РАДИОТЕХНИКА

УДК 517.958:537.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ БИКОНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ПОЛЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

ДОРОШЕНКО В.А., КЛИМОВА Н.П., ЗУЕВ Н.Г., ТИТАРЕНКО А.М.

В строгой постановке проводится исследование задачи возбуждения биконической поверхности с продольными щелями импульсным источником. Метод решения математической задачи базируется на использовании интегральных преобразований. В случаях узких щелей и узких конических лент получены аналитические решения. Изучается спектр начально-краевой задачи и особенности распределения поля вблизи нерегулярностей рассеивающей поверхности.

1. Введение

Структуры с характерными угловыми параметрами, к которым относятся конусы и биконусы, широко используются в антенной, радиолокационной и электронной технике благодаря своим широкополосным и сверхширокополосным свойствам. Наличие поверхностных сингулярностей (вершин, ребер, щелей, поверхностного импеданса и т.д.), с одной стороны, усложняет построение математической модели и решение соответствующей математической задачи, а с другой – расширяет границы области используемых результатов при проектировании и разработке современной радиоэлектронной аппаратуры. К одному из главных требований к антеннам импульсного переизлучения относится требование наименьшего искажения сигнала и преобразования входного сигнала в переизлученный с как можно большей амплитудой [1]. Базовой задачей при создании математической модели возбуждения электромагнитным импульсом конической или биконической антенны является задача о рассеянии поля несинусоидального источника неограниченной конической или биконической структурой, которая удовлетворяет упомянутым требованиям. Среди существующих математических методов решения электродинамических начально-краевых задач выделяются строгие методы, которые позволяют найти устойчивое решение в довольно широком диапазоне изменения параметров рассматриваемой задачи. При этом строгие решения являются эталонными по сравнению с решениями, найденными численными и приближенными методами. Однако строгие решения получены для ограниченного класса канонических структур даже при гармонической зависимости полей от времени, не говоря уже о решениях во временной области. Автору [2] удалось получить строгое решение электродинамической начально-краевой задачи для сплошного полубесконечного идеально проводящего кругового конуса во временной области. Предложенный в [2] математический метод пригоден для решения задач только со сплошной круговой конической геометрией.

Целью данной работы является получение строгого аналитического решения задачи возбуждения несинусоидальными источниками неограниченной идеально проводящей биконической поверхности с периодическими продольными щелями, являющейся моделью широкополосной или сверхширокополосной антенны, которая работает в импульсном режиме.

2. Математическая модель. Метод решения начально-краевой задачи

Пусть электрический ($\chi = 1$) или магнитный ($\chi = 2$) радиальный диполь, поле которого $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ в общем случае является несинусоидальным, возбуждает неограниченную, идеально проводящую, незамкнутую биконическую структуру Σ (рис.1).

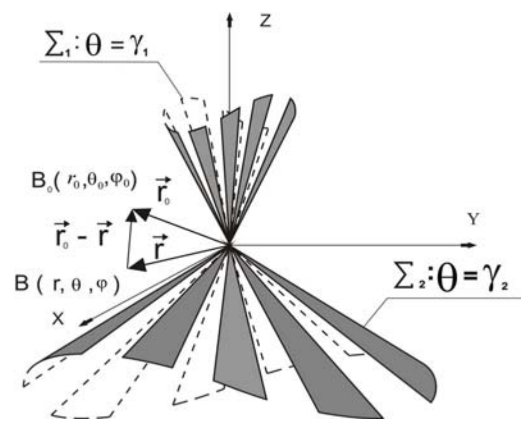

Рис. 1. Биконическая структура

Рассматриваемая коническая поверхность состоит из двух круговых незамкнутых конусов Σ_1 и Σ_2 с общей вершиной и осью ($\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$). Вдоль образующих каждого из конусов Σ_1 и Σ_2 периодически прорезаны N щелей с угловой шириной d_1 и d_2 соответственно. Угловая ширина щелей и период биконической структуры $l = 2\pi/N$ по величине равны величинам двугранных углов, образованных плоскостями, проходящими через ось биконуса и ребра соседних лент. Требуется найти в присутствии биконической поверхности и точечного источника в пространстве, заполненном однородной и изотропной средой, с электрической и магнитной проницаемостями ε, μ соответственно, электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла всюду вне биконуса и источника, краевому условию на биконусе Σ:

