців проміжку, де міститься корінь ξ . При цьому дотичну треба проводити у тому кінці проміжку, де знак функції збігається зі знаком її другої похідної (див. рис. 5.7) [9 – 13].

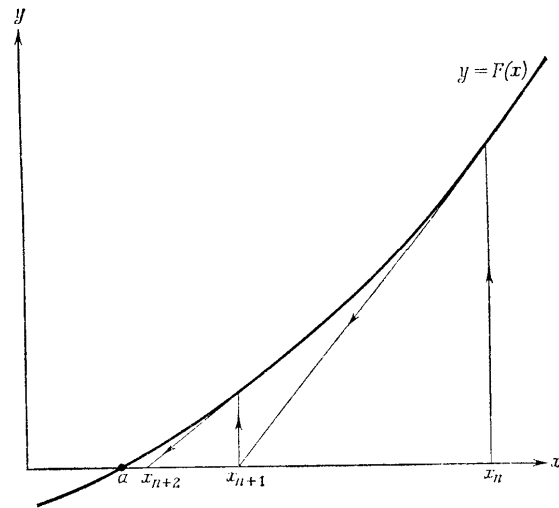


Рисунок 5.7 – Пояснення до методу дотичних

Структурну схему програми обчислення кореня рівняння за методом дотичних (Ньютона) наведено на рис. 5.8.

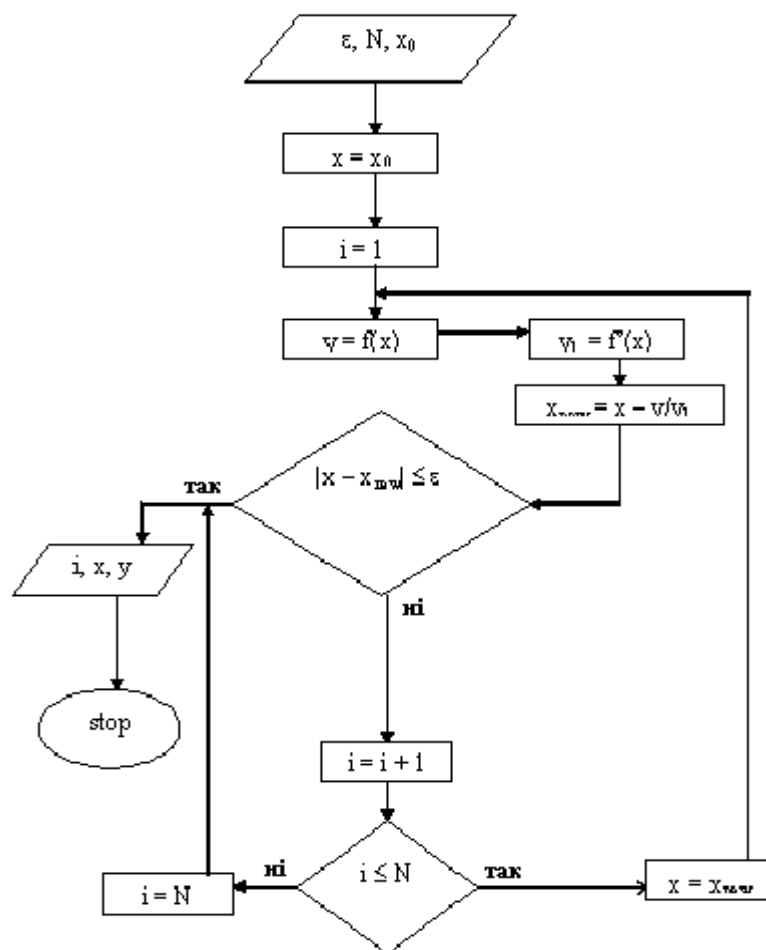


Рисунок 5.8 – Структурна схема обчислення кореня рівняння за методом дотичних

Розглянемо, як можна отримати корені рівняння в Maple.

Для знаходження коренів у Maple застосовується функція **solve(рівняння, змінні)**.

Знайдемо корені рівняння для поліному з прикладу 4.1.

```
> solve(z^3-2*z^2-z-5,z);
```

$$\begin{aligned} & \frac{(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}{6} + \frac{14}{3(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}} + \frac{2}{3} - \frac{(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}{12} \\ & - \frac{7}{3(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}} + \frac{2}{3} \\ & + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}{6} - \frac{14}{3(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}\right), \\ & - \frac{(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}{12} - \frac{7}{3(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}} + \frac{2}{3} \\ & - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}{6} - \frac{14}{3(676 + 12\sqrt{3021})^{(1/3)}}\right) \end{aligned}$$

Таким чином отримано три корені.

Крім безпосереднього знаходження коренів у Maple можна знаходити корені чисельними методами.

Розглянемо реалізацію методу дихотомії.

Задаємо функцію (рис. 5.9)

```
> f:= x->3*ln(x+1)-x;
```

```
> plot(f(x),x=0..6);
```

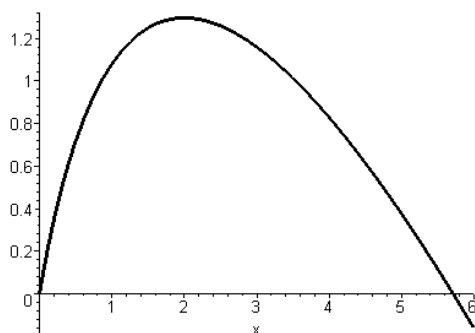


Рисунок 5.9 – Графік функції, яку досліджують

Задаємо відрізок, на якому знаходиться корінь

> a[0]:=5.:b[0]:=6.:

Перевіряємо умову збігання методу

> f(a[0])*f(b[0])<0;

$-0.06089625935 < 0$

> i:=0:epsilon:=10^(-10):

**> while abs(a[i]-b[i])>epsilon do x[i]:= (a[i]+b[i])/2; if f(a[i])*f(x[i])<0 then
b[i+1]:=x[i]; a[i+1]:=a[i];i:=i+1; else a[i+1]:=x[i]; b[i+1]:=b[i];i:=i+1;end
if;print(A[i]=a[i],B[i]=b[i]) end;**

$x_0 := 5.500000000$

$A_1 = 5.500000000 \quad B_1 = 6.$

$x_1 := 5.750000000$

$A_2 = 5.500000000 \quad B_2 = 5.750000000$

$x_2 := 5.625000000$

$A_3 = 5.625000000 \quad B_3 = 5.750000000$

$x_3 := 5.687500000$

$A_4 = 5.687500000 \quad B_4 = 5.750000000$

$x_4 := 5.718750000$

$A_5 = 5.687500000 \quad B_5 = 5.718750000$

$x_5 := 5.703125000$

.....

$A_{26} = 5.711441085 \quad B_{26} = 5.711441100$

$x_{26} := 5.711441092$

$A_{28} = 5.711441096 \quad B_{28} = 5.711441100$

$x_{28} := 5.711441098$

$A_{29} = 5.711441098 \quad B_{29} = 5.711441100$

$x_{29} := 5.711441099$

$A_{30} = 5.711441099 \quad B_{30} = 5.711441100$

$x_{30} := 5.711441100$

$A_{31} = 5.711441100 \quad B_{31} = 5.711441100$

.

Розглянемо реалізацію методу простої ітерації.

Задаємо функцію

```
> f:= x->3*ln(x+1);
```

$$f:=x \rightarrow 3 \ln(x+1)$$

Задаємо початкове значення

```
> x0 := 0.1;
```

$$x0 := 0.1$$

Розв'язання рівняння

```
> for k from 1 to 50 do x||k := evalf(f(x||(k-1))); od;
```

$$x1 := 0.2859305394$$

$$x2 := 0.7544478333$$

$$x3 := 1.686462547$$

$$x4 := 2.964675870$$

$$x5 := 4.132272312$$

.....

$$x41 := 5.711441082$$

$$x42 := 5.711441082$$

$$x43 := 5.711441082$$

$$x44 := 5.711441082$$

$$x45 := 5.711441082$$

$$x46 := 5.711441082$$

$$x47 := 5.711441082$$

$$x48 := 5.711441082$$

$$x49 := 5.711441082$$

$$x50 := 5.711441082$$

Аналітичне розв'язання цього рівняння має вигляд

```
> f(x) = x;
```

```
> solve(%,x);
```

$$3 \ln(x+1) = x$$

0., 5.711441084

Нехай $a_{11} \neq 0$. На першому етапі виключаються всі члени, які містять x_I , в усіх рівняннях, починаючи з другого. Поділимо перше рівняння системи на a_{11} . В результаті отримаємо

$$x_1 + b_{12} + \dots + b_{1n} = g_1,$$

$$\text{де } b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad g_1 = \frac{f_1}{a_{11}}.$$

Аналогічні дії виконуємо й над іншими рівняннями системи й приходимо до системи з трикутною матрицею, яку не важко розв'язати.

Таким чином, обчислення за методом Гауса можна поділити на два етапи:

- 1) побудову системи з трикутною матрицею – прямий хід методу;
- 2) розв’язання системи з трикутною матрицею – зворотний хід методу [10, 11, 13].

5.5.2 Ітераційний метод Гауса-Зейделя

Ітераційний метод Гауса-Зейделя або метод Зейделя є дуже зручним для використання на ЕОМ.

Розглянемо систему рівнянь

[illegible]

Припустимо, що $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тоді цю систему можна переписати у такому вигляді:

[illegible]

Тепер візьмемо перше наближення до розв'язку цієї системи, позначивши його як $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Підставляючи ці значення в отриману систему, знайдемо нові наближення. Цей процес триватиме доти, доки всі $x_i^{(k)}$ не стануть досить близькими до $x_i^{(k-1)}$, тобто поки $\max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$.

Систему лінійних рівнянь можна розв'язувати за ітераційним методом

Гауса-Зейделя за умови $\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$ [10, 11, 13].

Приклад 5.1. Знайти розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 7 \\ xy + z = 6 \end{cases}.$$

1. Безпосереднє розв'язання

Записуємо систему рівнянь як множину

```
> sys := {x+2*y-z=2, 2*x+y+z=7, x+y+z=6};
```

$$\text{sys} := \{x + 2y - z = 2, 2x + y + z = 7, x + y + z = 6\}$$

За допомогою функції *solve(рівняння, змінні)* отримуємо розв'язок цієї системи

```
> solve(sys,{x,y,z});
```

$$\{ z = 3, y = 2, x = 1 \}$$

2. За допомогою пакета **linalg** (див табл. 6).

> **with(linalg):**

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> **A := matrix(3,3,[[1,2,-1],[2,1,1],[1,1,1]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **B := vector([2,7,6]);**

$$B := [2, 7, 6]$$

> **X := linsolve(A,B);**

$$X := [1, 2, 3]$$

3. За допомогою пакета **LinearAlgebra** (див. табл. 2.6).

> **with(LinearAlgebra):**

> **A:=Matrix(10):**

> **A[1,1] := 5.6889:**

> **A[1,2],A[1,3],A[1,4],A[1,7],A[1,8],A[1,9],A[1,10],
A[2,1],A[2,3],A[2,4],A[2,5],A[2,6],A[2,7],A[2,10],
A[3,1],A[3,2],A[3,4],A[3,5],A[3,6],A[3,8],A[3,9],
A[4,1],A[4,2],A[4,3],A[4,5],A[4,6],A[4,7],A[4,8],A[4,9],
A[4,10], A[5,2],A[5,3],A[5,4],A[5,7],A[5,8],A[5,9],A[5,10],
A[6,2],A[6,3],A[6,4],A[6,7],A[6,8],A[6,9],A[6,10],
A[7,1],A[7,2],A[7,4],A[7,5],A[7,6],A[7,8],A[7,9],
A[8,1],A[8,3],A[8,4],A[8,5],A[8,6],A[8,7],A[8,10],
A[9,1],A[9,3],A[9,4],A[9,5],A[9,6],A[9,7],A[9,10],
A[10,1],A[10,2],A[10,4],A[10,5],A[10,6],A[10,8],A[10,9]
:= 0\$72:**

> **A[1,5],A[1,6],A[5,1],A[6,1] := 0.9752\$4:**

> **A[2,2],A[3,3] := 2.113\$2:**

> **A[2,8],A[3,7],A[7,3],A[8,2] := 0.3251\$4:**

> **A[2,9],A[9,2],A[3,10],A[10,3] := 0.8669\$4:**

> **A[4,4] := 0.4876:**

> **A[5,5],A[6,6] := 1.0294\$2:**

> **A[5,6],A[6,5] := 0.1652\$2:**

> **A[7,7],A[8,8] := 0.209\$2:**

> **A[7,10],A[8,9],A[9,8],A[10,7] := 0.1316\$4:**

> **A[9,9],A[10,10] := 0.6846\$2:**

> **A;**

$$\begin{bmatrix} 5.6889, 0, 0, 0, 0.9752, 0.9752, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2.113, 0, 0, 0, 0, 0.3251, 0.8669, 0 \\ 0, 0, 2.113, 0, 0, 0, 0.3251, 0, 0, 0.8669 \\ 0, 0, 0, 0.4876, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0.9752, 0, 0, 0, 1.0294, 0.1652, 0, 0, 0, 0 \\ 0.9752, 0, 0, 0, 0.1652, 1.0294, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0.3251, 0, 0, 0, 0.209, 0, 0, 0.1316 \\ 0, 0.3251, 0, 0, 0, 0, 0, 0.209, 0.1316, 0 \\ 0, 0.8669, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1316, 0.6846, 0 \\ 0, 0, 0.8669, 0, 0, 0, 0.1316, 0, 0, 0.6846 \end{bmatrix}$$

```
> B := Vector(10):
> B[1] := 1.7778:
> B[2],B[3],B[4],B[7], B[8],B[9],B[10]:= 0$7:
> B[5],B[6] := 0.3556$2:
> B;
```

$$\begin{bmatrix} 1.7778 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3556 \\ 0.3556 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> LinearSolve(A, B);
```

$$\begin{bmatrix} 0.292239096373154761 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.0591063395420220184 \\ 0.0591063395420220114 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}$$

Задачі

1. Знайти корені інтерполяційного поліному, що побудовано для варіантів з таблиці А.1.
2. Знайти корені інтерполяційного поліному, що побудовано для варіантів з таблиці А.1, за допомогою методу дихотомії.
3. Знайти корені інтерполяційного поліному, що побудовано для варіантів з таблиці А.1, за допомогою методу хорд.
4. Знайти корені інтерполяційного поліному, що побудовано для варіантів з таблиці А.1, за допомогою методу простої ітерації.
5. Знайти корені інтерполяційного поліному, що побудовано для варіантів з таблиці А.1, за допомогою методу дотичних.
6. Розв'язати систему рівнянь для коефіцієнтів, що наведено у таблиці В.1.
7. Розв'язати систему рівнянь для коефіцієнтів, що наведено у таблиці В.1, за методом Гауса.
8. Розв'язати систему рівнянь для коефіцієнтів, що наведено у таблиці В.1, за методом Гауса – Зейделя.

6 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

На практиці часто зустрічаються випадки, коли первісна функція $f(x)$ або не виражається через елементарні функції, або цей вираз є надто складним й користування ним не є зручним. У таких випадках для обчислення визначених інтегралів користуються формулами, які дозволяють обчислити інтеграл наближено, з необхідним ступенем точності. Ці наближені формули називаються квадратурними формулами.

6.1 Метод прямокутників

Найпростіші квадратурні формули отримуємо безпосередньо з визначення $\int_a^b f(x) dx$ як границі інтегральних сум.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками ділення x_i :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$
$$(x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i).$$

Таким чином, за досить дрібного розбиття відрізка $[a, b]$ матимемо:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Вираз, що знаходиться у правій частині, й буде найпростішою квадратурною формулою.

Розглянемо найпростіший випадок, якщо довжини інтервалів Δx_i є однаковими й $\xi_i = x_i$. Через те, що всі інтервали є однаковими, то $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.

Остаточно маємо

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i.$$

Ця формула називається квадратурною формулою прямокутників. Її назва походить з геометричного уявлення, як це зображено на рис. 6.1. Ліва частина формули є площею криволінійної трапеції $acbd$. Права частина є площею фігури, яка складається з прямокутників. Зі збільшенням величини n ці площі все менше й менше відрізняються одна від одної. Слід мати на увазі, що вище наведена формула часто буває незручною, через те, що для отримання задовільної точності необхідно брати величину n дуже великою [10, 11, 13].

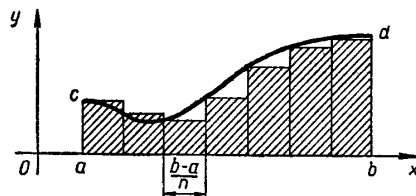


Рисунок 6.1 – Пояснення до методу прямокутників

6.2 Метод трапецій

Розглянемо ще один метод чисельного інтегрування, який має назву метод трапецій.

Розіб'ємо проміжок інтегрування на n рівних частин довжини $\frac{b-a}{n}$ й з точок ділення x_i проведемо прямі, що є перпендикулярними до осі Ox . Точки перетину цих прямих з кривою $y = f(x)$ позначимо через c_i й послідовно їх з'єднаємо хордами $c_i c_{i+1}$. Ми отримаємо фігуру, яка складатиметься з n трапецій, площа цієї фігури є близькою до площі криволінійної трапеції $(acdb)$. Знайдемо площу фігури, що складається з трапецій (рис. 6.2). Площа трапеції $x_i c_i c_{i+1} x_{i+1}$ дорівнює

$$\frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2} \right].$$

Таким чином, площа всієї фігури дорівнює

$$\frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

Згадуючи, що $x_n = b$, $x_0 = a$, можна записати:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],$$

де $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$.

Ця формула називається квадратурною формулою трапецій [9 – 13].

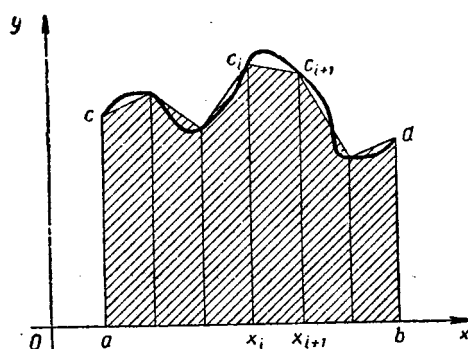


Рисунок 6.2 – Пояснення до методу трапецій

6.3 Метод Сімпсона

Розглянемо метод чисельного інтегрування, який має назву метод Сімпсона.

Розіб'ємо проміжок інтегрування $[a, b]$ на n рівних частин довжини $\frac{b-a}{n}$

точками ділення $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Між парами точок x_i та x_{i+1} візьмемо ще по

одній точці $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (рис. 6.3). Побудуємо перпендикуляри з усіх точок

$x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}$. Вони перетнуть криву $y = f(x)$ у точках $c_i, c_{i+\frac{1}{2}}, c_{i+1}$ відповідно.

Проведемо параболу через три точки $c_i, c_{i+\frac{1}{2}}, c_{i+1}$ (всього буде n різних парабол) (див. рис. 6.3). Площа кожної криволінійної трапеції $(x_i, c_i, c_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1})$ можна вважати такою, що дорівнює площі відповідної параболічної трапеції $(x_i, c_i, c_{i+\frac{1}{2}}, c_{i+1}, x_{i+1})$. Її площа дорівнюватиме

$$\frac{b-a}{6n} \left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1}) \right].$$

Площа фігури, що складається з n параболічних трапецій, наближено дорівнює значенню визначеного інтегралу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1}) \right].$$

Ця квадратурна формула називається квадратурною формулою Сімпсона.

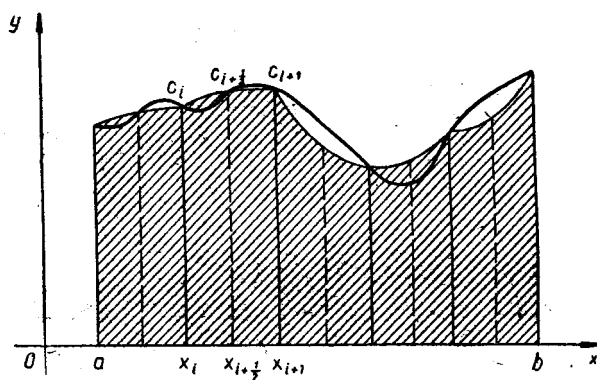


Рисунок 6.3 – Пояснення до методу Сімпсона

Приклад 6.1 Обчислити визначений інтеграл функції $x^4 \ln x$ з границями $2 \leq x \leq 4$.

Обчислимо цей інтеграл безпосередньо

> **func := x^4*ln(x);**

func := x⁴ ln(x)

```
> int(func, x=2..4);
```

$$\frac{2016}{5} \ln(2) - \frac{992}{25}$$

```
> evalf(%);
```

239.7969432

Обчислимо цей інтеграл за допомогою методу прямокутників. Для цього підключимо пакет **student** (див. табл. 2.6). Проміжок інтегрування розіб'ємо на 50 інтервалів.

```
> with(student):
```

1. Функція знаходиться ліворуч від апроксимуючих прямокутників (рис. 6.4).

```
> leftbox(func, x=2..4, 50, color=RED, shading=BLUE);
```

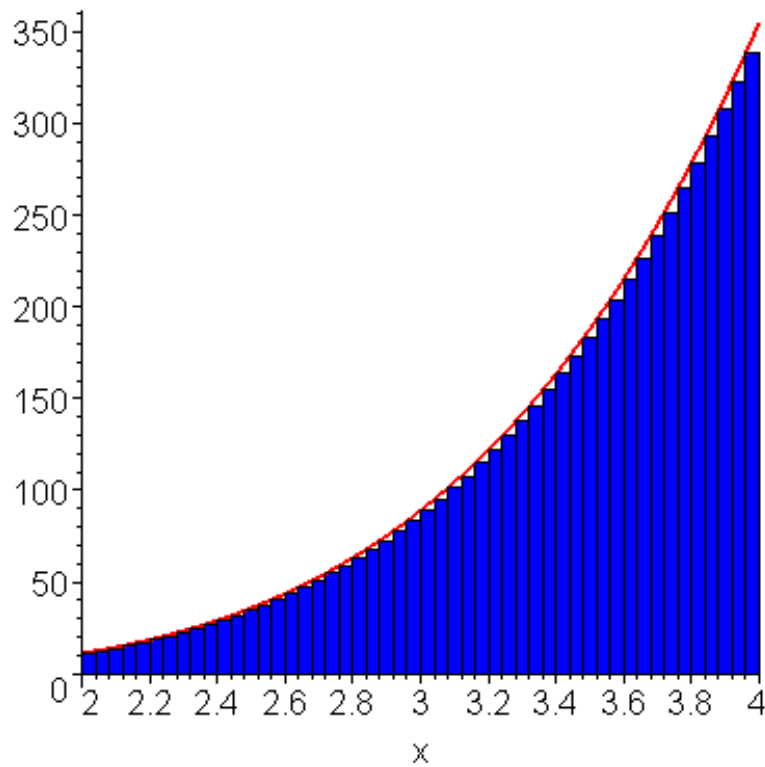


Рисунок 6.4 – Підінтегральна функція ліворуч від апроксимуючих прямокутників

