СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.21

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ

АГАПОВА И.С., БЕСКОРОВАЙНАЯ И.В., МУРАВЬЕВА И.С.

Рассматриваются многокомпонентные системы марковского типа. Для многих реальных систем предполагается, что взаимодействия между компонентами значительно отличаются от взаимосвязей внутри каждой компоненты. Изучается вопрос о наличии стационарного распределения у подобных систем и предлагаются эффективные алгоритмы их нахождения.

1. Математическая модель взаимодействующих систем

Пусть на измеримом пространстве (X,B) задан стационарный марковский процесс $\xi(t)$ с конечным числом состояний и матрицей переходных вероятностей $P(t)$. Если выполнены условия регулярности [1], то процесс $\xi(t)$ может быть описан прямой системой уравнений Колмогорова для вероятностей состояний $p_i(t)$:

$$P_j'(t) = \sum_i p_i \lambda_{ij}\ , \qquad (1)$$

где $A = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матрица интенсивностей переходов (инфинитезимальная матрица). Это означает, что

$$\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = -\lambda_{ij} = \lambda_i, i = \overline{1,n},$$

или, что то же самое, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 0$, причем $\lambda_{ij} \geq 0$ при $j \neq i$.

Допустим, что структура матрицы A такова:

$$A(\varepsilon) = C + \varepsilon D. \qquad (2)$$

Здесь матрица C имеет вид:

$$C = \operatorname{diag}(A_{ii}) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_{rr} \end{pmatrix},$$

а D – квадратная матрица (размерности $n \times n$); ε – малый вещественный параметр. В случае, когда $D = 0$, процесс $\xi(t)$ является разложимым и распадается на r не связанных компонент, каждая из которых есть марковский процесс с числом состояний, меньших чем n. Если же $D \neq 0$, то она характеризует “связи” между взаимодействующими фрагментами. Параметр ε подчеркивает, что эти связи малы.

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$p'(t) = p^T(t) A(\varepsilon). \qquad (3)$$

Здесь T – символ транспонирования; $p^T(t)$ – вектор-строка с компонентами $p_1(t),\dots p_n(t)$. Допустим, что матрица $A(\varepsilon)$ известна. Рассмотрим, как будут отличаться стационарные решения системы (1) в случае, когда связи малы и когда они отсутствуют. Для этого выясним, как связаны собственные числа и собственные векторы невозмущенной матрицы $C = diag(A_{ii})$, $i = 1,2,\dots r$ и возмущенной $A(\varepsilon)$.

Заметим, что каждая из матриц A_{ii}, $i = \overline{1,r}$ определяет некоторый марковский процесс, который как бы является фрагментом общего процесса $\xi(t)$, в то же время матрица C уже процесс не определяет, а представляет их теоретико-множественное объединение.

Охарактеризуем спектр матрицы C. Очевидно, что нуль есть кратное собственное число, кратности не меньше чем r, остальные собственные числа лежат в левой полуплоскости. Это следует из теоремы Гершгорина [3]. Выясним, каким дополнительным условиям должен удовлетворять спектр матрицы $A(\varepsilon)$, чтобы процесс $\xi(t)$ обладал стационарным распределением (был эргодическим).

Эти условия состоят в следующем: для эргодичности марковского процесса $\xi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы матрица (2) системы (3) имела простое собственное число 0, а все остальные собственные числа d_j, $j = 2,\dots,n$ имели бы отрицательные действительные части $Re\, d_j < 0$.