$$\vec{n} \times \vec{E}\Big|_{\Sigma} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ, принципу причинности и условию ограниченности энергии. Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение.[3]. В силу того, что конус является координатной поверхностью сферической системы координат, для решения поставленной начально-краевой электродинамической задачи целесообразно ввести эту систему r, θ, φ с началом в общей вершине конусов (центре биконической поверхности). Во введенной системе координат каждый из конусов Σ_1 и Σ_2 определяется уравнением $\theta = \gamma_1$ и $\theta = \gamma_2$ соответственно. Источник, помещенный в точку $B(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, имеет момент

$$\vec{P}_r^{(\chi)}(\vec{r}, t) = M_r^{(\chi)} \vec{e}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0),$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, коллинеарный радиус-вектору точки, в которой находится диполь; $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция; $f(t - t_0)$ функция, определяющая временную зависимость поля источника, который включается в момент времени $t = t_0$, причём $f(t - t_0) \equiv 0$, $t < t_0$.

Используя электрический $\upsilon^{(1)}(\vec{r}, t)$ или магнитный $\upsilon^{(2)}(\vec{r}, t)$ потенциалы Дебая, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля [3], сведём исходную электродинамическую задачу к первой ($\chi = 1$) или второй ($\chi = 2$) начально-краевой задаче математической физики для волнового уравнения [4] относительно потенциалов Дебая. В соответствии с этим искомый потенциал $\upsilon^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ удовлетворяет:

1) трехмерному волновому уравнению

$$(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\upsilon^{(\chi)}(\vec{r}, t) = -\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \notin \Sigma, \qquad (2)$$

$$\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t)\frac{1}{\varepsilon^{2-\chi}\mu^{\chi-1} r} M_r^{(\chi)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0), \quad \varepsilon\mu = \frac{1}{a^2};$$

2) начальному условию $\upsilon^{(\chi)} \equiv 0 \equiv \dfrac{\partial \upsilon^{(\chi)}}{\partial t}$, $t \le t_0$; (3)

3) краевому условию, соответствующему (1),

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}}\left(\frac{\partial \upsilon^{(\chi)}}{\partial t}\right)\Bigg|_{\Sigma} = 0; \qquad (4)$$

4) условию ограниченности энергии

$$\iiint_V \left(\left|\frac{\partial \upsilon^{(\chi)}}{\partial t}\right|^2 + \left|\nabla \upsilon^{(\chi)}\right|^2\right) dV < \infty.$$

Начально-краевая задача математической физики в такой постановке (2)–(4) имеет единственное решение [4]. Представим искомое электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_1(\vec{r}, t), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \vec{H}_1(\vec{r}, t),$$

$\vec{E}_0(\vec{r}, t)$, $\vec{H}_0(\vec{r}, t)$ – поле источника; $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$, $\vec{H}_1(\vec{r}, t)$ – поле, обусловленное присутствием конической структуры (рассеянное поле). Тогда $\upsilon^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ запишем так:

$$\upsilon^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \upsilon_0^{(\chi)}(\vec{r}, t) + \upsilon_1^{(\chi)}(\vec{r}, t), \qquad (5)$$

где

$$\upsilon_0^{(\chi)} = -\frac{M_r^{(\chi)}}{4\pi r_0 \varepsilon^{2-\chi}\mu^{\chi-1}}\frac{1}{R} f(t - t_0 - \frac{1}{a}R)\eta(t - t_0 - \frac{1}{a}R)$$

является потенциалом источника; $\upsilon_1^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ – искомый потенциал Дебая, соответствующий рассеянному полю; $\eta(\xi)$ – функция Хевисайда, $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$. Используя математический аппарат функций Грина [3], представим $\upsilon_1^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ в виде

$$\upsilon_1^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \frac{a M_r^{(\chi)}}{4\pi r r_0{}^2 \varepsilon^{2-\chi}\mu^{\chi-1}} \eta\left(t - t_0 - \frac{r + r_0}{a}\right) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th}\pi\tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \hat{b}_{m\tau}^{(\chi)} \hat{U}_{m,i\tau}^{(\chi)}(\theta, \varphi) \Phi_{i\tau}(t, r) d\tau, \qquad (6)$$

$$\hat{U}_{m,i\tau}^{(\chi)} = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \breve{\alpha}_{m,n}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, \\ \qquad 0 < \theta < \gamma_1, \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\breve{\beta}_{m,n}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) + \\ + \breve{\xi}_{m,n}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)\Big] e^{i(m+nN)\varphi}, \\ \qquad \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \breve{\eta}_{m,n}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, \\ \qquad \gamma_2 < \theta < \pi, \end{cases} \qquad (7)$$

