
УДК 006.91

И.П. Захаров, Е.А. Климова

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКСЦЕССОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ДОСТОВЕРНОЙ ОЦЕНКИ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена методика вычисления расширенной неопределенности с помощью эксцессов входных величин. Проведено сравнение результатов оценивания коэффициента охвата разработанным методом с результатами, полученными методом Монте-Карло.

Ключевые слова: *расширенная неопределенность, коэффициент охвата, метод эксцессов.*

Введение

Одним из недостатков реализации модельного подхода к оцениванию расширенной неопределенности измерений на основе GUM [1], является невозможность учета реального закона распределения измеряемой величины при вычислении коэффициента охвата. В GUM этот коэффициент предлагается рассчитывать как коэффициент Стьюдента для эффективного числа степеней свободы ν_{eff} , определяемого по формуле Велча-Саттерсвейта. При этом, как показано в [2], основным недостатком такого подхода является игнорирование законов распределения вкладов неопределенности типа B , которые могут быть доминирующими в бюджете неопределенности.

В книге [3] для суммирования составляющих погрешности предложен метод эксцессов. Однако методика его реализации, описанная в [3], ограничена неисключенными систематическими погрешностями, распределенными только по равномерному, треугольному и нормальному законам; она не позволяет учитывать составляющие случайной погрешности для числа измерений меньше 6 и, кроме того, она является графо-аналитической, что затрудняет ее автоматизацию.

Целью статьи является совершенствование метода эксцессов для получения легко автоматизируемой универсальной методики оценивания расширенной неопределенности для широкого класса распределений типа B и любого числа степеней свободы вкладов неопределенности типа A .

Основа метода эксцессов

В работе [3] методом функционального анализа доказано, что интеграл свертки, используемый для получения закона распределения суммы нескольких составляющих погрешности измерений можно трансформировать в правило суммирования эксцессов распределений. В терминах концепции неопределенности это правило будет иметь следующий вид:

$$\eta(y) = \frac{\sum_{j=1}^m \eta(x_j) u_j^4(y)}{u_c^4(y)}, \quad (1)$$

где $\eta(y)$, $\eta(x_j)$ – эксцессы измеряемой y и j -й входной x_j величин, соответственно; $u_j(y)$ – вклад неопределенности j -й входной величины в неопределенность измеряемой величины; $u_c(y)$ – суммарная стандартная неопределенность, вычисляемая как

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2(y)}. \quad (2)$$

Известно также, что существует монотонно-возрастающая зависимость между коэффициентом охвата и эксцессом симметричных распределений (табл. 1, рис. 1, а).

Таблица 1

Значения эксцессов и коэффициентов охвата для различных законов распределений

Закон распределения	Эксцесс η	Коэффициент охвата k для вероятности p	Значение k для $p = 0,95$
Арксинусный	-1,5	$\sqrt{2} \sin \frac{p\pi}{2}$	1,40985
Равномерный	-1,2	$p\sqrt{3}$	1,64545
Треугольный	-0,6	$(1 - \sqrt{1-p})\sqrt{6}$	1,90177
Нормальный	0	$t_p(\infty)$	1,95996

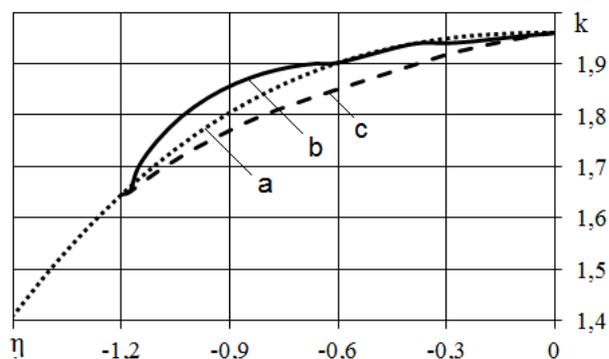


Рис. 1. Зависимости коэффициента охвата k от эксцесса η : а – построенная по данным табл. 1; б – композиция равномерных законов; с – композиция равномерного и нормального законов

Поэтому, зная эксцессы распределений входных величин, можно рассчитать эксцесс результата

измерений по формуле (1), а зная общую зависимость $k = \varphi(\eta)$, можно вычислить расширенную неопределенность как

$$U = k u_c(y). \quad (3)$$

Однако при исследовании композиций законов распределений, указанных в табл. 1, стройность этой теории нарушается даже при ограничении оценивания неопределенности составляющими типа В (рис. 1, б, 1, с; рис. 3).