Проверим эти утверждения. Пусть процесс $\xi(t)$ эргодичен, т.е. существует предел

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j^* > 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j^* = 1. \qquad (4)$$

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений (3):

$$p(t) = \sum_{i=1}^{e} \vec{x}_i e^{d_i t} + \sum_{i=e+1}^{n} \vec{x}_i (1 + t + \dots + t^{k_i}) e^{d_i t}, \qquad (5)$$

где первая сумма отвечает группе простых собственных чисел, а вторая – кратным с кратностью k_i; $\vec{x}_i$ – собственные векторы матрицы системы (3). Так как все решения, входящие в (5), линейно-независимы, то независимость $p(t)$ от переменной t на бесконечности возможна только в том случае, когда $Re\, d_j < 0$, причем одно из собственных чисел должно равняться нулю, а его кратность равна единице. Собственный вектор $\vec{x}_i$, отвечающий нулевому собственному значению, представляет собой стационарное распределение, удовлетворяющее условию (4). Утверждения верны.

2. Процедура нахождения поправок для собственных чисел и собственных векторов матрицы *A(e)*

Рассмотрим случай, когда спектр матрицы $A(\varepsilon)$ прост. Выясним, чему равны собственные числа $d_k(\varepsilon)$, $k=1,...,n$ и собственные векторы $x_k(\varepsilon)$, $k=1,...,n$. Представим их в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$d_k(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_k^{(i)}, \tag{6}$$

$$x_k(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_k^{(i)}. \tag{7}$$

Заметим, что $d_k(0) = d_k$, $x_k(0) = x_k$, где d_k, x_k − собственные числа и собственные векторы матрицы C. Будем искать поправки $d_k^{(i)}, x_k^{(i)}$ в разложениях (6), (7).

По определению имеем

$$(C+\varepsilon D)x_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon)x_k(\varepsilon), \tag{8}$$

$$(C+\varepsilon D)(x_k + \varepsilon x_k^{(1)} + ...) = (d_k + \varepsilon d_k^{(1)} + ...)(x_k + $$

$$+ \varepsilon x_k^{(1)} + ...)\,. \tag{9}$$

Раскроем скобки в (9) и приравняем выражение при одинаковых степенях малого параметра ε. Тогда

$$e^0\, Cx_k = d_k x_k, \tag{10}$$

$$e^1\, Cx_k^{(1)} + Dx_k = d_k x_k^{(1)} + d_k^{(1)} x_k, \tag{11}$$

$$e^2\, Cx_k^{(2)} + Dx_k^{(1)} = d_k x_k^{(2)} + d_k^{(1)} x_k^{(1)} + d_k^{(2)} x_k. \tag{12}$$

Равенство (10) удовлетворяется тождественно. Преобразуем (11) следующим образом:

$$(C - d_k I)x_k^{(1)} = -(C - d_k^{(1)} I)x_k\,. \tag{13}$$

Поскольку матрица $A(\varepsilon)$ − вещественная, то сопряженная к ней матрица $A^*(\varepsilon)$ получается в результате транспонирования матрицы $A(\varepsilon)$. При этом спектр матрицы $A(\varepsilon)$ совпадает со спектром матрицы $A^*(\varepsilon)$ (собственные векторы, конечно, отличаются). Система собственных векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ матрицы $A(\varepsilon)$ биортогональна собственным векторам $x_1^*, x_2^*, ... x_n^*$ матрицы $A^*(\varepsilon)$, т.е.

$$(x_k, x_j^*) = \begin{cases} 1, i = j\ , \\ 0, i \ne j\ . \end{cases}$$

Умножим скалярно соотношение (11) на x_k^*, получим

$$(Cx_k^{(1)}, x_k^*) + (Dx_k, x_k^*) = d_k(x_k^{(1)}, x_k^*) + d_k^{(1)}(x_k, x_k^*).$$

Пользуясь определением сопряженной матрицы и свойством биортогональности, имеем

$$(x_k^{(1)}, C^* x_k^*) + (Dx_k, x_k^*) = (x_k^{(1)}, d_k x_k^*) + d_k^{(1)},$$

$$d_k^{(1)} = (Dx_k, x_k^*), k = 1,2,...,n. \tag{14}$$

Для нахождения поправки $x_k^{(i)}$ домножим скалярно равенство (11) на $x_j^{(i)}, j \ne k$. Получим

$$\begin{aligned}(Cx_k^{(1)}, x_j^*) + (Dx_k, x_j^*) = d_k(x_k^{(1)}, x_j^*) + \\ + d_k^{(1)}(x_k, x_j^*).\end{aligned} \tag{15}$$