```
> leftsum(func, x=2..4, 50);
```

$$\frac{1}{25} \left(\sum_{i=0}^{49} \left(2 + \frac{i}{25} \right)^4 \ln \left(2 + \frac{i}{25} \right) \right)$$

> **value(%):**

> **evalf(%);**

232.9727506

2. Функція проходить посередині апроксимуючих прямокутників (рис. 6.5).

> **middlebox(func, x=2..4, 50, color=RED, shading=BLUE);**

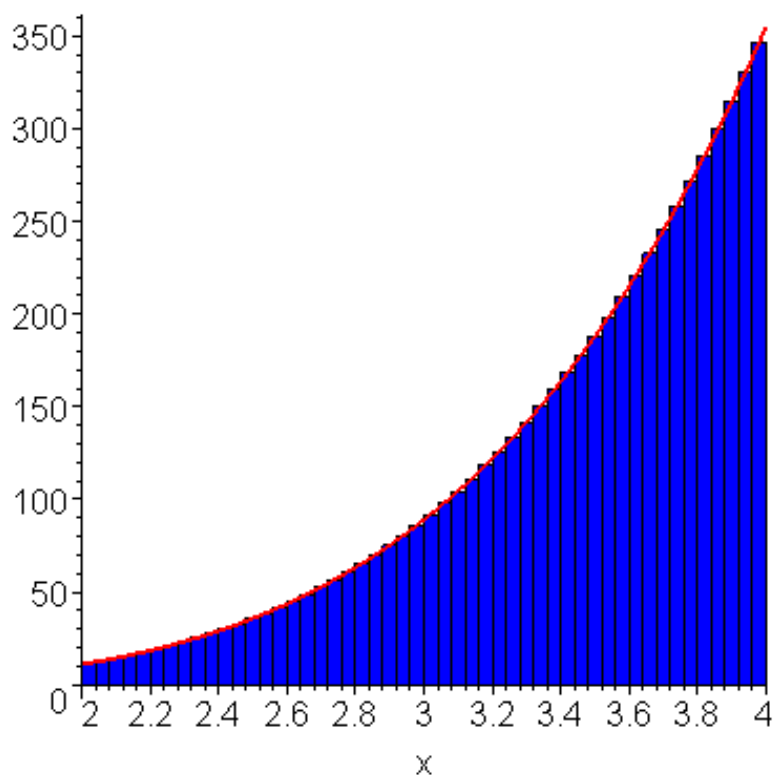


Рисунок 6.5 – Підінтегральна функція проходить посередині апроксимуючих прямокутників

> **middlesum(func, x=2..4, 50);**

$$\frac{1}{25} \left(\sum_{i=0}^{49} \left(\frac{101}{50} + \frac{i}{25} \right)^4 \ln \left(\frac{101}{50} + \frac{i}{25} \right) \right)$$

> **value(%):**

> **evalf(%);**

239.7710296

3. Функція знаходиться праворуч від апроксимуючих прямокутників (6.6).

> **rightbox(func, x=2..4, 50, color=RED, shading=BLUE);**

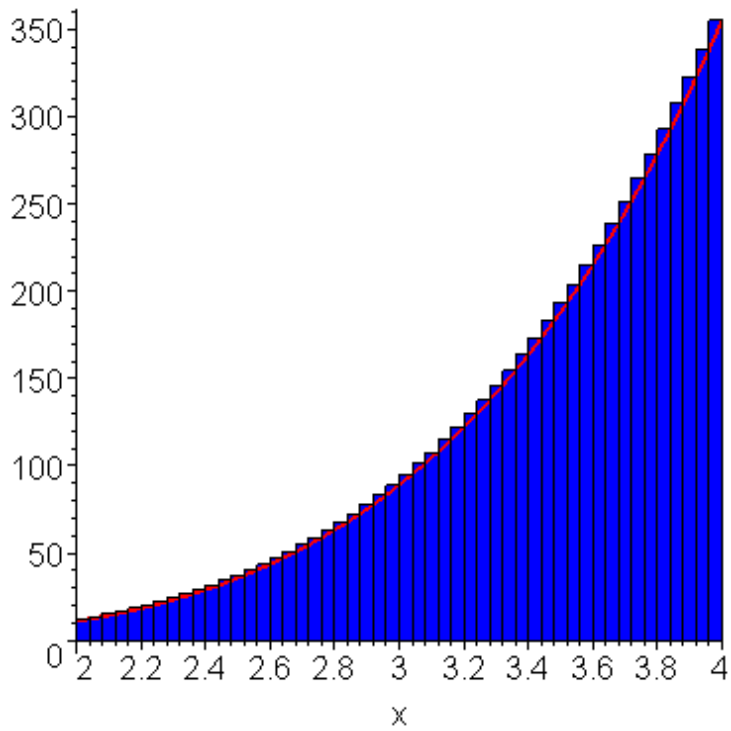


Рисунок 6.6 – Підінтегральна функція праворуч від апроксимуючих прямокутників

> **rightsum(func, x=2..4, 50);**

$$\frac{1}{25} \left(\sum_{i=1}^{50} \left(2 + \frac{i}{25} \right)^4 \ln \left(2 + \frac{i}{25} \right) \right)$$

> **value(%):**

> **evalf(%);**

246.7247907

Обчислимо цей інтеграл за допомогою методу трапецій.

> **trapezoid(func, x=2..4, 50);**

$$\frac{8}{25} \ln(2) + \frac{1}{25} \left(\sum_{i=1}^{49} \left(2 + \frac{i}{25} \right)^4 \ln \left(2 + \frac{i}{25} \right) \right) + \frac{128}{25} \ln(4)$$

> **value(%):**

> **evalf(%);**

239.8487706

Обчислимо цей інтеграл за допомогою методу Сімпсона.

> **simpson(func, x=2..4, 50);**

$$\frac{16}{75} \ln(2) + \frac{256}{75} \ln(4) + \frac{4}{75} \left(\sum_{i=1}^{25} \left(\frac{49}{25} + \frac{2i}{25} \right)^4 \ln \left(\frac{49}{25} + \frac{2i}{25} \right) \right) + \frac{2}{75} \left(\sum_{i=1}^{24} \left(2 + \frac{2i}{25} \right)^4 \ln \left(2 + \frac{2i}{25} \right) \right)$$

> **value(%)**:

> **evalf(%)**:

239.7969454

Порівняння точності обчислення інтегралу наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Точність методів обчислення визначеного інтегралу

Метод		Відносна похибка
Аналітичний		0
Прямокутників	ліворуч	-0,02845821347
	посередині	-0,1080647637 · 10 ⁻³
	праворуч	0,02889047461
Трапецій		0,2161303614 · 10 ⁻³
Сімпсона		0,9174428876 · 10 ⁻⁸

Якщо функція $f(x)$ має неперервні похідні досить високого порядку, то за однакової кількості вузлів квадратурні формули у порядку зростання точності можна розташувати таким чином:

- а) функція прямокутників;
- б) функція трапецій;
- в) функція Сімпсона.

У деяких окремих випадках цей порядок може порушуватися.

Отже, щодо методів чисельного інтегрування, то можна зробити такі висновки.

1. Формула трапецій за n ординат має приблизно той самий порядок точності, що й формула прямокутників за $2n$ ординат.
2. Формула Сімпсона за n ординат має приблизно той самий порядок точності, що й формула трапецій за $2n$ ординат.

Задачі

$$1. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 \varphi d\varphi .$$

$$2. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx .$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx .$$

$$4. \int_1^e \ln x dx .$$

$$5. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx .$$

$$6. \int_0^1 e^x \sin x dx .$$

$$7. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}} .$$

$$8. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} .$$

$$9. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} .$$

$$10. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}} .$$

1. Обчислити вище наведені інтеграли.
2. Обчислити вище наведені інтеграли за методом прямокутників.
3. Обчислити вище наведені інтеграли за методом трапецій.
4. Обчислити вище наведені інтеграли за методом Сімпсона.

7 ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, які містять похідну функцію однієї змінної, виникають у багатьох областях науки. Аналітичне розв'язання диференціальних рівнянь не завжди є можливим. Для розв'язання задачі Коші чисельними методами існує два широких класи методів.

1. Однокрокові методи, які використовують тільки інформацію про саму криву в даній точці й не відбуваються ітерації. Практично зручними методами цього класу є методи Рунге-Кутта.

2. Багатокрокові методи, в яких наступну точку кривої можна знайти, використовуючи інформацію про кілька попередніх точок. Більшість методів цього класу є методами прогнозу-корекції.

Методи Рунге-Кутта

Методи Рунге-Кутта мають такі властивості:

1. Ці методи є однокроковими: щоб знайти y_{n+1} , необхідною є інформація тільки про попередню точку x_n, y_n .

2. Вони узгоджуються з рядом Тейлора аж до членів порядку h^p , де ступінь p є різним для різних методів й називається порядком методу.

3. Вони не потребують обчислень похідних від $f(x, y)$, а потребують лише обчислення самої функції.

7.1 Метод Ейлера (метод Рунге-Кутта першого порядку)

Припустимо, що нам відома точка x_n, y_n , яка знаходиться на кривій $y(x)$, яку ми обчислюємо. Тоді ми можемо провести пряму лінію з тангенсом кута нахилу

$$y'_n = f(x_n, y_n),$$

яка пройде через точку x_n, y_n . Цю побудову наведено на рис. 7.1, де крива є точним, але поки що невідомим розв'язком рівняння, а пряму лінію L_1

побудовано, як це описано вище. Тоді наступною точкою розв'язання можна вважати ту, де пряма L_1 перетне ординату, яку проведено через точку $x = x_{n+1} = x_n + h$.

Рівняння прямої L_1 виглядає таким чином

$$y = y_n + y'_n(x - x_n),$$

а, отже,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (7.1)$$

Похибку при $x = x_{n+1}$ показано у вигляді відрізка e . Зрозуміло, що знайдений таким чином наближений розв'язок узгоджується з розвиненням у ряд Тейлора аж до членів порядку h . Формула (7.1) описує метод Ейлера, один з найстаріших й загально відомих методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Цей метод має досить велику похибку обмеження; крім того, він дуже часто виявляється не стійким – мала похибка збільшується зі зростанням x .

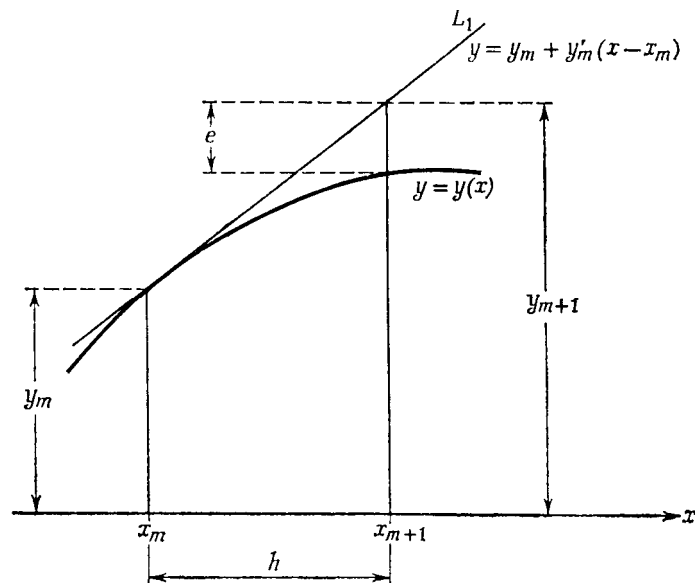


Рисунок 7.1 – Пояснення до методу Ейлера

7.2 Метод Рунге-Кутта четвертого порядку

Формули для розв'язання диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта четвертого порядку є одними з найживаніших. Цей метод застосовується так широко, що в літературних

джерелах, які присвячено обчисленням за допомогою ЕОМ, цей метод називають просто "методом Рунге-Кутта" без усяких посилань на тип або порядок. Цей класичний метод Рунге-Кутта описується системою з п'яти співвідношень:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Похибка обмеження для цього методу дорівнює $\varepsilon_T = Kh^5$.

Слід зауважити, що при використанні цього методу функцію необхідно обчислювати чотири рази.

Через часте використання в математичних моделях диференціальних рівнянь другого порядку, доцільно навести співвідношення для розв'язання диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь за методом Рунге-Кутта для таких рівнянь.

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n, y'_n), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hy'_n}{2}, y'_n + \frac{hk_1}{2}\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hy'_n}{2} + \frac{h^2 k_1}{4}, y'_n + \frac{hk_2}{2}\right), \\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + y'_n h + \frac{h^2 k_2}{2}, y'_n + k_3 h\right).
\end{aligned}$$

7.3 Методи прогнозу-корекції

Як зрозуміло з назви, спочатку "передбачається" значення y_{n+1} , а потім застосувати той чи інший метод для "корегування" цього значення. Цей ітераційний процес можна повторювати багато разів.

Для прогнозу можна використати формулу другого порядку

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n),$$

де верхній індекс (0) означає вихідне наближення до y_{n+1} , тобто передбачене значення. Безпосередньо з формули випливає, що за її допомогою не можна обчислити y_1 . Щоб розпочати розв'язання за допомогою методу прогнозу-корекції, часто використовують метод Рунге-Кутта.

Геометрично передбачення зводиться до того, що знаходиться кут нахилу дотичної в точці x_n, y_n (пряма L_1 на рис. 7.2). Після цього через точку x_{n-1}, y_{n-1} проводиться пряма L , яка є паралельною L_1 . Передбачене значення $y_{n+1}^{(0)}$ буде розташовано там, де пряма L перетнеться з ординатою $x = x_{n+1}$.

Тепер потрібен певний метод корекції передбаченого значення. Через те, що ми знаємо наближену величину y_{n+1} , то можна обчислити нахил дотичної у точці $x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}$. Цю дотичну зображено на рис. 7.3 й позначено L_2 . Пряма L_1 на рис. 7.3 є тією ж самою, що й на рис. 7.2, і тангенс кута нахилу її дорівнює $f(x_n, y_n)$. Усереднюючи тангенси кутів нахилу ліній L_1 та L_2 , отримаємо лінію \bar{L} .

Нарешті проводимо через точку x_n, y_n лінію L , яка є паралельною до лінії \bar{L} й точка перетину цієї лінії з ординатою $x = x_{n+1}$ дає нове наближення до y_{n+1} .

Назвемо це наближення скорегованим значенням $y_{n+1}^{(1)}$.

Обчислити це скореговане значення можна за формулою

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})].$$

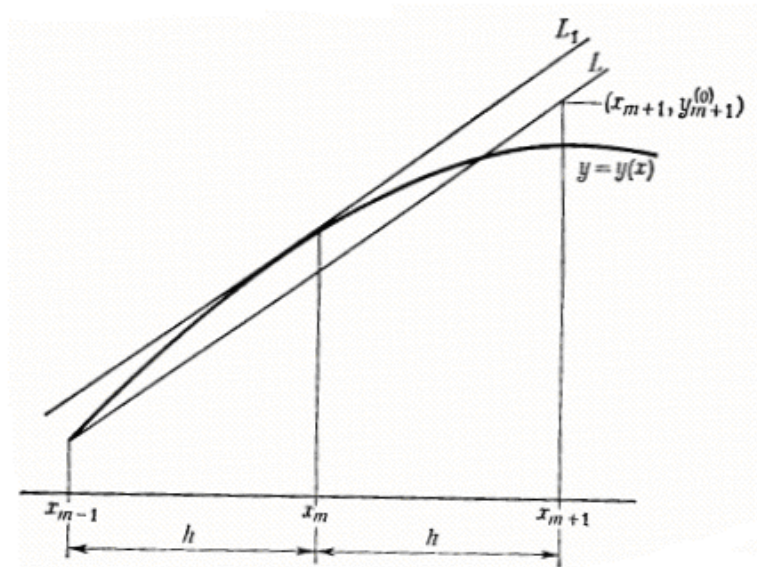


Рисунок 7.2 – Пояснення до методу прогнозу-корекції (прогноз)

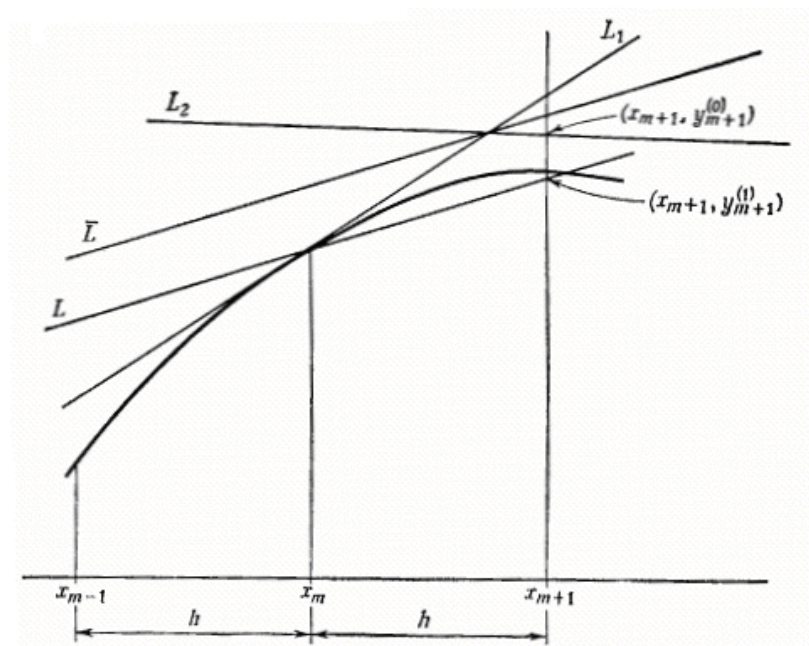


Рисунок 7.3 – Пояснення до методу прогнозу-корекції (корекція)

Тепер можна спробувати знайти нове, ще краще наближення до y_{n+1} , використовуючи значення $y_{n+1}^{(1)}$ й корегуючи знову. В загальному випадку, i -те наближення до y_{n+1} обчислюється за формулою

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i+1)})].$$

Ітераційний процес закінчується, коли

$$|y_{n+1}^{(i+1)} - y_{n+1}^{(i)}| < \varepsilon.$$

Досить часто для прогнозу використовують формулу Адамса

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

7.4 Метод диференціальних перетворень

Одним з найефективніших методів розв'язання диференціальних рівнянь в тому числі й нелінійних є метод диференціальних перетворень [15, 16].

Розглянемо диференціальні перетворення.

Нехай оригінал $x(t)$ – функція, що нескінченно диференціюється. Очевидно, k -та похідна від $x(t)$ по t буде функцією номера k та аргументу t , тобто

$$\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} = \varphi(t, k).$$

При фіксації неперервного аргументу t у точці $t = t_i$, функція $\varphi(t_i, k)$ перетворюється у функцію цілого аргументу k й може розглядатися як зображення. Отже, як пряме диференціальне перетворення оригіналу $x(t)$ можна

вибрати k -ту похідну $\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$ за фіксованого $t = t_i$, тобто

$$X(k) = \varphi(t, k) = \left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_i}. \quad (7.2)$$

Якщо припустити, що функцію $x(t)$ можна зобразити рядом Тейлора, який збігається до неї, то вираз

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} X(k) \quad (7.3)$$

буде зворотним перетворенням, що дозволяє розв'язати задачу визначення оригіналу за його диференціальним зображенням.

Прийнявши символ $\overline{\quad}$ як відображення зв'язків між оригіналами та їх диференціальними зображеннями за формулами (7.2) та (7.3) можна написати

$$X(k) = \varphi(t, k) = \left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_i} \quad \overline{\quad} \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} X(k).$$

Визначені таким чином диференціальні перетворення функцій надалі умовимося називати коротко ДП-1, які мають такі властивості

$$x(t) \pm y(t) \quad \overline{\quad} \quad X(k) \pm Y(k),$$

$$\lambda x(t) \quad \overline{\quad} \quad \lambda X(k),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \overline{\quad} \quad X(k+1),$$

$$x(t) y(t) \quad \overline{\quad} \quad \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} X(l) Y(k-l),$$

$$\text{де } \binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!} - \text{звичайне позначення біномних коефіцієнтів.}$$

Порівнюючи ці властивості з властивостями інтегральних перетворень, бачимо, що операції алгебраїчного додавання та множення на стали для всіх перетворень є однаковими, операції диференціювання оригіналів всюди відповідають прості алгебраїчні операції в області зображень й, нарешті, найпростіше зображення добутку оригіналів отримуємо при використанні диференціальних перетворень через те, що зображення добутку у цьому випадку

є алгебраїчною згорткою кінцевої довжини, тобто звичайною сумою попарних добутків (з коефіцієнтами ваги $\frac{k!}{l!(k-l)!}$).

Сказане дозволяє стверджувати, що диференційні перетворення принципово більше пристосовані для дослідження нелінійних систем та систем зі змінними параметрами, ніж інтегральні, зрозуміло, у тих випадках, коли стан систем описується функціями, для яких можна реалізувати такі перетворення. Однак з практичної точки зору застосування диференційних перетворень ДП-1 не зовсім зручно. По-перше, значення $X(k)$ для кожного конкретного значення k мають свою розмірність. По-друге, у перетвореннях ДП-1 величини $X(k)$ жорстко пов'язані з похідними оригіналу й можуть мати незручні для обчислення значення. Нарешті, зображення добутку містить коефіцієнти ваги $\binom{k}{l}$, що не зовсім зручно з обчислювальної точки зору.

Враховуючи сказане, існує підстава припустити, що більш зручні диференційні перетворення функцій можна отримати, аналізуючи вирази

$$X(k) = M(k) \left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$x(t) = \frac{1}{q(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \frac{X(k)}{M(k)},$$

де $M(k) \neq 0$ – відома функція цілого аргументу k , яка відіграє роль змінного масштабу; $q(t) \neq 0$ – відома функція, яка відіграє роль ядра перетворення (у ДП-1 $M(k) = 1$, $q(t) = 1$).

Тут ядро $q(t)$ дорівнює одиниці, а масштабна функція $M(k)$ – дорівнює H^k та $H^k/k!$. Величину H називатимемо масштабною сталою. Розмірність її збігається з розмірністю неперервного аргументу t . Диференційні перетворення позначатимемо як ДП - $M(k)$. Так, при $M(k) = H^k$ маємо ДП - H^k , а при $M(k) = H^k/k!$ – перетворення ДП - $H^k/k!$. Зображення, що отримаємо в результаті, умовимося фіксувати у точці $t_0 = 0$, протилежне спеціально не зауважуватиметься.

З урахуванням сказаного вказані диференційні перетворення відповідно матимуть вигляд

$$\text{ДП - Н}^k: X(k) = H(k) \left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right] \stackrel{\text{ДП}}{=} x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k \frac{X(k)}{k!}$$

та

$$\text{ДП - Н}^k/k!: X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right] \stackrel{\text{ДП}}{=} x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k).$$

Поняття про Т-рівняння. Під Т-рівняннями розуміють рівняння, які через звичайні символи та символи Т-операцій пов'язують між собою відповідні тейлорівські функції. Розв'язати Т-рівняння, означає знайти таку тейлорівську функцію, яка відповідає самому рівнянню й, взагалі, ще кільком додатковим обмеженням.

Математичний опис процесу або стану якого-небудь об'єкта прийнято називати його математичною моделлю. За допомогою прямого Т-перетворення математичний опис можна перекласти на область зображень й через це отримати відповідну систему Т-рівнянь, якщо вихідний опис дозволяє зображення у вигляді степеневих рядів Тейлора. Подібну систему можна назвати Т-моделлю процесу чи стану об'єкта, що вивчаються.

Тейлорівські функції

$$1. \text{ } b_0(t) = 1$$

$$b_0(t) \stackrel{\text{ДП}}{=} b(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k \geq 1 \end{cases}.$$

$b(k)$ – тейлорівська одиниця (теда).

Зсунута на m теда

$$v(k-m) = \begin{cases} 1, k=m \\ 0, k \neq m \end{cases}.$$

2. Функція t

$$t \stackrel{\text{---}}{=} T(k) = H v(k-1) = \begin{cases} H, k=1 \\ 0, k \neq 1 \end{cases}.$$

3. Проста парабола

$$b_m(t) = \left(\frac{t}{H}\right)^m \stackrel{\text{---}}{=} v(k-m) = \begin{cases} 1, k=m \\ 0, k \neq m \end{cases}.$$

4. Експонента $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t} \stackrel{\text{---}}{=} \varepsilon_{\lambda}(k) = \frac{(\lambda H)^k}{k!}.$$

5. Синусоїда

$$\sin(\omega t + \alpha) \stackrel{\text{---}}{=} \frac{(\omega H)^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) \stackrel{\text{---}}{=} \frac{(\omega H)^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right).$$

6. Біноміальна функція $b_m(t) = (1 + t)^m$

$$b_m(t) \stackrel{\text{---}}{=} B_m(k) = \frac{H^k}{k!} m(m-1) \dots (m-k+1).$$

Цей вираз можна зобразити у вигляді рекурентної формули

$$B_m(k+1) = H \frac{m-k}{1+k} B_m(k), \quad B_m(0) = 1.$$

7. Гіперболічний синус та косинус

$$\text{sh at } \overline{\underline{\quad}} \quad \text{sh}_a(k) = \frac{(aH)^k}{k!} \sin^2 \frac{\pi k}{2},$$

$$\text{ch at } \overline{\underline{\quad}} \quad \text{ch}_a(k) = \frac{(aH)^k}{k!} \cos^2 \frac{\pi k}{2}.$$

Дії над тейлорівськими функціями

1. Додавання

$$x(t) \pm y(t) \quad \overline{\underline{\quad}} \quad X(k) \pm Y(k).$$

2. Множення на сталу

$$y(t) = \lambda x(t) \quad \overline{\underline{\quad}} \quad Y(k) = \lambda X(k).$$

3. Множення

$$x(t) y(t) \quad \overline{\underline{\quad}} \quad X(k) * Y(k)$$

$$X(k) * Y(k) = \sum_{l=0}^k X(l) Y(k-l).$$

4. Ділення

$$\frac{x(t)}{y(t)} \quad \overline{\underline{\quad}} \quad \left| \frac{X(k)}{Y(k)} \right| = \frac{X(k) - \sum_{l=0}^{k-1} \left| \frac{X(l)}{Y(l)} \right| Y(k-l)}{Y(0)}.$$

5. Диференціювання

$$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\text{I}}{=} DX(k) = \frac{k+1}{H} X(k+1)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \stackrel{\text{I}}{=} D^n X(k) = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{H^n} X(k+n).$$

6. Інтегрування

$$\int x(t) dt \stackrel{\text{I}}{=} D^{-1} X(k) = \frac{H}{k} X(k-1).$$

Алгебра Т-функцій

1. Ступені Т-функцій

Необхідно відрізнити Т- та звичайні ступені Т-функцій:

$$X^m(k) = X(k) X(k) X(k) \dots X(k)$$

$$X^0(k) = 1$$

$$X^m(k) = X(k) * X(k) * \dots * X(k) = \sum_{l=0}^k X^{m-1}(l) X(k-l)$$

$$X^0(k) = \mathbf{1}(k), \quad X^1(k) = X(k), \quad X^2(k) = \sum_{l=0}^k X(l) X(k-l) \text{ і т. д.}$$

2. Добуток двох функцій однакового ступеня

$$X^m(k) * Y^m(k) = (X(k) * Y(k))^m.$$

3. Добуток двох функцій різних ступенів

$$X^m(k) * X^n(k) = X^{m+n}(k).$$

4. Піднесення до степеня

$$(X^m(k))^n = X^{mn}(k).$$

$$5. \left(\left| \frac{X(k)}{Y(k)} \right| \right)^m = \left| \frac{X^m(k)}{Y^m(k)} \right|$$

$$6. \left(\left| \frac{X^m(k)}{X^n(k)} \right| \right) = X^{m-n}(k).$$

$$7. \frac{1}{x(t)}$$

$$X^{-1}(k) = \left| \frac{b(k)}{X(k)} \right| = \frac{b(k) - \sum_{l=0}^{k-1} X^{-1}(l)X(k-l)}{X(0)}.$$

$$8. X(k)b(k) = X(0)b(k) = \begin{cases} X(0), k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

$$X(k)b(k-m) = X(m)b(k-m) = \begin{cases} X(m), k=m \\ 0, k \neq m \end{cases}$$

$$X(k) * b(k) = X(k)$$

$$X(k) * b(k-m) = X(k-m).$$

Диференційні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Система лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) &= f(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

в області Т-зображень має вигляд різницьових рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{k+1}{H} X(k+1) + AX(k) &= F(k) \\ X(0) &= x_0\end{aligned},$$

де A – матриця сталих коефіцієнтів.

Розв’язання різницьових рівнянь. Для цього рівняння приводимо до вигляду

$$\begin{aligned}X(k+1) &= \frac{H}{k+1} [F(k) - AX(k)] \\ X(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Далі послідовно обчислюємо дискрети $X(k)$ й за зображенням будуємо розв’язок.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) t^k.$$

Приклад 7.1.

Нехай маємо рівняння

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) &= 0 \\ x(0) &= 5 \\ \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_{t=0} &= 1.\end{aligned}$$

Це рівняння має розв'язок

$$x(t) = 4e^t + e^{-3t}.$$

Знайдемо зображення цього рівняння

$$\frac{(k+1)(k+2)}{H^2} X(k+2) + 2 \frac{k+1}{H} X(k+1) - 3X(k) = 0,$$

$$X(0) = 5,$$

$$X(1) = 1.$$

Приводячи зображення до канонічного вигляду, маємо різницеве рівняння

$$X(k+2) = -2 \frac{H}{k+2} X(k+1) + 3 \frac{H^2}{(k+1)(k+2)} X(k),$$

де H – стала, яку найчастіше беруть такою, що дорівнює 1, тоді маємо

$$X(0) = 5, X(1) = 1, X(2) = 13/2, X(3) = -23/6, X(4) = 85/24, \dots$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} X(k) t^k = 5 + t + \frac{13}{2!} t^2 - \frac{23}{3!} t^3 + \frac{85}{4!} t^4 + \dots = \\ &= 4 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) + \left(1 - 3t + \frac{(3t)^2}{2!} - \frac{(3t)^3}{3!} + \frac{(3t)^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= 4e^t + e^{-3t}. \end{aligned}$$

Покажемо, як це рівняння можна розв'язати за допомогою Maple.

Задаємо рівняння

> eq1 := diff(x(t),t\$2)+2*diff(x(t),t)-3*x(t)=0;

$$eq1 := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - 3 x(t) = 0$$

Визначаємо початкові умови

> init1 := x(0)=5, D(x)(0)=1;

$$init1 := x(0) = 5, D(x)(0) = 1$$

Знаходимо аналітичний розв'язок

> **dsolve({eq1,init1},{x(t)});**

$$x(t) = 4 e^t + e^{(-3 t)}.$$

Знаходимо розв'язок у вигляді ряду

> **dsolve({eq1,init1},{x(t)},type=series);**

$$x(t) = 5 + t + \frac{13}{2} t^2 - \frac{23}{6} t^3 + \frac{85}{24} t^4 - \frac{239}{120} t^5 + \frac{733}{720} t^6 - \frac{2183}{5040} t^7 + \frac{1313}{8064} t^8 + O(t^9).$$

Бачимо, що цей розв'язок збігається з розв'язком, який отримано за допомогою диференціальних перетворень.

Диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами. Система лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + a(t)x(t) &= f(t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

в області Т-зображень має вигляд різницевого рівняння

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{H} X(k+1) + A(k) * X(k) &= F(k) \\ X(0) &= x_o, \end{aligned}$$

або більш детально

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{H} X(k+1) + \sum_{l=0}^k A(l) X(k-l) &= F(k) \\ X(0) &= x_o. \end{aligned}$$

Цей вираз дозволяє, знаючи $X(0)$, послідовно обчислювати дискрети $X(1)$, $X(2)$ й інші за формулою

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \frac{H}{k+1} \left[F(k) - \sum_{l=0}^k A(l) X(k-l) \right] \\ X(0) &= x_o. \end{aligned}$$

Приклад 7.2.

Нехай маємо рівняння

$$(1+t)^2 \frac{dx(t)}{dt} + 2(1+t)x(t) = 1$$

$$x(0) = 1.$$

Це рівняння має розв'язок

$$x(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Зобразимо вихідне рівняння у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2 \frac{x(t)}{1+t} = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

$$x(0) = 1.$$

Деякі зауваження:

Біноміальна функція $b_m(t) = (1+t)^m$.

Її зображення у вигляді рекурентної формули

$$B_m(k+1) = H \frac{m-k}{1+k} B_m(k), \quad B_m(0) = 1.$$

Наразі маємо

$$b_{-1}(t) = (1+t)^{-1}$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

$$b_{-2}(t) = (1+t)^{-2}$$

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1).$$

Будуємо диференційне зображення рівняння

$$(k+1)X(k+1) + 2(-1)^k * X(k) = (-1)^k (k+1),$$

або у канонічному вигляді

$$X(k+1) = (-1)^k - \frac{2}{k+1} (-1)^k * X(k).$$

Остаточного маємо

$$X(k+1) = (-1)^k - \frac{2}{k+1} \sum_{l=0}^k (-1)^l X(k-l).$$

Задаючи k , обчислюємо дискрети:

$$X(0) = 1, X(1) = -1, X(2) = 1, X(3) = -1, X(4) = 1, X(5) = -1, \dots$$

За дискретами будуємо оригінал

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 + \dots = \frac{1}{1+t}.$$

Радіус збігання цього ряду $t \leq 1$. За ознакою Даламбера $\rho = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{c_m}{c_{m+1}} \right|$.

Покажемо, як це рівняння можна розв'язати за допомогою Maple.

Задаємо рівняння

> **eq2:= (1+t)^2*diff(x(t),t)+2*(1+t)*x(t)=1;**

$$eq2 := (1+t)^2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 2(1+t) x(t) = 1$$

Визначаємо початкові умови

> **init2:=x(0)=1;**

$$init2 := x(0) = 1$$

Знаходимо аналітичний розв'язок

> **dsolve({eq2,init2},{x(t)});**

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

Знаходимо розв'язок у вигляді ряду

> **dsolve({eq2,init2},{x(t)},type=series);**

$$x(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8$$

Нелінійні диференціальні рівняння. Нехай задано систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t)]$$

$$x(0) = x_0.$$

Загальний підхід до перетворення в область Т-зображень систем нелінійних диференціальних перетворень полягає у такому: спочатку формально записуємо

$$\frac{k+1}{H} X(k+1) = \underline{f}[T(k), X(k)]$$

$$X(0) = x_0,$$

потім, використовуючи правила та формули тейлорівського числення, замінюємо дії звичайними алгебраїчними, тригонометричними та іншими діями над функціями $T(k)$ та $X(k)$, отримуючи рекурентну формулу, за якою обчислюємо дискрети й будуємо ряд, що і є розв'язком рівняння.

Приклад 7.3.

Нехай

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = x(t) \frac{dx(t)}{dt} - x^2(t)$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 2.$$

Т-зображення цього рівняння

$$\frac{(k+1)(k+2)}{H^2} X(k+2) = X(k) * \frac{(k+1)}{H} X(k+1) - X(k) * X(k)$$

$$X(0) = 1$$

$$X(1) = 2.$$

Далі, обчислюючи дискрети, маємо

$$\begin{array}{lll} X(0) = 1 & X(3) = \frac{H^3}{6} & X(6) = -\frac{7H^6}{120} \\ X(1) = 2H & X(4) = -\frac{H^4}{8} & X(7) = -\frac{97H^7}{5040} \\ X(2) = \frac{H^2}{2} & X(5) = -\frac{H^5}{20} & X(8) = -\frac{103H^8}{6720} \end{array} .$$

Отже, остаточний розв'язок матиме вигляд

$$x(t) = 1 + 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{8} - \frac{t^5}{20} \dots$$

[15, 16].

Покажемо, як це рівняння можна розв'язати за допомогою Maple.

Задаємо рівняння

> **eq3:=diff(x(t),t\$2)=x(t)*diff(x(t),t)-x(t)^2;**

$$eq3 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = x(t) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - x(t)^2$$

Визначаємо початкові умови

> **init3:=x(0)=1,D(x)(0)=2;**

$$init3 := x(0) = 1, D(x)(0) = 2$$

Знаходимо розв'язок у вигляді ряду

> **dsolve({eq3,init3},{x(t)},type=series);**

$$x(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{20}t^5 - \frac{7}{120}t^6 - \frac{97}{5040}t^7 + O(t^8)$$

Крім задачі Коші Maple дозволяє розв'язувати й крайові задачі.

Приклад 7.4. Нехай задано диференційне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 10x = 7e^{-t} + 4$$

з межевими умовами

$$x(0) = 2; x(1) = -5.$$

Знайти розв'язок цього рівняння.

Розв'язання

Задаємо рівняння

> **ode1 := diff(x(t), t\$2) + 2 * diff(x(t), t) - 10 * x(t) = 7*exp(-t) + 4;**

$$ode1 := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - 10 x(t) = 7 e^{(-t)} + 4$$

Визначаємо межові умови

> **bc1 := x(0)=2, x(1)=-5;**

$$bc1 := x(0) = 2, x(1) = -5$$

Знаходимо розв'язок рівняння

> **dsolve({ode1,bc1 },x(t));**

$$x(t) = \frac{1}{55} \frac{e^{((-1+\sqrt{11})t)} (-253 e^{(\sqrt{11})} + 35 e^{(-1)} e^{(\sqrt{11})} - 167 e^{(-1)})}{e^{(-1)} ((e^{(\sqrt{11})})^2 - 1)} + \frac{1}{55} \frac{e^{(-(1+\sqrt{11})t)} e^{(\sqrt{11})} (253 + 167 e^{(-1)} e^{(\sqrt{11})} - 35 e^{(-1)})}{e^{(-1)} ((e^{(\sqrt{11})})^2 - 1)} - \frac{1}{55} (35 e^{((-1+\sqrt{11})t)} + 22 e^{(t\sqrt{11})}) e^{(-t\sqrt{11})}$$

Приклад 7.5. Нехай задано диференціальне рівняння

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} + 4x = -2t + 7$$

з межовими умовами

$$x(1) = 7; x(4) = -1.$$

Знайти розв'язок цього рівняння.

Розв'язання

Задаємо рівняння

> **ode2 := t^2 * diff(x(t), t\$2) + t * diff(x(t), t) + 4 * x(t) = -2*t + 7;**

$$ode2 := t^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + t \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 4 x(t) = -2 t + 7$$

Визначаємо межові умови

> **bc2 := x(1)=7, x(4)=-1;**

$$bc2 := x(1) = 7, x(4) = -1$$

Знаходимо розв'язок рівняння

> **combine(dsolve({ode2,bc2 },y(x)));**

$$y(x) = \frac{1}{20} \frac{-23 \sin(2 \ln(x)) + 113 \sin(-2 \ln(x) + 4 \ln(2)) + 35 \sin(4 \ln(2)) - 8 x \sin(4 \ln(2))}{\sin(4 \ln(2))} .$$

Задачі

Отримати розв'язки диференційних рівнянь з таблиці Г.1.

8 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Переважну більшість фізичних законів природи можна записати, використовуючи диференційні рівняння з частинними похідними: рівняння руху та закони теплообміну Ньютона, рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Шредінгера у квантовій фізиці, рівняння Нав'є–Стокса у гідромеханіці тощо. При чому в усіх цих рівняннях фізичні явища описуються за допомогою похідних за просторовими координатами та за часом.

8.1 Метод відокремлення змінних

Одним з найбільш поширених методів розв'язання диференційних рівнянь з частинними похідними другого порядку є метод відокремлення змінних або метод Фур'є. Ознайомимося з цим методом на прикладі такої задачі:

Приклад 8.1. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x, y)$ всередині області, яку обмежено чотирма плоскими зарядженими пластинами. Розташування пластин наведено на 8.1. Причому пластини АВ, ВС та CD знаходяться під потенціалом U_0 , а пластина AD – під нульовим потенціалом.

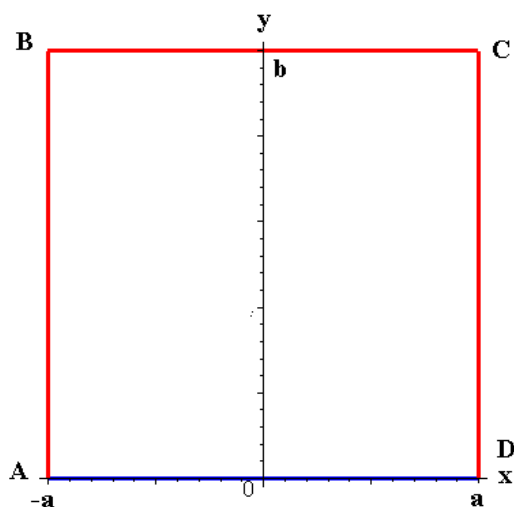


Рисунок 8.1 – Розташування заряджених пластин

Ця задача відноситься до задач електростатики і розподіл електростатичного потенціалу описується за допомогою рівняння Лапласа, яке у даному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (8.1)$$

На межах поверхні, яку досліджують, задано такі умови:

$$u(-a, y) = U_0, u(a, y) = U_0, u(x, 0) = 0, u(x, b) = U_0. \quad (8.2)$$

Знаходимо розв'язок цієї задачі у вигляді $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, де $u_1(x, y)$ – розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (8.3)$$

з крайовими умовами

$$u_1(-a, y) = 0, u_1(a, y) = 0, u_1(x, 0) = 0, u_1(x, b) = U_0, \quad (8.4)$$

а $u_2(x, y)$ – розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (8.5)$$

з крайовими умовами

$$u_2(-a, y) = U_0, u_2(a, y) = U_0, u_2(x, 0) = 0, u_2(x, b) = 0. \quad (8.6)$$

Задачі (8.3) – (8.6) є однорідними і їх розв'язки можуть бути знайдені за методом відокремлення змінних.

На першому етапі розв'язання задачі за методом відокремлення змінних знаходимо розв'язки рівняння (8.3), які задовольняють умову (8.4) у вигляді

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y), \quad (8.7)$$

тобто у вигляді добутку функцій $X(x)$ та $Y(y)$, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

Підставимо вираз (8.7) у рівняння (8.3) й отримаємо

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0.$$

Поділимо цей вираз на $u_1(x, y)$ і тоді рівняння (8.3) перетвориться у таке

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0. \quad (8.8)$$

Через незалежність функцій $X(x)$ та $Y(y)$ можна замість рівняння (8.3) записати таку систему рівнянь:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - k^2 = 0$$

Звідси

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \quad (8.9)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - k^2 Y(y) = 0. \quad (8.10)$$

При цьому крайові умови (8.4) перетворюються у

$$X(-a) = 0 \quad (8.11)$$

$$X(a) = 0 \quad (8.12)$$

$$Y(0) = 0 \quad (8.13)$$

$$Y(b) = U_0. \quad (8.14)$$

Загальний розв'язок рівняння (8.9) має вигляд

$$X(x) = A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x, \quad (8.15)$$

а рівняння (8.10)

$$Y(y) = C_k \operatorname{ch} \lambda_k y + D_k \operatorname{sh} \lambda_k y. \quad (8.16)$$

Для отримання коефіцієнтів A_k , B_k , C_k , D_k та власних значень λ_k скористаємося крайовими умовами (8.11) – (8.14).

Підставляючи (8.11) у (8.15), отримаємо

$$A_k \cos \lambda_k a - B_k \sin \lambda_k a = 0, \quad (8.17)$$

підставляючи (8.12) у (8.15), отримаємо

$$A_k \cos \lambda_k a + B_k \sin \lambda_k a = 0. \quad (8.18)$$

З (8.17) та (8.18) маємо $B_k = 0$ і $\cos \lambda_k a = 0$, звідси власні значення будуть

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2a}.$$

Підставляючи (8.13) у (8.16), отримаємо $C_k = 0$.

З вище наведеного та виразу (8.7) знаходимо нескінчену множину розв'язків рівняння (8.3)

$$u_{1k}(x, y) = A_k \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} y \cos \frac{\pi(2k-1)}{2a} x. \quad (8.19)$$

Оскільки диференціальне рівняння (8.3) є лінійним однорідним, то сума його частинних розв'язків (8.19) також є розв'язком цього рівняння [5, 17], а тому і загальний розв'язок задачі (8.3), (8.4) можна шукати у вигляді ряду

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} y \cos \frac{\pi(2k-1)}{2a} x. \quad (8.20)$$

Для отримання значення коефіцієнта A_k скористаємося крайовою умовою (8.14), тоді отримаємо

$$U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} b \cos \frac{\pi(2k-1)}{2a} x. \quad (8.21)$$

Помножимо вираз (8.21) на $\cos \frac{\pi(2k-1)}{2a} x$ і проінтегруємо в інтервалі $-a - a$, тоді знайдемо

$$-\frac{2(-1)^k a}{\pi(2k-1)} U_0 = \frac{a A_k}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2a} (2k-1) b.$$

Звідси

$$A_k = -\frac{4U_0}{\pi(2k-1)} \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} b}.$$

Таким чином можна побудувати остаточний вигляд розв'язку рівняння (8.3)

$$u_1(x, y) = -\frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} y \cos \frac{\pi(2k-1)}{2a} x}{(2k-1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{2a} b}. \quad (8.22)$$

Аналогічним чином можна отримати розв'язок рівняння (8.5) з крайовими умовами (8.6)

$$u_2(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] ch \frac{\pi k x}{b} \sin \frac{\pi k y}{b}}{k ch \frac{\pi k a}{b}}. \quad (8.23)$$

Таким чином остаточний розв'язок рівняння (8.1) має вигляд

$$U(x, y) = -\frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k sh \left(\frac{\pi(2k-1)y}{2a} \right) \cos \left(\frac{\pi(2k-1)x}{2a} \right)}{(2k-1) sh \left(\frac{\pi(2k-1)b}{2a} \right)} + \\ + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] ch \left(\frac{\pi k x}{b} \right) \sin \left(\frac{\pi k y}{b} \right)}{k ch \left(\frac{\pi k a}{b} \right)} \quad (8.24)$$

Розподіл електростатичного потенціалу для $a = 1$, $b = 1$, $U_0 = 10$ В наведено на рис. 8.2.

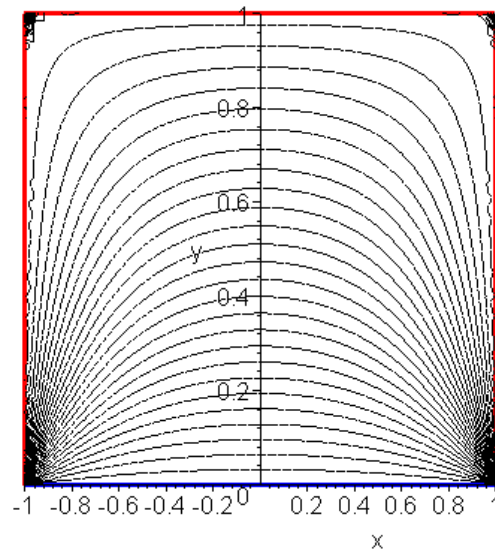


Рисунок 8.2 – Розподіл електростатичного потенціалу (метод відокремлення змінних)

8.2 Метод R-функцій

Структурний метод (метод R-функцій) – ефективний метод розв’язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними. R-функції, які введено В.Л. Рвачовим у 1963 р., не є спеціальними функціями, а утворюють множину, що перетинається з множиною звичайних елементарних функцій. Ця обставина дозволяє під час використання R-функцій не виходити за межі звичайних засобів, які зазвичай застосовуються, легко здійснювати різноманітні обчислювальні та аналітичні операції.

Характерною особливістю R-функцій є те, що кожній з них відповідає певна функція двозначної логіки.

У формулюванні кожної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними поряд з інформацією аналітичного характеру про вигляд рівняння та крайові умови маємо також геометричну інформацію про форму тіл, у яких визначається поле.

Геометрична інформація впливає на картину поля, тому будь-який метод розв’язання крайової задачі має передбачати додавання цієї інформації до алгоритму розв’язання.

У таких методах, як методи відокремлення змінних та інтегральних перетворень врахування інформації про форму областей здійснюється через вдалий вибір систем координат; у методі конформних відображень – під час побудови функцій відображення; у варіаційних методах – під час побудови координатних функцій; у методах сіткового типу – під час складання рівнянь для вузлів.

Перелічені вище методи можуть застосовуватися у різноманітних сполученнях один з одним, однак кожен з них є незалежним методом, який призначено для розв’язання крайової задачі від початку до кінця.

На відміну від цього у методі R-функцій припускається обов’язкове додавання одного з перелічених методів. Таким чином, виявляється можливим

будувати такі формули, які за будь-якого вибору невизначених компонент точно відповідають всім крайовим умовам. Водночас забезпечується умова повноти, яка полягає у принциповій можливості такого вибору невизначених компонент, що призводить до точного розв'язку крайової задачі, чи принаймні до досить гарного його наближення. При цьому є можливим урахування різноманітної апіорної інформації про розв'язок, що знаходять, яку частково можна здобути з відомих точних розв'язків подібних задач. Це призводить до підвищення „якості” структурних формул.

Однією з основних проблем, що виникають під час використання варіаційних методів, за складної форми області або складного характеру крайових умов, побудова послідовності координатних функцій, які відповідають крайовим умовам задачі.

Один з можливих варіантів вирішення цієї проблеми базується на використанні теорії R-функцій [18 – 23] й побудові структурних формул (структур) розв'язку крайових задач.

Під структурою розв'язку крайової задачі розуміють пучок функцій $u = B(\Phi, \omega, \omega_i)$, що відповідають заданим крайовим умовам за будь-якого вибору функції Φ , яку називають невизначеною компонентою структури розв'язку. Функції $\omega(x, y) = 0$, $\omega_i(x, y) = 0$ є рівняннями межі області або окремої її ділянки.

У випадку неоднорідної задачі Диріхле (8.1), (8.2) структуру розв'язку можна зобразити у вигляді

$$u = \omega\Phi + \varphi,$$

де $\varphi = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i}{\omega_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\omega_i}}$ відповідає крайовим умовам (8.2). Цю формулу отримано

В.Л. Рвачовим й називається формулою „склеювання” [18 – 23];

$\omega_i = 0$ – рівняння ділянки на рис. 8.1;

φ_i – функції, які визначено крайовим умовам (8.2).

Методи побудови функції $\omega(x,y)$ для практично задовільної області досить детально викладено у монографіях В.Л. Рвачова [18 – 23].

Як було показано В.Л. Рвачовим, опис геометричних об'єктів можна формалізувати, якщо скористатися алгеброю множин. Базований на алгебрі множин опис складних геометричних об'єктів є своєрідною початковою формалізацією, від якої, використовуючи R-функції, можна здійснити перехід до звичайного аналітичного опису за допомогою рівнянь або нерівностей.

Побудуємо рівняння, які описують окремі ділянки поверхні.

для відрізка AD $\omega_1 = y$:

для відрізка BC $\omega_2 = y - b$:

для відрізка CD $\omega_3 = x - a$:

для відрізка AB $\omega_4 = x + a$.

Тоді рівняння ω області ABCD матиме вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 ,$$

або якщо перейти до координатних функцій

$$\omega = 2(x + y) - b - \sqrt{2y^2 - 2by + b^2} - \sqrt{2(x^2 + a^2)} - \sqrt{6(x^2 + y^2) + 2(a^2 + b^2) - 6by + 2(b - 2y)\sqrt{2y^2 - 2by + b^2} - 4x\sqrt{2(x^2 + a^2)}}.$$

Крайові умови набудуть вигляду

$$\varphi_1 = 0; \varphi_2 = U_0; \varphi_3 = U_0; \varphi_4 = U_0.$$

Враховуючи це можна побудувати формулу „склеювання”

$$\varphi = U_0 \frac{x^2 - a^2 + 2x(y - b)}{2xy(x + y) - 2bxy - bx^2 - a^2(b + 2y)}.$$

Як координатні функції виберемо такий набір функцій;

$$1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3, y^3, xy^3, x^2y^2, x^3y, x^4, y^4.$$

Розподіл електростатичного потенціалу для $a = 1$, $b = 1$, $U_0 = 10$ В за методом R-функцій наведено на рис. 8.3.

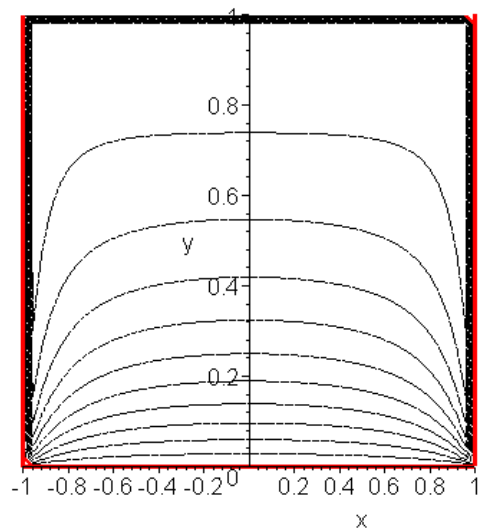


Рисунок 8.3 – Розподіл електростатичного потенціалу (метод R-функцій)

Візуально розв’язки за методом відокремлення змінних (рис. 8.2) та методом R-функцій (рис. 8.3) є однаковими. Кількісне порівняння цих розв’язків надає розбіжність, яка не перевищує 10%.

8.3 Розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних за допомогою пакета Maple

Для розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних у пакеті Maple використовується функція:

pdsolve(*PDE*, *u*(*x*, *y*), [параметри]),

де *PDE* – диференціальне рівняння в частинних похідних;

u(*x*, *y*) – функція кількох змінних, яку знаходять.

Необов’язкові параметри виконують приблизно ту ж роль, що і у функції **dsolve** й більш детально про них буде розказано нижче.

Для розв’язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, як перші два параметри слід використовувати множини або списки з рівняннями та функціями, які знаходять.

Типовою особливістю диференціальних рівнянь у частинних похідних та їх систем є те, що для однозначного визначення окремого розв’язку тут

вимагають задати не значення тієї чи іншої кінцевої кількості параметрів, а якихось функцій. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

>pde:=diff(u(x,t),t\$2)=diff(u(x,t),x\$2);

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

>pdsolve(pde,u(x,t));

$$u(x, t) = _F1(t + x) + _F2(t - x)$$

Якщо необхідно знайти розв'язок у вигляді добутку функцій, то необхідно використати параметр *HINT* = '*'.

>pdsolve(pde,u(x,t),HINT='*');

$$(u(x, t) = _F1(_ \xi 1) _F2(_ \xi 2)) \&where \left[\begin{aligned} &\{ 2 \left(\frac{d}{d_ \xi 1} _F1(_ \xi 1) \right) _c2 = 0, \frac{d}{d_ \xi 2} _F2(_ \xi 2) = _c2 \}, \\ &\&and \left(\{ _ \xi 1 = t - x, _ \xi 2 = \frac{x}{2} + \frac{t}{2} \} \right) \end{aligned} \right]$$

Використовуючи параметр *build* – Maple спробує записати розв'язок у явному вигляді.

>pdsolve(pde,u(x,t),HINT='*',build);

$$u(x, t) = \frac{1}{2} _C1 _c2 x + \frac{1}{2} _C1 _c2 t + _C1 _C2$$

де *_C1*, *_C2* і *_c2* – сталі інтегрування, які визначаються з межових або початкових умов, що дозволяє однозначно отримати розв'язок, який нас цікавить.

Рівняння Лапласа

Приклад 8.2.

Знайти функцію $F(x, y)$, яка задовольняє рівняння *Лапласа*

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0, \text{ якщо відомо, що на колі } x^2 + y^2 = 16 \text{ значення функції}$$

можна розрахувати за виразом $x^2 y^2$ [24] .

Розв'язання

Враховуючи, що межові умови задано на колі, то доцільно розв'язувати задачу в полярних координатах. Для перетворення диференційного рівняння в полярну систему координат скористаємося функцією **PDEchangecoords** з пакета *DEtools* (див. табл. 2.6), а для перетворення межових умов – функцією **dchange** з пакета *PDEtools* (див. табл. 2.6).