$$\Phi_{i\tau}(t, r) = \int_{\frac{r + r_0}{a}}^{t - t_0} f(t - t_0 - z) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{chb}(z)) dz,$$

$$\operatorname{chb}(z) = \frac{a^2 z^2 - r^2 - r_0^2}{2 r r_0},$$

где $\hat{b}_{m\tau}^{(\chi)}$ – известные коэффициенты; $\breve{\alpha}_{m,n}^{(\chi)}$, $\breve{\beta}_{m,n}^{(\chi)}$, $\breve{\xi}_{m,n}^{(\chi)}$, $\breve{\eta}_{m,n}^{(\chi)}$ – неизвестные коэффициенты; $P_{-1/2+i\tau}^{s}(\cos\theta)$ – функция Лежандра 1-го рода [5]. Для нахождения неизвестных коэффициентов используем краевое условия (1) и условие непрерывности поля в щелях. В результате получаем сумматорные уравнения для определения $\breve{z}_{m,n}^{(\chi),\kappa}$, через которые выражаются все неизвестные коэффициенты:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \breve{z}_{m,n}^{(\chi),\kappa} e^{inN\varphi} = \hat{g}_{i\tau}^{(\chi),m}(\gamma_\kappa) e^{im_0 N\varphi}, \qquad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[N(n+\nu)\right]^{\tilde{\rho}(\chi)} \frac{|n|}{n} (1 - \tilde{\varepsilon}_{n,\kappa}^{(\chi)}) \times$$

$$\times \left\{ \breve{z}_{m,n}^{(\chi),1} \left[\hat{h}_{i\tau}^{(\chi),(n+\nu)N}(\pi - \gamma_2, \pi - \gamma_1)\right]^{\kappa-1} - \right. \qquad (9)$$

$$\left. - \breve{z}_{m,n}^{(\chi),2} \left[\hat{h}_{i\tau}^{(\chi),(n+\nu)N}(\gamma_1, \gamma_2)\right]^{2-\kappa} \right\} e^{inN\varphi} = 0,$$

где уравнение (8) выписано для ленты Σ_κ, уравнение (9) – для щели Σ_κ, $\kappa = 1, 2$,

$$\tilde z^{(\chi),\kappa}_{m,n} = \delta^1_\kappa \tilde\alpha^{(\chi)}_{m,n} \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_1^{\chi-1}} P^{(n+\nu)N}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_1) +$$

$$+\delta^2_\kappa \tilde\eta^{(\chi)}_{m,n}\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} P^{(n+\nu)N}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_2),$$

$$\left[N(n+\nu)\right]^{\tilde\rho(\chi)}\frac{|n|}{n}(1-\tilde\varepsilon^{(\chi)}_{n,\kappa}) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n+\nu)N+\chi-1}\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi(\sin\gamma_\kappa)^{1-\tilde\rho(\chi)}}\frac{\Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)}\times$$

$$\times\frac{1}{\dfrac{d^{\chi-1}}{d{\gamma_\kappa}^{\chi-1}}P^{(n+\nu)N}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_\kappa)\dfrac{d^{\chi-1}}{d{\gamma_\kappa}^{\chi-1}}P^{(n+\nu)N}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_\kappa)}\times$$

$$\times \frac{1}{1-\hat C^{(\chi),(n+\nu)N}_{i\tau}(\gamma_1,\gamma_2)},$$

$$\hat C^{(\chi),m+nN}_{i\tau}(\gamma_\kappa,\gamma_j) = \frac{\dfrac{d^{\chi-1}}{d\gamma_\kappa^{\chi-1}}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_\kappa)}{\dfrac{d^{\chi-1}}{d\gamma_\kappa^{\chi-1}}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_\kappa)}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{d^{\chi-1}}{d\gamma_j^{\chi-1}}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_j)}{\dfrac{d^{\chi-1}}{d\gamma_j^{\chi-1}}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_j)},$$

$\tilde\rho(\chi) = (-1)^{\chi-1}$, $\dfrac{m}{N} = m_0+\nu$, m_0 – ближайшее целое число к $\dfrac{m}{N}$; $-1/2 \le \nu < 1/2$, $\hat g^{(\chi),m}_{i\tau}(\gamma_\kappa)$ – известные коэффициенты; δ^n_κ – символ Кронекера; $\Gamma(z)$ – гамма-функция [6].