Если же рассмотреть подход к оцениванию неопределенности с учетом составляющих типа А, то в работе [3] предлагается описывать составляющие случайной погрешности законом распределения Стьюдента с числом степеней свободы, для которых эксцесс распределения составляет $\eta_{Ст} = 6/(v-4)$, а коэффициент охвата рассчитывать по формуле:

$$k_{Ст} = t_{0,95}(v) \cdot \sqrt{(v-2)/v}. \quad (4)$$

Как видно из приведенных формул, такой подход возможен только при числе измерений больше пяти, кроме того, как показывают расчеты, применение формулы (4) приводит к недостоверным оценкам неопределенности измерений.

Исследование композиций законов распределений вкладов типа В

На практике применяются чаще всего законы распределения, указанные в табл. 1. Ниже приведено исследование композиций этих законов распределений в разных сочетаниях с целью получения достоверной зависимости $k = \varphi(\eta)$.

Композиция равномерных законов распределения. При наличии двух вкладов неопределенности u_1 и $u_2 = \alpha u_1$, распределенных равномерно, их суммарная стандартная неопределенность равна

$$u_{\text{тр}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = u_1 \sqrt{1 + \alpha^2},$$

а композиция их законов распределения имеет вид равнобедренной трапеции (рис. 2), изменяющейся от прямоугольника (при $\alpha = 0$) до треугольника (для $\alpha = 1$).

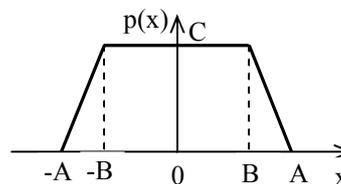


Рис. 2. Композиция двух равномерных законов распределения

Эксцесс такого распределения, вычисленный по формуле (1) определяется выражением:

$$\eta_{\text{тр}} = -1,2 \frac{1 + \alpha^4}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

Характерные точки А, В и С на рис. 2 равны:

$$A = \sqrt{3}(1 + \alpha)u_1; \quad B = \sqrt{3}(1 - \alpha)u_1;$$

$$C = 1/\left[2\sqrt{3}(1 + \alpha)u_1\right].$$

Как показывают расчеты, коэффициент охвата для такого распределения для вероятности 0,95 будет иметь вид:

$$k_{np} = \sqrt{3} \frac{1 + \alpha - \sqrt{0,2\alpha}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (5)$$

Зависимость $k = \varphi(\eta)$ для этого закона распределения изображена на рис. 1, б.

При наличии m равномерных законов распределений с одинаковой неопределенностью, их коэффициенты охвата и эксцессы приведены в табл. 2 и на рис. 1, б.

Таблица 2

Значения эксцессов и коэффициентов охвата для композиции m равномерных законов распределений

m	Эксцесс η	Формула для коэффициента охвата k для вероятности p	Значение k для $p = 0,95$
2	-0,6	$(1 - \sqrt{1-p})\sqrt{6}$	1,90177
3	-0,4	$3 - 2\sqrt[3]{3(1-p)}$	1,93734
4	-0,3	$\sqrt{3}(2 - \sqrt[4]{12(1-p)})$	1,93970
5*	-0,24	—	1,94247
6*	-0,2	—	1,9453
7*	-0,1714	—	1,9476

расчеты значений k выполнялись методом Монте-Карло

Композиция нормального и равномерного законов распределения. При наличии двух вкладов неопределенности, один из которых (u_n) распределен нормально, а другой ($u_p = \alpha u_n$) – равномерно, их суммарная стандартная неопределенность равна

$$u_{np} = \sqrt{u_n^2 + u_p^2} = u_n \sqrt{1 + \alpha^2},$$

а композиция их законов распределения имеет вид [4]:

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha u_n^2 \sqrt{6\pi}} \int_{-\alpha u_n \sqrt{3}}^{\alpha u_n \sqrt{3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dy. \quad (6)$$

Как показано в работе [4], значение интегральной функции распределения в точке расширенной неопределенности U_{np} для вероятности 0,95, равно:

$$F_{np}(U_{np}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha u_n^2 \sqrt{6\pi}} \int_0^{U_{np}} \int_{-\alpha u_n \sqrt{3}}^{\alpha u_n \sqrt{3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dy dx = 0,975.$$

Из этого выражения методом последовательного приближения было вычислено значение U_{np} , а затем и $k_{np} = U_{np}/u_{np}$. Эксцесс такого распределения, исходя из формулы (1) определяется выражением:

$$\eta_{np} = -1,2 \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

Зависимость k_{np} от η_{np} показана на рис. 1, с.