```
>pde:=diff(F(x,y),x$2)+diff(F(x,y),y$2)=0;
```

$$pde := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y) \right) = 0$$

```
>pde:=PDEchangecoords(pde,[x,y],polar, [r,phi]);
```

$$pde := \frac{\left(\frac{\partial}{\partial r} F(r, \phi) \right) r + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r, \phi) \right) r^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} F(r, \phi) \right)}{r^2} = 0$$

```
>dp:={x = r*cos(phi), y = r*sin(phi)};
```

$$dp := \{ x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi) \}$$

```
>f:=x^2*y^2;
```

$$f := x^2 y^2$$

```
>f:=dchange(dp,f);
```

$$f := r^4 \cos(\phi)^2 \sin(\phi)^2 .$$

Отримаємо розв'язок у явному вигляді.

```
>R:=rhs(pdsolve(pde,HINT='*',build));
```

$$R := _C1 r^{(\sqrt{-c_1})} _C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi) + _C1 r^{(\sqrt{-c_1})} _C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi) + \frac{_C2 _C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi)}{r^{(\sqrt{-c_1})}} + \frac{_C2 _C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi)}{r^{(\sqrt{-c_1})}}$$

Вважаємо, що функція, яку знаходять, визначена в усіх точках дійсної площини, включаючи центр координат, тобто при $r = 0$. Отже, $_C2 = 0$, через те що у протилежному випадку знаменник у двох останніх доданках розв'язку стає нулем.

>_C2:=0;

$$_C2 := 0$$

>R;

$$_C1 r^{(\sqrt{-c_1})} _C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi) + _C1 r^{(\sqrt{-c_1})} _C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi)$$

Перший та другий доданки містять добуток двох констант, тому можна вважати, що $_C1=1$ й знаходити тільки $_C3$ й $_C4$.

>_C1:=1;

$$_C1 := 1$$

>R;

$$r^{(\sqrt{-c_1})} _C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi) + r^{(\sqrt{-c_1})} _C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi)$$

Для визначення констант $_C3$ й $_C4$ скористаємося крайовими умовами.

>simplify(subs({phi=0,r=4},R))=eval(subs({phi=0,r=4},f)):

>simplify(subs({phi=Pi,r=4},R))=eval(subs({phi=Pi,r=4},f)):

>solve({%,%%},{_C3,_C4});

$$\{ _C4 = 0, _C3 = 0 \}$$

На жаль, отриманий розв'язок не відповідає межовим умовам. Але відомо, що функція **pdsolve** знаходить розв'язок з точністю до сталої. Тому додамо до отриманого розв'язку сталу Z , яку необхідно визначити.

>R:=R+Z;

$$R := r^{\sqrt{-c_1}} {}_C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi) + r^{\sqrt{-c_1}} {}_C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi) + Z$$

Використаємо межові умови для знаходження сталих ${}_C3$, ${}_C4$ та Z , а також сталої ${}_c2$.

>R4:=subs(r=4,R=f);

$$R4 := 4^{\sqrt{-c_1}} {}_C3 \sin(\sqrt{-c_1} \phi) + 4^{\sqrt{-c_1}} {}_C4 \cos(\sqrt{-c_1} \phi) + Z = 256 \cos(\phi)^2 \sin(\phi)^2$$

>simplify(subs(phi=0,R4)): U1:=simplify(%):

>simplify(subs(phi=Pi/2/_c[1]^(1/2),R4)):

>U2:=simplify(%):

>simplify(subs(phi=Pi/4,R4)): U3:=simplify(%):

>S:=solve({U1,U2,U3},{_C3,_C4,Z}):

>R4:=simplify(subs(S,R4)):

>_c[1]=solve(subs(phi=Pi,R4),_c[1]):

$${}_c1 = (4, 16)$$

Стала ${}_c1$ може мати два значення 4 і 16. Підставляємо у загальний розв'язок знайдені значення сталих ${}_C3$, ${}_C4$ і Z .

>R:=subs(S,R):

Підстановка ${}_c1 = 4$ призводить до помилки – ділення на нуль. Використовуємо підстановку ${}_c1 = 16$.

>SOL:=combine(subs(_c[1]=16,R));

$$SOL := 32 - \frac{1}{8} r^4 \cos(4 \phi)$$

Отримано розв'язок задачі в полярній системі координат. Неважко пересвідчитися, що знайдений розв'язок відповідає як рівнянню Лапласа, так і межовим умовам. Перетворимо розв'язок у декартову систему координат, використовуючи відомий зв'язок між полярною та декартовою системою.

>pd:={r = sqrt(x^2+y^2), phi = acrtan(y/x)};

$$pd := \{ \phi = \text{acrtan}\left(\frac{y}{x}\right), r = \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

```
>SOL:=dchange(pd,SOL,[x,y]);
```

$$SOL := 32 - \frac{1}{8} (x^2 + y^2)^2 \cos\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

```
>cos(4*arctan(y/x)) = op(3,trigsubs(cos(4*arctan(y/x))));
```

$$\cos\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 2 \cos\left(2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 - 1$$

```
>SOL:=subsop([2,3]=2*cos(2*arctan(y/x))^2-1,SOL);
```

$$SOL := 32 - \frac{1}{8} (x^2 + y^2)^2 \left(2 \cos\left(2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 - 1\right)$$

```
>cos(2*arctan(y/x))^2 = op(11,trigsubs(cos(2*arctan(y/x))^2));
```

$$\cos\left(2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 = \frac{\left(1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right)^2}{\left(1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right)^2}$$

```
>simplify(%);
```

$$\cos\left(2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 = \frac{(-x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

```
>SOL:=simplify(subsop([2,3,1,2]=(-x^2+y^2)^2/(x^2+y^2)^2,SOL));
```

$$SOL := 32 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{8} y^4$$

Подамо графічне зображення функції $F(x,y)$ в колі радіусом 4.

```
>plot3d(SOL, x=-4..4, y=-sqrt(16-x^2)..sqrt(16-x^2), axes=normal,  
title="F(x,y)");
```

$F(x,y)$

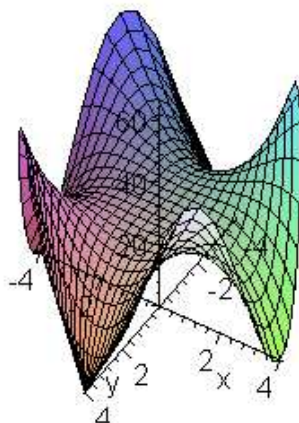


Рисунок 8.4 – Графічне зображення розв’язку

Рівняння теплопровідності. Отримаємо рівняння розповсюдження тепла. Позначимо через $u(x,t)$ температуру середовища у точці $x = (x_1, x_2, x_3)$ у момент часу t . Вважаючи середовище ізотропним, позначимо через $\rho(x)$, $c(x)$ та $k(x)$, відповідно його густину, питому теплоємність, та коефіцієнт теплопровідності у точці x . Позначимо через $F(x,t)$ інтенсивність джерел тепла у точці x у момент часу t . Якщо точки середовища мають різну температуру, то це середовище матиме природний процес передачі тепла від ділянок більш нагрітих до ділянок менш нагрітих. Цей процес передачі тепла можна характеризувати вектором щільності потоку тепла – вектором, напрямком якого збігається з напрямком потоку тепла у даний момент часу. Величина цього вектора – кількість тепла, яке протікає за одиницю часу через одиничну площадку, що є перпендикулярною до напрямку потоку тепла. Експериментально встановлено, що

$$\vec{q} = -k\nabla u. \quad (8.25)$$

Співвідношення (8.25) називається законом Фур’є. Виділимо в середовищі нескінченно малий об’єм, середня точка якого (x_1, x_2, x_3) : $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$.

Складемо баланс тепла для цього об'єму. Кількість тепла, яке виділяється в об'ємі $d\tau$ за час Δt , буде $dQ_1 = F(x, t)d\tau\Delta t$. Кількість тепла, яке витрачено у $d\tau$ за Δt на нагрівання цього об'єму

$$dQ_2 = c\rho d\tau[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] = c\rho d\tau \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Кількість тепла, що витікає з об'єму $d\tau$ за час Δt , буде

$$\begin{aligned} dQ_3 &= \left[q_{x_1} \Big|_{x_1 + \frac{dx_1}{2}} - q_{x_1} \Big|_{x_1 - \frac{dx_1}{2}} \right] dx_2 dx_3 \Delta t + \\ &+ \left[q_{x_2} \Big|_{x_2 + \frac{dx_2}{2}} - q_{x_2} \Big|_{x_2 - \frac{dx_2}{2}} \right] dx_1 dx_3 \Delta t + \left[q_{x_3} \Big|_{x_3 + \frac{dx_3}{2}} - q_{x_3} \Big|_{x_3 - \frac{dx_3}{2}} \right] dx_1 dx_2 \Delta t = \\ &= \left(\frac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \Delta t = (\nabla \vec{q}) d\tau \Delta t \end{aligned}$$

З закону збереження енергії $dQ_1 = dQ_2 + dQ_3$ отримуємо рівняння

$$(\nabla \vec{q}) + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t). \quad (8.26)$$

Рівняння (8.25) та (8.26) містять дві невідомі функції \vec{q} та $u(x, t)$. Виключаючи \vec{q} , матимемо

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(k \nabla u) = F(x, t). \quad (8.27)$$

Якщо середовище є однорідним, тобто c , ρ , k – сталі, то рівняння (8.27) матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \Delta u + f(x, t), \quad (8.28)$$

$$v^2 = \frac{k}{c\rho},$$

$$f = \frac{F}{c\rho}.$$

Рівняння (8.28) є рівнянням теплопровідності або рівнянням Фур'є.

Для повного опису процесу розповсюдження тепла необхідно задати початковий розподіл температури в середовищі (початкова умова) та режим на межі цього середовища (межова умова) [17].

Приклад 8.3. Розглянемо однорідне рівняння теплопровідності на відрізку $[0,L]$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

з крайовими умовами виду

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Відомо, що розв'язок такого рівняння має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\left(-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right)$$

де

$$c_k = \frac{2 \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right) dx}{L}.$$

Визначимо цей загальний розв'язок у Maple. Це дозволить легко змінювати параметри задачі й вивчати залежність цього розв'язку від параметрів задачі. Нехай $w(x,t)$ набір окремих розв'язків цієї межової проблеми. Введемо ці функції

>restart:

>w := (k,x,t) -> exp(-k^2*Pi^2*alpha^2*t/L^2)*sin(k*Pi*x/L);

$$w := (k, x, t) \rightarrow e^{\left(-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right)$$

і коефіцієнти Фур'є

>c := k -> 2/L*int(f(x)*sin(k*Pi*x/L),x=0..L);

$$c := k \rightarrow \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right) dx$$

Наближення до розв'язку, яке відповідає першим n доданкам ряду, дорівнює

> u := (n,x,t) -> sum(c(k)*w(k,x,t),k=1..n);

$$u := (n, x, t) \rightarrow \sum_{k=1}^n c(k) w(k, x, t)$$

Таким чином, визначено ряд зображень, які залежать від параметрів задачі. Однак, при цьому ще нічого не визначено.

Задамо певні параметри системи. Наприклад,

>alpha := 1; L := 50;

$$\alpha := 1$$

$$L := 50$$

>f := x -> 25;

$$f := 25$$

Тепер можна обчислити значення відображень, наприклад,

>c(11);

$$\frac{100}{11 \pi}$$

Можна визначити й значення температури u в точці x у час t , використовуючи n доданків ряду. Наприклад, при $x = 15$, $t = 100$, $n = 10$

>u(10,15,100):

>evalf(u(10,15,100));

$$17.44579024$$

Отже, в цій точці температура впала до 17^0 з початкових 25^0 .

Побудуємо графік розподілу температури по x при $t = 50$, $n = 10$

```
> plot(u(10,x,50),x=0..50,u=0..30);
```

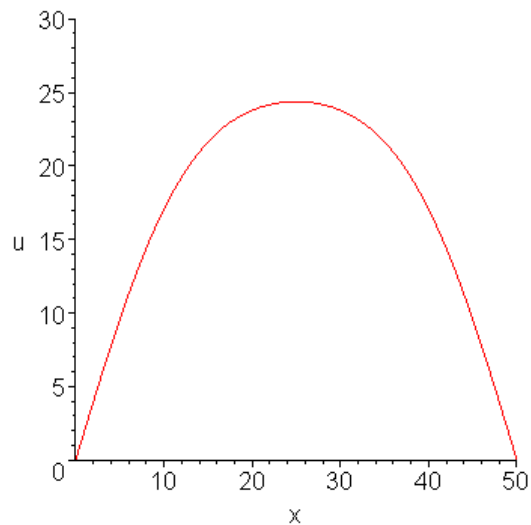


Рисунок 8.5 – Розподіл температури

Покажемо, як змінюється цей розподіл з часом

```
> plot({f(x),u(10,x,25),u(10,x,50),u(10,x,100),u(10,x,200)},x=0..50,u=0..30);
```

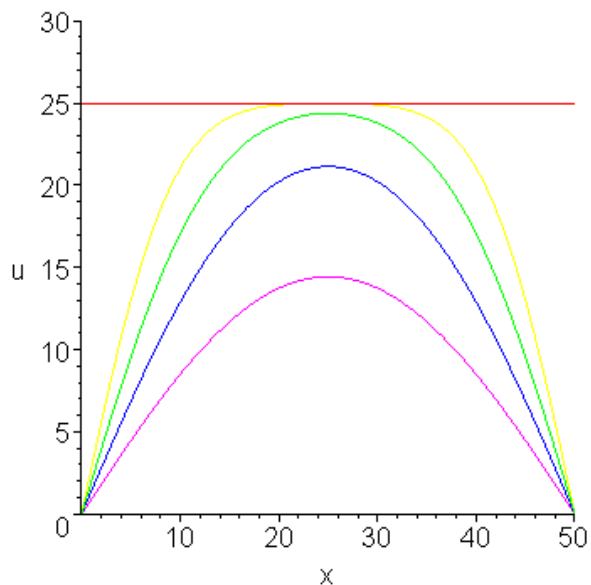


Рисунок 8.6 – Зміна розподілу температури в залежності від часу

Розглянемо тепер тривимірний графік розподілу температури

```
> plot3d(u(20,x,t),x=0..50,t=0..300,view=0..30,axes=FRAMED,style=PATCH);
```

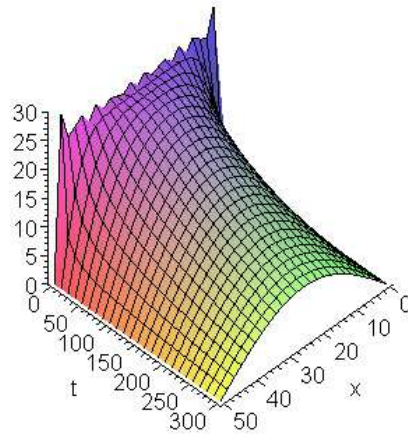


Рисунок 8.7 – Тривимірний графік розподілу температури

8.4 Чисельне розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних

Розглянемо таку задачу.

Приклад 8.4. Нехай потрібно визначити процес поперечних коливань струни круглого перетину радіусом $r = 0,002$ м й довжиною $L = 1$ м з жорстко закріпленими кінцями. В початковий момент часу струна мала форму квадратичної параболи, яка є симетричною відносно перпендикуляра до середини струни й максимальним відхиленням $h = 0,01$ м, а потім відпущена без поштовху. Натяг струни $T = 100$ Н, а густина матеріалу струни $\rho_s = 7800$ кг/м³.

Поперечні коливання струни описуються хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

де $a = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$, $\rho_l = \rho S$ – лінійна густина струни, кг/м; $S = \pi r^2$ – площа перетину струни.

Потрібно знайти розв’язок за таких крайових умов:

межові умови: $u(0, t) = 0$; $u(l, t) = 0$,

початкові умови: $u(x, 0) = f(x)$, $f(x)$ – форма струни в момент часу $t = 0$;

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Запишемо хвильове рівняння

>pde:=diff(u(x,t),t\$2)=a^2*diff(u(x,t),x\$2);

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

>a:=sqrt(T/rho[l]);rho[l]:=rho*S;S:=Pi*r^2;

$$a := \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$$\rho_l := \rho S$$

$$S := \pi r^2$$

>pde;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)}{\rho \pi r^2}.$$

Запишемо початкові дані:

>T:=100;L:=1;r:=0.002;rho:=7800;h:=0.01;

$$T := 100$$

$$L := 1$$

$$r := 0.002$$

$$\rho := 7800$$

$$h := 0.01.$$

Запишемо рівняння квадратичної параболи

>f:=A*x^2+B*x+C;

$$f := A x^2 + B x + C$$

Знайдемо коефіцієнти A , B і C :

```
>solve({subs(x=0,A*x^2+B*x+C=0), subs(x=L/2,A*x^2+B*x+C=h),
subs(x=L,A*x^2+B*x+C=0)}, {A,B,C});
{ C = 0., A = -0.040000000000, B = 0.040000000000 }
```

Остаточно отримаємо форму струни у початковий момент часу:

```
>f:=subs(%,f);
```

$$f := -0.040000000000 x^2 + 0.040000000000 x$$

```
>plot(f,x=0..L);
```

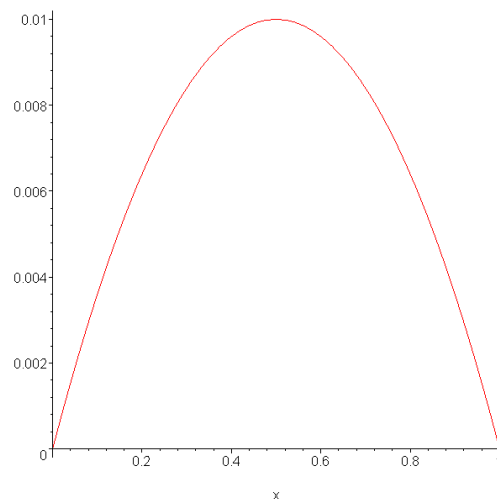


Рисунок 8.8 – Початковий стан струни

Запишемо крайові умови:

```
>BC:={u(0,t)=0,u(L,t)=0,u(x,0)=f,D[2](u)(x,0)=0};
```

$$BC := \{ u(0, t) = 0, D_2(u)(x, 0) = 0, u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = -0.040000000000 x^2 + 0.040000000000 x \}$$

Отримаємо чисельний розв'язок хвильового рівняння з урахуванням крайових умов, задавши величину кроку в часі та координаті:

```
>SOL:=pdsolve(pde,BC,numeric,timestep=1/200, spacestep=1/200);
```

```
SOL := module() export plot, plot3d, animate, value, settings; ... end module
```

Отриманий в результаті модуль *SOL* дозволяє візуалізувати розв'язок задачі, а також отримати чисельні значення переміщення точок у будь-який момент часу.

Задачі

1. Струна $0 \leq x \leq l$ з жорстко закріпленими кінцями до моменту $t = 0$ знаходилася у стані рівноваги під дією поперечної сили $F_0 = \text{const}$, яку прикладено до точки x_0 струни перпендикулярно до незбуреного стану струни. У початковий момент часу $t = 0$ дія сили F_0 миттєво припиняється. Знайти коливання струни при $t > 0$.

2. Кінці струни закріплено жорстко, а початкове відхилення має форму квадратичної параболи, симетричної відносно перпендикуляра до середини струни. Знайти коливання струни, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю.

3. Струна з жорстко закріпленими кінцями збуджується ударом жорсткого плаского молоточка, який надає їй такий початковий розподіл швидкостей:

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l \end{cases}$$

Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

4. Струна з жорстко закріпленими кінцями збуджується ударом гострого молоточка, який передає їй імпульс I у точці x_0 . Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

5. Струна з жорстко закріпленими кінцями збуджується ударом жорсткого опуклого молоточка, який надає їй такий початковий розподіл швидкостей:

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta \\ v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x - x_0}{\delta}\right), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l \end{cases}$$

Знайти коливання струни, якщо початкове відхилення дорівнює нулю. Обчислити енергію окремих гармонік.

6. Знайти повздовжні коливання стрижня, один кінець якого ($x = 0$) закріплено жорстко, а інший ($x = l$) вільний, за початкових умов

$$u(x,0) = kx, u_t(x,0) = 0, \text{ за } 0 \leq x \leq l.$$

7. Стрижень з жорстко закріпленим кінцем $x = 0$ знаходиться у стані рівноваги під дією повздовжньої сили $F_0 = \text{const}$, яку прикладено до кінця $x = l$. В момент $t = 0$ дія сили F_0 миттєво припиняється. Знайти коливання стрижня, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю.

8. Знайти повздовжні коливання пружного стрижня з вільними кінцями, якщо початкові швидкості й початкові зсуви у повздовжньому напрямку задовільні. Врахувати можливість рівномірного прямолінійного руху стрижня.

9. Знайти повздовжні коливання пружного стрижня з вільними кінцями, який отримав у початковий момент часу повздовжній імпульс I у один з кінців.

10. Один кінець стрижня закріплено пружно, а інший вільний. Знайти повздовжні коливання стрижня за задовільних початкових умов.

11. Один кінець стрижня ($x = l$) закріплено пружно, а до іншого ($x = 0$) прикладено повздовжню силу $F_0 = \text{const}$, під дією якої стрижень знаходиться у стані рівноваги. Знайти коливання стрижня після того, як у початковий момент часу сила F_0 миттєво зникне, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю.

12. Один кінець стрижня ($x = l$) закріплено пружно, а інший ($x = 0$) отримує у початковий момент часу повздовжній ударний імпульс I . Знайти повздовжні коливання стрижня, якщо початкове відхилення стрижня дорівнює нулю.

13. Знайти повздовжні коливання стрижня з пружно закріпленими кінцями за однакових коефіцієнтів жорсткості заделки кінців, якщо початкові умови задовільні.

14. а) Знайти розподіл температури в стрижні $0 \leq x \leq l$ з теплоізовованою бічною поверхнею, якщо температура його кінців підтримується такою, що дорівнює нулю, а початкова температура дорівнює задовільній функції $f(x)$.

б) Розглянути, зокрема, випадок, коли $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, й надати оцінку похибці, яку припускають при заміні суми ряду, що зображує розв'язок у точці $x = l/2$, його частинною сумою, й визначити, з якого моменту часу відношення суми всіх його членів, починаючи з другого, до першого члену буде менше за наперед задане $\varepsilon > 0$.

15. Початкова температура стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею дорівнює

$$U_0 = \text{const},$$

а на кінцях його підтримується постійна температура

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, u(l, t) = U_2 = \text{const}, 0 < t < +\infty.$$

Знайти температуру $u(x, t)$ стрижня за $t > 0$; знайти також стаціонарну температуру

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t).$$

16. Початкова температура стрижня $0 \leq x \leq l$ є задовільною функцією $f(x)$. Температури кінців постійні:

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, u(l, t) = U_2 = \text{const}, 0 < t < +\infty.$$

На бічній поверхні відбувається теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого дорівнює $u_0 = \text{const}$. Знайти температуру стрижня. Розглянути, зокрема, випадок, коли $U_1 = U_2 = 0, f(x) = 0$.

17. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею і теплоізолюваними кінцями, якщо його початкова температура є задовільною функцією x . Перейти потім до випадку, коли на бічній поверхні відбувається конвективний теплообмін (за законом Ньютона) з середовищем, температура якого дорівнює нулю.

18. Знайти температуру стрижня, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з середовищем нульової температури, якщо на кінці стрижня подаються ззовні сталі теплові потоки, а початкова температура є задовільною функцією.

19. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо один його кінець ($x = 0$) знаходиться за заданою фіксованою температурою, а на інший кінець ($x = l$) подається ззовні заданий постійний тепловий потік, причому початкова температура задовільна. Розглянути, зокрема, випадок, коли початкова температура дорівнює нулю, а кінець $x = l$ теплоізолювано, й оцінити похибку, яка утворюється при заміні суми ряду, що зображує розв'язок у точці $x = l$, його частковою сумою. Знайти момент часу, з якого на кінці $x = l$ незворотно настане регулярний режим з відносною точністю ε .

20. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею і теплоізолюваним кінцем $x = 0$, якщо початкова температура стрижня дорівнює нулю й через кінець $x = l$ у стрижень подається постійний тепловий потік. Надати оцінку похибки, яка утворюється при заміні суми ряду, що зображує розв'язок у точці $x = 0$, його частковою сумою.

21. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, один кінець якого ($x = 0$) теплоізолювано, а на іншому кінці ($x = l$) відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого дорівнює $U_0 = \text{const}$. Початкова температура стрижня дорівнює нулю. Оцінити похибку, яка утворюється при заміні суми ряду, що зображує розв'язок у точці $x = 0$, його частковою сумою; знайти момент часу, з якого на кінці $x = 0$ незворотно матиме місце регулярний режим з відносною точністю ε .

22. а) Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо на кожному з його кінців відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем, яке має сталу температуру, а початкова температура задовільна.

б) Розглянути, зокрема, випадок, коли температура зовнішнього середовища на обох кінцях стрижня однакова, а початкова температура стрижня, дорівнює нулю, й виявити зв'язок з розв'язком задачі 29.

23. Знайти розподіл температури у тонкому однорідному, кільці

одиначного радіусу, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем, що має сталу температуру; початкова температура кільця задовільна. Розглянути, зокрема, випадок, коли у початковий момент часу кільце було рівномірно нагрітим.

24. Знайти розподіл температури у стрижні $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо на його кінці $x = 0$ підтримується температура, яка дорівнює нулю, а на кінці $x = l$ температура змінюється за законом

$$u(l, t) = At, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < \infty.$$

Початкова температура стрижня дорівнює нулю.

25. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо по стрижню неперервно розподілені теплові джерела, густина яких дорівнює $\Phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, початкова температура стрижня є задовільною функцією $f(x)$, а температура кінців підтримується рівною нулю.

26. а) Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його початкова температура є задовільною функцією $f(x)$, температура кінців підтримується рівною нулю, по стрижню неперервно розподілені джерела тепла, густина яких дорівнює $F(x, t)$.

б) Розглянути, зокрема, граничний випадок, коли в стрижні діє лише одне зосереджене джерело сталої потужності Q , який знаходиться у точці x_0 , $0 < x_0 < l$, а початкова температура стрижня дорівнює нулю.

27. По стрижню $0 \leq x \leq l$, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з середовищем (температура середовища дорівнює нулю), рухається піч зі сталою швидкістю v_0 . Потік тепла від печі до стрижня дорівнює $q(t) = Ae^{-ht}$, де h – коефіцієнт теплообміну, який міститься у рівнянні теплопровідності для стрижня $u_t = a^2 u_{xx} - hu$. Знайти температуру стрижня, якщо його початкова температура дорівнює нулю, а температура кінців весь час

підтримується рівною нулю.

28. Знайти температуру $u(x, t)$ стрижня, розв'язуючи крайову задачу

$$\begin{aligned}u_t &= a^2 u_{xx} - Hu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \\u_x(0, t) - h u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u_x(l, t) + h u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 < x < l\end{aligned}$$

через зведення до однорідної крайової задачі.

29. Знайти асимптотичний вираз за $t \rightarrow +\infty$ для температури $u(x, t)$ у стрижні з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо на його кінцях виконується одна з таких граничних умов:

- а) $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$
- б) $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$
- в) $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$

30. На поверхні тонкого кільця одиничного радіуса відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого дорівнює нулю; початкова температура кільця дорівнює нулю. У деякій фіксованій точці кільця у початковий момент часу виділилось Q одиниць тепла. Знайти температуру кільця. Розглянути точку кільця, яка є діаметрально протилежною до точки, в якій виділилося тепло, й оцінити похибку, яка утворюється при заміні суми ряду, що зображує розв'язок у цій точці, його частковою сумою.

31. Тиск і температура повітря в циліндрі $0 \leq x \leq l$ дорівнюють атмосферним; один кінець циліндра з моменту $t = 0$ відчинено, а інший залишається весь час зачиненим. Концентрація якогось газу в оточуючій атмосфері дорівнює $U_0 = \text{const.}$ З моменту $t = 0$ газ дифундує в циліндр через відчинений кінець. Знайти кількість газу, який продифундував у циліндр, якщо його початкова концентрація в циліндрі дорівнює нулю.

32. В циліндрі $0 \leq x \leq l$ знаходиться дифундує речовина, частинки якої розмножуються, причому швидкість розмноження у кожній точці пропорційна концентрації речовини у цій же точці. Знайти критичну довжину циліндра для випадків, коли

а) на обох кінцях циліндра підтримується концентрація, що дорівнює нулю;

б) на одному кінці підтримується концентрація, що дорівнює нулю, а інший зачинено наглухо;

в) обидва кінці циліндра зачинено наглухо.

33. Знайти електричну напругу у дроті $0 \leq x \leq l$, один кінець якого ізольовано, а до іншого прикладена стала електрорушійна сила. Розподіленою самоіндукцією та витіком в дроті можна знехтувати, початковий потенціал дорівнює $v_0 = \text{const}$, а початковий струм дорівнює нулю.

34. Розподілена самоіндукція та втрата в дроті $0 \leq x \leq l$ дорівнює нулю; початковий потенціал і початковий струм також дорівнюють нулю. Знайти напругу в дроті, якщо один його кінець ($x = l$) заземлено через зосереджену ємність C_0 , а до другого ($x = 0$) прикладено сталу електрорушійну силу E_0 .

35. Знайти електричну напругу в дроті $0 \leq x \leq l$ з надто малою самоіндукцією й втратою, якщо його кінець $x = l$ заземлено, початковий струм і початковий потенціал дорівнюють нулю, а до кінця $x = 0$ прикладена стала електрорушійна сила E_0 через зосереджений опір R_0 .

36. Провідний шар $0 \leq x \leq l$ був вільним від електромагнітних полів. У момент $t = 0$ всюди поза шаром виникло постійне однорідне магнітне поле H_0 , паралельне шару. Знайти магнітне поле в шарі за $t > 0$. Знайти момент часу, починаючи з якого в середині шару заздалегідь матиме місце регулярний режим з відносною точністю ε .

37. Стрижень $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюованою бічною поверхнею та постійним перетином складається з двох однорідних стрижнів $0 \leq x \leq x_0$, $x_0 \leq x \leq l$ з різними фізичними властивостями. Знайти температуру в стрижні, якщо його кінці підтримуються за температури, яка дорівнює нулю, а початкова

температура задовільна.

38. Знайти температуру однорідного стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею, в точці x_0 якого ($0 \leq x_0 \leq l$) знаходиться зосереджена теплоємність C_0 . Початкова температура стрижня задовільна, а кінці підтримуються за температури, яка дорівнює нулю.

39. Знайти температуру стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, який має форму зрізаного конуса, якщо температура кінців стрижня підтримується такою, що дорівнює нулю, а початкова температура стрижня задовільна.

40. Розв'язати попередню задачу для стрижня, бічна поверхня якого утворюється обертанням кривої $y = Ae^{-mx}$ навколо осі x .

41. Важка вертикальна площина знаходиться в шарі в'язкої рідини, який міститься між двома нерухомими вертикальними площинами. В момент $t = 0$ площина починає падати. Знайти її швидкість і швидкості частинок в'язкої рідини, якщо початкові швидкості дорівнюють нулю і якщо площина, яка падає, є рівновіддаленою від крайових площин. Дією поля сили тяжіння на рідину знехтувати.

42. Нескінчений провідний циліндр (циліндричний кондуктор) заряджено до потенціалу

$$V = \begin{cases} V_1, 0 < \varphi < \pi \\ V_2, \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

де V_1 і V_2 – сталі.

Знайти поле всередині та поза циліндричної порожнини, а також густину поверхневих зарядів та сумарний заряд.

43. Знайти розподіл температури у нескінченно довгому круглому циліндрі, якщо на його поверхні на одиницю довжини задано тепловий потік $Q = q \cos \varphi$.

44. Нескінченно довгий круглий циліндр радіуса a рухається з постійною швидкістю v_0 перпендикулярно до своєї осі в необмеженій

нестисливій рідині, яка на нескінченності знаходиться у спокої. Знайти потенціал швидкостей рідини.

45. Розв'язати задачу про обтікання нерухомого нескінченного циліндра, якщо на нескінченності швидкість рідини дорівнює v_0 .

46. а) Тверда куля рухається зі сталою швидкістю v_n у безмежній нестисливій рідині, яка на нескінченності знаходиться у спокої. Знайти потенціал швидкостей.

б) Розв'язати задачу про обтікання нерухомої твердої кулі потоком рідини, яка має на нескінченності швидкість v_0 .

47. Діелектрична куля з діелектричною сталою ϵ_1 , яка розташована у необмеженому однорідному діелектрику з діелектричною сталою ϵ_2 ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$), знаходиться в однорідному паралельному зовнішньому полі з напруженістю E_0 . Знайти величину поляризації кулі й його дипольний момент.

48. Провідна куля знаходиться у зовнішньому електричному полі E_0 . Знайти величину викривлення зовнішнього поля.

49. Нескінченний провідний циліндр знаходиться в однорідному зовнішньому електричному полі E_0 , спрямованому вздовж осі x ; твірна циліндра є паралельною осі z . Знайти густину поверхневого заряду на циліндрі.

50. Знайти розподіл температури в твердому тілі, яке обмежене нескінченними циліндричними поверхнями з радіусами a та b ($a < b$), якщо на поверхні циліндра $\rho = a$ підтримується стала температура u_0 , на поверхні $\rho = b$ при $0 < \varphi < \pi$ підтримується температура u_0 , а при $\pi < \varphi < 2\pi$ – температура, дорівнює нулю.

51. По нескінченному коаксіальному циліндричному кабелю $a < \rho < b$ протікає постійний струм сили I . Знайти розподіл температури всередині дроту, якщо поверхня $\rho = a$ підтримується при температурі, яка дорівнює нулю, а на зовнішній межі задано тепловий потік, що дорівнює $A \cos^2 \varphi$, де φ – полярний кут.

52. На межі тонкої пластинки у формі кругового сектора $\rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ задано температуру

$$u = \begin{cases} f(\varphi), \rho = a \\ 0, \varphi = 0, \varphi = \alpha \end{cases}.$$

Знайти стаціонарне термічне поле в пластинці. Розглянути окремий випадок

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1, 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2} \\ u_2, \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \end{cases}.$$

53. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій пластинці, що має форму кругового сектора, радіуси якого підтримуються при температурі u_1 , а дуга кола – при температурі u_2 .

54. Знайти електростатичне поле всередині нескінченного циліндра, перпендикулярний перетин якого має форму півкола; поверхню циліндра, що відповідає діаметру півкола, заряджено до потенціалу V_1 , а решта поверхні – до потенціалу V_2 .

55. Визначити магнітне поле струмів, один з яких протікає у довгому прямому дроті в одному напрямку, а інший – в паралельному дроті, який знаходиться від першого на відстані a , у зворотному напрямку.

56. Нехай у нескінченій круглій циліндричній півці проходить струм, паралельний осі z , з густиною струму i . Знайти вектор-потенціал магнітного поля, яке утворюється цим струмом.

57. Циліндр або дріт круглого перетину з магнітною проникністю μ_1 розташовано в середовищі з магнітною проникністю μ_2 . По дроту проходить струм I . Зовнішнє магнітне поле спрямоване перпендикулярно до осі дроту й всюди паралельне й однорідне. Визначити повне магнітне поле в точках всередині і поза циліндром, вважаючи циліндр нескінченно довгим.

58. Обчислити величину магнітної індукції зовні циліндричного екрана з внутрішнім та зовнішнім радіусами a і b , який має магнітну проникність μ_2 й

оточує два паралельних прямолінійних дроти, які розташовано симетрично відносно осі циліндра та несучих протилежно спрямовані струми (магнітне екранування двопровідної лінії); циліндр слід вважати нескінченно довгим; координати дротів $\rho = c_0$, $\theta_0 = 0$ і $\theta_0 = \pi$.

59. Порожню кулю $a < r < b$ розташовано в однорідному паралельному магнітному полі. Нехай μ – магнітна проникність кулі, при цьому магнітна проникність зовнішнього середовища прийнята такою, що дорівнює одиниці.

Знайти спотворене магнітне поле в усьому просторі. Порівняти поле всередині кола з зовнішнім полем для випадку $\mu > 1$ і для випадку $\mu < 1$.

60. Знайти електростатичне поле всередині області, яку обмежено провідними пластинами $y = 0$, $y = b$ і $x = 0$, якщо пластину $x = 0$ заряджено до потенціалу V , пластини $y = 0$, $y = b$ заземлено, а заряди всередині області, яку розглядають, відсутні.

61. Розв'язати рівняння $\Delta u = 0$ всередині прямокутника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ за таких крайових умов: $u = V$ за $x = 0$, $u = 0$ за $x = a$ і $y = 0$, $u = V_0$ за $y = b$.

Здійснити граничний перехід $a \rightarrow \infty$.

62. Знайти електростатичне поле всередині нескінченної циліндричної труби прямокутного перетину зі сторонами a і b , яку заповнено неоднорідним діелектриком з діелектричною сталою

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 < y < h \\ \varepsilon_2, h < y < b \end{cases}$$

якщо стінку $x = 0$ заряджено до потенціалу V , а решту стінок заземлено. Розглянути випадок, коли стінка $x = a$ віддаляється у нескінченність.

63. Через грань $y = 0$ нескінченного циліндра з прямокутним перетином $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ затікає, а через грань $x = 0$ витікає кількість тепла Q .

Знайти розподіл температури всередині циліндра, вважаючи, що тепловий потік рівномірно розподілено по поверхні грані $y = 0$ й відповідно по поверхні грані $x = 0$, а інші дві грані тіла теплоізовані.

64. Знайти розподіл температури всередині прямокутної тонкої пластинки, якщо до однієї з її сторін підводиться сталий потік q_0 , а інші три сторони підтримуються за сталої температури u_1 .

65. Знайти електростатичне поле всередині прямокутного паралелепіпеда з провідними стінками, якщо його бічні грані й верхня основа заземлені, а нижня основа заряджена до потенціалу V .

9 СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ДАНИХ У MAPLE

Статистичні розрахунки без допомоги ЕОМ є складними й потребують використання багатьох таблиць функцій та квантилів стандартних розподілів. Це не сприяє тому, щоб відчувати елемент новизни в матеріалі, який вивчається, змінити задовільно умови задач тощо. Спеціалізовані математичні пакети не можуть використовуватися для навчання, тому що їх використання вимагає досить високого рівня підготовки у математичній статистиці.

Статистика в Maple має свою розвинену систему пакетів для обслуговування застосовних задач. Команди Maple для статистичних робіт призначені для тих категорій користувачів, котрі потребують середовища, що дозволяє легко переходити від однієї математичної спеціалізації до іншої, не витрачаючи зайвого часу на трансформацію даних й опанування різноманітних програмних засобів.

Пакет Statistics має гарний набір команд для аналізу даних з обчисленням різноманітних середніх та квантилів, графічного зображення даних у вигляді гістограм та графіків, а також для обробки даних [6 – 8, 25, 26].

9.1 Визначення вибірки

Значна частина статистики пов'язана з описом великих сукупностей об'єктів. Якщо сукупність, що нас цікавить, надто велика, або її елементи малодоступні, або існують інші причини, які не дозволяють вивчати разом всі її елементи, то вивчають якусь частину цієї сукупності. Ця вибрана для повного дослідження група елементів називається вибіркою або вибірковою сукупністю, а вся множина елементів, що вивчаються, – генеральною сукупністю. Природно намагатися зробити вибірку такою, щоб вона найкраще репрезентувала всю генеральну сукупність, тобто була б репрезентативною. Як цього досягти?

Якщо генеральна сукупність нам є мало відомою або зовсім невідомою, не можна запропонувати нічого кращого, ніж суғубо випадковий вибір.

Вибір одного об'єкту називають чисто випадковим, якщо всі об'єкти мають рівні ймовірності бути вибраними.

Якщо йдеться про вибір одного об'єкта з N , це означає, що для кожного елемента ймовірність вибору дорівнює $1/N$.

Вибір n об'єктів з N називають суғубо випадковим, якщо всі набори з n об'єктів мають однакові ймовірності бути вибраними.

Випадкову вибірку обсягом n можна також отримати, вилучаючи з генеральної сукупності за одним об'єктом послідовно й суғубо випадково.

В математичній літературі використовується й інше значення слова “вибірка”.

Вибіркою називають послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Саме у цьому значенні слово “вибірка” використовується в статистичних задачах природознавства.

Необхідність статистичної обробки даних виникає тоді, коли є якийсь масив даних – вибірка. Тому природно розпочати з отримання випадкової вибірки.

У пакеті Maple отримати вибірку, яку застосовуватимуть для статистичної обробки даних, можна кількома способами.

Приклад 9.1

Найперший і традиційний спосіб: занесення елементів вибірки вручну.