В частном случае конуса с продольными щелями Σ_2 и вставкой в виде сплошного конуса (рис.2) Σ_1 значение $\hat U^{(\chi)}_{m,i\tau}$ из формулы (7) запишется в виде

$$\hat U^{(\chi)}_{m,i\tau} = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\tilde\beta^{(\chi)}_{m,n}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\theta) + \right. \\ \left. +\tilde\xi^{(\chi)}_{m,n}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta)\right]e^{i(m+nN)\varphi}, \\ \qquad\qquad \gamma_1<\theta<\gamma_2 \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde\eta^{(\chi)}_{m,n}P^{m+nN}_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta)e^{i(m+nN)\varphi}, \\ \qquad\qquad \gamma_2<\theta<\pi, \end{cases}$$

а сумматорные уравнения (8), (9) для секторов Σ_2 и щелей Σ_2 соответственно:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat y^{(\chi)}_{m,n}e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}; \qquad (10)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[N(n+\nu)\right]^{\tilde\rho(\chi)}\frac{|n|}{n}(1-\tilde\varepsilon^{(\chi)}_{n,2})\hat y^{(\chi)}_{m,n}e^{inN\varphi} =$$

$$=\left[N(m_0+\nu)\right]^{\tilde\rho(\chi)}\frac{|m_0|}{m_0}\times$$

$$\times(1-\tilde\varepsilon^{(\chi)}_{m_0,2})\hat C^{(\chi),m}_{i\tau}(\gamma_1,\gamma_2)e^{im_0N\varphi},$$

$$\hat y^{(\chi)}_{m,n} = \tilde\eta^{(\chi)}_{m,n}\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}}P^{(n+\nu)N}_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_2). \qquad (11)$$

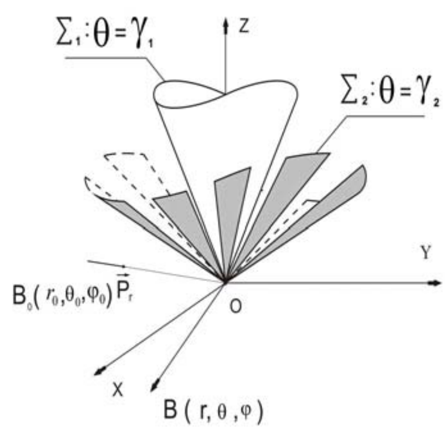

Рис. 2. Конус со сплошной вставкой

Решение систем 1-го рода (8)-(11) сопряжено с трудностями из-за его неустойчивости. Используя алгоритм регуляризации сумматорных уравнений [7, 8], можно их свести к системам линейных алгебраических уравнений 2-го рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2), имеющих устойчивые решения [7,9]. В случае узких щелей или конических лент решение СЛАУ-2 может быть получено аналитически, что даёт возможность провести также и качественный анализ процесса возбуждения конической поверхности и изучить структуры рассеянного поля.

3. Аналитичесие решения в случае узких щелей и конических секторов

Рассмотрим поверхность, состоящую из конуса с продольными щелями Σ_1 и сплошного конуса Σ_2. Для узких щелей ($d_1/l << 1$, $u^{(1)} = -\cos\pi d_1/l$, $1+u^{(1)} << 1$) потенциал Дебая $\upsilon^{(1)}_1(\vec r,t)$ вдали от кромок щелей имеет вид ($\theta_0 = 0$)

$$\upsilon^{(1)}_1(\vec r,t) = \int\limits_0^{+\infty}\hat{\hat s}^{(1)}_{i\tau}(\gamma_1)\hat D^{(1)}_{i\tau}(\gamma_1)\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_1)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau +$$

$$+\frac{1}{N}\left(\frac{1+u^{(1)}}{2}\right)\left\{\int\limits_0^{+\infty}\hat{\hat s}^{(1)}_{i\tau}(\gamma_2)\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_2)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau - \frac{1}{rr_0^2}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n\neq 0}e^{inN\varphi}\int\limits_0^{+\infty}\tilde a^{(1)}_0(\gamma_1,\tau)\Im^{(1),nN}_{i\tau}\frac{P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\theta)}{P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_1)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau\right\}+$$

$$+O((1+u^{(1)})^2\ln(1+u^{(1)})),\ 0<\theta<\gamma_1, \qquad (12)$$

$$\upsilon_1^{(1)}(\vec{r},t)=\int_0^{+\infty}\hat{s}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)\frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_1)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau+$$
$$+\frac{1+u^{(1)}}{2N}\left\{\int_0^{+\infty}\hat{s}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_2)\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_2)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau+\right.$$
$$+\frac{1}{rr_0^2}\sum_{n\neq 0}e^{inN\varphi}\int_0^{+\infty}\tilde{a}_0^{(1)}(\gamma_1,\tau)\frac{\Im_{i\tau}^{(1),nN}}{1-C_{i\tau}^{(1),nN}}\times$$
$$\times\left[C_{i\tau}^{(1),nN}\frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\gamma_1)}-\frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\gamma_1)}\right]\times$$
$$\left.\times\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau\right\}++O((1+u^{(1)})^2\ln(1+u^{(1)})),\ \gamma_1<\theta<\gamma_2, \tag{13}$$