Композиции арксинусного закона распределения. Арксинусный закон распределения встречается как в практике угловых измерений, так и при измерениях на переменном (синусоидальном) токе, поэтому возможность его наличия необходимо учитывать при составлении методики оценивания неопределенности измерений. Ниже будут рассмотрены результаты исследования коэффициента охвата для композиция арксинусного закона распределения с законом распределения второго вклада, имеющего либо арксинусный (k_{aa}), либо равномерный (k_{ap}), либо нормальный (k_{an}) закон распределения. При этом если неопределенность арксинусного вклада составляла u_{a1} , а второго вклада – $u_2 = \alpha u_{a1}$, то суммарная стандартная неопределенность этих вкладов равна

$$u_c = u_{a1} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Эксцессы композиций двух арксинусных законов распределения (η_{aa}), арксинусного с равномерным (η_{ap}) и арксинусного с нормальным (η_{an}), вычислялись, соответственно, по формулам:

$$\eta_{aa} = -1,5 \frac{1 + \alpha^4}{(1 + \alpha^2)^2}; \quad \eta_{ap} = \frac{-1,5 - 1,2\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^2};$$

$$\eta_{an} = \frac{-1,5}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

Методом Монте-Карло [5] были проведены расчеты зависимости коэффициентов охвата от эксцессов распределения. Результаты этих расчетов представлены на рис. 3.

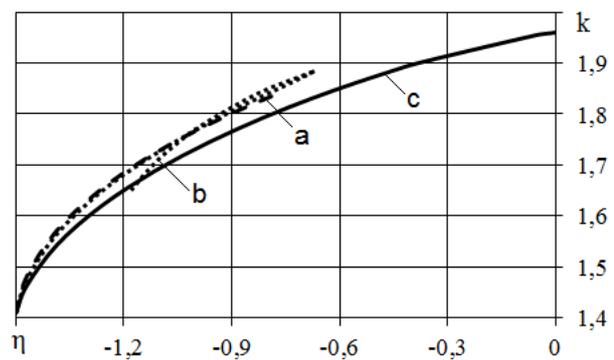


Рис. 3. Зависимости коэффициента охвата k от эксцесса η композиции арксинусного и: а – арксинусного; б – равномерного; с – нормального законов распределения

Учет вкладов неопределенности типа А

Будем рассчитывать параметры вкладов неопределенности типа А из расчета, что закон распределения случайной погрешности – нормальный. Тогда

эксцессы распределения для вкладов типа А будут равны нулю. Кроме того, стандартные неопределенности этих вкладов будем вычислять с поправкой на коэффициент надежности [5], который при малом числе измерений n равен:

$$h = t_p(v)/t_p(\infty), \quad (7)$$

где $t_p(v)$ – коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы $v = n - 1$ и уровня доверия p . Для $p = 0,95$ значения коэффициента надежности приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения коэффициента надежности h для числа измерений n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	6,483	2,195	1,624	1,417	1,312	1,248	1,206	1,177	1,154

Поскольку для составляющих типа В число степеней свободы принимается равным ∞ , то коэффициент надежности для них будет равен 1.

Аппроксимация зависимости коэффициента охвата от эксцесса результирующего распределения

Поскольку, как видно из рис. 1 и 3, нет однозначной зависимости между коэффициентом охвата и эксцессом распределения, будем искать аппроксимирующую зависимость $k = \varphi(\eta)$, обеспечивающую минимальную систематическую погрешность оценивания неопределенности измерений для всех возможных практических случаев.

Таковой оказалось выражение

$$k = 0,1085\eta^3 + 0,1\eta + 1,96, \quad (8)$$

которое обеспечивает аппроксимацию приведенных выше зависимостей с относительной погрешностью не более $\pm 2,5\%$, а без учета арксинусного закона – не более $\pm 1,3\%$.

Проверка точности этой формулы с учетом неопределенностей типа А осуществлялась методом Монте-Карло путем моделирование композиций законов распределения Стьюдента с числом степеней свободы от 2 до 10 и равномерного, нормального или арксинусного законов распределения для составляющих типа В. Коэффициент α при этом изменялся от 0,1 до 10.

Расчеты показали, что максимальная относительная погрешность использования формулы (8) не превысила $\pm 2,5\%$, для всех законов распределения, чисел степеней свободы и значений α .