```
> data := [14.57, 14.37, 14.48, 14.46, 14.51, 14.29, 14.42, 14.69, 14.60, 14.31,  
14.38, 14.46, 14.52, 14.38, 14.41, 14.61, 14.36, 14.39, 14.45, 14.40, 14.28, 14.37,  
14.51, 14.57, 14.51, 14.48, 14.29, 14.62, 14.47, 14.41, 14.29, 14.46, 14.43, 14.31,  
14.48, 14.23, 14.59, 14.43, 14.38, 14.18, 14.32, 14.42, 14.28, 14.32, 14.39, 14.55,  
14.52, 14.33, 14.34, 14.33, 14.40, 14.48, 14.58, 14.54, 14.40, 14.39, 14.38, 14.32,  
14.51, 14.45, 14.43, 14.44, 14.48, 14.34, 14.14, 14.46, 14.32, 14.58, 14.20, 14.45,  
14.40, 14.46, 14.24, 14.39, 14.51, 14.52, 14.62, 14.44, 14.20, 14.29];
```

```
data := [14.57, 14.37, 14.48, 14.46, 14.51, 14.29, 14.42, 14.69, 14.60, 14.31, 14.38, 14.46,
14.52, 14.38, 14.41, 14.61, 14.36, 14.39, 14.45, 14.40, 14.28, 14.37, 14.51, 14.57,
14.51, 14.48, 14.29, 14.62, 14.47, 14.41, 14.29, 14.46, 14.43, 14.31, 14.48, 14.23,
14.59, 14.43, 14.38, 14.18, 14.32, 14.42, 14.28, 14.32, 14.39, 14.55, 14.52, 14.33,
14.34, 14.33, 14.40, 14.48, 14.58, 14.54, 14.40, 14.39, 14.38, 14.32, 14.51, 14.45,
14.43, 14.44, 14.48, 14.34, 14.14, 14.46, 14.32, 14.58, 14.20, 14.45, 14.40, 14.46,
14.24, 14.39, 14.51, 14.52, 14.62, 14.44, 14.20, 14.29]
```

Другий спосіб – отримати елементи вибірки з вже існуючого файла.

```
> data:=[importdata('f:\diski\maple6\MY\labrob\22.dat')];
data := [14.57, 14.37, 14.48, 14.46, 14.51, 14.29, 14.42, 14.69, 14.60, 14.31, 14.38, 14.46,
14.52, 14.38, 14.41, 14.61, 14.36, 14.39, 14.45, 14.40, 14.28, 14.37, 14.51, 14.57,
14.51, 14.48, 14.29, 14.62, 14.47, 14.41, 14.29, 14.46, 14.43, 14.31, 14.48, 14.23,
14.59, 14.43, 14.38, 14.18, 14.32, 14.42, 14.28, 14.32, 14.39, 14.55, 14.52, 14.33,
14.34, 14.33, 14.40, 14.48, 14.58, 14.54, 14.40, 14.39, 14.38, 14.32, 14.51, 14.45,
14.43, 14.44, 14.48, 14.34, 14.14, 14.46, 14.32, 14.58, 14.20, 14.45, 14.40, 14.46,
14.24, 14.39, 14.51, 14.52, 14.62, 14.44, 14.20, 14.29]
```

Третій спосіб – генеруємо набір випадкових чисел, використовуючи команду

Sample(RandomVariable(Distr), N),

де Distr – закон розподілу;

N – обсяг вибірки.

```
> data := Sample(RandomVariable(Normal(14,1)), 100);
```

```
100 Element Row Vector
Data Type: float[8]
Storage: rectangular
Order: Fortran_order
```

Обсяг вибірки визначимо за допомогою функції Count.

```
> Count(data);
```

100

9.2 Чисельні характеристики випадкових величин

Чисельними характеристиками випадкової величини ξ , які найчастіше застосовують, є початкові та центральні моменти різного ступеня. Для дискретної випадкової величини моменти ступеня k визначаються такими

формулами:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i, \mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^k p_i, \quad (9.1)$$

де x_i – i -те значення випадкової величини;

p_i – його ймовірність;

для неперервної випадкової величини ξ :

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^k f(x) dx.$$

Найчастіше використовується перший початковий момент $\alpha_1 = m_\xi$, який називають *математичним сподіванням випадкової величини* ξ , та другий центральний момент $\mu_2 = D_\xi$, який називають *дисперсією*. Математичне сподівання – це середнє значення випадкової величини, його називають ще центром розподілу, дисперсія характеризує розкид випадкової величини відносно центру розподілу. Часто, особливо в метрології, замість дисперсії використовують середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$.

Будь-яку функцію $t_n(x)$ від вибірки називають статистикою. Найчастіше оцінками початкових та центральних моментів слугують відповідні вибіркові початкові та центральні моменти

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - Mx)^k. \quad (9.2)$$

Отже, оцінкою математичного сподівання слугує вибіркове середнє

$$Mx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Щоб мати практичну цінність, оцінка якогось параметра θ має задовольняти такі вимоги:

1. Оцінка $t_n(x)$ мусить наближатися до параметру θ , який оцінюють за збільшенням обсягу вибірки.
2. Оцінка не має містити систематичної похибки.

Другий вибірковий центральний момент

$$m_2 = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n (x_i - Mx)^2 \quad (9.3)$$

є оцінкою дисперсії, але ця оцінка зсунута. Незсунутими є оцінки

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - Mx)^2 \quad \text{і} \quad \sigma^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{\xi})^2. \quad (9.4)$$

У Maple для обрахування чисельних характеристик випадкової величини ξ застосовується ряд функцій, що наведено в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 – Функції описової статистики

Функція	Перетворення, які виконуються
Count	Кількість елементів у списку даних
CountMissing	Кількість елементів у списку даних, які задано параметром missing
Covariance	Значення лінійної коваріації між двома списками
Decile	Поділяє список на десять частин
GeometricMean	Геометричне середнє
HarmonicMean	Гармонічне середнє
Kurtosis	Коефіцієнт акцесу
Mean	Середнє арифметичне (математичне сподівання)
MeanDeviation	Середнє арифметичне абсолютних відхилень
Median	Медіана розподілу
Mode	Мода розподілу
Moment	Моменти
Percentile	Знаходження елемента за відсотком від частини діапазону всього списку
QuadraticMean	Квадратичне середнє арифметичне
Quantile	Квантиль
Quartile	Квартиль
Range	Розмах
Skewness	Коефіцієнт асиметрії
StandardDeviation	Стандартне відхилення (середнє квадратичне відхилення)
Variance	Дисперсія

Обчислимо:

Математичне сподівання

> Mean(data);

14.41887500

Медіану

> Median(data);

14.42

Моду

> Mode(data);

14.46, 14.48, 14.51

Середнє геометричне

> GeometricMean(data);

14.41844035

Дисперсію

> Variance(data);

0.01252748435

Розмах

> Range(data);

5.65721215

Середнє гармонічне

> HarmonicMean](data);

14.41800548

Середнє квадратичне

> QuadraticMean(data);

14.41930941

9.3 Визначення функції та щільності розподілу випадкових величин

Відрізняють *дискретні та неперервні* випадкові величини. Як дискретна, так і неперервна випадкові величини можна задати *функцією розподілу*

$$F(x) = p(\xi < x). \quad (9.5)$$

Функція $F(x)$ монотонно зростає на всій числовій осі, причому $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Щільністю розподілу випадкової величини ξ називають функцію

$$f(x) = F'(x). \quad (9.6)$$

Розглянемо кілька законів розподілу випадкових величин, які найчастіше використовуються у практиці.

Кажуть, що неперервна випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом, якщо щільність розподілу визначається за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9.7)$$

де μ та σ – певні параметри.

Якщо маємо незалежні випадкові величини ξ_i , які розподілено за нормальним законом з нульовим середнім та одиничною дисперсією, тоді

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (9.8)$$

розподілено за законом Пірсона (або за законом χ^2) з n ступенями вільності. Її щільність розподілу визначається за формулою

$$f(x) = \left(2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (9.9)$$

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{u-1} dx,$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція.

Випадкова величина $t_n = \frac{\xi\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_n^2}}$, де ξ – випадкова величина, яку

розподілено за нормальним законом, а χ_n^2 – випадкова величина, яку розподілено за законом χ^2 , буде розподілена за законом Стюдента з n

ступенями вільності. Її щільність розподілу визначається за формулою

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (9.10)$$

Розподіли χ^2 та Стюдента наближаються до нормального розподілу за $n \rightarrow \infty$.

Якщо закон розподілу випадкової величини ξ є невідомим, то його можна наближено визначити (оцінити). Для цього над величиною ξ здійснюють ряд незалежних іспитів (вимірювань).

При повторенні вимірювань тієї ж випадкової величини ξ , через наявність випадкових помилок ми отримаємо дещо інші значення $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Тому власне вимірювання слід розглядати як випадкові величини, які розподілено за одним й тим самим законом, що збігається з законом розподілу випадкової величини ξ . Функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ називають *функцією розподілу генеральної сукупності*.

Якщо просту вибірку впорядкувати за зростанням, то її називають *варіаційним рядом*. Для кожного елемента варіаційного ряду x_i , який не повторюється, можна визначити відносну частоту його з'явлення $P_i^* = \frac{m_i}{n}$, то такий варіаційний ряд називають *статистичним рядом* розподілу випадкової величини ξ . Тут m_i – кількість повторень x_i (абсолютна частота з'явлення елемента), а n – загальна кількість вимірювань, або *обсяг вибірки*. Маючи варіаційний ряд, легко побудувати *емпіричну (статистичну) функцію розподілу*

$$F_n(x) = \frac{m_x}{n}. \quad (9.11)$$

Тут m_x – кількість членів варіаційного ряду, що знаходяться ліворуч від x , а m_x/n – частота потрапляння вибіркового значення лівіше від x ; $F_n(x)$ –

ступінчаста неспадна функція, яку задано на всій числовій осі, зі стрибками у точках x_i . Величина стрибка дорівнює частоті P_i^* . Оскільки сума абсолютних частот $\sum_{i=1}^n m_i = n$, то сума відносних частот $\sum_{i=1}^n p_i^* = 1$. Звідси зрозуміло, що емпіричну функцію розподілу можна використовувати як оцінку теоретичної функції розподілу $F(x)$.

За великого обсягу вибірки обчислення стають громіздкими й, з метою спрощення обчислень, елементи вибірки об'єднують у групи. Для цього інтервал, який містить всю множину елементів вибірки, розбивають на k інтервалів, що не перетинаються. Кількість інтервалів k визначається різними виразами, наприклад, $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ або $k = \lfloor 3 \lg n + 1 \rfloor$. При цьому правий кінець кожного інтервалу виключають з відповідної множини, а лівий додають. Заради спрощення інтервали вибирають однакової довжини $h = R/k$, де $R = x_{\max} - x_{\min}$ – розмах вибірки. Якщо m_i – кількість елементів вибірки в i -й групі, то m_i/n – її частота. Сукупність розрядів або їх середин й відповідних частот називають *групованим статистичним рядом*. Геометрично його зображують у вигляді *гістограми*, яка є аналогом щільності функції розподілу. Гістограма будується таким чином. По осі абсцис відкладають інтервали й над кожним інтервалом, як на основі, будують прямокутник, висота якого дорівнює значенню щільності

розподілу для цього інтервалу $\frac{m_i}{n} h$. Отже, площа кожного прямокутника гістограми дорівнює його частоті, а загальна площа дорівнює одиниці.

Розглянемо як ці теоретичні описи можна реалізувати у Maple.

Приклад 9.2. Побудувати варіаційний ряд та графік емпіричної функції розподілу за результатами спостережень, які наведено в таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Результати спостережень

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	5	3	7	10	5	5	2	10	7	2	7	7	4	2	4

Визначимо вибірку

```
> data := [5,3,7,10,5,5,2,10,7,2,7,7,4,2,4];
      data := [5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4]
```

Отримаємо варіаційний ряд, відсортувавши варіанти в порядку зростання

```
> data1:= Sort(data);
      data1 := [2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10]
```

Побудуємо статистичний ряд

```
> data2 := Tally](data1);
      [2 = 3, 3 = 1, 5 = 3, 4 = 2, 7 = 4, 10 = 2]
```

Побудуємо емпіричну функцію розподілу

```
> F := piecewise(x<=2,0, x>2 and x<=3,1/5, x>3 and x<=4,4/15,
x>4 and x<=5,2/5, x>5 and x<=7,3/5, x>7 and x<=10,13/15,
x>10,1);
```

$$F := \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{5} & -x < -2 \text{ and } x - 3 \leq 0 \\ \frac{4}{15} & -x < -3 \text{ and } x - 4 \leq 0 \\ \frac{2}{5} & -x < -4 \text{ and } x - 5 \leq 0 \\ \frac{3}{5} & -x < -5 \text{ and } x - 7 \leq 0 \\ \frac{13}{15} & -x < -7 \text{ and } x - 10 \leq 0 \\ 1 & 10 < x \end{cases}.$$

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу (рис. 9.1)

```
> plot(F,x=1..11,colour=black,thickness=3);
```

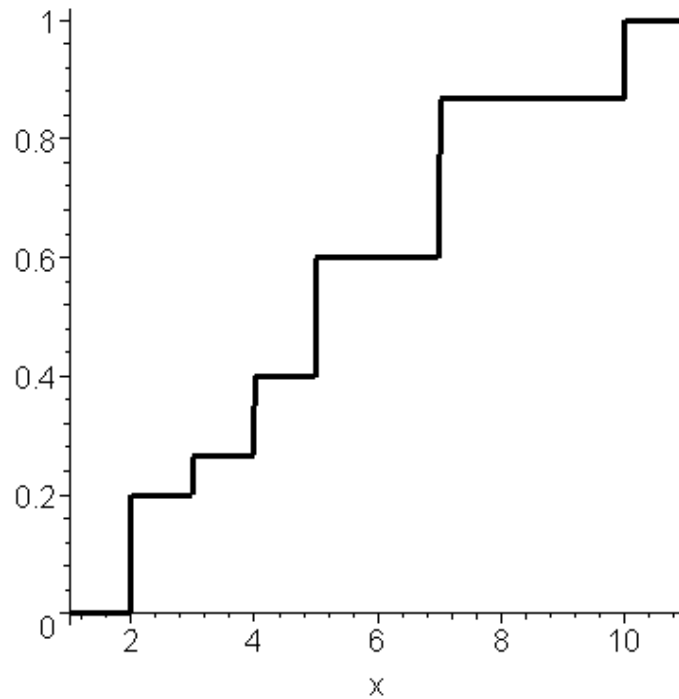


Рисунок 9.1 – Емпірична функція розподілу

За великого обсягу вибірки (поняття „великий обсяг” залежить від способів обробки і зазвичай таким вважається $n > 40 - 50$). За таких умов процес побудови емпіричної функції розподілу дещо відрізняється від наведеного вище. Розглянемо це на вибірці, яку подано у прикладі 9.1.

Здійснимо групування отриманих значень, розбивши їх на k інтервалів

> n := Count(data);

$n := 100$

> k:= round(sqrt(n));

$k := 9$

Знайдемо розмах вибірки

> R:= Range(data);

$R := 5.10703952$

Оцінюємо крок

> h:=R/k;

$h := 0.5107039520$

Будуємо гістограму (щільність емпіричної функції розподілу цієї вибірки) (рис. 9.2)

```
> Histogram(data,colour=blue,bincount=k,  
title="Щільність емпіричної функції розподілу (гістограма)");
```

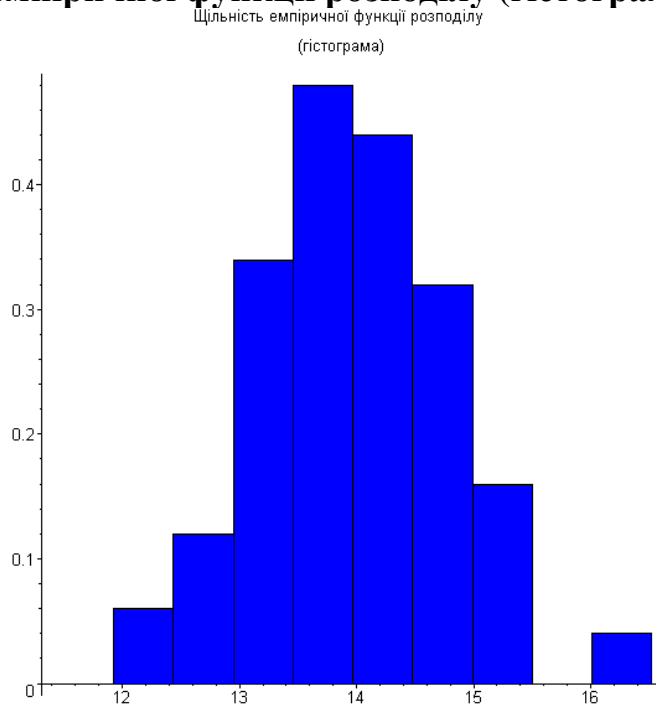


Рисунок 9.2 – Щільність емпіричної функції розподілу (гістограма)

9.4 Критерії згоди

Припустимо, що емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$, яку побудовано за вибіркою, ми згладили за допомогою якоїсь гіпотетичної функції розподілу $F(x)$. Виникає запитання: чи правильна гіпотеза про те, що функція розподілу саме $F(x)$, а не якась інша? Точніше, чи не протирічить гіпотеза про закон розподілу $F(x)$ результатам експерименту? Щоб відповісти на це запитання скористаємося критеріями згоди.

Під критерієм згоди розуміють якусь величину $\Delta(F_n, F)$, яка відображає кількісну міру розбіжності гіпотетичного $F(x)$ та емпіричного $F_n(x)$ розподілу. Цю величину можна вибрати багатьма способами, відповідно до яких отримуємо й різноманітні критерії перевірки гіпотези, яка нас цікавить. Наприклад, можна припустити

$$\Delta(F_n, F) = D_n = \sup |F_n(x) - F(x)| \quad (9.12)$$

або

$$\Delta(F_n, F) = \omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x).$$

У першому випадку отримуємо критерій Колмогорова, у другому – критерій Мізеса.

Схема застосування критерію згоди така. Візьмемо $\alpha > 0$ таким малим, щоб здійснення події з ймовірністю α можна було вважати практично неможливим в одиничному експерименті. Знаючи закон розподілу випадкової величини $\Delta = \Delta(F_n, F)$, знайдемо її можливе значення Δ_0 з рівняння $P(\Delta > \Delta_0) = \alpha$. За цією вибіркою обчислимо значення критерію згоди $\Delta_1 = \Delta(F_n, F)$. Якщо виявиться, що $\Delta_1 > \Delta_0$, то це означатимете, що відбулася практично неймовірна подія. Отже, експеримент спростовує нашу гіпотезу, й вона відкидається. При цьому ймовірність того, що ми відкинули правильну гіпотезу, дорівнює α . Якщо $\Delta_1 < \Delta_0$, то гіпотеза не суперечить експерименту й мусить бути прийнята. Число α називається рівнем значущості критерію.

Колмогоров знайшов граничну функцію розподілу величини $\lambda = \sqrt{n}D_n$. Цю функцію зазвичай позначають $K(x)$:

$$K(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n < x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}, \quad x > 0. \quad (9.13)$$

Формулу (9.13) можна використовувати для великих n .

Щоб скористатися критерієм згоди Колмогорова, потрібно побудувати графіки гіпотетичної та вибіркової функції розподілу, за графіками знайти статистику D_n й обчислити величину $\lambda_1 = \sqrt{n}D_n$. Знайти ймовірність події $\sqrt{n}D_n > \lambda_1$ за формулою

$$P(\sqrt{n}D_n > \lambda_1) = 1 - K(\lambda_1) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda_1^2}. \quad (9.14)$$

Якщо ця ймовірність менша за α , то гіпотеза відкидається, якщо більша,

то визнається такою, що не протирічить експерименту.

Припустимо тепер, що з фізичного сенсу ми можемо висловити гіпотезу тільки про вигляд закону розподілу, а параметри, які містяться в ньому, є невідомими. Тоді критерій згоди Колмогорова не можна застосувати. У таких випадках часто використовують критерій згоди Пірсона.

Всю числову вісь розіб'ємо на r розрядів, які не перетинаються, точками $-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = \infty$. Прийmemo гіпотезу про функцію розподілу. Невідомі параметри, які містяться в ній, замінимо їх оцінками. Таким чином, гіпотетична функція розподілу $F(x)$ буде відомою, й можна знайти ймовірності $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ потрапляння випадкової величини в i -й розряд. Візьmemo статистику

$$t_n = \chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (9.15)$$

де n – обсяг вибірки, r – кількість розрядів, m_i – кількість значень в i -му розряді.

За міру розбіжності між гіпотетичною $F(x)$ та емпіричною $F_n(x)$ функціями розподілу прийmemo статистику $t_n = \Delta(F_n, F)$, яку визначено формулою (9.15). Фішером доведено, що граничним законом розподілу статистики t_n є розподіл χ^2 з $r-m-1$ ступенями волі, якщо параметри оцінено за методом максимальної правдоподібності. Тут m – кількість параметрів, які містяться в гіпотетичній функції розподілу. Доведено також, що за обсягом вибірки $n > 30$ з достатньою точністю можна використовувати граничний закон розподілу, якщо $np_i > 5$.

Схема застосування критерію Пірсона така. За формулою (9.15) обчислюють значення статистики $t_n = \Delta_0$. Обчислюють ймовірність

$$p(\Delta > \Delta_0) = \int_{\Delta_0}^{\infty} f(x) dx. \quad (9.16)$$

Тут $f(x)$ визначається за формулою (9.9), а n треба замінити на $r - m - 1$. Якщо ця ймовірність менша за рівень значущості α , то гіпотезу треба відкинути.

Приклад 9.3. За критерієм Пірсона перевіримо гіпотезу про нормальний закон розподілу ознаки X генеральної сукупності, якщо емпіричний розподіл вибірки має вигляд, який наведено в таблиці 9.3, з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

Таблиця 9.3 – Емпіричний розподіл вибірки

x_i	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	11	24	27	34	25	19	10

Розв'язання.

Вводимо заданий статистичний розподіл

```
> W:= [Weight(-4.5,11),Weight(-2.5,24),Weight(-0.5,27),
Weight(1.5,34),Weight(3.5,25),Weight(5.5,19),Weight(7.5,10)];
W := [ Weight(-4.5, 11), Weight(-2.5, 24), Weight(-0.5, 27), Weight(1.5, 34),
      Weight(3.5, 25), Weight(5.5, 19), Weight(7.5, 10) ]
```

Обчислимо обсяг вибірки, математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення

```
> N:=describe[count](W);
      N := 150
> a:=describe[mean](W);
      a := 1.300000000
> sigma:=describe[standarddeviation](W);
      σ := 3.312602199
```

Позначимо списки варіант та частот

```
> x := transform[statvalue](W);
      x := [-4.5, -2.5, -0.5, 1.5, 3.5, 5.5, 7.5]
> n := transform[frequency](W);
```

$n := [11, 24, 27, 34, 25, 19, 10]$.

За формулою

$$m_i = \frac{Nh}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

де h – крок,

знаходимо список теоретичних частот.

```
> m := [seq(N*2*exp(-(x[i]-a)^2/(2*sigma^2))/(sigma*sqrt(2*Pi)),i=1..7)]:  
evalf(m);  
[7.801399127, 18.71174140, 31.17072266, 36.06371726, 28.97911124, 16.17300007,  
6.268838333]
```

 .

Обчислюємо значення критерію χ^2 , який спостерігаємо

```
> sum((n[i]-m[i])^2/m[i], i=1..7): evalf(%);  
6.743417882
```

 .

Через те, що воно менше за критичне, яке для цієї задачі дорівнює 9,488 (вибирається з таблиці Д.2), то можна прийняти цю гіпотезу.

9.5 Регресійний аналіз

Оскільки багато явищ знаходяться у взаємному зв'язку, то вивчення їх є важливішою задачею статистики, яку розв'язують згідно до власної методології, що визначають характером вихідних даних та цілей дослідження. Для отримання адекватних реаліям результатів статистика потребує дослідження певного явища не ізольовано, а у взаємозв'язку з основними факторами та іншими явищами, які на нього впливають. Взаємозв'язок явищ – надто багатоаспектне поняття, яке відрізняється видами та формами взаємозв'язку. За характерам залежності розрізняють *функціональні (повні)* та *кореляційні (неповні)* зв'язки. При цьому основним видом зв'язку, що вивчається статистикою, є кореляційний, який виявляється лише у масових випадках (*у середньому*). На відміну від кореляційного зв'язку, функціональний

зв'язок визначає значення результативної ознаки за значенням факторного для кожного конкретного випадку. Відомо, що встановлення функціонального зв'язку, у загальному випадку – значно складніша задача, ніж кореляційна, яку у ряді випадків можна визначити з тим чи іншим ступенем точності навіть через логічний аналіз або здоровий глузд [27].

Відомо, що статистичні показники обумовлено багатьма факторами та причинами, пов'язані певними залежностями, дослідження яких має велике наукове та прикладне значення. На базі теоретичного аналізу статистика встановлює наявність та напрямок взаємозв'язків явищ, вимірює та висвітлює їх через спеціальні *показники зв'язку та функціональні рівняння*.

Для дослідження взаємозв'язків явищ статистика використовує ряд прийомів та методів [27].

Однією з типових задач багатовимірних експериментальних даних є визначення кількісного взаємозв'язку показників якості об'єкта від значень його параметрів та властивостей зовнішнього середовища за допомогою регресійного аналізу.

Регресійним аналізом називається сукупність статистичних методів побудови (ідентифікації) аналітичних залежностей (моделей) між двома й більше випадковими величинами [28].

До основних передумов регресійного аналізу належать такі положення:

1. Вхідні величини не є випадковими і задаються (вимірюються) з малою похибкою.
2. Значення контрольованих вхідних величин незалежні між собою.
3. Вихідна величина Y за фіксованого значення X має нормальний закон розподілу.
4. Дисперсія вихідної величини Y залишається постійною при зміні значень вхідної величини X .

Наявність рівняння регресії надає змогу прогнозувати поведінку об'єкта. Якщо задачу оцінювання параметрів буде розв'язано, можна з деякою

надійністю судити про поведінку величини Y залежно від значення аргументу X .

Лінія (рівняння) регресії показує, як у середньому змінюватиметься вихідна величина Y за незмінного значення вхідної величини X [29].

Постановка задачі регресійного аналізу формулюється таким чином.

Є сукупність результатів спостережень. У цій сукупності один стовпчик відповідає показнику, для якого необхідно встановити функціональну залежність з параметрами об'єкта та середовища, що подано іншими стовпчиками. Позначимо показник через y^* й вважатимемо, що йому відповідає перший стовпчик матриці спостережень. Інші $m-1$ ($m > 1$) стовпчиків відповідають параметрам (факторам) x_2, x_3, \dots, x_m .

Потрібно встановити кількісний взаємозв'язок між показником та факторами. У такому випадку задачу регресійного аналізу розуміють як задачу знаходження такої функціональної залежності $y^* = f(x_2, x_3, \dots, x_m)$, яка найкраще описує наявні експериментальні дані.

Припущення:

- кількість спостережень є достатньою для проявлення статистичних закономірностей відносно факторів та їх взаємозв'язків;
- експериментальні дані, які обробляють, містять деякі помилки (завади), що обумовлено похибками вимірювань, дією неврахованих випадкових факторів;
- матриця результатів спостережень є єдиною інформацією про об'єкт, який вивчають.

Функція $f(x_2, x_3, \dots, x_m)$, яка описує залежність показників від параметрів, називається рівнянням (функцією) регресії. Термін "регресія" (regression (лат.) – відступ, повернення до чогось) пов'язаний зі специфікою однієї з конкретних задач, яку розв'язано на стадії становлення методу, й наразі не віддзеркалює всієї суті методу, але продовжує застосовуватися.

Задачею регресійного аналізу є підбір такої залежності, яка б повною мірою відповідала теоретичній лінії регресії.

Під час проведення досліджень із застосуванням регресійного аналізу може розв'язуватися одна з двох узагальнених задач:

1. Вигляд залежності є відомим, необхідно якомога точніше знайти оцінки коефіцієнтів регресії.

2. Вигляд залежності є невідомим. У цьому випадку висувається гіпотеза про вигляд передбачуваної залежності. Побудована таким чином математична модель перевіряється на адекватність щодо об'єкта. Якщо модель не є адекватною, то змінюється гіпотеза і знову здійснюється статистична обробка [29].

Регресійний метод дозволяє кількісно та аналітично дослідити вплив факторів на явище, яке вивчають, однак застосування цих методів потребує чітких цілеспрямованого та якісного аналізу отриманих результатів. Для ефективності цього методу необхідно, щоб дослідник добре володів не тільки ними, але й самим об'єктом дослідження в цілому.

Поняття *регресійної залежності* є окремим випадком більш загального поняття – ***стохастичної залежності***: *змінна Y знаходиться у стохастичній залежності від X , якщо кожному значенню X відповідає ряд розподілу Y й зі зміною X ці ряди закономірно змінюються. Якщо ж ряди не змінюються або змінюються випадковим чином, то Y не залежить від X . Основна задача регресійного аналізу полягає у визначенні факторів, що впливають на явище, яке досліджують, та побудові його регресійної моделі зв'язку. Метод регресійного аналізу складається з ряду етапів, а саме:*

1) постановка задачі й вибір результативних і факторних ознак явища, яке досліджують

2) збирання статистичних даних для аналізу та їх верифікація з метою перевірки вірогідності

3) попередній аналіз зв'язку (групувальний, графічний, комп'ютерний методи та низка інших)

4) дослідження парних та багатofакторних зв'язків між явищами

5) оцінка вірогідності результатів аналізу та їх інтерпретація [27].

Взагалі аналітичні вирази для функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ попередньо (априорно) невідомі й повинні бути встановлені (ідентифіковані), базуючись на обробці результатів стохастичного експерименту.

Отже, кінцевою метою регресійного аналізу є отримання аналітичного виразу для рівняння регресії, яке найкраще (найадекватніше) описувало б результати стохастичного експерименту.

Основними етапами регресійного аналізу є (рис. 9.3):

- ідентифікація класу рівнянь регресії;
- ідентифікація структури рівняння регресії в класі;
- ідентифікація (оцінювання) параметрів рівняння регресії;
- перевірка ступеня адекватності отриманої моделі результатам стохастичного експерименту.

Стисло розглянемо кожен з цих етапів.

Ідентифікація класу рівнянь регресії. Точне рівняння регресії може бути отримано лише у тому випадку, коли кожному значенню однієї випадкової величини може бути поставлено у відповідність умовне математичне сподівання іншої. Для цього необхідно знати умовний закон (щільність) розподілу.

На практиці зазвичай точних законів розподілу випадкових величин, які вивчають, не знають й тому ми змушені використовувати не дійсні рівняння регресії, а їх статистичні оцінки.

Першим кроком до статистичного оцінювання рівнянь регресії є припущення про можливий вигляд рівняння регресії. Це припущення будується базуючись на фізичній, технологічній, економічній суті процесу, який

досліджують, з урахуванням вигляду діаграми розкиду, емпіричних значень коефіцієнтів кореляції.

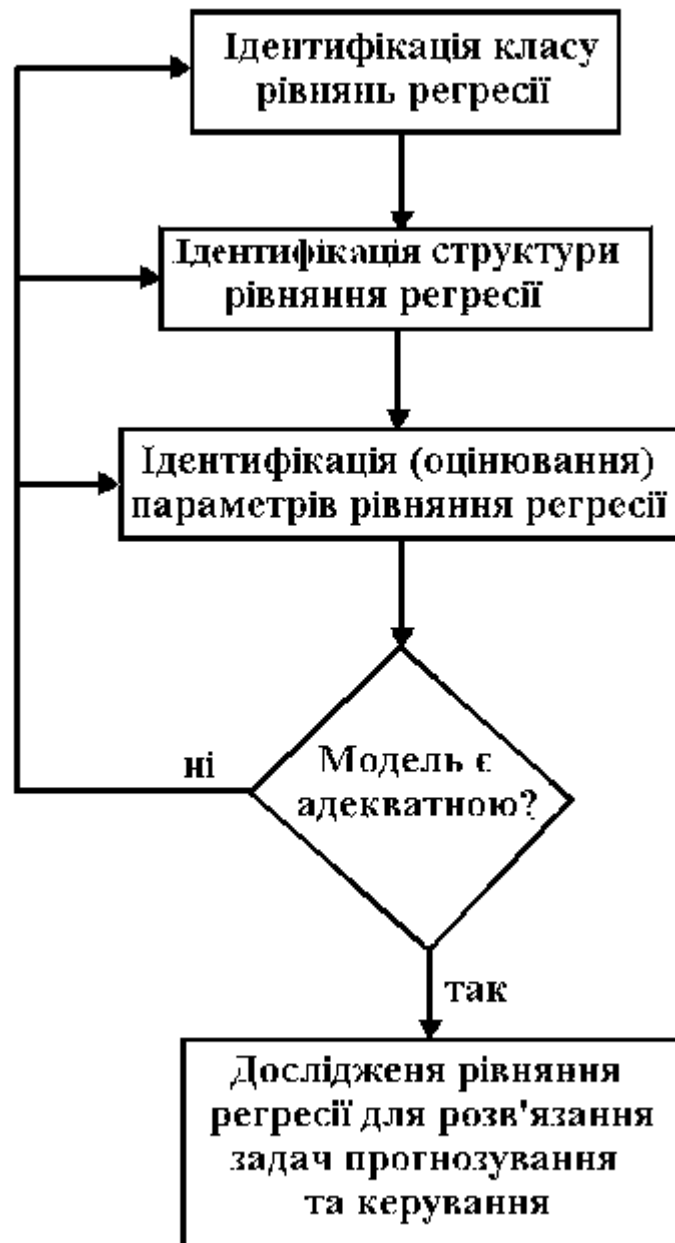


Рисунок 9.3 – Основні етапи регресійного аналізу

Першим кроком до статистичного оцінювання рівнянь регресії є припущення про можливий вигляд рівняння регресії. Це припущення будується, базуючись на фізичній, технологічній, економічній суті процесу,

який досліджують, з урахуванням вигляду діаграми розкиду, емпіричних значень коефіцієнтів кореляції.

Для того, щоб задача ідентифікації класу рівнянь регресії була зрозумілою, ми повинні визначити набір припустимих функцій $f(x)$.

Під час розв'язання практичних задач дуже широко використовуються два класи рівнянь регресії:

- клас лінійних регресійних рівнянь (моделей) вигляду

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$$

- клас нелінійних регресійних рівнянь (моделей).

Ідентифікація структури рівняння регресії. Цим етапом у випадку дослідження регресійної залежності між двома випадковими величинами нехтують. Це стає особливо актуальним у випадку множинної регресії.

Вибір вигляду рівняння регресії

Задача визначення функціональної залежності, яка найкраще описує експериментальні дані, пов'язана з перевизначенням ряду принципових труднощів. У загальному випадку для стандартизованих даних функціональну залежність показника від параметрів можна зобразити у вигляді

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_p) + \varepsilon,$$

де f – попередньо невідома функція, яку слід визначити;

ε – помилка апроксимації експериментальних даних.

Згадане рівняння прийнято називати вибіркоvim рівнянням регресії у на u . Це рівняння характеризує залежність між варіацією показника й варіаціями факторів. А міра кореляції вимірює частину варіації показника, яка пов'язана з варіацією факторів.

Ще одна особливість стосується оцінки ступеня впливу кожного фактора на показник. Регресійне рівняння не забезпечує оцінку окремого впливу кожного фактора на показник, така оцінка можлива лише у випадку, коли всі інші фактори не пов'язані з тим, який вивчають. Якщо фактор, який вивчають, пов'язаний з іншими, що впливають на показник, то буде отримана змішана

характеристика впливу фактора. Ця характеристика містить як безпосередній вплив фактора, так і опосередкований вплив, який відбувається через зв'язок з іншими факторами та їх вплив на показник.

У регресійне рівняння не слід додавати фактори, які слабо пов'язані з показником, але тісно пов'язані з іншими факторами. Не містить рівняння й фактори, які функціонально пов'язані один з одним.

Функцію f підбирають таким чином, щоб помилка ε була найменшою.

З метою вибору функціонального зв'язку попередньо висувають гіпотезу про те, до якого класу може належати функція f , а потім підбирають "кращу" функцію у цьому класі.

Простим, зручним для практичного застосування й таким, що відповідає вказаній умові, є клас поліноміальних функцій

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^m a_j u_j + \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m a_{jk} u_j u_k + \sum_{j=2}^m a_{jj} u_j^2 + \dots + \varepsilon.$$

Для такого класу задача вибору функції зводиться до задачі вибору значень коефіцієнтів $a_0, a_j, a_{jk}, \dots, a_{jj}, \dots$. Однак універсальність поліноміального зображення забезпечується тільки за можливості необмеженого збільшення ступеня поліному, що не завжди прийнятно на практиці, тому застосовують й інші функції.

Окремим випадком, який широко застосовується на практиці, є поліном першого ступеня або рівняння лінійної регресії

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^m a_j u_{ij} + \varepsilon.$$

Для вибору вигляду функціональної залежності можна рекомендувати такий підхід:

- у просторі параметрів графічно зображують точки зі значеннями показника;

- за розташуванням точок й на базі аналізу суті взаємозв'язку показника й параметрів об'єкта роблять висновок про вигляд регресії або її можливі варіанти;
- після розрахунків параметрів оцінюють якість апроксимації, тобто оцінюють ступінь близькості обчислених та фактичних значень;
- якщо обчислені та фактичні значення є близькими в усій області завдання, то задачу регресійного аналізу можна вважати розв'язаною. У протилежному випадку можна спробувати вибрати інший вигляд полінома або іншу аналітичну функцію.

У регресійному аналізі припускається, що можна безпосередньо або опосередковано контролювати одну або кілька незалежних змінних. При чому ці змінні не є випадковими величинами.

Регресійний аналіз дозволяє встановити зв'язок між вхідною величиною X та вихідною величиною Y у вигляді математичної моделі. Кінцевою метою експериментального дослідження є встановлення математичної залежності, що адекватно описує поведінку об'єкта. Коефіцієнти цієї моделі надають можливість оцінити ступінь впливу незалежних величин X_i на вихідну величину Y .

Зазвичай залежності оцінюють за підсумками спостережень, результати яких сформовано у вигляді масиву даних.

Нехай під час дослідження залежності між величинами X та Y було здійснено вимірювання при N дискретних значеннях x_i . Для кожного значення x_i було отримано m значень вихідної величини y .

Для N наявних пар значень будують поле кореляції (діаграму розкиду), за зовнішнім виглядом якого можна передбачити вигляд регресійної залежності.

Найбільш ефективним під час апроксимації наявних даних є критерій мінімізації суми квадратів відхилень експериментальних даних від передбачуваної залежності.

Визначення коефіцієнтів такої залежності здійснюється за методом найменших квадратів, як це описано у 4.5.

Багато вибрати коефіцієнти поліному так, щоб забезпечити мінімум помилки апроксимації експериментальних даних. Можна застосовувати різноманітні засоби для оцінки помилок апроксимації. Одним із засобів, який широко застосовується, є середньоквадратична помилка. На її базі розроблено спеціальний метод оцінки коефіцієнтів рівнянь регресії – метод найменших квадратів. Цей метод дозволяє отримати оцінки максимальної правдоподібності невідомих коефіцієнтів рівняння регресії за нормального розподілу варіант, але його можна застосувати й для будь-якого іншого розподілу факторів.

Метод найменших квадратів базується на таких положеннях:

- значення величин похибок й факторів є незалежними, а отже, й некорельованими, тобто припускається, що механізми породження завади не пов'язані з механізмом формування значень факторів;
- математичне сподівання похибки ε має дорівнювати нулю, інакше кажучи, похибка є центрованою величиною;
- вибірка оцінка дисперсії похибки $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ має бути мінімальною.

Зі зростанням ступеня рівняння регресії зростає й ступінь моментів розподілу параметрів, які використовуються для визначення коефіцієнтів. Точність й вірогідність оцінки моментів за обмеженою вибіркою експериментальних даних знижується зі зростанням їх порядку. Таким чином застосування у рівняннях регресії поліномів ступеня вище другого недоцільно.

Якість отриманого рівняння регресії оцінюють за ступенем близькості між результатами спостережень за показниками та передбаченням за рівнянням регресії значень у визначених точках простору параметрів. Якщо результати є близькими, то задачу регресійного аналізу можна вважати розв'язаною. У протилежному випадку необхідно змінити рівняння регресії й повторити розрахунки оцінки.

Лінійна регресія має важливе практичне значення, оскільки генеральна сукупність найчастіше розподілена за нормальним законом розподілу. У протилежному випадку можлива нелінійна регресія, а за великого діапазону змін величин лінеаризація регресії є неправомірною. У цьому випадку для кожного x_i вибірки обчислюють середнє значення \bar{y}_i . Наносять точки (x_i, \bar{y}_i) й з'єднують їх ламаною лінією. За виглядом цієї ламаної лінії вирішують, яким має бути вигляд нелінійної залежності. Потім здійснюють згладжування.

У випадку кореляції між кількома змінними рівняння регресії подають у вигляді певної поверхні.

Задача множинного регресійного аналізу полягає у виборі такої кривої, квадрат відхилень результатів спостережень від якої був би мінімальним.

У тому випадку, коли при графічному зображенні точок нелінійність явно проглядає або гіпотеза лінійності не підтверджується, доцільно відтворювати за експериментальними даними залежність, яка містить фактори у другому та вищих ступенях, а також взаємодії факторів, тобто необхідно розглядати парну залежність, нелінійну за аргументами або нелінійну відносно параметрів [29].

Математична модель, яка встановлює взаємозв'язок між параметрами, що характеризують фізичний процес, може бути складена і за відсутності або суттєво обмеженому обсязі теоретичних відомостей про цей процес. Рівняння математичного опису у цьому випадку отримують, базуючись на статистичному дослідженні об'єкта моделювання. Такі моделі називаються статистичними і мають вигляд регресійних та кореляційних співвідношень, які характеризують зв'язок між вхідними та вихідними параметрами процесу [30].

Припущення про помилки. У класичній моделі регресійного аналізу припускається, що:

- всі експерименти (дослідження) здійснювалися незалежно один від одного;
- статистичні властивості похибок залишаються незмінними в усіх дослідках [28].

Властивості оцінок методу найменших квадратів. Оцінки методу найменших квадратів мають ряд цінних властивостей:

- незміщеність, тобто математичне сподівання параметра дорівнює істинному його значенню;
- спроможність, коли дисперсія оцінки прямує до нуля зі зростанням обсягу спостережень;
- ефективність, тобто оцінки мають мінімальну дисперсію у порівнянні з іншими оцінками цього параметра [29].

Базуючись на вище викладеному, розглянемо побудову регресійної залежності за допомогою математичного пакета Maple.

Приклад 9.4

Знайдемо регресійну залежність між двома випадковими величинами

> randomize():

n:=20: muX:=10: sigmaX:=2: muV:=0: sigmaV:=2:

x := Sample(RandomVariable(Normal(muX,sigmaX)),n):

v := Sample(RandomVariable(Normal(muV,sigmaV)),n):

y:=x+v:

KK := []:

for i from 1 to n do

KK :=[op(KK),[x[i],y[i]]];

end do:

plot(KK,style=point,colour=red,symbol=circle); zp:=%:

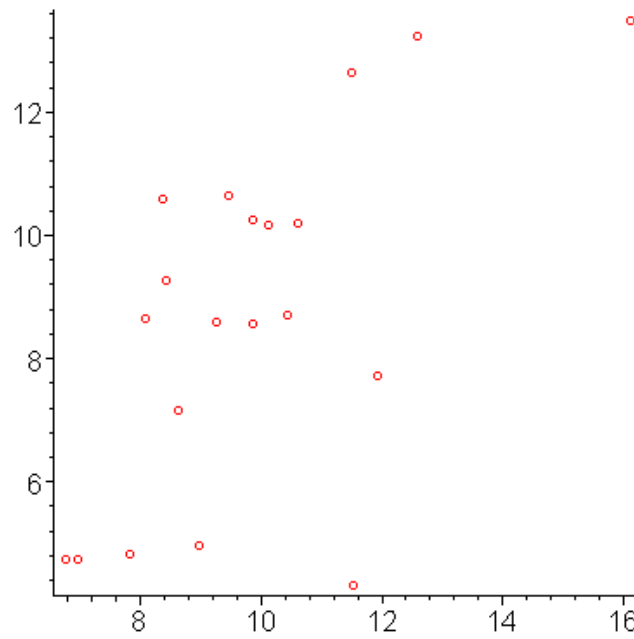


Рисунок 9.4 – Діаграма розкиду випадкової величини