где $\Phi_{i\tau}(t,r)=\int_{\frac{r+r_0}{a}}^{t-t_0}f(t-t_0-z)P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{chb}(z))dz,$

$$\mathrm{chb}(z)=\frac{a^2z^2-r^2-r_0^2}{2rr_0},$$

$$\hat{s}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)=\frac{\tilde{a}_0^{(1)}(\gamma_1,\tau)}{\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)-\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}},$$

$$C_{i\tau}^{(1),0}=C_{i\tau}^{(1),0}(\gamma_1,\gamma_2)=\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_1)}{P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_1)}\frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma_2)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma_2)},$$

$$\Im_{i\tau}^{(1),nN}=\frac{1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)}}{N|n|\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)}}\frac{1-C_{i\tau}^{(1),0}}{\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)+\frac{1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)}}{N|n|\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)}}}\frac{1}{\hat{D}_{i\tau}^{(1),nN}(\gamma_1)},$$

$$\tilde{\delta}_{n,\kappa}^{(\chi)}=\tilde{\varepsilon}_{n,\kappa}^{(\chi)}\left(-\frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}_{n,\kappa}^{(\chi)}}\right)^{2-\chi},$$

$$\hat{D}_{i\tau}^{(1),nN}(\gamma_1)=\frac{\frac{1}{N|n|}(1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)})\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)}{\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)}+\frac{1}{N|n|}(1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)})}+\frac{1}{N}\left(\frac{1+u^{(1)}}{2}\right).$$

Переходя в (12), (13) к предельному случаю $\gamma_2\to\pi$, можно получить представление для потенциала Дебая при излучении из одиночного конуса с продольными щелями. Спектр собственных значений определяется корнями уравнений с малой правой частью:

$$\bar{\tilde{A}}_{\hat{\mu}}\frac{P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_1)}{P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)}=-\frac{1}{N}\left(\frac{1+u^{(1)}}{2}\right), \tag{14}$$

$$\bar{\tilde{A}}_{\mu}^{-nN}\bar{\tilde{A}}_{\mu}P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma_1)P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_1)\times$$
$$\times\left(\bar{\tilde{A}}_{\mu}^{-nN}P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma_1)P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma_2)+\right.$$
$$\left.+\bar{\tilde{\Omega}}_{\hat{\mu}}^{-nN}\bar{\tilde{A}}_{\mu}P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_1)\right)^{-1}=$$
$$=-\left(\frac{1+u^{(1)}}{2N}\right),\ nN\geq 1, \tag{15}$$

где

$$\bar{\tilde{A}}_{\mu}^{-nN}=\frac{(-1)^{nN}\pi}{\cos\pi\mu}R_{\mu}^{-nN}(\gamma_1,\gamma_2),\bar{\tilde{A}}_{\mu}=\bar{\tilde{A}}_{\mu}^{-nN}|_{n=0},$$

$$R_{i\tau}^{s}(\gamma_1,\gamma_2)=P_{-1/2+i\tau}^{s}(\cos\gamma_1)P_{-1/2+i\tau}^{s}\times$$
$$\times(-\cos\gamma_2)-P_{-1/2+i\tau}^{s}(-\cos\gamma_1)P_{-1/2+i\tau}^{s}(\cos\gamma_2),$$

$$\bar{\tilde{\Omega}}_{\hat{\mu}}^{-nN}=\frac{\Gamma(1/2+\hat{\mu}-nN)}{\Gamma(1/2+\hat{\mu}+nN)}P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}\times$$
$$\times(\cos\gamma_2)-N|n|P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_1)\bar{\tilde{A}}_{\mu}^{-nN}.$$