Производя аналогичные преобразования, приходим к выражению

$$(x_k^{(1)}, e_j^*) = \frac{1}{d_k - d_j}(Dx_k, x_j^*), j \ne k, k = 1,2,...,n.$$

Относительно неизвестных компонент вектора $x_k^{(1)}$ выражения (15) есть система линейных алгебраических уравнений, причем число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Для того чтобы превратить (15) в разрешимую систему, используем условие нормировки:

$$(x_k(\varepsilon), x_k^*(\varepsilon)) = 1.$$

Подставим сюда разложение (7), тогда получаем

$$(x_k, x_k^*) = 1\ ,\ (x_k^{(1)}, x_k^*) + (x_k^*, x_k^{(1)}) = 0\ ,$$

что возможно лишь при выполнении условия :

$$(x_k^{(1)}, x_k^*) = 0\ . \tag{16}$$

Совокупность равенств (15), (16) образует уже определенную систему порядка $n \times n$. Решение этой системы дает “главную” поправку $x_k^{(1)}$.

Получим это решение в координатной форме. В качестве базиса линейного пространства выберем нормированную систему собственных векторов $x_1, x_2, ..., x_n$. В этом базисе координаты вектора $x_k^{(1)}$ имеют вид

$$x_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} x_i\ .$$

При подстановке данного выражения в (15) и (16) получим

$$\xi_i^{(k)} = (x_k^{(1)}, x_i) = \frac{(Dx_k, x_i^*)}{d_k - d_i}, k \ne i\ ,$$

$$\xi_i^{(k)} = (x_k^{(1)}, x_k) = 0\ .$$

Отсюда координатное представление вектора $x_k^{(1)}$ имеет вид

$$x_k^{(1)} = \sum_{i \ne k} \frac{(Dx_k, x_i^*)}{d_k - d_i} e_i\,. \tag{17}$$

Найдем поправки $d_k^{(2)}, x_k^{(2)}$. Для этого домножим равенство (12) скалярно на x_k^*. Тогда аналогично предыдущим преобразованиям получаем

$$d_k^{(2)} = \sum_{i \neq k} \frac{(Dx_k, x_i^*)(Dx_i, x_k^*)}{d_k - d_i}. \quad (18)$$

Для нахождения $x_k^{(2)}$ необходимо домножить (11) скалярно на x_i^*, что приводит нас к выражению

$$(x_k^{(2)}, x_i^*) = \frac{1}{d_k - d_i}[(Dx_k^{(1)}, x_i^*) - - d_k^{(1)}(x_k^{(1)}, x_i^*)], \quad (19)$$

которое совместно с условием $(x_k^{(2)}, x_k^*) = 0$ определяет однозначным образом векторы $x_k^{(2)}$. Точно так же находят остальные поправки $d_k^{(2)}, ..., x_k^{(3)}, ...$.

Обратимся к случаю, когда среди собственных чисел матрицы C могут быть кратные. Пусть d - собственное число кратности t, а $f_1, f_2, ..., f_t$ – соответствующие этому собственному значению t попарно-ортогональных собственных векторов матрицы $A(\varepsilon)$. При возмущении матрицы C собственное число d перестает быть кратным, т.е. вместо d получается t различных собственных значений $d_1(\varepsilon), d_2(\varepsilon), ..., d_t(\varepsilon)$. Соответствующие им нормированные собственные векторы обозначим через $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), ..., x_t(\varepsilon)$. Аналогично формулам (6), (7) имеют место разложения:

$$d_i(\varepsilon) = d_i + \varepsilon d_i^{(1)} + ...,$$
$$x_i(\varepsilon) = x_i + \varepsilon x_i^{(1)} + ..., i = 1,2,...,t.$$