```
xy :=plot(PolynomialFit(1, x, y, t),t=7..12,colour=blue,thickness=3):
yx := plot(PolynomialFit(1, y, x, t ),t=7..12,colour=green,thickness=3):
display(xy,yx,zp);
```

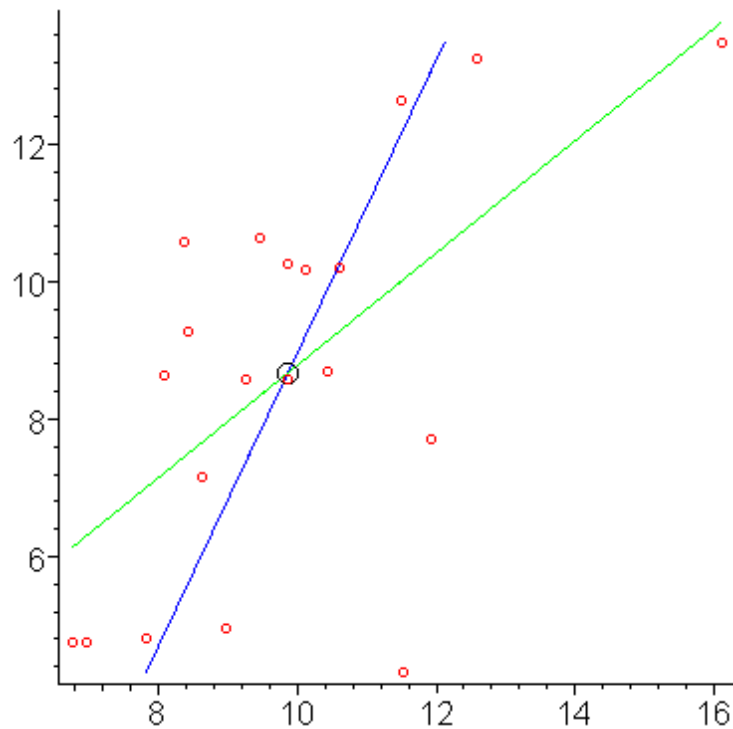


Рисунок 9.5 – Регресійна залежність двох випадкових величин

Задачі

1. Обчислити чисельні характеристики для випадкових величин, які наведено в таблиці Д.1.

2. Побудувати емпіричний закон розподілу для випадкових величин, які наведено в таблиці Д.1.

3. Побудувати гістограму для випадкових величин, які наведено в таблиці Д.1.

4. У наступних задачах отримати вибіркове рівняння прямої регресії Y на X . Зробити висновок про характер й тісноту зв'язку між X та Y .

4.1. Нехай X – динамічне навантаження вагону робочого парку, а Y – собівартість перевезень, n – частота (X, Y) . Дано вибірку (X, Y, n) : $\{(28, 3, 1), (28, 3.5, 3), (30, 3, 2), (32, 2, 1), (32, 2.5, 2), (32, 3, 1), (34, 2, 1), (34, 2.5, 2), (36, 2.5, 2)\}$.

4.2. Нехай X – вартість активної частини виробничих фондів, млн. грн., Y – вироблення продукції на одного робочого, тис. грн., n – частота спостережень (X, Y) . Є вибірка (X, Y, n) : $\{(10, 0.8, 3), (10.5, 0.8, 2), (10.5, 1, 2), (11, 0.8, 1), (11, 1, 2), (11, 1.2, 2), (11, 1.4, 1), (11.5, 1, 1), (11.5, 1.2, 1), (11.5, 1.4, 1), (12, 1.2, 2), (12, 1.4, 2)\}$.

4.3. Нехай X – продуктивність праці, тисяч одиниць, Y – собівартість одиниці продукції, грн., n – частота спостережень (X, Y) . Є вибірка (X, Y, n) : $\{(11, 13, 2), (11, 15, 2), (13, 11, 3), (13, 13, 4), (13, 15, 1), (15, 7, 1), (15, 9, 3), (15, 11, 7), (15, 13, 5), (17, 7, 1), (17, 9, 4), (17, 11, 4), (19, 7, 2), (19, 9, 1)\}$.

4.4. Нехай X – кількість типових дефектів, Y – термін служби ходових частин вагону, років, n – частота спостережень (X, Y) . Є вибірка (X, Y, n) : $\{(0, 1, 35), (0, 3, 15), (5, 1, 12), (5, 3, 34), (5, 5, 5), (10, 3, 6), (10, 5, 11), (15, 5, 3), (15, 7, 2), (20, 5, 1)\}$.

4.5. Нехай X – середня величина дохідної ставки, грн., Y – дохід від перевезення, млн. грн., n – частота спостережень (X, Y) . Дано вибірку (X, Y, n) :

$\{(2.3, 7.1, 5), (2.3, 7.3, 4), (2.6, 7.3, 12), (2.6, 7.5, 8), (2.6, 7.7, 1), (2.9, 7.5, 5), (2.9, 7.7, 5), (3.2, 7.5, 4), (3.2, 7.7, 7), (3.5, 7.7, 2), (3.5, 7.9, 2)\}$.

4.6. Нехай X – товарообіг матеріально-технічного забезпечення, млн. грн., Y – відносний рівень заготівельно-складських витрат, %, n – частота спостережень (X, Y) . Дано вибірку (X, Y, n) : $\{(5, 10, 1), (5, 11, 6), (7, 10, 5), (7, 11, 6), (9, 9, 5), (9, 10, 3), (9, 11, 1), (11, 8, 4), (11, 9, 4), (13, 8, 3), (13, 9, 1)\}$.

4.7. Нехай X – довжина потягу, м., Y – маса потягу, брутто, т., n – частота спостережень (X, Y) . Дано вибірку (X, Y, n) : $\{(650, 2500, 8), (700, 2500, 9), (700, 3000, 11), (750, 3000, 13), (750, 3500, 19), (800, 3000, 1), (800, 3500, 24), (800, 4000, 28), (850, 3000, 4), (850, 3500, 22), (850, 4000, 31)\}$.

4.8. Нехай X – щільність перевезень, млн. т., Y – собівартість перевезень, грн./10 тис. км, n – частота спостережень (X, Y) . Дано вибірку (X, Y, n) : $\{(10, 3.5, 5), (15, 3, 6), (20, 2.5, 5), (20, 3, 4), (25, 2.5, 3), (25, 3, 1), (30, 2, 2)\}$.

4.9. Нехай X – маса потягу, тис. т., Y – питомий розхід електроенергії, Квт.г./10 тис. км, n – частота спостережень (X, Y) . Отримано вибірку (X, Y, n) : $\{(2.5, 85, 1), (2.5, 105, 4), (3, 85, 12), (3, 95, 14), (3, 105, 8), (3.5, 75, 12), (3.5, 85, 36), (3.5, 95, 18), (4, 75, 17), (4, 85, 14), (4, 95, 13), (4.5, 75, 2), (4.5, 85, 9)\}$.

4.10. Нехай X – коефіцієнт порожнього пробігу вагонів, %, Y – залежна частина собівартості перевезень, грн./10 тис. км, n – частота спостережень (X, Y) . Є вибірка (X, Y, n) : $\{(23, 0.48, 2), (23, 0.5, 1), (24, 0.5, 7), (24, 0.52, 1), (25, 0.5, 1), (25, 0.52, 2), (26, 0.52, 1), (26, 0.54, 4), (27, 0.54, 3), (28, 0.54, 3)\}$.

10 НАУКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ З MAPLE

У попередніх розділах було наведено багато прикладів використання системи Maple. При цьому наведені приклади за виключенням кількох були досить простими й такими, що не потребували надмірних зусиль для отримання розв'язку.

Maple можна з успіхом використовувати під час розв'язання конкретних наукових та практичних задач. У цьому розділі подано розв'язання реальних та корисних задач в області математики, фізики та радіоелектроніки. Наведені приклади зокрема обумовлені особистими науковими інтересами автора, але вони можуть бути корисними користувачам, котрі бажають оцінити можливості Maple та скоротити час на програмування, відлагодження програм та здійснення „чисельного” експерименту [20].

10.1 Рух заряджених частинок у системах зі схрещеними полями

10.1.1 Рух заряджених частинок у плоских системах [31 – 33]

Визначимо траєкторію електрону, який входить з нульовою початковою швидкістю в область дії однорідних перпендикулярних одне до одного електричного та магнітного полів. Простір дії цих полів обмежено двома паралельними площинами, які мають необмежену протяжність у напрямку z й розташовані одна від одної на відстані d (рис. 10.1).



Рисунок 10.1 – Схема простору взаємодії плоского магнетронного діода

Математично задача про рух електронів у магнетроні описується

$$\text{рівнянням руху } m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \left(\vec{E} + \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{B} \right] \right).$$

Електричне поле спрямовано у бік додатних y , магнітне поле – у бік

$$\text{від'ємних } z, \text{ тобто } E = E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; B = B_z.$$

У цьому випадку вище наведене рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{e}{m} \frac{dy}{dt} B_z, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{e}{m} \frac{dx}{dt} B_z = -\frac{e}{m} \left(\frac{V}{d} - \frac{dx}{dt} B \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Позначивши $\omega_c = \frac{e}{m} B_z$ – кутова частота обертання електрона, яку

називають циклотронною, та $a = \frac{e}{m} \frac{V}{d} = \frac{e}{m} E_y$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega_c \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -a + \omega_c \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

В результаті інтегрування цієї системи рівнянь отримаємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{at}{\omega_c} - \frac{a \sin \omega_c t}{\omega_c^2}, \\ y &= \frac{a}{\omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t). \end{aligned}$$

У цьому випадку траєкторією електрона є циклоїда.

Спробуємо розв'язати поставлену задачу про рух електрона у схрещених полях за допомогою пакета Maple.

```
> syst := diff(x(t),t$2)=-omega[c]*diff(y(t),t), diff(y(t),t$2)=-
a+omega[c]*diff(x(t),t):
> init := x(0)=0,y(0)=0,D(x)(0)=0,D(y)(0)=0:
> res:=dsolve({syst,init},{x(t),y(t)});
```

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -\frac{a \sin(\omega_c t)}{\omega_c} + a t \\ y(t) = -\frac{-a \cos(\omega_c t) + a}{\omega_c^2} \end{array} \right\}.$$

Побудуємо траєкторію руху (рис 10.2)

```
> plot([rhs(op(2,res)),rhs(op(1,res)),t=0..5e-10],thickness=3,
colour=black);
```

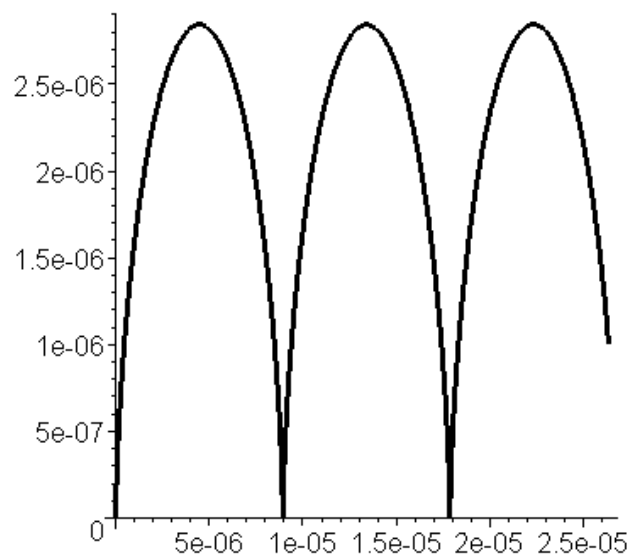


Рисунок 10.2 – Траєкторія руху електрона у плоскій системі

10.1.2 Рух заряджених частинок у циліндричних системах [31 – 34]

Більшість приладів зі схрещеними електричним та магнітним полями виконано у вигляді циліндричних конструкцій, тому розгляд кінематики цього

випадку має як теоретичний, так і практичний сенс. Математична складність розв'язання рівнянь у циліндричній системі координат пояснює складності, які мають місце під час спроб побудови теорії цих приладів.

Рівняння руху для цього випадку мають вигляд

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = s \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2} \frac{\partial V}{\partial s} - s \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{2}{s} \frac{ds}{dt} \frac{d\phi}{dt} - \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2 s} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}$$

Магнетронний діод. Для магнетронного діода, простір взаємодії якого наведено на рис. 10.3, рівняння руху матимуть вигляд

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = s \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2 s \ln s_a} - s \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right)$$

Відомо, що аналітичного розв'язку така система рівнянь не має, тому розв'язок шукають за допомогою чисельних методів.

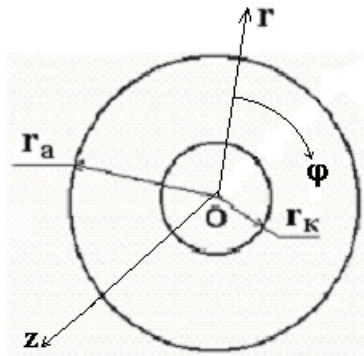


Рисунок 10.3 – Простір взаємодії магнетронного діода циліндричної конструкції

Розглянемо, яким чином подібні системи рівнянь розв'язуються за допомогою Maple.

Задаємо систему рівнянь руху

```
> sysmd := diff(s(t),t$2)=s(t)*(diff(phi(t),t))^2+z/s(t)/ln(sa)- s(t)*diff(phi(t),t),
      diff(phi(t),t)=0.5*(1-1/s(t)^2);
```

та початкові умови

```
> initmd := s(0)=1, D(s)(0)=0, phi(0)=0;
```

Визначаємо процедуру чисельного розв'язання цієї системи рівнянь

```
> solmd := dsolve({sysmd,initmd},{s(t),phi(t)},type=numeric,
output=listprocedure);
```

За результатами розв'язання будуємо траєкторію руху

```
> optmd:=0..50,numpoints=500,thickness=2;
```

```
> s1:=odeplot(solmd,[phi(t),s(t)],optmd,color=black):
```

```
> display(s1,title=`Магнетронний діод`);
```

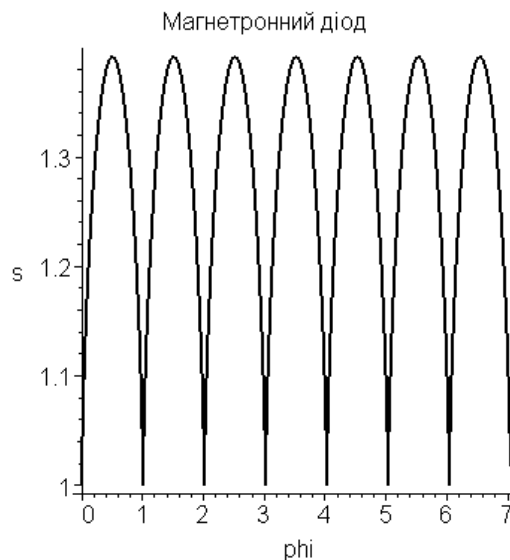


Рисунок 10.3 – Траєкторія руху електрона у магнетронному діоді циліндричної конструкції

Магнетрон. Реальний магнетрон має розрізну конструкцію одного з електродів (рис. 10.4).

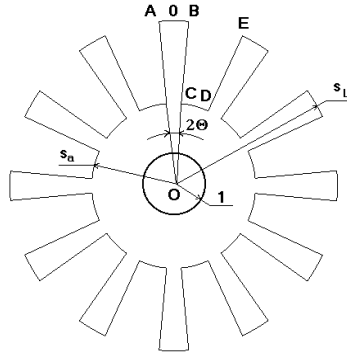


Рисунок 10.4 – Простір взаємодії магнетрона

У цьому випадку рівняння руху матимуть вигляд

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = s \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2 s \left(\frac{N\theta}{\pi} \ln \frac{s_l}{s_a} + \ln s_a \right)} * \left(1 - 2N \ln \frac{s_l}{s_a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin Nn\theta * \cos^{Nn} \cos Nn\varphi}{\pi s_a^{Nn} + (s_l^{Nn} - s_a^{Nn})(Nn\theta + \sin 2Nn\theta)} \right) - s \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{2}{s} \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{2N\eta \ln \frac{s_l}{s_a}}{r_k^2 \omega_H^2 s \left(\frac{N\theta}{\pi} \ln \frac{s_l}{s_a} + \ln s_a \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin Nn\theta * s_a^{Nn} \sin Nn\varphi}{\pi s_a^{Nn} + (s_l^{Nn} - s_a^{Nn})(Nn\theta + \sin 2Nn\theta)} + \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}$$

Отримаємо розв'язок цієї системи рівнянь за допомогою Maple.

Задаємо систему рівнянь руху

```
> sysm := diff(s(t),t$2)=s(t)*(diff(phi(t),t))^2+z*(1-
2*N*ln(sl/sa)*sum(i*sin(N*i*theta)*cor(s(t)^(N*i))*cos(N*i*phi(t))/
(Pi*sir(sa^(N*i)))+(sir(sl^(N*i))-
sir(sa^(N*i)))*(N*i*theta+sin(2*N*i*theta))),i=1..k))/s(t)/(N*theta*ln(sl/sa)/Pi+ln
n(sa))-s(t)*diff(phi(t),t),
diff(phi(t),t$2)=-2/s(t)*diff(s(t),t)*diff(phi(t),t)
- z*2*N*ln(sl/sa)*sum(i*sin(N*i*theta)*sir(s(t)^(N*i))*
```

```
sin(N*i*phi(t))/(Pi*sr(sa^(N*i)))+(sr(sl^(N*i))-  
sr(sa^(N*i)))*(N*i*theta+sin(2*N*i*theta))),i=1..k)/s(t)/(N*theta*ln(sl/sa)/Pi+ln  
(sa))+diff(s(t),t)/s(t);
```

та початкові умови

```
> initm := s(0)=1, D(s)(0)=0, phi(0)=0, D(phi)(0)=0;
```

Визначаємо процедуру чисельного розв'язання цієї системи рівнянь

```
> solm := dsolve({sysm,initm},{s(t),phi(t)},type=numeric,  
output=listprocedure);
```

За результатами розв'язання будуємо траєкторію руху (рис. 10.5)

```
> optm:=0..120,numpoints=500,thickness=2;  
> s2:=odeplot(solm,[phi(t),s(t)],optm,color=red):  
> display(s2,title=`Магнетрон`);
```

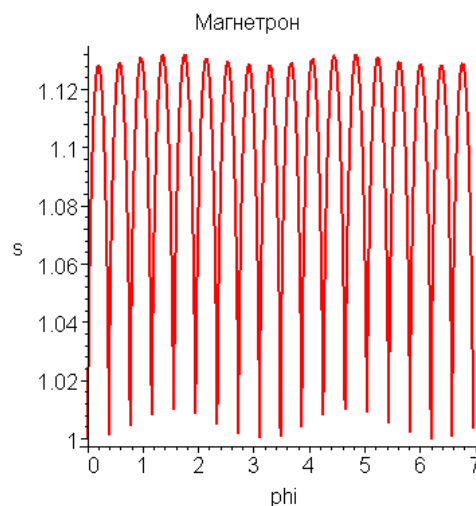


Рисунок 10.5 – Траєкторія руху електрона у магнетроні

Як бачимо розрізний електрод (анод) впливає на форму траєкторій електронів.

Здійснимо графічне порівняння траєкторій руху електронів у розглянутих системах (рис. 10.6)

```
> display(s1,s2,title=`Порівняння`);
```

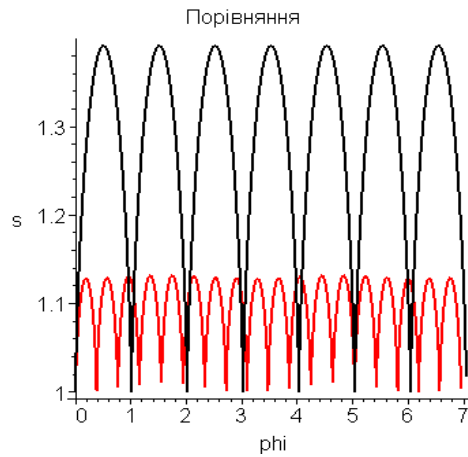


Рисунок 10.6 – Порівняння траєкторій руху електрона у магнетронному діоді та магнетроні

Отже, розрізний електрод (анод) впливає не тільки на форму траєкторій електронів, але й на відстань віддалення від катода та частоту їх повернення до катода.

10.2 Динамічні системи

10.2.1 Рівняння Ван дер Поля

Під час моделювання роботи генераторів електромагнітних коливань дуже широко використовується класична модель нелінійної системи, яка демонструє періодичні автоколивання і описується за допомогою рівняння Ван дер Поля [34 – 38].

За різних початкових умов фазова траєкторія прямує до атрактору – граничного циклу.

Усталені рухи є періодичними коливаннями, математичним зображенням яких у фазовому просторі є граничний цикл.

Розглянемо це, використовуючи математичний пакет Maple.

```
> restart;with(DEtools):with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> vdp:=diff(x(t),t,t)-2*delta*diff(x(t),t)*(1-alpha*x(t)^2)+omega^2*x(t)=0;
```

$$vdp := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 2 \delta \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) (1 - \alpha x(t)^2) + \omega^2 x(t) = 0$$

```
> alpha:=1;omega:=1;delta:=0.2;
```

$\alpha := 1$

$\omega := 1$

$\delta := 0.2$

```
> sys:=[diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)-2*delta*y(t)*(1-  
alpha*x(t)^2)+omega^2*x(t)=0];
```

$$sys := \left[\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - 0.4 y(t) (1 - x(t)^2) + x(t) = 0 \right]$$

```
> ff:=dsolve({sys[1],subs(delta=d,sys[2]),x(0)=1,y(0)=1},
```

```
{x(t),y(t)}, type=numeric, output=listprocedure);
```

```
> fp := subs(ff,x(t)): fw := subs(ff,y(t)):
```

```
ff:=[ t = (proc(t) ... end proc ), x(t) = (proc(t) ... end proc ),  
y(t) = (proc(t) ... end proc )]
```

```
> steps:=100; init_t:=0; fin_t:=15*Pi;
```

$steps := 100$

$init_t := 0$

$fin_t := 15 \pi$

```
> g:=seq([fp((fin_t-init_t)/steps*i),fw((fin_t-init_t)/steps*i)],i=0..steps):
```

```
> h:=seq([(fin_t-init_t)/steps*i,fp((fin_t-init_t)/steps*i)],i=0..steps):
```

Фазовий портрет (рис 10.7):

```
> pointplot([g],connect=true,color=red,title="phase  
portrait",labels=[coordinate,velocity]);
```

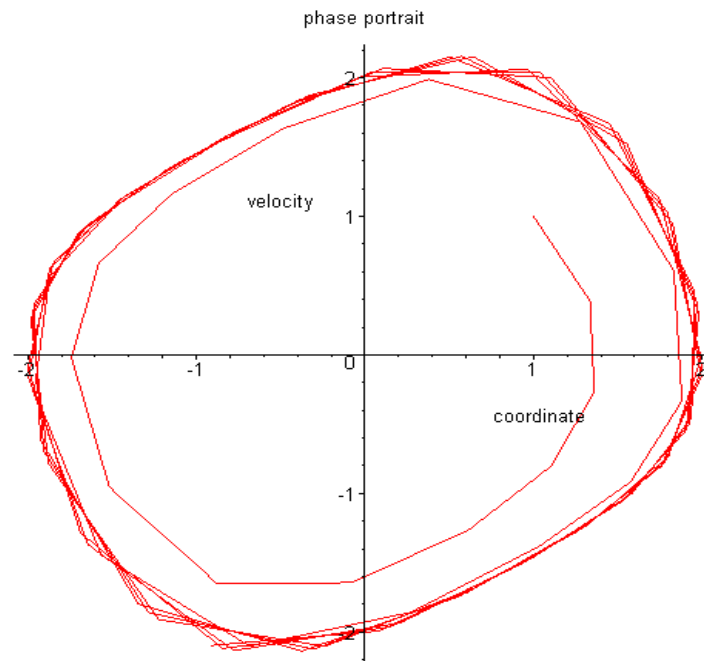


Рисунок 10.7 – Фазовий портрет рівняння Ван дер Поля

Розв'язок

>

```
pointplot([h],connect=true,color=red,title="oscillations",labels=[t,coordinate]);
```

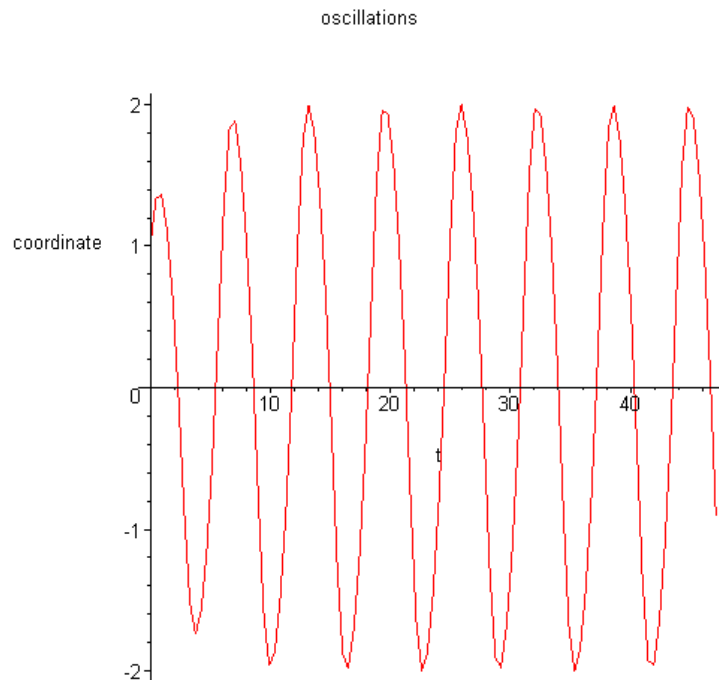


Рисунок 10.8 – Розв'язок рівняння Ван дер Поля


```
> ic:=[[x(0)=3,y(0)=2],[x(0)=2,y(0)=0],[x(0)=0.5,y(0)=0.5],[x(0)=0,y(0)=0]];
```

```
>
```

```
DEplot(subs(delta=d,sys),[x(t),y(t)],t=0..15*Pi,ic,method=rkf45,linewidth=black,
color=blue,stepsize=0.1,title="Van-der-Pole Oscillator");
```

```
ic := [[x(0) = 3, y(0) = 2], [x(0) = 2, y(0) = 0], [x(0) = 0.5, y(0) = 0.5],
[x(0) = 0, y(0) = 0]]
```

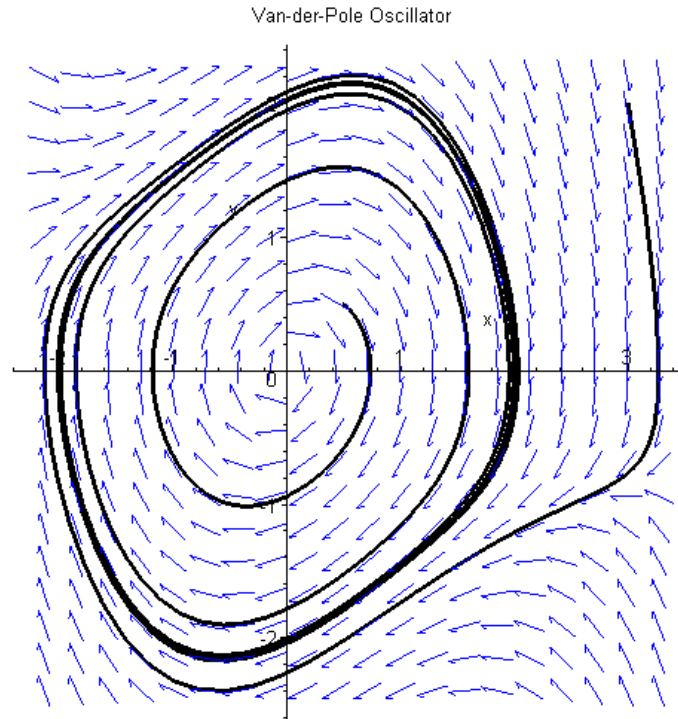


Рисунок 10.9 – Фазовий портрет рівняння Ван дер Поля

При зміні параметра δ відбувається зміна форми атрактора, при цьому його топологія не змінюється:

```
> for i from 1 by 1 to 15 do
```

```
>
```

```
fp[i]:=DEplot(subs(delta=i/20,sys),[x(t),y(t)],t=0..15*Pi,ic,method=rkf45,linewidth=black,color=blue,stepsize=0.1,title="Van-der-Pole Oscillator");
```

```
> end do;
```

```
> display(seq(fp[i],i=1..15),insequence=true);
```

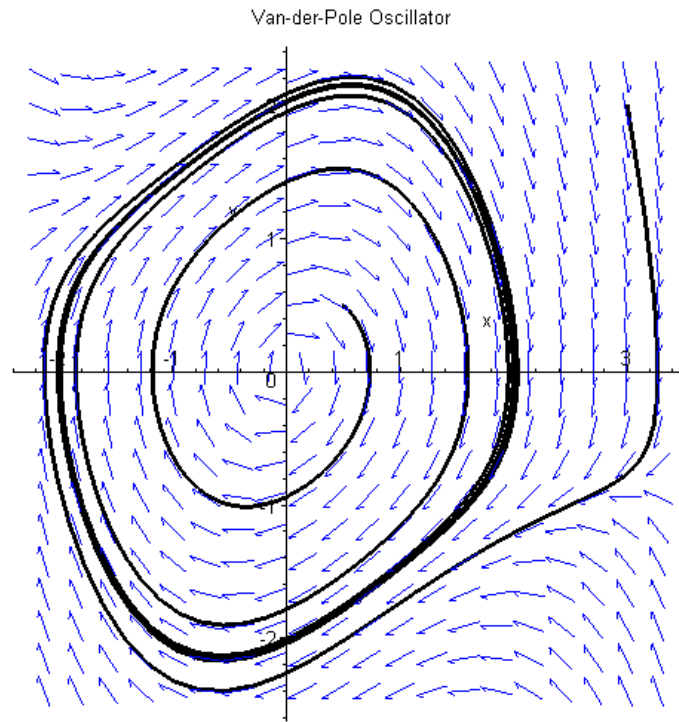


Рисунок 10.10 – Фазовий портрет рівняння Ван дер Поля

10.2.2 Рівняння Дюффінга

Розглянемо найпростіше нелінійне рівняння – так зване рівняння Дюффінга. Деякі електронні кола описуються за допомогою цього рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) + \beta \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) + \gamma q(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \sin(\omega_0 t)$$

яке відповідає відгуку нелінійного осцилятора на періодичну збудовуючу силу. Навіть це просте рівняння описує багато явищ, що пов'язані з подвоєнням та потроєнням періоду. Інші субгармоніки також можуть бути присутніми. Може спостерігатися ряд подвоєнь або потроєнь періоду [38 – 40].

Розглянемо дослідження цього рівняння за допомогою Maple.