Бюджет неопределенности с учетом эксцессов распределений

Бюджет неопределенности, учитывающий законы распределения вкладов типа В и легко поддающийся автоматизации в программе Excel будет иметь вид, приведенный в табл. 4. По сравнению с бюджетом неопределенности, используемым при оценивании неопределенности в соответствии с методикой GUM, он имеет дополнительный столбец с эксцессами вкладов распределений η_j , которые задаются исходя из табл. 1.

Значение эксцесса измеряемой величины (суммарного эксцесса) η_c вычисляется по формуле (1) с учетом формулы для оценивания суммарной стандартной неопределенности (2), в которых не учитываются коэффициенты надежности, значение коэффициентов надежности – по формуле (7), а суммарная стандартная неопределенность вычисляется с учетом коэффициентов надежности, т.е. по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 h_j^2 u^2(x_j)}. \quad (9)$$

Коэффициент охвата вычисляется по формуле (8), а расширенная неопределенность – по формуле (3).

Таблица 4

Бюджет неопределенности с эксцессами распределений

Входные величины	Значения входных величин	Стандартные неопределенности входных величин	Эксцессы распределения входных величин	Число степеней свободы	Коэффициенты чувствительности	Вклады неопределенности
X_1	x_1	$u(x_1)$	η_1	ν_1	c_1	$h_1 c_1 u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	η_2	ν_2	c_2	$h_2 c_2 u(x_2)$
...
X_m	x_m	$u(x_m)$	η_m	ν_m	c_m	$h_m c_m u(x_m)$
Измеряемая величина	Результат измерения	Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$	Эксцесс распределения измеряемой величины η_c	Уровень доверия	Коэффициент охвата k	Расширенная неопределенность U
Y	Y	(9)	(1), (2)	0,95	(8)	(3)

Выводы

1. Усовершенствован метод эксцессов для оценивания неопределенности измерений с учетом за-

конов распределения вкладов неопределенности типа В и коэффициентов надежности для вкладов неопределенности типа А. Исследована погрешность применения оценки коэффициента охвата на основе

эффективного числа степеней свободы для оценивания расширенной неопределенности.

2. С помощью ММК была исследована погрешность применения предложенной методики. Показано, что максимальная относительная погрешность использования предлагаемой методики не превысила $\pm 2,5\%$, для всех законов распределения, чисел степеней свободы от 2 до 10 и соотношений между вкладками неопределенности от 0,1 до 10.

3. Предложен бюджет неопределенности, позволяющий легко учитывать законы распределения вкладов типа *B*, число степеней свободы вкладов типа *A* и являющийся основой автоматизации оценивания неопределенности при построении программного средства в программе Excel.

Список литературы

1. ГОСТ Р 54500.3–2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения». – М.: ФГУП «Стандартинформ», 2012. – 101 с.

2. Захаров И.П. Получение достоверной оценки коэффициента охвата при составлении бюджета неопределенности измерений / И.П. Захаров, Е.А. Климова, Т.В. Чунихина // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 3 (110). – С. 41 – 44.

3. Тойберт П. Оценка точности результатов измерений / П. Тойберт. М.: Энергоатомиздат, 1988. – 88 с.

4. Rabinovich S.G. Evaluating Measurement Accuracy. A Practical Approach. Second Edition / S.G. Rabinovich. – NY: Springer, 2013. – 313 p.

5. Захаров И.П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 4 (71). – С. 34 – 37.

6. ISO 14253-2:1999 Geometrical Product Specifications (GPS) - Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment - Part 2: Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification.

Поступила в редколлегию 2.04.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕКСЦЕСІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ ДОСТОВІРНОЇ ОЦІНКИ РОЗШИРЕНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

І.П. Захаров, Е.А. Климова

Розглянуто методику розрахунку розширеної невизначеності. Проведено порівняння результатів оцінювання розширеної невизначеності вимірювань розробленим методом з результатами, отриманими методом Монте-Карло.

Ключові слова: розширена невизначеність, коефіцієнт покриття, метод ексцесів.

APPLICATION OF EXCESS METHOD TO OBTAIN RELIABLE ESTIMATE OF EXPANDED UNCERTAINTY

I.P. Zakharov, K.A. Klimova

A method of expanded uncertainty calculating is described. The results of coverage factor evaluation by the instrumentality of developed method with the results obtained by Monte Carlo simulation are compared.

Keywords: extended uncertainty, coverage factor, excess method.