Отсюда следует, что x_i – собственный вектор матрицы C, отвечающий кратному собственному числу d. Таким образом, x_i есть линейная комбинация векторов $f_1, f_2, ..., f_t$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{t} d_j f_j. \quad (20)$$

Имеет место следующее соотношение (по аналогии с (12)):

$$Dx_i + Cx_i^{(1)} = d_i x_i^{(1)} + d_i^{(1)} x_i, i = 1,2,...,t. \quad (21)$$

Сопряженная к C матрица C^* имеет собственным числом d с той же кратностью t и систему собственных векторов $f_1^*, f_2^*, ..., f_t^*$, отвечающих d, биортогональную системе $f_1, f_2, ..., f_t$.

Умножая (21) скалярно на f_j^* и используя представление (20), получаем

$$\sum_{m=1}^{t} a_m (Df_m, f_j^*) = d_j^{(1)} a_j, j = 1,2,...,t. \quad (22)$$

Из системы (22) видно, что числа $d_i^{(1)}$ являются собственными числами матрицы $\|(Df_m, f_j^*)\|$, $m, j = 1,2,...,t$, а вектор x_i определяется из системы (21), уже полностью определенной. Поправка $x_i^{(1)}$ может быть найдена по формуле

$$x_i^{(1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(Dx_i, x_j^*)}{d_i - d_j} x_j \quad (23)$$

абсолютно аналогично случаю, описанному выше.

Полученные результаты позволяют находить возмущения вероятностей состояний по известным возмущениям основных характеристик системы. Тем самым найдены формулы, позволяющие внести коррекцию в вероятности состояний и переходные вероятности процесса, описывающего марковскую систему с возмущенными параметрами.

Рассмотрим теперь, как возмущается решение системы (3) по отношению к соответствующим решениям системы (2). Для этого оценим по модулю разность решений систем (2) и (3):

$$P(t) = P(0)e^{At}, Q(t) = Q(0)e^{(C+\varepsilon D)t}.$$

Учтем, что начальные условия *P(0)* и *Q(0)* совпадают, т.е.

$$\|Q(t) - P(t)\| = P(0)\left\|e^{(C+\varepsilon D)t} - e^{At}\right\| = = \varepsilon P(0)\|Dt\|O(\varepsilon^2). \quad (24)$$

Заметим, что оценка (24) не зависит от спектра матрицы А и выбора матричной формы. Следовательно, она может быть использована как для простого, так и для кратного спектра [2].

Полученные расчетные формулы позволяют находить стационарные распределения для таких марковских систем, взаимодействия между которыми имеют порядки малости большие, нежели соответствующие величины, характеризующие внутренние связи каждой системы.

Литература: 1. *Коваленко И.Н.* Исследование по надежности сложных систем. К.: Наук. думка, 1975. 210с. 2. *Дикарев В.А.* Асимптотические разложения решений обобщенной системы телеграфных уравнений //Радиотехника и электроника. АН СССР. 1974. №11.С.47-51. 3. *Анисимов В.В.* Асимптотические укрупнения неоднородных марковских и полумарковских систем с произвольным пространством состояний // ДНАН УССР. 1981. №12.С. 3-6.

Поступила в редколлегию 26.04.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Агапова Ирина Степановна, аспирантка ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятности, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61093, Харьков, пер. Кульбицкий, 22, кв. 2, тел. (9572) 40-39-13.

Бескоровайная Инна Владимировна, студентка группы ПМСАУ-96-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятности и стохастический анализ. Адрес: Украина, 61146, Харьков, ул. Академика Павлова, 140Г, кв.47, тел. (0572) 67-26-46.

Муравьёва Ирина Сергеевна, студентка группы ПМСАУ-96-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятности и стохастический анализ. Адрес: Украина, 61177, Харьков, ул. Полтавский Шлях, 156, кв.135, тел. (0572) 28-53-08.