```
> restart; with(plots): with(DEtools):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Рівняння Дюффінга:

```
> eq:=diff(x(t),t,t)+2*delta*diff(x(t),t)+a*x(t)+b*x(t)^3=F*cos(nu*t);
```

Система рівнянь:

```
> sys:=[diff(x(t),t)=y(t), diff(y(t),t)+2*delta*y(t)+a*x(t)+b*x(t)^3=F*cos(nu*t)];
```

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2 \delta \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + a x(t) + b x(t)^3 = F \cos(\nu t)$$

$$sys := \left[\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 2 \delta y(t) + a x(t) + b x(t)^3 = F \cos(\nu t) \right]$$

Задаємо параметри системи:

```
> delta:=0.35/2:
```

```
a:=0:
```

```
b:=1:
```

```
F:=8.5:
```

```
nu:=1.2:
```

```
sys;
```

```
eq;
```

$$\left[\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 0.3500000000 y(t) + x(t)^3 = 8.5 \cos(1.2 t) \right]$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 0.3500000000 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t)^3 = 8.5 \cos(1.2 t)$$

Початкові умови

```
> ic:=[[x(0)=1,y(0)=0]];
```

```
ic := [[x(0) = 1, y(0) = 0]]
```

Створення масиву

```
> i1:=1:i2:=40:
```

```
> t1:=100*Pi: t2:=138*Pi:
```

```
> ss:=0.08:
```

```
> step:=1:
```

```
> for i from i1 to i2 by step do
```

```
> nu:=i/100;
```

```

>p[i]:=DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=t1..t2,ic,method=dverk78,linecolor=black,color=blue,stepsize=ss,axes=NONE):
> end do:
> save p,"temp.m":
> read "temp.m";
> Digits:=4;

```

Еволюція фазового портрету під час зміни параметра ν від 0.01 до 1.8 з кроком 0.01

```

> pp:=display(seq({p[i]},i=i1..i2),insequence = true):
> ppc:=plot(x*1.5,x=-4..4,color=blue):nup:=textplot([1,6,"nu="]):
Digits := 4
> display(pp,ppc,nup);
f:=dsolve({eq,x(0)=1,D(x)(0)=0},x(t),type=numeric,method=dverk78,output=listprocedure):
> fp := subs(f,x(t)):
Усталені коливання (рис. 10.11):
> ti:=99*Pi; tf:=(112+50)*Pi; steps:=100000;nu:=0.02;
ti := 99  $\pi$ 
tf := 162  $\pi$ 
steps := 100000
 $\nu := 0.02$ 
> vals:=seq([ti+(tf-ti)*i/steps,fp(ti+(tf-ti)/steps*i)],i=0..steps):
> pointplot([vals],connect=true,color=red,title="oscillations",labels=[time,x],
numpoints=200);

```

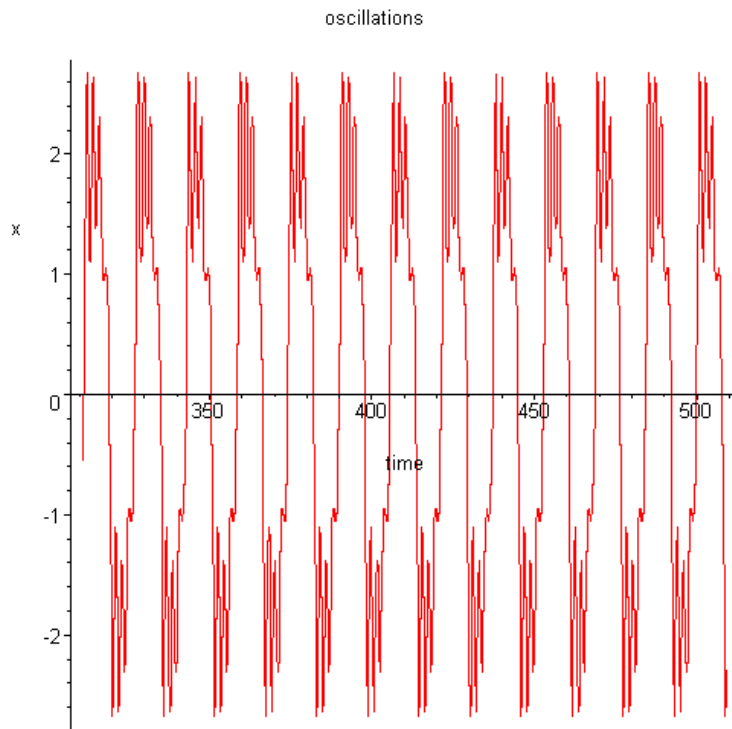


Рисунок 10.11 – Коливальний рух у системі Дюфінга

Фазовий портрет (рис. 10.12):

```
> sol:=dsolve({sys[1],sys[2], op(ic[1])},
  {x(t),y(t)}, type=numeric,method=dverk78, output=listprocedure);

sol := [t = (proc(t) ... end proc ), x(t) = (proc(t) ... end proc ),
  y(t) = (proc(t) ... end proc )]

> px := subs(sol,x(t)); py := subs(sol,y(t));
> pvals:=seq([px(ti+(tf-ti)*i/steps),py(ti+(tf-ti)/steps*i)],i=0..steps):
> pointplot([pvals],connect=true,color=red,title="oscillations",labels=[x,y],
numpoints=500);
```

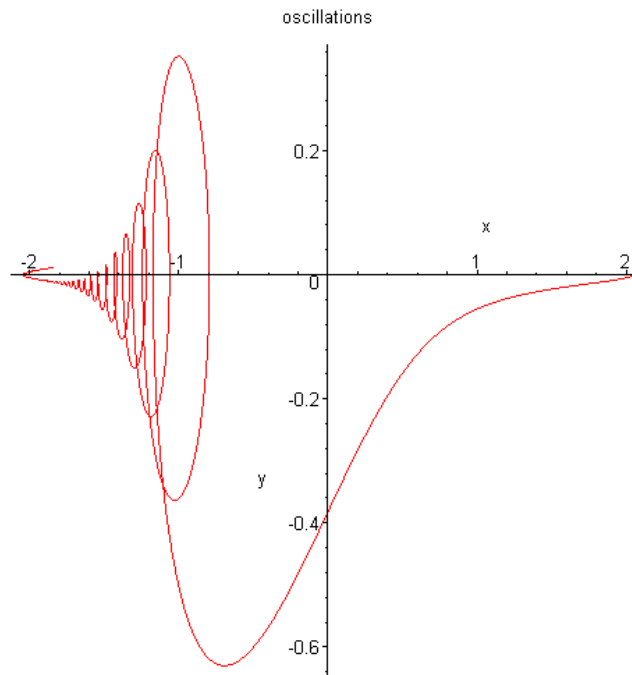


Рисунок 10.12 – Фазовий портрет рівняння Дюфінга

10.2.3 Рівняння Лоренця

Система Лоренця описує всі процеси, які відбуваються у шарі рідини, що підігрівається знизу.

Оскільки рідина підігрівається знизу, а зверху при цьому знаходиться холодний шар, то з плином часу, рідина яка підігрівається, піднімається вгору, де охолоджується й знову опускається вниз. У результаті такого нескінченного руху всередині утворюються так звані вали.

Отже, система трьох нелінійних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -bx + xy\end{aligned}$$

окрім процесів у шарі рідини описує динаміку кількох фізичних систем – конвекцію у кільцевій трубці, одновимірний лазер. Таку модель називають моделлю Лоренця за ім'ям дослідника, котрий у 1963 р. виявив у чисельних

розрахунках можливість хаотичної поведінки й інтерпретував режим неперіодичних коливань, що спостерігався [8, 40, 41].

Розглянемо дослідження системи Лоренця за допомогою пакета Maple.

> **restart:**

> **with(plots):**

Warning, the name changecoords has been redefined

> **with(stats):**

> **with(linalg):**

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> **with(DEtools):**

Warning, the previous binding of the name adjoint has been removed and it now has an assigned value

> **sigma:=10.0:**

> **b:=8/3:**

> **r:=27.0:**

> **epsilon:=1.0/sqrt(r-1):**

> **h:=(sigma+1)/sqrt(sigma):**

> **a:=b/sqrt(sigma):**

> **beta:=(2*sigma-b)/sqrt(sigma):**

> **eq1_0:=diff(x(t),t\$2)=-epsilon*h*diff(x(t),t)-x(t)^3-(q(t)-1)*x(t);**

$$eq1_0 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -0.6821910401 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - x(t)^3 - (q(t) - 1) x(t)$$

> **eq2_0:=diff(q(t),t)=-epsilon*a*q(t)+epsilon*beta*x(t)^2;**

$$eq2_0 := \frac{d}{dt} q(t) = -0.1653796461 q(t) + 1.074967699 x(t)^2$$

Здійснюємо заміну $\dot{x}(t) = y(t)$, отримаємо систему трьох рівнянь:

> **eq3:=diff(x(t),t)=y(t);**

$$eq3 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t)$$

```
> eq1:=subs(eq3,eq1_0);
```

$$eq1 := \frac{d}{dt} y(t) = -0.6821910401y(t) - x(t)^3 - (q(t) - 1) x(t)$$

```
> eq2:=subs(eq3,eq2_0);
```

$$eq2 := \frac{d}{dt} q(t) = -0.1653796461q(t) + 1.074967699x(t)^2$$

Рисуємо перетин Пуанкаре площиною $z = 0.6$ (рис. 10.13)

```
> DEplot3d({eq1,eq2,eq3},[x(t),y(t),q(t)],t=0..250,[[x(0)=-3.0/10.0,y(0)=-1.0/10.0,q(0)=1.0/2.0]],q(t)=0.6..0.61,linicolor=black,stepsize=0.2,obsrange=FALSE,orientation=[-90,0],axes=NORMAL, font=[TIMES,BOLD,14], thickness=3);
```

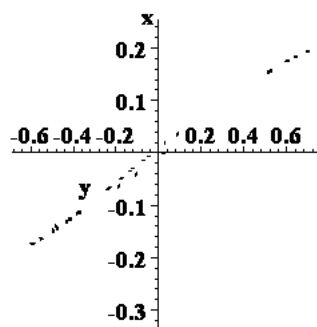


Рисунок 10.13 – Перетин Пуанкаре

Розв'язання системи:

```
> nsol:=dsolve({eq1,eq2,eq3,x(0)=-3.0/10.0,y(0)=-1.0/10.0,q(0)=1.0/2.0},{x(t),y(t),q(t)},type=numeric,method=rkf45,output=listprocedure);
```

Побудова химерного атрактора в координатах (x, y, z) (рис. 10.14):

```
> G:=odeplot(nsol,[x(t),y(t),q(t)],0..250,numpoints=800,labels=[x,y,z],color=black,orientation=[100,60],axes=FRAME);
> display(G);
```

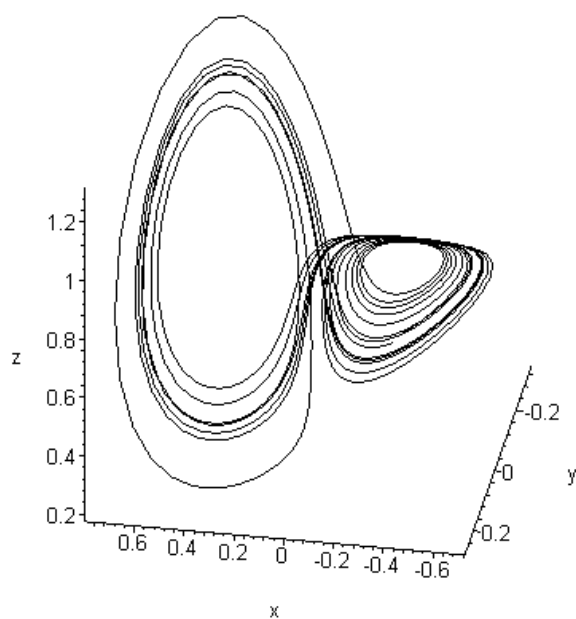



Рисунок 10.14 – Химерний аттрактор

Проекція аттрактора на площину (x, y) (рис. 10.15)

```
G1:=odeplot(nsol,[x(t),y(t),q(t)],0..250,numpoints=800,labels=[x,y,z],color=black  
,orientation=[-90,0],axes=NORMAL):  
> display(G1);
```

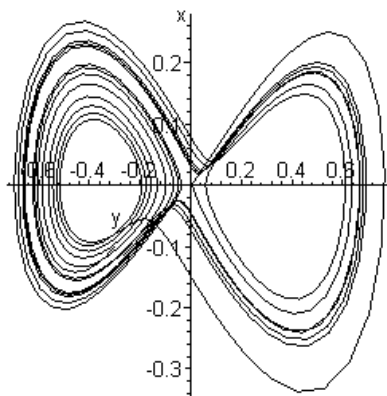


Рисунок 10.15 – Химерний аттрактор (проекція (x, y))

Проекція аттрактора на площину (y, z) (рис.. 10.16)

```
> G2:=odeplot(nsol,[x(t),y(t),q(t)],0..250,numpoints=800,labels=[x,y,z],
color=black,orientation=[0,90],axes=NORMAL):
> display(G2);
```

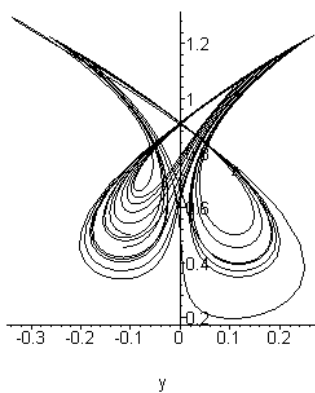


Рисунок 10.16 – Химерний аттрактор (проекція (y, z))

Проекція атрактора на площину (x, z) (рис. 10.17)

```
> G3:=odeplot(nsol,[x(t),y(t),q(t)],0..250,numpoints=800,labels=[x,y,z],
color=black,orientation=[-90,90],axes=NORMAL):
> display(G3);
```

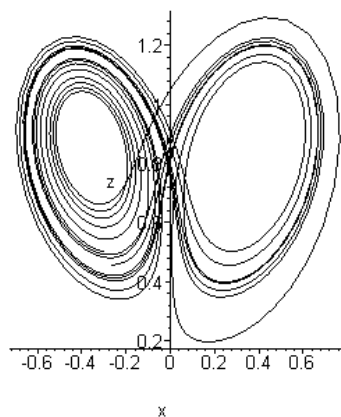


Рисунок 10.17 – Химерний атрактор (проекція (x, z))

Розташовуємо координати точок x, y, z у відповідних масивах xm, ym, zm

```
> T0:=1:DT:=0.05:TN:=250:
> tm:=[]:
> for i from T0 by DT to TN
do
  tm:=[op(tm),i]:
end do:
> UZL:=nops(tm):
> tm:=array(tm):
> nsol1:=dsolve({eq1,eq2,eq3,x(0)=-3.0/10.0,y(0)=-
1.0/10.0,q(0)=1.0/2.0},{x(t),y(t),q(t)},type=numeric,method=rkf45,output=tm):
> xm:=array(1..UZL):
```

```

> ym:=array(1..UZL):
> qm:=array(1..UZL):
> pem:=array(1..UZL):
> PEnerg:=x^4/4.0+(qq-1.0)*x^2/2.0:
> for i from 1 to UZL
do
  xm[i]:=nsol1[2,1][i,3]:
  ym[i]:=nsol1[2,1][i,4]:
  qm[i]:=nsol1[2,1][i,2]:
  pem[i]:=evalf(subs(qq=qm[i],x=xm[i],PEnerg)):
end do:

```

Побудова автокореляційної функції для всіх дев'яти компонент:

```

>
CT:=[]:CT1:=[]:CT2:=[]:CT3:=[]:CT4:=[]:CT5:=[]:CT6:=[]:CT7:=[]:CT8:=[]:
> for j from 1 to 250
do
  CT:=[op(CT),[DT*j,sum(xm['i']*xm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT1:=[op(CT1),[DT*j,sum(xm['i']*ym['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT2:=[op(CT2),[DT*j,sum(xm['i']*qm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT3:=[op(CT3),[DT*j,sum(ym['i']*xm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT4:=[op(CT4),[DT*j,sum(ym['i']*ym['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT5:=[op(CT5),[DT*j,sum(ym['i']*qm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT6:=[op(CT6),[DT*j,sum(qm['i']*xm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT7:=[op(CT7),[DT*j,sum(qm['i']*ym['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
  CT8:=[op(CT8),[DT*j,sum(qm['i']*qm['i'+j],'i'=1..UZL-j)/(UZL-j-1)]]:
end do:
>
plot(CT,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,labels=[TAU,XX]);

```

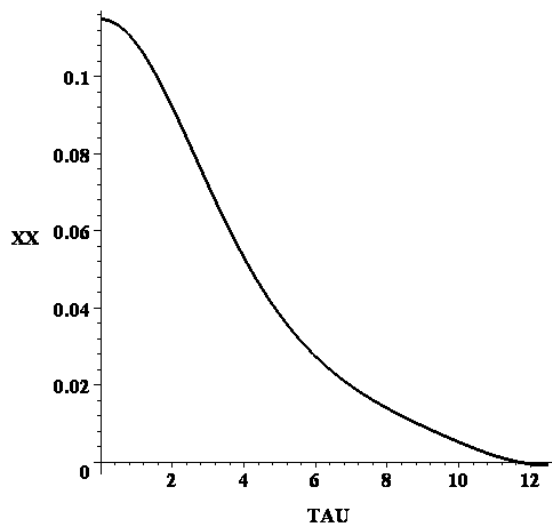


Рисунок 10.18 – Автокореляційна функція $XX-\tau$

```
> plot(CT1,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,XY]);
```

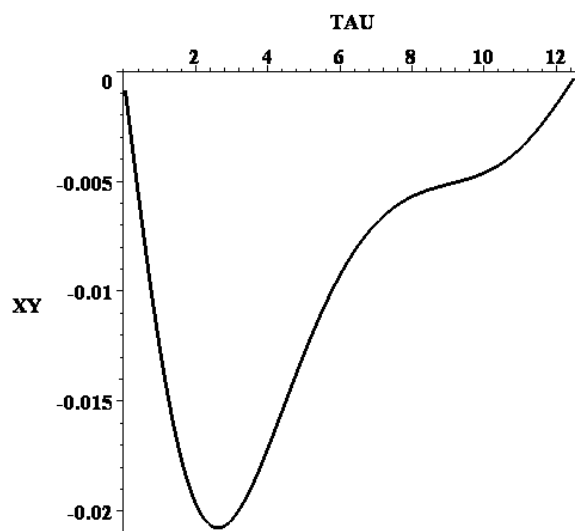


Рисунок 10.19 – Автокореляційна функція $XY-\tau$

```
> plot(CT2,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,XZ]);
```

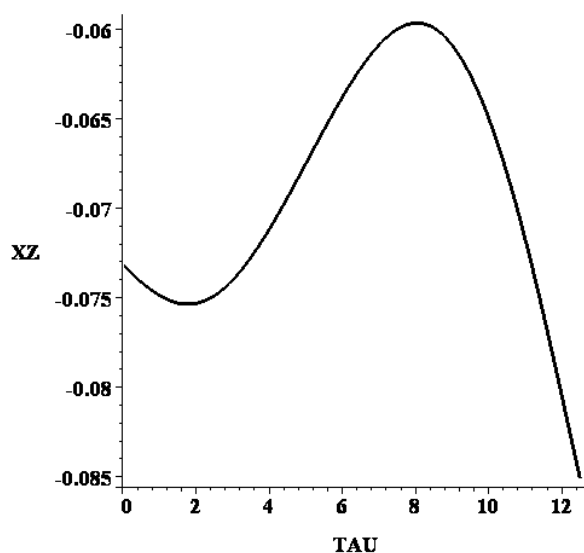


Рисунок 10.20 – Автокореляційна функція XZ– τ

```
> plot(CT3,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,YX]);
```

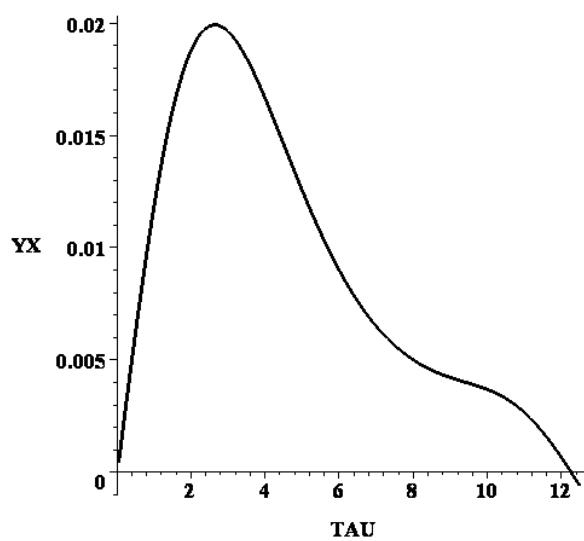


Рисунок 10.21 – Автокореляційна функція YX– τ

```
> plot(CT4,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,YY]);
```

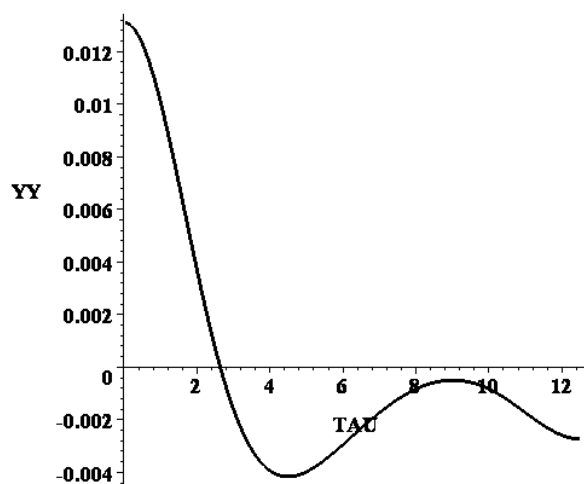


Рисунок 10.22 – Автокореляційна функція YY– τ

```
> plot(CT5,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,YZ]);
```

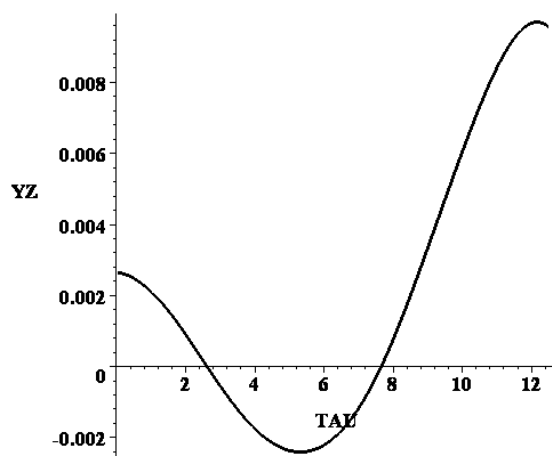


Рисунок 10.23 – Автокореляційна функція YZ– τ

```
> plot(CT6,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,ZX]);
```

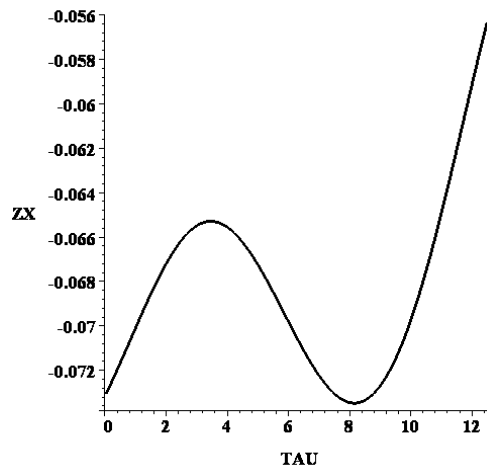


Рисунок 10.24 – Автокореляційна функція ZX– τ

```
> plot(CT7,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,ZY]);
```

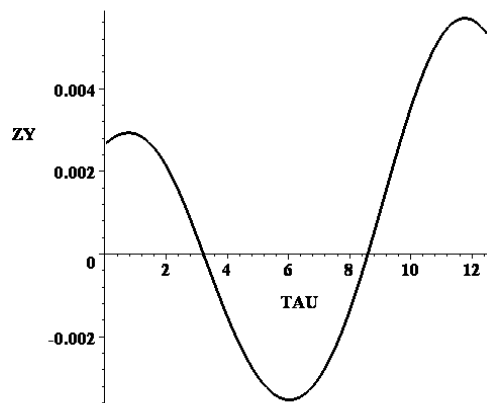


Рисунок 10.25 – Автокореляційна функція ZY– τ

```
> plot(CT8,color=black,axes=NORMAL,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3,
labels=[TAU,ZZ]);
```

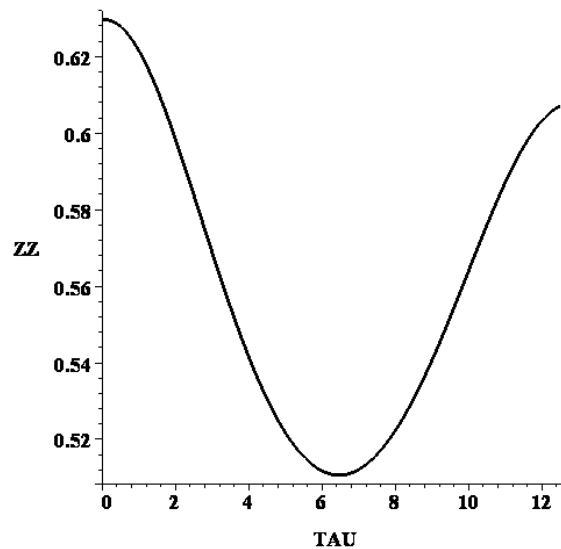



Рисунок 10.26 – Автокореляційна функція $ZZ-\tau$

Визначення дробної розмірності:

```
> K:=[]:K1:=[]:t1:=0.0:t2:=0.0:t3:=0.6:
```

```
> for R from 0.05 by 0.05 to 1.0
```

```
do
```

```
    count:=0:
```

```
    for i from 1 to UZL
```

```
    do
```

```
        if (sqrt((xm[i]-t1)^2+(ym[i]-t2)^2+(qm[i]-t3)^2)<=R) then
```

```
count:=count+1:end if:
```

```
    end do:
```

```
    K:=[op(K),count]:
```

```
    K1:=[op(K1),evalf(ln(count))]:
```

```
end do:
```

```
> K;K1;
```

```
[58, 362, 733, 1107, 1527, 1937, 2287, 2601, 2892, 3171, 3438, 3714, 4026, 4303, 4571,
  4775, 4942, 4961, 4981, 4981]
```

```
[4.060443011, 5.891644212, 6.597145702, 7.009408933, 7.331060305, 7.568895663,
  7.734996194, 7.863651266, 7.969703583, 8.061802275, 8.142645186, 8.219864742,
  8.300528606, 8.367067733, 8.427487278, 8.471149253, 8.505525387, 8.509362612,
  8.513385953, 8.513385953]
```

```

> RR:=[]:
> for i from 0.05 by 0.05 to 1.0
do
  RR:=[op(RR),evalf(ln(i))]:
end do:
> fit[leastsquare[[NR,rr],NR=C+u*rr]]([K1,RR]);
       $NR = 8.870718901 + 1.328584421rr$ 

```

Визначення показника Ляпунова:

```

> J:=matrix([[-sigma,sigma,0],[r-qm[1],-1,-xm[1]],[ym[1],xm[1],-b]]):
> for i from 2 to UZL
do
  J1:=matrix([[-sigma,sigma,0],[r-qm[i],-1,-xm[i]],[ym[i],xm[i],-b]]):
  J:=multiply(J,J1):
end do:
> evalm(J);

$$\begin{bmatrix} -0.924983450510^{6717} & 0.432131172310^{6717} & -0.588954162910^{6715} \\ 0.114435140910^{6718} & -0.534614879410^{6717} & 0.728629821210^{6715} \\ 0.180378636610^{6716} & -0.842687851610^{6715} & 0.114850432010^{6714} \end{bmatrix}$$

> for i from 1 to 3
do
  J[i,i]:=evalm(J)[i,i]-lambda:
end do:
> evalm(J);

$$\begin{bmatrix} -0.924983450510^{6717} - \lambda & 0.432131172310^{6717} & -0.588954162910^{6715} \\ 0.114435140910^{6718} & -0.534614879410^{6717} - \lambda & 0.728629821210^{6715} \\ 0.180378636610^{6716} & -0.842687851610^{6715} & 0.114850432010^{6714} - \lambda \end{bmatrix}$$

> l:=[solve(det(J),lambda)];

$$l := [0.342608666410^{6707} + 0.796099496610^{6710} I, -0.145948348010^{6718}, \\ 0.342608666410^{6707} - 0.796099496610^{6710} I]$$

> for i from 1 to 3

```

do

l[i]:=l[i]^(1/UZL):

end do:

> l;

**[22.23817526+ 0.007011056970I, 22.31296434+ 0.01407312872I,
22.23817526– 0.007011056970I]**

Розташовуємо значення x', y', z' у відповідних масивах xmp, ymp, qmp

> xmp:=[]:

> ymp:=[]:

> qmp:=[]:

> eq11:=op(2,eq1):

> eq22:=op(2,eq2):

> eq33:=op(2,eq3):

> for i from 1 to UZL

do

ymp:=[op(ymp),[ym[i],subs([x(t)=xm[i],y(t)=ym[i],q(t)=qm[i]],eq11)]]:

qmp:=[op(qmp),[qm[i],subs([x(t)=xm[i],q(t)=qm[i]],eq22)]]:

xmp:=[op(xmp),[xm[i],subs(y(t)=ym[i],eq33)]]:

end do:

Графіки проєкцій фазової площини в координатах (x, x') , (y, y') , (z, z') :

> plot(xmp,labels=[x,"x'"],color=black,axes=NORMAL,

font=[TIMES,BOLD,14]);

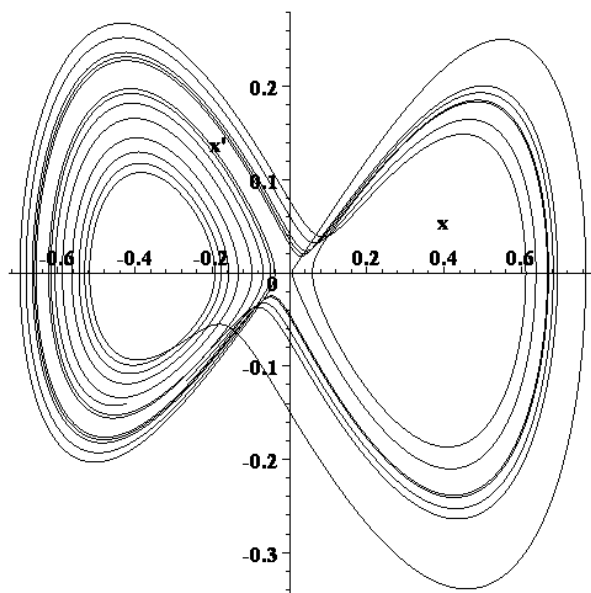


Рисунок 10.27 – Проекція на площину XX'

```
> plot(ymp,labels=[y,"y'"],color=black,axes=NORMAL,
font=[TIMES,BOLD,14]);
```

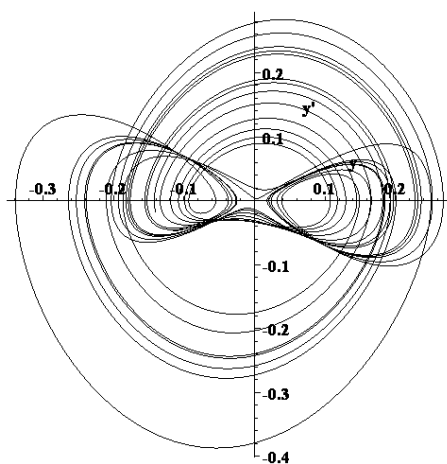


Рисунок 10.28 – Проекція на площину YY'

```
> plot(qmp,labels=[z,"z'"],color=black,axes=NORMAL,
font=[TIMES,BOLD,14]);
```

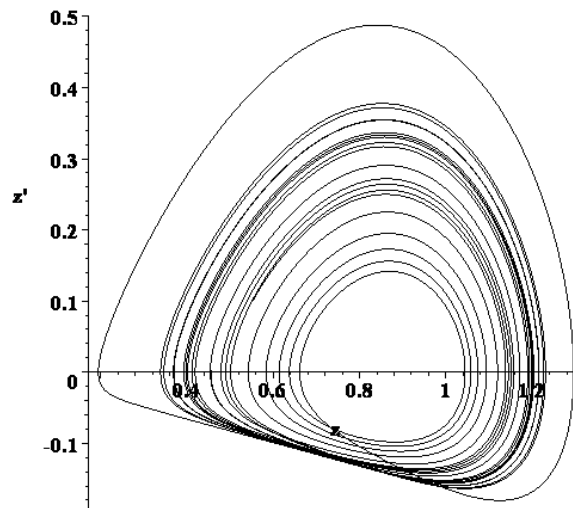


Рисунок 10.29 – Проекція на площину ZZ'

```

> per:=256:
> xvar:=array(1..per):
> yvar:=array(1..per):
> mvar:=array(1..per):
> for i from 1 to per
do
  xvar[i]:=pem[i];
  yvar[i]:=0:
end do:
> readlib(FFT):
> FFT(8,xvar,yvar);

256

> for i from 1 to per
do
  mvar[i]:=sqrt(xvar[i]^2+yvar[i]^2):
end do:
Спектр Фур'є (рис. 10.30):

```

```
> plot( { [ [k,xvar[k]] $k=1..per],[ [k1,yvar[k1]] $k1=1..per], [ [k2,mvar[k2]]  
$k2=1..per] } ,x=0..per,axes=FRAME,font=[TIMES,BOLD,14],thickness=3);
```

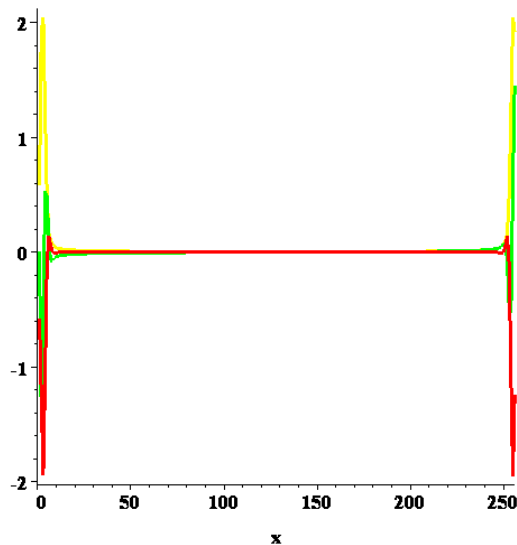


Рисунок 10.30 – Спектр Фур'є

10.3 Моделювання та розрахунки електронних схем

Цей підрозділ написано, базуючись на прикладах, що наведено у [5].

Чи потрібно застосовувати математичні пакети для аналізу, розрахунків і моделювання електронних схем? З одного боку, до послуг користувача комп'ютера існує ряд програм схемотехнічного моделювання, таких як Micro-CAP, Electronics Workbench, PSpice, Design Labs тощо, які автоматично складають та розв'язують великі системи рівнянь стану електронних схем і моделюють роботу великої кількості електронних схем без «ручного» складання рівнянь.

З іншого боку, аналіз схем у таких програмах так автоматизовано, що геть губиться його фізична і математична суть. Це не так вже й погано, коли моделюються типові схеми на добре знайомих електронних приладах. Але це геть погано, коли об'єктом дослідження та моделювання є нові нетрадиційні схеми на нових або маловідомих приладах чи коли знання фізичних і математичних основ роботи таких схем є принципово необхідним. Наприклад, під час вивчення їх у ВНЗ та університетах. У цьому випадку застосування

пакетів комп'ютерної математики не тільки можливе, але й принципово необхідне.

10.3.1 Аналоговий фільтр

Розглянемо проектування аналогового смугового фільтра на операційному підсилювачі, схему якого наведено на рис. 10.31.

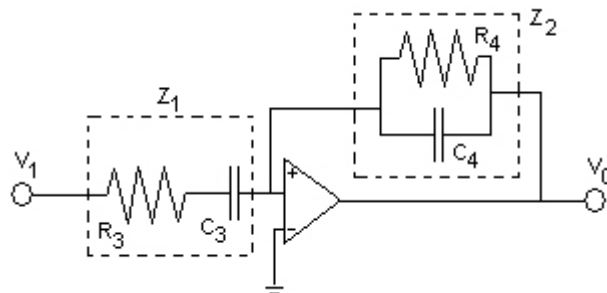


Рисунок 10.31 – Аналоговий фільтр

Обрахуємо цей фільтр за допомогою пакета Maple.

Задамо конкретні початкові дані для обчислень:

```
> R3 := 1000;  
> R4 := 3000;  
> C3 := 0.08e-6;  
> C4 := 0.01e-6;
```

Запишемо базові рівняння, які описують роботу фільтра за малого сигналу.

```
> omega := 2*Pi*f;  
> V0 := -Z2/Z1*Vi;  
> Z1 := R3 + 1/(I*omega*C3);  
> Z2 := R4/(I*omega*C4)/(R4+1/(I*omega*C4));
```

Знайдемо коефіцієнт передачі фільтра та його фазо-частотну характеристику як функції від частоти

```
> gain := abs(evalc(V0/Vi));
```

```
> phase := evalc(op(2,convert(V0/Vi,polar)));
```

Побудуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) фільтра як залежність коефіцієнта передачі в децибелах (dB) від частоти f в Гц (рис. 10.32)

```
> plot([log10(f),20*log10(gain), f=10..50000], color=black, thickness=3,  
title=`Коефіцієнт передачі dB як функція  
від частоти f у Гц`);
```

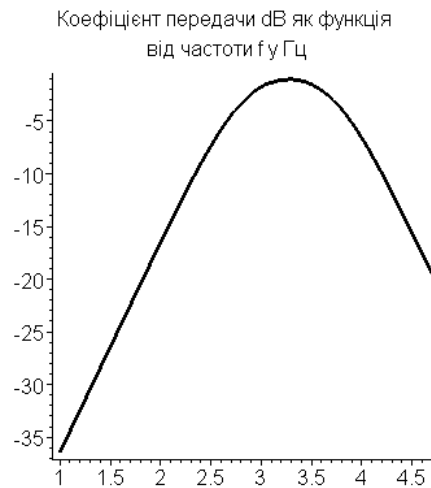


Рисунок 10.32 – Коефіцієнт передачі фільтра

та фазо-частотну характеристику (рис. 10.33)

```
> plot([log10(f),phase, f=10..50000], color=black, thickness=3,title=`Фазо-  
частотна характеристика фільтра`);
```

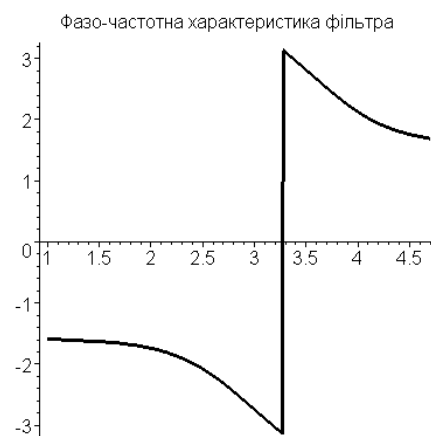


Рисунок 10.33 – Фазо-частотна характеристика фільтра

10.3.2 Цифровий фільтр

Основний недолік аналогових активних фільтрів, які є подібними до описаного у 10.3.1, полягає у їх малому порядку. Підвищення порядку через застосування багатьох ланок низького порядку призводить до значного збільшення габаритів фільтрів та їх вартості. Цього недоліку не мають сучасні цифрові фільтри, кількість чарунок яких N навіть за однокристального виконання може досягнути десятків і сотень. Це забезпечує підвищену частотну селекцію.

Спроекуємо фільтр $N+1$ -го порядку класу FIR (Finite Impulse Response або з кінцевою імпульсною характеристикою). Кожна з N чарунок часової затримки фільтра відповідає такій залежності вихідного сигналу y від вхідного x вигляду

$$y_n = \sum_{k=0}^N h_k x_{n-k}.$$

Задамо початкові дані для проектування смугового цифрового фільтра, який виділяє п'яту гармоніку з вхідного сигналу у вигляді зашумленого меандру з частотою 500 Гц.

```
> N := 64: # Кількість секцій фільтра (на 1 менше порядку фільтра)
fs := 10000: # Частота квантування
fl := 2300: # Нижня гранична частота
fh := 2700: # Верхня гранична частота
m := 10: # 2^m > N - кількість точок для аналізу
```

Обчислимо необхідні параметри

```
> T := 2^m-1;
> F1 := evalf(fl/fs);
> F2 := evalf(fh/fs);
> Dirac(0):=1;
> fp1:=2*Pi*F1;
> fp2:=2*Pi*F2;
```

та задамо характеристику смугового фільтра

```
> g := (sin(t*fp2)-sin(t*fp1))/t/Pi;
```

Обчислимо FIR-коефіцієнти для прямокутного вікна фільтра:

```
> C :=(n) -> limit(g,t=n); h := array(0..N); N2:=N/2;
```

```
> for n from 0 to N2 do h[N2-n]:= evalf(C(n)); h[N2+n] := h[N2-n]; od:
```

Обчислимо часову залежність для вихідного сигналу

```
> x := array(-N..T): y := array(0..T):
> for n from -N to -1 do x[n] := 0; od:
> for n from 0 to T do x[n] := Dirac(n); od:
> for n from 0 to T do y[n] := sum(h[k]*x[n-k],k=0..N): od:
```

та побудуємо графік імпульсної характеристики фільтра (рис. 10.34), який відображує його реакцію на сигнал одиничної площі з нескінченно малим часом дії

```
> p := [seq([j/fs,y[j]],j=0..T)]:
> plot(p, time=0..3*N/fs, labels=[time,output], axes=boxed, xtickmarks=4,
title=`Імпульсна характеристика фільтра`,color=black);
```

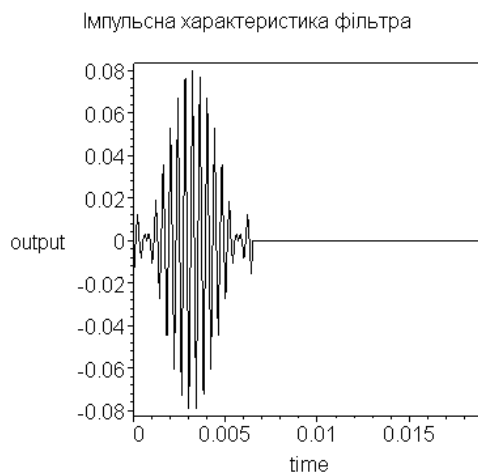


Рисунок 10.34 – Імпульсна характеристика фільтра

Обчислимо АЧХ фільтра (рис. 10.35), використовуючи пряме перетворення Фур'є.

```
> ro := array(1..T+1): io := array(1..T+1):
> for n from 0 to T do ro[n+1] := y[n]; io[n+1] := 0; od:
> FFT(m,ro,io):
```

Побудуємо графік АЧХ фільтра

```
> p :=[seq([j*fs/(T+1),abs(ro[j+1]+io[j+1]*I)],j=0..T/2)]:
> plot(p, frequency=0..fs/2, labels=[frequency,gain], title=`АЧХ фільтра`,
color=black);
```

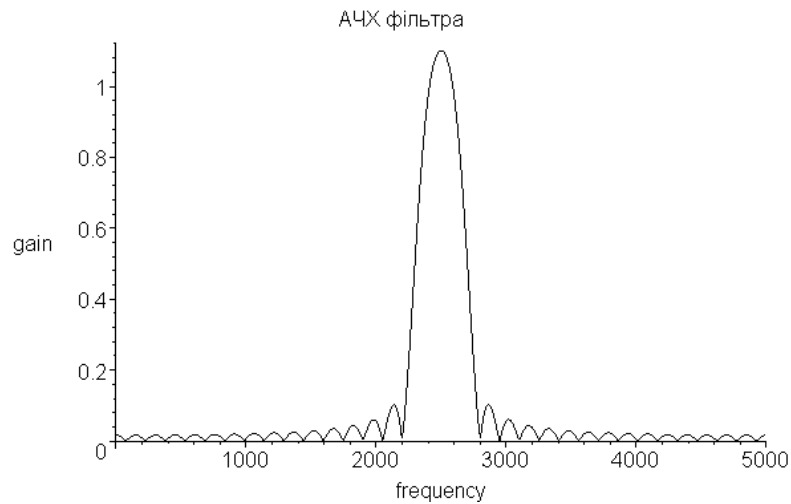


Рисунок 10.35 – АЧХ фільтра

Тепер розпочнемо тестування фільтра. Задамо вхідний сигнал у вигляді зашумленого меандру з частотою 500 Гц й розмахом напруги 2 В (рис. 10.36).

```

> l:=round(fs/2/500);
> for n from 0 by 2*l to T do
  for n2 from 0 to l-1 do
    if n+n2 <= T then
      x[n+n2] := evalf(-1+rand()/10^12-0.5):
    fi;
    if n+n2+l <= T then
      x[n+n2+l] :=evalf(1+rand()/10^12-0.5):
    fi;
  od;
od;
> p :=[seq([j/fs,x[j]],j=0..T)]:
> plot(p,time=0..T/fs/4, labels=[time,volts], title=`Вхідний
сигнал`,color=black);

```

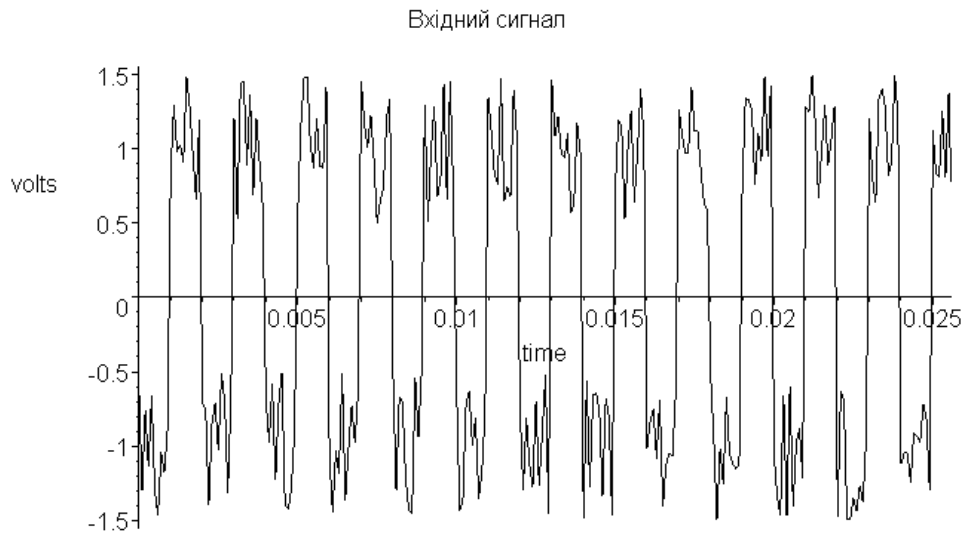


Рисунок 10.36 – Вхідний сигнал

Обчислимо реакцію фільтра на вхідний сигнал

```
> for n from 0 to T do
y[n] := sum(h[k]*x[n-k],k=0..N);
od;
```

Побудуємо графік вихідного сигналу (рис. 10.37)

```
> q :=[seq([j/fs,y[j]],j=0..T)]:
> plot(q,time=0..T/fs/4, labels=[time,volts], title=`Вихідний
сигнал`,color=black);
```

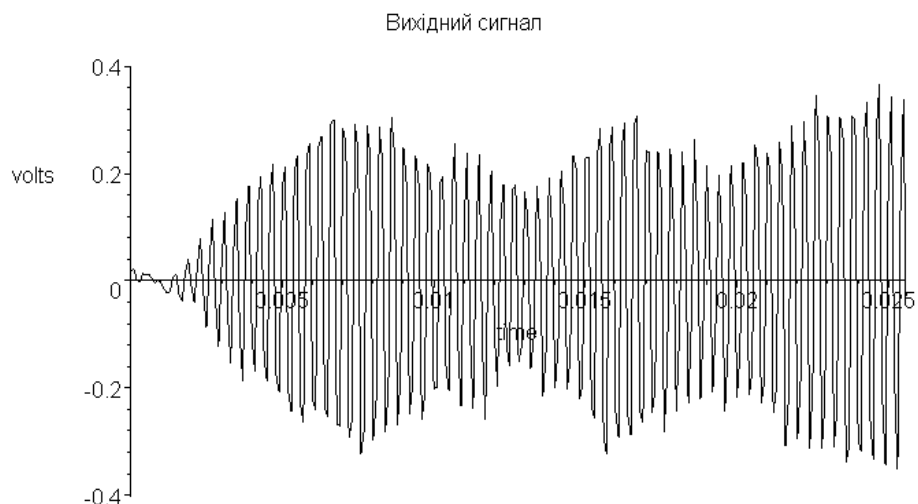


Рисунок 10.37 – Вихідний сигнал

Обчислимо спектри вхідного й вихідного сигналів

```
> ri := array(1..T+1); ii := array(1..T+1):  
> for n from 0 to T do  
  ri[n+1] := x[n]*2/T; ii[n+1] := 0;  
  ro[n+1] := y[n]*2/T; io[n+1] := 0;  
od:  
> FFT(m,ri,ii):  
> FFT(m,ro,io):
```

Побудуємо графік спектра вхідного сигналу (рис. 10.38)

```
> p := [seq([j*fs/(T+1),abs(ri[j+1]+ii[j+1]*I)],j=0..T/2)]:  
> plot(p, frequency=0..fs/2,labels=[Частота,V],  
title=`Частотний спектр вхідного сигналу`,color=black);
```

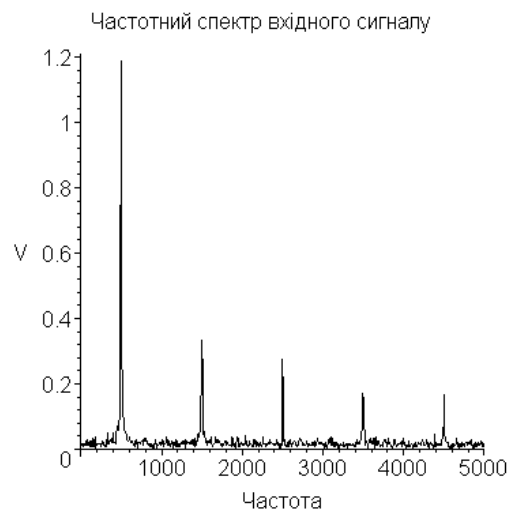


Рисунок 10.38 – Частотний спектр вхідного сигналу

З графіка видно, що спектральний склад вхідного сигналу містить тільки непарні гармоніки, амплітуда яких зменшується у міру зростання номеру гармоніки. П'ята гармоніка на частоті 2500 Гц знаходиться посередині смуги пропускання фільтра, яку обмежено межевими частотами фільтра 2300 і 2700 Гц.

Тепер побудуємо графік спектра вихідного сигналу (рис. 10.39)

```
> q := [seq([j*fs/(T+1),abs(ro[j+1]+io[j+1]*I)],j=0..T/2)]:  
> plot(q, frequency=0..fs/2,y=0..0.5,labels=[Частота,V],  
title=`Частотний спектр вихідного сигналу`,color=black);
```

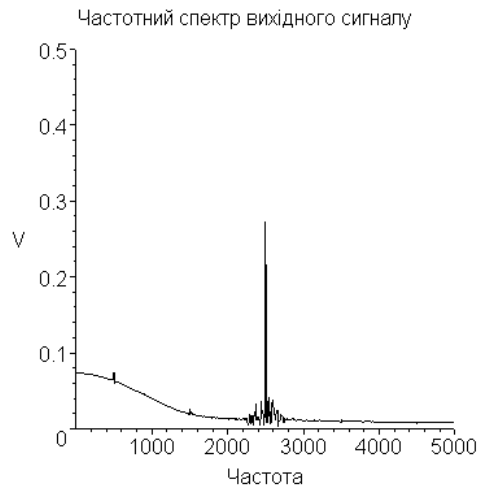


Рисунок 10.39 – Частотний спектр вихідного сигналу

Добре видно ефективне виділення п'ятої гармоніки сигналу.

Наведені дані свідчать, що спроектований фільтр повністю відповідає заданим вимогам й забезпечує упевнене виділення п'ятої гармоніки зашумленого меандру.

10.3.3 Тунельний діод

Змоделюємо явно нелінійне коло, яке складається з ланцюга, що містить послідовно увімкнуті джерела напруги E_s , резистора R_s , індуктивності L й тунельного діода, цей діод має N-подібну вольтамперну характеристику (ВАХ). Тунельний діод має ємність C , яка імітується конденсатором C , що підключений паралельно тунельному діоду. Нехай ВАХ реального тунельного діода задано виразом:

```
> A:=.3: a:=10: B:=1e-8: b:=20:
> Id:=(Ud)->A*Ud*exp(-a*Ud)+B*(exp(b*Ud-1));
```

Побудуємо графік ВАХ (рис. 10.40).

```
> plot(Id(Ud), Ud=-.02..0.76,color=black,thickness=3);
```

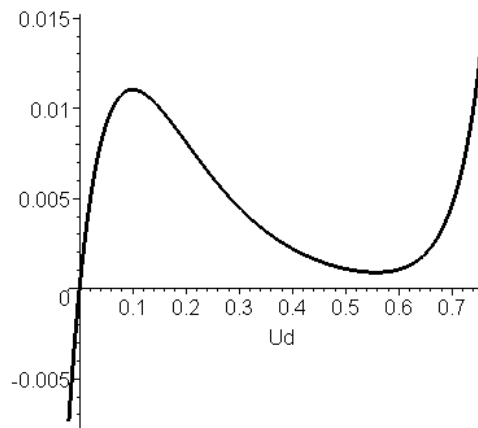


Рисунок 10.40 – ВАХ тунельного діода

ВАХ тунельного діода не тільки є нелінійною, але й містить ділянку від'ємної диференційної провідності, на якій струм спадає зі зростанням напруги. Це є ознакою того, що таке коло здатне віддавати енергію у зовнішнє коло й призводити до виникнення коливань.

Робота такого кола описується системою з двох диференціальних рівнянь

$$> \text{se} := \text{diff}(i(t), t) = (E_s - i(t) \cdot R_s - u(t)) / L, \quad \text{diff}(u(t), t) = (i(t) - I_d(u(t))) / C;$$

Розв'яжемо цю систему за таких початкових даних

```
> Es:=.35:Rs:=15:C:=10e-12:L:=30e-9:tm:=10e-9:
> F:=dsolve({se,i(0)=0,u(0)=0},{i(t),u(t)},type=numeric,method=classical,
stepsize=10^(-11),output=listprocedure);
```

Побудуємо графіки розв'язку у вигляді часових залежностей $u(t)$ та $10 \cdot i(t)$ і лінію, яка відповідає напрузі E_s джерела живлення (рис. 10.41).

```
> gu:=odeplot(F,[t,u(t)],0..tm,color=black,
labels=[`t`,`u(t),10*i(t)`]):
gi:=odeplot(F,[t,10*i(t)],0..tm,color=green):
ge:=odeplot(F,[t,Es],0..tm,color=red):
display(gu,gi,ge);
```

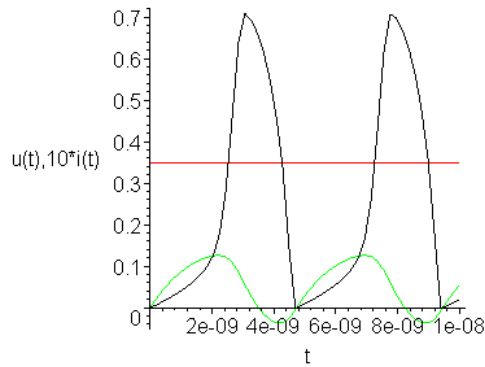


Рисунок 10.41 – Графіки розв’язку $u(t)$, $10 \cdot i(t)$ і лінія напруги джерела живлення

Розв’язок також можна зобразити у вигляді фазового портрету, який побудовано на тлі ВАХ та лінії навантаження резистора R_s (рис. 10.42)

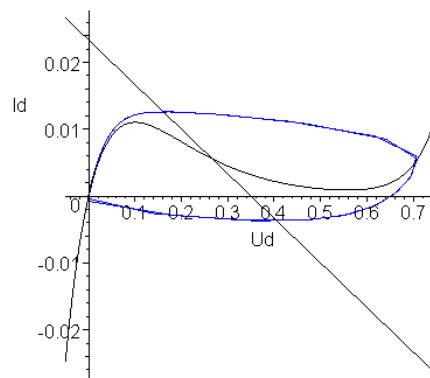


Рисунок 10.42 – Фазовий портрет роботи тунельного діода

Про релаксаційність коливань можна сказати, виходячи з того, що вже перший цикл коливань вироджується у замкнену криву – граничний цикл, форма якого дуже відрізняється від еліптичної.

Отже, це коло є генератором незатухаючих релаксаційних коливань.

Перелік посилань

1. С++: Решение инженерных задач [Текст] : Учебное пособие / А. В. Луговой, Е. П. Путятин, Д. М. Смагин, В. П. Степанов. – Харьков : «Компания СМІТ», 2005. – 349 с.
2. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание [Текст] / Авт. предисл. А. А. Самарский. – М. : Наука, 1988. – 192 с.
3. Хеминг, Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров [Текст] / Р. В. Хеминг ; Пер. с англ. В. Л. Арлазарова и др. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
4. Хокни, Р. Численное моделирование методом частиц [Текст] / Р. Хокни, Дж. Иствуд : пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 640 с.
5. Дьяконов, В. MAPLE 7: [Текст] Учебный курс / В. Дьяконов – СПб. : Питер, 2002. – 672 с.
6. Манзон, Б. М. Maple V Power Edition [Текст] / Б. М Манзон . – М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1998. – 240 с.
7. Матросов, А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. [Текст] / А. В. Матросов – СПб.: ВHV, 2000. – 528 с.
8. Говорухин, В. Н. Введение в Maple. Математический пакет для всех [Текст] / В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулин - М.: Мир, 1997. - 208 с.
9. Фильчаков, П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики [Текст] : Справочник / П. Ф. Фильчаков. – К.: Наукова думка 1970 – 800 с.
10. Волков, Е. А. Численные методы [Текст] : Учебное пособие. / Е.А. Волков – М.: Наука, 1982 – 256 с.
11. Бакушинский, А. Б. Элементы высшей математики и численных методов: [Текст] Учеб. пособие для учащихся 9-10 классов математических школ. / А. Б. Бакушинский, В. К. Власов – М.: Просвещение, 1968 – 336 с.
12. Высшая математика. Специальные главы. [Текст] : / П. И. Чинаев, А.А. Черенков, Н. А. Минин, А. Ю. Перевозников. – К. : Вища школа 1977 – 368 с.

13. Мак–Кракен, Д. Численные методы и программирование на фортране [Текст] / Д. Мак–Кракен, У. Дорн. – Пер. с англ. Казака Б.Н., под ред. Б.М. Неймарка – М. : Мир 1977 – 584 с.
14. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн – М. : Наука, 1974 – 832 с.
15. Пухов, Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. [Текст] / Г. Е. Пухов – К.: Наук. думка 1967. – 568 с.
16. Пухов, Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. [Текст] / Г. Е. Пухов – К.: Наук. думка 1984. – 420 с.
17. Голоскоков, Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. [Текст] Учебник для вузов / Д. П. Голоскоков – СПб : Питер, 2004. - 539 с.
18. Вычислительные методы в задачах радиоэлектроники [Текст] : Учеб. пособие / В. А. Дикарев, В. П. Кольцов, А. Ф. Мельников, Л. И. Шкляров. – К. : Вища школа, 1989. – 303 с.
19. Рвачев, В. Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения. [Текст] / В. Л. Рвачев – К. : Нукова думка, 1982. – 552 с.
20. Рвачев, В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. [Текст] / В. Л. Рвачев – К. : Техніка, 1967. – 212 с.
21. Рвачев, В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. [Текст] / В. Л. Рвачев – К. : Нукова думка, 1974. – 259 с.
22. Рвачев, В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. [Текст] / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко – К. : Нукова думка, 1976. – 287 с.
23. Бойко, Б. Т. Уравнения математической физики : [Текст] Учебное пособие / Б. Т. Бойко, Л. В. Курпа, Б. Ф. Сенчук ; под ред. Л.В. Курпа ; – Х. : НТУ "ХПИ", 2002. – 288 с.

24. Коптев, А. А. Maple в инженерных расчетах [Текст] : Учеб. пособие. / А. А. Коптев, А. А. Пасько, А. А. Баранов ; Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 80 с.
25. Математический пакет Maple V Release 4: [Текст] Руководство пользователя / Г. Б. Прохоров, В. В. Колбеев, К. И. Желнов, М.А. Леденев –Калуга : Облиздат, 1998. – 200 с.
26. Говорухин, В. Н. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. [Текст] / В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулин СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
27. Аладьев, В. З. Курс Общей теории статистики [Электронный ресурс] / В. З. Аладьев, В. Н. Харитонов / Таллінн : Видавництво Fultus Books, 2006. – 260 с. – Режим доступу : [www / URL : http://www.fultus.com](http://www.fultus.com) – 21.11.2007 р.
28. Тевяшев, А. Д. Теория вероятностей и математическая статистика : [Текст] Учебное пособие / А. Д. Тевяшев ; Х. : ХНУРЕ, 2002. – 572 с.
29. Володарський, Є. Т. Статистична обробка даних : [Текст] Навч. посібник / Є. Т. Володарський, Л. О. Кошева ; К. : НАУ, 2008. – 308 с.
30. Чеховський, С. А. Математичне моделювання фізичних процесів : [Текст] Навч. посібник / С. А. Чеховський ; Івано–Франківськ : Факел, 2003. – 174 с.
31. Шевчик, В. Н. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах [Текст] / В. Н. Шевчик, Г. Н. Шведова, А. В. Соболева ; Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1962. – 336 с.
32. Лебедев, И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот [Текст]. Т. 2. Электровакуумные приборы СВЧ / И. В. Лебедев ; под общ. ред. Н. Д. Девяткова - 2-е изд., перераб. и доп. Учебник для вузов по специальности «Электронные приборы» – М. : Высшая школа, 1972. – 376 с.
33. Шимони, К. Физическая электроника [Текст] : пер. с нем. – М. : Энергия, 1977. – 608 с.
34. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах [Текст] : пер. с англ. – М. : Мир, 1968. – 432 с.

35. Розенвассер, Е. Н. Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений [Текст] / Е. Н. Розенвассер ; М. : Наука, 1969. – 576 с.
36. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем [Текст] : пер. с англ. – М. : Мир, 1969. – 400 с.
37. Конторович, М. И. Нелинейные колебания в радиотехнике (автоколебательные системы) [Текст] / М. И. Конторович ; М. : Сов. радио, 1973. – 320 с.
38. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики [Текст] / Н. Н. Моисеев ; М. : Наука, 1969. – 380 с.
39. Неймарк, Ю. И. Стохастические и хаотические колебания [Текст] / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда ; М. : Наука, 1987. – 378 с.
40. Хакен, Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах [Текст] – М. : Мир, 1985. – 404 с.
41. Кузнецов, С. П. Динамический хаос [Текст] / С. П. Кузнецов ; М. : Наука, 2004. – 294 с.

Додаток А

Таблиця А.1 – Вузли інтерполяції

Варіант 1

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	7	-5	6

Варіант 2

x_i	-1	0	1,5	3
y_i	1	1	1,375	3

Варіант 3

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	-5	6	7

Варіант 4

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	7	-2	6

Варіант 5

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	5	5	7

Варіант 6

x_i	0	2	4	6
y_i	1	3	5	3

Варіант 7

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	9	6	-5

Варіант 8

x_i	-1	0	0,5	2
y_i	0	0,5	2	3

Варіант 9

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	-5	6	7

Варіант 10

x_i	0	1	2	3
y_i	-5	-7	-7	1

Варіант 11

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	97	-5	6

Варіант 12

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	6	7	-5

Варіант 13

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	97	6	-5

Варіант 14

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	6	-5	9

Варіант 15

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	-5	7	6

Варіант 16

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	1	1	2,5	3

Варіант 17

x_i	1	2	3	5
y_i	-5	-4	-3	-1

Варіант 18

x_i	-2	-1	0	1
y_i	-7	-5	-5	-1

Варіант 19

x_i	-1	0	2	3
y_i	-9	-5	-3	7

Варіант 20

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	0	0,5	2	3

Варіант 21

x_i	-3	-1	0	1
y_i	-7	5	5	9

Варіант 22

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	6	97	-5

Варіант 23

x_i	0	2	4	6
y_i	6	4	2	0

Варіант 24

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	-5	6	9

Варіант 25

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	7	6	-5

Варіант 26

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	0	0,5	1	3

Варіант 27

x_i	1	2	3	5
y_i	4	6	8	12

Варіант 28

x_i	-2	-1,5	-0,5	1
y_i	5	3,25	1,25	2

Варіант 29

x_i	0	2	4	5
y_i	1	3	2	5

Варіант 30

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	1	1	1,375	3

Варіант 31

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	-5	6	16

Варіант 32

x_i	-2	-1	1	2
y_i	9	3	3	3

Варіант 33

x_i	1	2	3	5
y_i	-2	1	6	12

Варіант 34

x_i	1	2	4	6
y_i	1	3	7	5

Варіант 35

x_i	-2	-1,5	-0,5	1
y_i	5	3	1	2

Варіант 36

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	-5	6	97

Варіант 37

x_i	-2	-1,5	-0,5	1
y_i	5	3,5	1,5	5

Варіант 38

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	6	-5	97

Варіант 39

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	1	2	1,5	3

Варіант 40

x_i	0	2	4	6
y_i	1	3	2	5

Варіант 41

x_i	0	0,5	1	2
y_i	97	6	-5	7

Варіант 42

x_i	-1	0,5	1,5	2
y_i	5	3,25	1,25	2

Варіант 43

x_i	0	0,5	1	2
y_i	7	-5	97	6

Варіант 44

x_i	-2	-1	0	1
y_i	7	7	5	7

Варіант 45

x_i	-1	0	0,5	1
y_i	0	1	2	3

Додаток Б

Таблиця Б.1 – Метод найменших квадратів

Варіант 1

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
y_i	97	7	-5	11,3	6	-70,5	-260	-636	-1220	-3260

Ва
ріа

Варіант 2

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
y_i	1	1	1	1	1,2	1,4	1,7	2,3	3	5,2

Варіант 3

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
y_i	97	-5	6	43	7	-185	-625	-1395	-2590	-6640

Варіант 4

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	97	7	-5	11,2	6	-70	-270	-635	-1230	-2085

Варіант 5

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	3,9	5	5,1	5	5,4	7	10	17	27

Варіант 6

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1	2	3	4	5	5	3	-0,8	-7	-16

Варіант 7

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
y_i	7	9	6	0,5	-5	-8	-6,1	3,5	23	100

Варіант 8

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	0	-0,4	0,5	2	3,3	4	3	-0,2	-6,5	-16

Варіант 9

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	7	-5	6	17,7	7	-48	-170	-380	-706	-1160

Варіант 10

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	-5	-7	-7	1	24	66	132	235	370	550

Варіант 11

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	-1550	-475	7	97	-5	-100	6	515	1600	3500

Варіант 12

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	840	350	97	6	7	28	-5	-165	-520	-1150

Варіант 13

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	-1440	-440	7	97	6	-88	-5	430	1400	3100

Варіант 14

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	-88	-19	7	6	-5	-9,5	9	70	180	360

Варіант 15

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1010	405	97	-5	7	41	6	-190	-640	-1430

Варіант 16

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	1,6	1	2,5	3	3,4	5	5	5	5

Варіант 17

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-8,5	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2,5	-1	0

Варіант 18

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	-7	-5	-5	-1	13	45	95	180	290	440

Варіант 19

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	-9	-5	-5	-3	7	30	75	145	250	390

Варіант 20

x_i	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0	0,5	2	3	2,5	-5	-7	-18	-35	-58

Варіант 21

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-7	3	5	5	9	23	50	110	180	200

Варіант 22

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	850	240	7	6	97	140	-5	-480	-1400	-3000

Варіант 23

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	8	7	6	5,5	4	3	2	1,5	0

Варіант 24

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	190	65	7	-5	6	20	9	-45	-160	-360

Варіант 25

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	800	350	97	7	6	25	-5	-150	-480	-1000

Варіант 26

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	0	0,5	0,5	1	3	8	16	28	46	70

Варіант 27

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4	6	8	9	12	15	15	20	20	22

Варіант 28

x_i	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	8	5	3,25	1,25	1	1,35	2	3,3	5	7

Варіант 29

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-40	-19	-6	1	3,5	3	2	2	5	13

Варіант 30

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	1,2	1	1,375	3	6,7	13	22	37	56

Варіант 31

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
-------	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----

y_i	7	-5	6	20	16	-25	-123	-300	-580	-970
-------	---	----	---	----	----	-----	------	------	------	------

Варіант 32

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	50	23	9	3	2,1	3	3	-1	-12	-30

Варіант 33

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	100	55	25	8	-0,5	-2	1	6	11	12

Варіант 34

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	15	6	1,5	0,5	1	3	5,5	7	7	5

Варіант 35

x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	5	3	1,7	1	0,9	1,2	2	3	4,5	6,2

Варіант 36

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	7	-5	6	40	97	180	280	400	550	730

Варіант 37

x_i	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_i	5	3,5	1,5	1,5	2,6	5	9	15	22	33

Варіант 38

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	7	6	-5	13	97	290	620	1100	1900	2800

Варіант 39

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	2,5	2	1,5	3	8,5	20	40	70	111

Варіант 40

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1	2,8	3	2,4	2	2,6	5	10	20	30

Варіант 41

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	97	6	-5	13	7	-73	-280	-660	-1275	-2100

Варіант 42

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	5	5,5	4,7	3,25	1,9	1,25	2	5	10	20

Варіант 43

x_i	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2320	1010	292	7	-5	97	154	6	-505	-1500

Варіант 44

x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	7	7,7	7	6	5	5	7	11,4	19	30

Варіант 45

x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	2	0,5	0	0,3	1	2	3	3,8	4	3,5

Додаток В

Таблиця В.1 – Системи рівнянь

№ варіанту	Матриця коефіцієнтів системи A				Стовпчик вільних членів b
1	-0,77	-0,04	0,21	0,18	-1,21
	0,45	1,23	0,06	0,00	0,88
	0,26	0,34	-1,11	0,00	-0,62
	0,05	-0,26	0,3-1	-1,12	1,17
2	-0,79	0,12	-0,31	-0,16	0,64
	0,34	-1,08	0,17	-0,18	-1,42
	0,16	0,84	1,10	-0,31	0,42
	0,12	-0,26	-0,08	-0,75	0,83
3	-0,68	-0,18	0,02	0,21	-1,83
	0,16	-0,88	-0,14	0,27	0,65
	0,37	0,27	-1,02	-0,21	-2,23
	0,12	0,21	-0,18	-0,75	1,13
4	-0,58	-0,52	0,03	0,00	-0,44
	0,31	-1,26	-0,36	0,00	-1,42
	0,12	0,08	-1,14	-0,21	0,83
	0,15	-0,3,5	-0,18	-1,00	1,42
5	-0,82	-0,52	-0,12	0,15	1,33
	0,11	-0,77	-0,45	0,32	-0,84
	0,05	-0,12	-0,86	-0,18	1,16
	0,12	0,08	0,06	-1,00	0,57
6	-0,87	0,23	-0,44	-0,08	-2,13
	0,24	-1,00	-0,31	0,15	0,18
	0,06	0,15	-1,00	-0,23	-1,44
	0,72	-0,08	-0,05	-1,00	-2,42
7	-0,83	0,31	-0,18	0,22	1,71
	-0,21	-1,00	0,33	0,22	-0,62
	0,32	-0,18	-0,95	-0,19	0,89
	0,12	0,28	-0,14	-1,00	-0,94
8	-0,87	0,27	-0,22	-0,18	-1,21
	-0,21	-1,00	-0,45	0,18	0,33
	0,12	0,13	-1,33	0,18	0,48
	0,33	-0,05	0,06	-1,28	0,17
9	-0,81	-0,07	0,38	-0,21	0,81
	-0,22	-0,92	0,11	0,33	0,64
	0,51	-0,07	-0,91	0,11	-1,71
	0,33	-0,41	0,00	-1,00	1,21

10	-1,00	0,22	-0,11	0,34	-2,70
	0,38	-1,00	-0,12	0,22	1,50
	0,11	0,23	-1,00	0,51	-1,20
	0,17	-0,21	0,31	-1,00	0,17
11	-0,93	-0,08	0,11	-0,18	0,51
	0,18	-0,48	0,00	0,21	-1,17
	0,13	0,31	-1,00	-0,21	1,02
	0,08	0,00	-0,33	-0,72	0,28
12	-0,95	-0,06	-0,12	0,14	2,17
	0,04	-1,12	0,68	0,11	-1,40
	0,34	0,08	-1,06	0,14	2,10
	0,11	0,12	0,00	-1,03	0,80
13	-0,92	-0,03	0,00	0,04	1,20
	0,51	-1,00	0,27	-0,08	-0,81
	0,33	0,00	-1,37	0,21	0,92
	0,11	0,00	0,0,4	-0,42	-0,17
14	-0,88	-0,23	0,25	-0,16	-1,24
	0,14	-0,60	-0,18	0,24	0,89
	0,33	-0,03	-0,54	-0,32	-1,15
	0,12	-0,05	0,00	-0,85	0,57
15	-0,77	-0,14	0,06	-0,12	-1,21
	0,12	-1,00	0,32	-0,18	0,72
	0,08	-0,12	-0,77	0,32	0,58
	0,25	0,22	0,14	-100	-1,56
16	-0,86	0,23	0,18	0,17	1,42
	0,12	-1,11	0,08	0,09	0,83
	0,16	0,24	-1,00	-0,35	-1,21
	0,23	-0,08	0,55	-0,75	-0,65
17	-0,76	0,21	0,06	-0,34	-1,42
	0,05	-1,00	0,32	0,12	0,57
	0,35	-0,27	-1,00	-0,05	-0,68
	0,12	-0,43	0,34	-1,21	2,14
18	0,83	0,27	-0,13	-0,11	1,42
	0,13	-1,12	0,09	-0,06	-0,18
	0,11	0,05	-1,02	0,12	2,34
	0,13	0,18	0,24	-0,57	-0,72
19	-0,85	0,05	-0,08	0,14	0,48
	0,32	-1,43	0,2	0,1	-1,24
	0,17	0,06	-1,08	0,12	-1,15
	0,21	-0,16	0,36	-1,00	0,88

20	-1,00	0,28	-0,17	0,06	-0,21
	0,52	-1,00	0,12	0,17	1,17
	0,17	-0,18	-0,79	0,00	0,81
	0,11	0,22	0,03	-0,95	-0,72
21	-1,00	0,52	0,08	0,13	0,22
	0,07	-1,38	-0,03	0,41	-1,80
	0,04	0,42	-0,89	-0,07	1,3
	0,17	0,18	-0,13	-0,81	-0,33
22	-0,99	0,02	-0,02	0,08	1,30
	0,03	-0,72	0,33	-0,07	-1,10
	0,09	0,13	-0,58	0,28	1,70
	0,19	-0,23	0,08	-0,63	-1,50
23	-1,00	0,17	-0,33	0,18	1,20
	0,00	-0,82	0,43	-0,08	-0,33
	0,22	0,18	0,79	0,07	-0,48
	0,08	0,07	0,71	-0,96	1,20
24	-0,97	-0,05	0,22	-0,33	0,43
	0,22	-0,45	-0,88	0,07	1,80
	0,33	0,13	-1,08	-0,05	0,80
	0,08	0,17	0,29	-0,67	-1,70
25	-0,87	0,22	-0,33	0,07	-0,11
	0,00	-0,55	-0,23	0,07	0,33
	0,11	0,00	-1,08	0,78	-0,85
	0,08	0,09	0,33	-0,79	1,70
26	-0,68	-0,16	-0,08	0,15	-2,12
	0,16	-1,23	0,11	-0,21	-1,43
	0,05	-0,08	-1,00	0,34	0,16
	0,12	0,14	-0,18	-0,94	-1,62
27	-1,00	0,08	-0,23	0,32	-1,31
	0,16	-1,23	0,18	0,16	2,33
	0,15	0,12	-0,68	-0,18	-0,34
	0,25	0,21	-0,16	-0,97	-0,63
28	-0,94	0,18	0,33	0,16	-2,43
	0,32	-1,00	0,23	-0,35	1,12
	0,16	0,08	-1,00	-0,12	-0,43
	0,09	0,22	-0,13	-1,00	-0,83
29	-1,00	0,52	0,08	0,13	0,22
	0,07	-1,38	-0,03	0,41	-1,80
	0,12	0,13	-1,33	0,18	0,48
	0,33	-0,05	0,06	-1,28	0,17

30	-0,87	0,27	-0,22	-0,18	-1,21
	-0,21	-1,00	-0,45	0,18	0,33
	0,23	-0,08	0,55	-0,75	-0,65
	-0,76	0,21	0,06	-0,34	-1,42

Додаток Г

Таблиця Г.1 – Диференційні рівняння

№	Рівняння
1	$\frac{dx}{dt} = yz$ $\frac{dy}{dt} = -xz$ $\frac{dz}{dt} = -0,5xy$ $x(0) = 0$ $y(0) = 1$ $z(0) = 1$
2	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + x^2$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
3	$\frac{d^2 x}{dt^2} + shx = 0$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$

4	$\frac{d^2 x}{dt^2} + \sin x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
5	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \sin x$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
6	$\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos x$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
7	$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0,25x$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
8	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x - x^2 + 1$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$

9	$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^2 = 1$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
10	$\frac{d^2 x}{dt^2} = 1 - x^2$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
11	$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0,25x + \frac{1}{8x} + \frac{1}{4x^3}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
12	$4 \frac{d^3 x}{dt^3} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sin x$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0,5$ $\left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right _{t=0} = 0,5$

13	$5 \frac{d^3 x}{dt^3} = 2 \frac{dx}{dt} + x^3 - x^2$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$ $\left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right _{t=0} = 0,5$
14	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + \frac{x}{2(1+x)}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
15	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x^3 + x^2$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
16	$\frac{d^2 x}{dt^2} + x^3 \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$

17	$\frac{d^2 x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
18	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x + x^2 + \sin x$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
19	$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 0,5$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
20	$\frac{d^2 x}{dt^2} + (x^3 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
21	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x^2 + x^4$ $x(0) = 0,5$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0,5$

22	$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$ $\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$ $\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$ $x(0) = 0$ $y(0) = 1$ $z(0) = 1$
23	$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{8x}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
24	$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{8x} + \frac{1}{4x^3}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
25	$\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{dx^2}{dt} + (1 + x^2) \frac{dx}{dt} - 0,75x^2 = 8$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = -0,25$ $\left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right _{t=0} = 0,1$

26	$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{4x^3}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
27	$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0,25x + \frac{1}{8x}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
28	$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 1,5$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
29	$\frac{dx}{dt} = y^2 + x$ $\frac{dy}{dt} = x^2$ $x(0) = 1$ $y(0) = 0$
30	$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0,25x + \frac{1}{4x^3}$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$

31	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \frac{dx}{dt} + x^4 - 2x^3$ $x(0) = 0,5$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = \frac{1}{5}$
32	$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dy}{dt}$ $\frac{dy}{dt} = 10 + 5 \frac{dx}{dt}$ $x(0) = 0$ $y(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
33	$\frac{dx}{dt} = x \frac{dy}{dt} + \frac{10}{x} (1 - \cos y)$ $\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2}{x} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} - \frac{\sin y}{x} + \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ $x(0) = 1$ $y(0) = 0$ $\left. \frac{dy}{dt} \right _{t=0} = 0$
34	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x - x^3 + \cos x$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$

35	$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 + 0,2x \sin x + 1,5x^2$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
36	$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(2x) + 0,5x^2$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
37	$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - x^2 + 0,6x$ $x(0) = 0$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 1$
38	$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\cos x}{x+2} + 0,3x^2$ $x(0) = 0$ $\frac{dx}{dt} = 1$
39	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2e^{-2x}x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
40	$\frac{d^2x}{dt^2} + x \frac{dx}{dt} + x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$

41	$\frac{d^2 x}{dt^2} + x \frac{dx}{dt} - x = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
42	$\frac{d^2 x}{dt^2} - x^2 \frac{dx}{dt} + x^2 = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
43	$4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 9x^2 = 0$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
44	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x^3$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$
45	$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \sin x$ $x(0) = 1$ $\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = 0$

Додаток Д

Таблиця Д.1 – Статистичні дані

Варіант	Контрольні завдання
1	13,18 13,57 13,37 13,48 13,46 13,51 13,29 13,42 13,69 13,60 13,31 13,38 13,46 13,52 13,38 13,41 13,61 13,36 13,39 13,45 13,40 13,28 13,37 13,51 13,57 13,51 13,48 13,29 13,62 13,47 13,41 13,29 13,46 13,43 13,31 13,48 13,23 13,59 13,43 13,38 13,32 13,42 13,28 13,32 13,39 13,55 13,52 13,33 13,34 13,33 13,40 13,48 13,58 13,54 13,40 13,39 13,38 13,32 13,51 13,45 13,43 13,44 13,48 13,34 13,14 13,46 13,32 13,58 13,20 13,45 13,40 13,46 13,24 13,39 13,51 13,52 13,62 13,44 13,20 13,29
2	14,49 14,33 14,26 14,26 14,55 14,54 14,37 14,31 14,37 14,33 14,54 14,32 14,52 14,39 14,62 14,40 14,23 14,45 14,47 14,56 14,42 14,45 14,32 14,44 14,58 14,50 14,36 14,40 14,50 14,37 14,30 14,50 14,40 14,28 14,31 14,64 14,31 14,53 14,57 14,58 14,57 14,37 14,48 14,46 14,51 14,29 14,42 14,69 14,60 14,31 14,38 14,46 14,52 14,38 14,18 14,41 14,61 14,36 14,39 14,45 14,40 14,28 14,37 14,51 14,57 14,51 14,48 14,29 14,62 14,47 14,41 14,29 14,46 14,43 14,31 14,48 14,23 14,59 14,43 14,38
3	11,50 12,45 12,32 12,43 12,43 12,37 12,38 12,46 12,41 12,42 12,39 12,35 12,58 12,76 12,41 12,26 12,63 12,12 12,47 12,40 14,56 12,35 12,56 12,38 12,20 12,48 12,50 12,48 12,38 12,44 12,23 12,27 12,40 12,24 12,52 12,35 12,40 12,38 12,34 12,45 12,39 12,42 12,38 12,53 12,51 12,30 12,70 12,40 12,28 12,43 12,46 12,53 12,55 12,29 12,24 12,34 12,54 12,66 12,43 12,42 12,38 12,34 13,57 12,26 12,33 12,43 12,50 12,44 12,53 12,48 12,48 12,34 12,36 12,59 12,36 12,44 12,34 12,33 12,25 12,28
4	13,32 13,42 13,28 13,32 13,39 13,55 13,52 13,33 13,34 13,33 13,40 13,48 13,58 13,54 13,40 13,39 13,38 13,32 13,51 13,45 13,43 13,44 13,48 13,34 13,14 13,46 13,32 13,58 13,20 13,45 13,40 13,46 13,24 13,39 13,51 13,52 13,62 13,44 13,20 13,29 13,50 13,45 13,32 13,43 13,43 13,37 13,38 13,46 13,41 13,42 13,39 13,35 13,58 13,43 13,41 13,26 13,63 13,13 13,47 13,40 14,56 13,35 13,56 13,38 13,20 13,48 13,50 13,48 13,38 13,44 13,29 13,27 13,40 13,24 13,52 13,35 13,40 13,38 13,34 13,45
5	12,32 12,42 12,28 12,32 12,39 12,55 12,52 12,33 12,34 12,33 12,40 12,48 12,58 12,54 12,40 12,39 12,38 12,32 12,51 12,45 12,43 12,44 12,48 12,34 12,14 12,46 12,32 12,58 12,20 12,45 12,40 12,46 12,24 12,39 12,51 12,52 12,62 12,44 12,20 12,29 12,50 12,45 12,32 12,43 12,43 12,37 12,38 12,46 12,41 12,42 12,39 12,35 12,58 12,43 12,41 12,26 12,63 12,12 12,47 12,40 14,56 12,35 12,56 12,38 12,20 12,48 12,50 12,48 12,38 12,44 12,29 12,27 12,40 12,24 12,52 12,35 12,40 12,38 12,34 12,45

6	13,57 13,37 14,48 13,46 13,51 13,29 13,42 13,69 13,60 13,31 13,38 13,46 13,52 13,38 13,41 13,61 13,36 13,59 13,45 13,40 13,28 13,37 13,51 13,57 13,51 13,48 13,29 13,62 13,47 13,41 13,29 13,46 13,43 13,36 13,48 13,23 13,59 13,43 13,38 13,32 13,42 13,28 13,32 13,39 13,55 13,52 13,43 13,34 13,33 13,40 13,48 13,58 13,54 13,40 13,39 13,38 13,32 13,51 13,45 12,43 13,44 13,48 13,34 13,14 13,46 13,32 13,58 13,20 13,45 13,40 13,46 13,24 13,18 13,39 13,51 13,52 13,52 13,44 13,20 13,29
7	12,57 12,37 12,48 12,46 12,51 12,29 12,42 12,69 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,28 12,37 12,51 12,57 12,51 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 12,48 12,23 12,59 12,43 12,38 12,32 12,42 12,28 12,32 12,39 12,55 12,52 12,33 12,34 12,33 12,40 12,48 12,58 12,54 12,40 12,39 12,38 12,32 12,51 12,45 12,43 12,18 12,44 12,48 12,34 12,12 12,46 12,32 12,58 12,20 12,45 12,40 12,46 12,24 12,39 12,51 12,52 12,62 12,44 12,20 12,29
8	13,39 13,42 13,38 13,53 13,51 13,30 13,40 13,40 13,28 13,43 13,46 13,53 13,55 13,29 13,24 13,34 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,34 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,48 13,48 13,34 13,36 13,59 13,36 13,44 13,34 13,33 13,25 13,28 13,49 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,38 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,44 13,34 13,33 13,32 13,25 13,28 13,49 13,33 13,56 13,26 13,55 13,54 13,37 13,31 13,37 13,33 13,54 13,32 13,52 13,39 13,69 13,40 13,23 13,45 13,47 13,56
9	14,50 13,45 13,32 13,43 13,43 13,37 13,38 13,46 13,41 13,62 13,39 13,35 13,58 13,43 13,41 13,26 13,63 13,13 13,47 13,40 14,56 13,35 13,56 13,38 13,20 13,48 13,57 13,48 13,38 13,44 13,29 13,27 13,40 13,24 13,52 13,35 13,40 13,38 13,34 13,48 13,39 13,42 13,38 13,53 13,51 13,30 13,40 13,40 13,28 13,43 13,46 13,53 13,55 13,49 13,24 13,34 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,34 13,57 13,26 13,33 13,43 14,50 13,44 13,53 13,48 13,48 13,34 13,36 13,59 13,36 13,44 13,34 13,33 13,25 13,28
10	12,57 13,37 12,48 12,46 12,51 12,29 12,42 12,69 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,28 12,57 12,51 12,57 12,51 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 12,48 12,26 12,59 12,43 12,38 12,32 12,42 12,28 12,32 12,39 12,55 12,52 12,37 12,34 12,33 12,40 12,48 12,58 12,18 12,54 12,40 12,39 12,38 12,32 12,31 12,45 12,43 12,44 12,48 12,34 12,12 12,46 12,32 12,58 11,20 12,45 12,40 12,46 12,24 12,39 12,51 12,52 12,62 12,44 12,20 12,29

11	12,18 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,28 12,57 12,51 12,57 12,51 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 12,48 12,26 12,59 12,43 12,38 12,32 12,42 12,28 12,32 12,39 12,55 12,52 12,37 12,34 12,42 12,45 12,32 12,44 12,58 12,50 12,36 12,40 12,50 12,37 12,30 12,50 12,40 12,27 12,31 12,64 12,31 12,53 12,57 12,58 12,57 12,37 12,48 12,18 12,46 12,51 12,24 12,42 12,69 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39
12	13,39 13,42 13,38 13,53 13,51 13,30 13,40 13,40 13,28 13,43 13,46 13,53 13,55 13,29 13,24 13,34 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,34 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,48 13,48 13,34 13,36 13,59 13,36 13,44 13,34 13,33 13,25 13,28 13,49 13,33 13,26 13,26 13,55 13,54 13,37 13,31 13,37 13,33 13,54 13,32 13,52 13,39 13,62 13,40 13,23 13,45 13,47 13,56 13,42 13,45 13,32 13,44 13,58 13,50 13,36 13,40 13,50 13,37 13,30 13,50 13,40 13,28 13,31 13,64 13,31 13,53 13,57 13,58
13	12,39 12,42 12,38 12,53 12,51 12,30 12,40 12,40 12,28 12,43 12,46 12,53 12,55 12,29 12,24 12,34 12,54 12,66 12,43 12,42 12,38 12,34 12,57 12,26 12,33 12,43 12,50 12,44 12,53 12,48 12,48 12,34 12,36 12,59 12,36 12,44 12,34 12,33 12,25 12,28 12,49 12,33 12,26 12,26 12,55 12,54 12,37 12,31 12,37 12,33 12,54 12,32 12,52 12,39 12,62 12,40 12,23 12,45 12,47 12,56 12,42 12,45 12,32 12,44 12,58 12,50 12,36 12,40 12,50 12,37 12,30 12,50 12,40 12,28 12,31 12,64 12,31 12,53 12,57 12,58
14	13,39 13,42 13,38 13,53 13,51 13,30 13,40 13,40 13,28 13,43 13,46 13,53 13,55 13,29 13,24 13,34 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,34 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,48 13,48 13,34 13,36 13,59 13,36 13,44 13,34 13,33 13,25 13,28 13,49 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,38 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,44 13,34 13,33 13,32 13,25 13,28 13,49 13,33 13,56 13,26 13,55 13,54 13,37 13,31 13,37 13,33 13,54 13,32 13,52 13,39 13,69 13,40 13,23 13,45 13,47 13,56
15	12,49 12,33 12,26 12,26 12,55 12,54 12,37 12,31 12,37 12,33 12,54 12,32 12,52 12,39 12,62 12,18 12,40 12,23 12,45 12,47 12,56 12,42 12,45 12,32 12,44 12,58 12,50 12,36 12,40 12,50 12,37 12,30 12,50 12,40 12,28 12,31 12,64 12,31 12,53 12,57 12,58 12,57 12,37 12,48 12,46 12,51 12,29 12,42 12,69 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,28 12,37 12,51 12,57 12,51 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 12,48 12,23 12,59 12,43 12,38

16	14,50 14,45 14,32 14,43 14,43 14,37 14,38 14,46 14,41 14,42 14,39 14,35 14,58 14,43 14,41 14,26 14,63 14,14 14,47 14,40 14,56 14,35 14,56 14,38 14,20 14,48 14,50 14,48 14,38 14,44 14,29 14,27 14,40 14,24 14,52 14,35 14,40 14,38 14,34 14,45 14,39 14,42 14,38 14,53 14,51 14,30 14,40 14,40 14,28 14,43 14,46 14,53 14,55 14,29 14,24 14,34 14,54 14,66 14,43 14,42 14,38 14,34 14,57 14,26 14,33 14,43 14,50 14,44 14,53 14,48 14,48 14,34 14,36 14,59 14,36 14,44 14,34 14,33 14,25 14,28
17	13,18 13,49 13,33 13,26 13,26 13,55 13,54 13,37 13,31 13,37 13,33 13,54 13,32 13,52 13,39 13,62 13,40 13,23 13,45 13,47 13,56 13,42 13,45 13,32 13,44 13,58 13,50 13,36 13,40 13,50 13,37 13,30 13,50 13,40 13,28 13,31 13,64 13,31 13,53 13,57 13,58 13,57 13,37 13,48 13,46 13,51 13,29 13,42 13,69 13,60 13,31 13,38 13,46 13,52 13,38 13,41 13,61 13,36 13,39 13,45 13,40 13,28 13,37 13,51 13,57 13,51 13,48 13,29 13,62 13,47 13,41 13,29 13,46 13,43 13,31 13,48 13,23 13,59 13,43 13,38
18	12,40 12,28 12,43 12,46 12,53 12,55 12,29 12,24 12,34 12,54 12,66 12,43 12,42 12,38 12,34 12,57 12,26 12,33 12,43 12,50 12,44 12,53 12,48 12,48 12,34 12,36 12,59 12,36 12,44 12,34 12,33 12,25 12,28 12,49 12,33 12,26 12,26 12,55 12,54 12,37 12,31 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,28 12,37 12,51 12,57 12,18 12,51 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 12,48 12,23 12,59 12,43 12,32 12,42 12,28 12,32 12,55 12,52 12,33 12,34 12,33
19	12,50 12,45 12,32 12,43 12,43 12,37 12,38 12,46 12,41 12,42 12,39 12,35 12,58 12,43 12,41 12,26 12,63 12,12 12,47 12,40 14,56 12,35 12,56 12,38 12,20 12,48 12,50 12,48 12,38 12,44 12,29 12,27 12,40 12,24 12,52 12,35 12,40 12,38 12,34 12,45 12,39 12,42 12,38 12,53 12,51 12,30 12,40 12,40 12,28 12,43 12,46 12,53 12,55 12,29 12,24 12,34 12,54 12,66 12,43 12,42 12,38 12,34 12,57 12,26 12,33 12,43 12,50 12,44 12,53 12,48 12,48 12,34 12,36 12,59 12,36 12,44 12,34 12,33 12,25 12,28
20	12,38 12,46 12,41 12,42 12,39 12,35 12,58 12,43 12,41 12,26 12,63 12,12 12,47 12,40 14,56 12,35 12,56 12,38 12,20 12,48 12,50 12,48 12,38 12,44 12,29 12,27 12,40 12,24 12,52 12,35 12,40 12,38 12,34 12,45 12,39 12,42 12,38 12,53 12,51 12,30 12,33 12,54 12,32 12,52 12,39 12,62 12,40 12,23 12,45 12,47 12,56 12,42 12,45 12,32 12,44 12,58 12,50 12,36 12,40 12,50 12,37 12,30 12,50 12,40 12,28 12,31 12,64 12,31 12,53 12,57 12,58 12,57 12,37 12,48 12,46 12,51 12,29 12,42 12,69 12,60

21	13,39 13,42 13,38 13,53 13,51 13,30 13,40 13,45 13,28 13,43 13,46 13,53 13,55 13,29 13,24 13,34 13,54 13,66 13,43 13,42 13,38 13,38 13,57 13,26 13,33 13,43 13,50 13,44 13,53 13,48 13,48 14,34 13,36 13,59 13,36 13,44 13,34 13,33 13,25 13,28 13,49 13,33 13,56 13,26 13,55 13,54 13,37 13,31 13,37 13,33 13,54 13,32 13,52 13,39 13,69 13,40 13,23 13,45 13,47 13,56 13,42 13,45 13,32 13,44 13,58 13,50 13,36 13,40 13,50 13,27 13,30 13,50 13,40 13,28 13,31 13,64 13,31 13,53 13,57 13,58
22	14,57 14,37 14,48 14,46 14,51 14,29 14,42 14,69 14,60 14,31 14,38 14,46 14,52 14,38 14,41 14,61 14,36 14,39 14,45 14,40 14,28 14,37 14,51 14,57 14,51 14,48 14,29 14,62 14,47 14,41 14,29 14,46 14,43 14,31 14,48 14,23 14,59 14,43 14,38 14,18 14,32 14,42 14,28 14,32 14,39 14,55 14,52 14,33 14,34 14,33 14,40 14,48 14,58 14,54 14,40 14,39 14,38 14,32 14,51 14,45 14,43 14,44 14,48 14,34 14,14 14,46 14,32 14,58 14,20 14,45 14,40 14,46 14,24 14,39 14,51 14,52 14,62 14,44 14,20 14,29
23	13,49 12,33 12,26 12,26 12,55 12,54 12,37 12,31 12,37 12,33 12,54 12,32 12,52 12,39 12,62 12,60 12,23 12,45 12,47 12,56 12,42 12,45 12,32 12,44 12,58 12,50 12,36 12,40 12,50 12,37 12,30 12,50 12,40 12,27 12,31 12,64 12,31 12,53 12,57 12,58 12,57 12,37 12,48 12,46 12,51 12,24 12,42 12,69 12,60 12,31 12,38 12,46 12,52 12,38 12,41 12,61 12,36 12,39 12,45 12,40 12,38 12,37 12,51 12,57 12,51 12,18 12,48 12,29 12,62 12,47 12,41 12,29 12,46 12,43 12,31 11,48 12,23 12,59 12,43 12,38
24	14,32 14,42 14,28 14,32 14,39 14,55 14,52 14,33 14,34 14,33 14,40 14,48 14,58 14,54 14,40 14,39 14,38 14,32 14,51 14,45 14,43 14,44 14,48 14,34 14,14 14,46 14,32 14,58 14,20 14,45 14,40 14,46 14,24 14,39 14,51 14,52 14,62 14,44 14,20 14,29 14,50 14,45 14,32 14,43 14,43 14,37 14,38 14,46 14,41 14,42 14,39 14,35 14,58 14,43 14,41 14,26 14,63 14,14 14,47 14,40 14,56 14,35 14,56 14,38 14,20 14,48 14,50 14,48 14,38 14,44 14,29 14,27 14,40 14,24 14,52 14,35 14,40 14,38 14,34 14,45

Таблиця Д.2 – Розподіл χ^2

Ймовірність α , кількість ступенів волі k							
k	α			k	α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	2,706	3,841	6,635	17	24,769	27,587	33,409
2	4,605	5,991	9,210	18	25,989	28,869	34,805
3	6,251	7,815	11,341	19	27,204	30,144	36,191
4	7,779	9,488	13,277	20	28,412	31,410	37,566
5	9,236	11,070	15,086	21	29,615	32,671	38,932

6	10,645	12,592	16,812	22	30,813	33,924	40,289
7	12,017	14,067	18,475	23	32,007	35,172	41,638
8	13,362	15,507	20,090	24	33,196	36,415	42,980
9	14,684	16,919	21,666	25	34,382	37,652	44,314
10	15,987	18,307	23,209	26	35,563	38,885	45,642
11	17,275	19,675	24,725	27	36,741	40,113	46,963
12	18,549	21,026	26,217	28	37,916	41,337	48,278
13	19,812	22,362	27,688	29	39,087	42,557	49,588
14	21,064	23,685	29,141	30	40,256	43,773	50,892
15	22,307	24,996	30,578	40	51,805	55,758	63,691
16	23,542	26,296	32,000	60	74,397	79,082	88,3379

plot/options – опції двовимірної графіки**Опис**

Опції, які наведено нижче, можуть забезпечити команди двовимірної графіки. Ці опції можна використовувати у **plot** командах і є загальними для всіх Maple, які створюють двовимірну графіку.

Опції

- **adaptive=n or truefalse**

Коли рисують функцію, що виходить за інтервал, інтервал є шаблоном з кількості точок, контролюється **sample** та **numpoints**. Адаптування рисування, коли необхідно, поділяють ці інтервали, намагаючись отримати кращу репрезентацію функції. Таке поділення можна встановити за допомогою опції **adaptive false**. За замовчуванням ця опція встановлюється **true**, а інтервали діляться в 6 разів, щоб поліпшити рисунок. Задаючи цю опцію невід'ємним цілим числом, можна контролювати максимальну кількість разів, на які поділяється інтервал.

- **axes=f**

Специфікує тип осей одним з: **boxed**, **frame**, **none**, or **normal**.

- **axesfont=l**

Шрифт для міток осей, специфікують таким же чином як **font**.

- **axis=t or axis[dir]=t**

Специфікує інформацію про x-вісь та y-вісь. Перша форма **axis=t** використовує інформацію, яку надано в **t** для обох осей. Друга форма дозволяє специфікувати інформацію для окремої осі, у **dir** задаються величина 1 (x-вісь) або 2 (y-вісь). Детальніше, дивіться [plot/axis](#).

- **caption=c**

Назва рисунка. Величина **c** може бути задовільним виразом. Як специфікувати **c**, дивіться [plot/typesetting](#). Величина **c** може також бути списком, який містить опції **font**. За замовчуванням назви немає.

- **color=n or colour=n**

Дозволяє користувачу визначати колір кривих, які рисують. Детальніше дивіться [plot/color](#).

- **coords=<name>**

Визначає, що рисунок визначено в координатній системі через **<coord_name>**. Більше інформації про зміну координатних систем дивіться [plot/coords](#).

- **discont=truefalse**

Встановлює **discont** у значення **true** для **plot**, щоб викликати функцію **discont**, по-перше, визначають переривчатість входу (або **fdiscont**, якщо

discont відсутній чи, якщо вхід не є виразом) і коли розривається горизонтальна вісь у присвоєних інтервалах, коли вираз є чи неперервним, чи містить тільки відрізки, які пересуваються. За замовчуванням значення для **discont** є **false**.

- **filled=truefalse**

Якщо опцію **filled** встановлено **true**, площа між кривою та віссю *x* заповнюватиметься кольором.

- **filledregions=truefalse**

Якщо опцію **filledregions** встановлено **true**, діапазони визначаються кривими залитими різними кольором. Ця опція є дійсною тільки у таких командах: **contourplot**, **implicitplot**, та **listcontplot**.

- **font=l**

Ця опція визначає шрифт для об'єктів тексту на рисунку, де величина *l* є списком [**family**, **style**, **size**]. Величина **family** є однією з **TIMES**, **COURIER**, **HELVETICA**, or **SYMBOL**. Величини мають бути вказані великими літерами.

Для сім'ї **TIMES**, стиль може бути одним з **ROMAN**, **BOLD**, **ITALIC**, or **BOLDITALIC**.

Для сімей **HELVETICA** та **COURIER**, стиль може бути пропущеним чи ви можете вибрати один з **BOLD**, **OBLIQUE**, або **BOLDOBLIQUE**.

Сім'я **SYMBOL** не має стилю опцій. Кінцева величина, **size**, є розміром шрифту, який використовуватимуть.

- **gridlines=truefalse**

Коли **gridlines=true** чи **gridlines** за умов замовчування **gridlines** рисуються. За замовчуванням **gridlines=false**.

Для кращого **gridline** використовують опції **axis**. Якщо опції **axis** також визначено та містять підопції **gridlines**, тоді вони перекривають опції **gridlines**.

- **labels=[x, y]**

Ця опція визначає підпис для осей. Як визначаються *x* та *y*, дивіться **plot/typesetting**. За замовчуванням підписи мають назви змінних у функціях, які будують, якщо це можливо; інакше підписи не використовують.

- **labeldirections=[x, y]**

Ця опція визначає напрямок, у якому друкуються підписи вздовж осей. Величини *x* та *y* мають бути **horizontal** чи **vertical**. За замовчуванням напрямок будь-якого підпису є **horizontal**.

- **labelfont=l**

Шрифт для підписів осей рисунку, визначається таким же чином як **font**.

- **legend=s**

Підпис вводиться для рисунку. Як визначати **s**, дивіться [plot/typesetting](#). Якщо команда **plot** використовується для рисування багатьох кривих, тоді **s** може містити список підписів для кожної кривої.

legendstyle=s

Стиль підпису для рисунків. Величина **s** є списком, який містить одну або кілька підопцій. Підопції, які підходять для опцій **legendstyle**, включаючи **font=f** та **location=loc**. Як визначити фонт, дивіться опції **font**. Підопція **location=loc** дозволяє визначити величини **top**, **bottom**, **right** та **left** для **loc**.

- **linestyle=t**

Контролює стиль лінії кривих. Величина **linestyle t** може мати одне з таких імен: **solid**, **dot**, **dash**, **dashdot**, **longdash**, **spacedash**, **spacedot**. За замовчуванням величина **t** є **solid**. Величина **t** може бути цілим числом від 1 до 7, де кожне число репрезентує стиль лінії у порядку, який наведено вище.

- **numpoints=n**

Визначає мінімальну кількість точок, які створено. За замовчуванням **50**.

- **resolution=n**

Встановлює роздільну здатність дисплею по горизонталі в пікселях (за замовчуванням **n = 200**). Величину **n** використовують для визначення, коли схема рисунка виводиться на дисплей.

- **sample=[l]**

Список величин, які використовуються для початкового моделювання функцій. Коли це пов'язано з **adaptive=false**, ця опція дозволяє повністю контролювати функцію через **plot**.

- **scaling=s**

Керування масштабом графіка як **constrained** чи **unconstrained**. За замовчуванням є **unconstrained**.

- **style=s**

Стиль рисунку має бути одним з **line**, **point**, **polygon** (**patchnogrid**), чи **polygonoutline** (**patch**). Імена в дужках визначаються для визначення опцій. Стиль за замовчуванням, **line**, створює лінію, що інтерполюють між точками. Стиль **point** є результатом рисунку, який складається лише з точок. Стилі **polygon** та **polygonoutline** для рисунків, які складаються з багатокутників, останній показує обриси багатокутників.

- **symbol=s**

Символи для точок на графіку, де величина **s** має бути однією з **asterisk**, **box**, **circle**, **cross**, **diagonalcross**, **diamond**, **point**, **solidbox**, **solidcircle**, **soliddiamond**.

- **symbolsize=n**

Розмір (в точках) символів, які використовують під час рисування, має бути цілим додатним числом. Це не обходить символу **POINT**. За замовчуванням розмір символу є **10**.

- **thickness=n**

Ця опція визначає товщину лінії графіка. **Thickness n** має бути невід'ємним цілим числом. За замовчуванням **thickness** дорівнює **0**.

- **tickmarks=[m, n]**

Величини **m** та **n** визначають знаки замісники для осей *x* та *y* відповідно і можуть мати одну з таких форм: цілі числа визначають номер знаків, список величин визначає розташування, список кожного рівняння має форму *location=label*, чи просторову структуру. Більш детально, дивіться [plot/tickmarks](#).

- **title=t**

Назва рисунку. Величина **t** може бути задовільним виразом. Як визначати **t**, дивіться [plot/typesetting](#). Величина **t** може бути також списком, який містить назву, яка розташована за опцією **font**. За замовчуванням назви немає.

- **titlefont=l**

Фонт назви рисунку, визначається як фонт.

- **view=[xmin..xmax, ymin..ymax]**

Ця опція визначає мінімальні та максимальні координати кривої для відображення на екран. За замовчуванням повна крива.

Предметный показчик

\$	34	coords	54
abs	28	cos	28
algcurves	40	cosh	28
and	33	cot	28
animate	55, 63	coth	28
arccos	28	count	181
arccosh	28	countmissing	181
arccot	28	covariance	181
arccoth	28	csc	28
arccsc	28	csch	28
arccsch	28	CurveFitting	41, 79, 80
arcsec	28	cylinderplot	64
arcsech	28	DASH	53
arcsin	28	DASHDOT	53
arcsinh	28	delice	181
arctan	28	densityplot	58
arctanh	28	DEplot	72
area	68	DEplot3d	72
argument	28	describe	182
array	34, 78	detail	68, 71
bisector	68	DEtools	41, 50, 72
boolean	31	diameter	68
center	68	diff	38,
centroid	68		39
circle	68	Diff	38
circumcircle	68	diffalg	41
codegen	41	diffforms	41
CodeGeneration	41	Digits	27
coeff	36, 37, 38	display	61
coefficientofvariation	181	display3d	64
collect	36, 37, 38	distance	68
color	53	Domains	41
combinat	41	DOT	53
combine	36, 38	draw	50, 68, 71
combstruct	41	ellipse	68
CONSTRAINED	53	evalb	32
context	41	evalf	26, 27, 40, 117
contourplot	57	exp	28,
contourplot3	64		29
convert	35, 37	expand	35, 36, 37, 80
convexhull	68	exprseq	31
coordinates	68		

factor	35, 36	liesymm	41
FFT	246	limit	30
fieldplot	59	Limit	30,
fieldplot3d	64	31	
finance	41	linalg	41,
find_angle	68	110	
fit	92	linearcorrelation	181
Float	31, 32	LINE	52
frac	28	line	69
fraction	31	LinearAlgebra	41
GaussInt	41	LinearFunctionalSystems	41
genfunc	41	LinearOperators	41
geom3d	41, 67	linsolve	110
geometricmean	181	list	33
geometry	40, 50, 67	ListTools	41
gradplot	58	ln	28
gradplot3d	64	log	28
grid	58	log10	28
Groebner	41	loglogplot	60
group	41	logplot	60
harmonicmean	181	LREtools	41
Hyperbola	68	map	34
I	29	Maplets	41
ifactor	36	MathML	41
Im	28	Matlab	41
implicitplot	55	matrix	110
implicitplot3d	64	matrixplot	64
implies	31	MatrixPolynomialAlgebra	41
incircle	68	mean	181
infinity	29	meandeviation	181
int	39, 40	median	181
Int	39, 40	middlebox	118
integer	31	middlesum	118
inter	69	median	69
interp	78	midpoint	69
intersect	34	minus	34
inttrans	41	mode	181
kurtosis	181	moment	181
LargeExpressions	41	networks	41
leastsquare	92	nops	33,
leftbox	117	180	
leftsum	117	normal	35
lenght	32	not	31
LibraryTools	41	NULL	32

numapprox	41	scaling	53
numtheory	42	ScientificConstants	42
odeplot	72	sec	26
op	31	sech	27
or	31	semilogplot	60
Ore_algebra	42	seq	33
OrthogonalSeries	42	series	39
orthopoly	42	set	32
padic	42	sides	69
parabola	69	simplex	42
PATCH	52	simplify	35,
PDEtools	42, 50	36	
pdsolve	152	simpson	119
percentile	181	sin	28
phaseportrait	73	sinh	28
Pi	29	skewness	181
plane	71	Slode	42
plot	49, 50, 51, 52, 53	SNAP	42
plot3d	49, 62	Sockets	42
plots	42, 49, 50	SoftwareMetrics	42
plottools	42, 49	SOLID	53
POINT	52	solve	101
point	69	SolveTools	42
PolynomialInterpolation	79, 80	spacecurve	64
PolynomialTools	42	sphere	70
power	37	sphereplot	64
powseries	42	spline	85,
process	42	86	
product	30	Spread	42
Product	30	sqrt	28
quadraticmean	181	standarddeviation	182
quantile	181	statplot	50
radius	69	stats	42,
random	179	50	
RandomTools	42	string	32
range	181	StringTools	42
RationalNormalForms	42	Student	42
Re	28	student	42,
readlib	85	50	
RealDomain	42	Student[Calculus1]	43
Rif	42	substring	32
rightbox	118	sum	29
rightsum	119	Sum	29
round	28	SumTools	43

sumtools	43	магнетронний діод	214
surfdata	64	Метод відокремлення змінних	143
table	35	Метод Гауса	107
tan	28	Метод диференціальних	127
tanh	28	перетворень	
tensor	43	Метод дихотомії	95
tetrahedron	70	Метод дотичних	99
thickness	53	Метод Ейлера	122
triangle	69	Метод найменших квадратів	86
trig	37	Метод Ньютона	79, 99
trunc	28	Метод простої ітерації	98
tuberplot	64	Метод прямокутників	113
type	31	Метод Рунге–Кутта	123
TypeTools	43	Метод R–функцій	148
union	34	Метод Сімпсона	115
Units	43	Метод трапецій	114
value	117	Метод хорд	97
variance	182	Методи прогнозу–корекції	125
VariationalCalculus	43	поліноміальна інтерполяція	77
vector	110	регресійний аналіз	193
VectorCalculus	43	рівняння Ван дер Поля	218
whattype	31	рівняння Дюффінга	221
with	39, 50	рівняння Лоренца	225
Worksheet	43	сплайн	82
XMLTools	43	схрещені поля	211
xor	31	тунельний діод	247
аналоговий фільтр	241	функції розподілу	183
вибірка	178	циліндричні системи	213
Інтерполяція	76	цифровий фільтр	242
критерії згоди	189		
магнетрон	214		