Корни уравнения (14) лежат в окрестности корней $\bar{\tilde{A}}_{\hat{\mu}}=0$, $P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_1)=0$, а уравнения (15) – вблизи нулей $\bar{\tilde{A}}_{\hat{\mu}}^{-\breve{q}}$, $P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-\breve{q}}(\cos\gamma_1)$, $\breve{q}\geq 0$. В случае, когда $\gamma_2=\pi-\gamma_1$, спектр собственных значений $\left\{\tilde{v}_q^{nN+}\right\}$ с точностью до учитываемых членов в асимптотических разложениях совпадает с подмножеством возмущенного щелями пространственного спектра для сплошного конуса, где

$$\tilde{v}_q^{nN+}=\tilde{\alpha}_q^{nN+}-\left(\frac{1+u_1}{2N}\right)\times$$
$$\times\left.\frac{(-1)^{nN}\cos\pi\hat{\mu}}{\pi\frac{\Gamma(1/2+\hat{\mu}+nN)}{\Gamma(1/2+\hat{\mu}-nN)}P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(-\cos\gamma_1)\frac{d}{d\hat{\mu}}P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_1)}\right|_{\mu=\tilde{\alpha}_q^{nN+}}+$$
$$+O((1+u^{(1)})^2),\ nN\geq 0, P_{-1/2+\tilde{\alpha}_q^{nN+}}^{-nN}(\cos\gamma_1)=0,$$

$$\tilde{\alpha}_q^{nN+}=\tilde{\alpha}_q^{nN+}(\gamma_1).$$

Таким образом, пространственный спектр начально-краевой задачи для биконуса, состоящего из конуса с узкими щелями и сплошного конуса, содержит множество возмущенных щелями собственных значений для сплошных конуса и биконуса.

Поведение составляющих поля при $r<<1$ характеризуется наименьшим корнем $\tilde{v}_0^+$ уравнения (15), $\gamma_2=\pi-\gamma_1$:

$$\tilde{v}_0^+=\tilde{\alpha}_0^+-\left(\frac{1+u_1}{2N}\right)\times$$
$$\times\frac{\cos\pi\tilde{\alpha}_0^+}{\pi P_{-1/2+\tilde{\alpha}_0^+}(-\cos\gamma_1)\frac{d}{d\mu}P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_1)|_{\mu=\alpha_0^+}}+$$
$$+O((1+u^{(1)})^2).$$

При этом электрическое поле по мере приближения к центру биконуса ведет себя как $r^{-3/2+\tilde{v}_0^+}$, а магнитное – $r^{-1/2+\tilde{v}_0^+}$.

В случае узких конических лент биконическая структура состоит из сплошного конуса Σ_2 и конической поверхности Σ_1, образованной расходящимися из вершины ($r=0$) узкими секторами ($(1-d_1)/l<<1$, $1-u^{(1)}<<1$). Выражение для электрического потенциала $\upsilon_1^{(1)}(\vec{r},t)$ в этом случае записывается так ($\theta_0=0$):

$$\upsilon_1^{(1)}(\vec{r},t)=\upsilon^{(1)}_{1,\text{ñï ëí}.\Sigma_2}-\frac{1}{\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}}\frac{1}{rr_0^2}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{inN\varphi}\int_0^{+\infty}\tilde{a}_0^{(1)}(\gamma_1,\tau)(1-C_{i\tau}^{(1),0})\times \tag{16}$$

$$\times\frac{1}{|n|}(1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)})\frac{1}{\left(\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)-\frac{1}{N}\sum_{s\neq0}\frac{1}{|s|}\tilde{\delta}_{s,1}^{(1)}\right)\hat{F}_{i\tau}(\gamma_2)}\times$$

$$\times\frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\gamma_1)}\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau+O\left(\frac{1-u^{(1)}}{\ln(1-u^{(1)})}\right),0<\theta<\gamma_1;$$

$$\upsilon_1^{(1)}(\vec{r},t)=\upsilon^{(1)}_{1,\text{ñï ëí}.\Sigma_2}-\frac{1}{\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}}\frac{1}{rr_0^2}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{inN\varphi}\int_0^{+\infty}\tilde{a}_0^{(1)}(\gamma_1,\tau)\breve{\tilde{\Omega}}_{i\tau}^{*(1)}\times$$

$$\times\left[\frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\gamma_2)}-C_{i\tau}^{(1),nN}\frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\cos\gamma_2)}\right]\times$$

$$\times\Phi_{i\tau}(t,r)d\tau+O\left(\frac{1-u^{(1)}}{\ln(1-u^{(1)})}\right),\ \gamma_1<\theta<\gamma_2, \tag{17}$$

$$\breve{\tilde{\Omega}}_{i\tau}^{*(1)}=\frac{\left(1-C_{i\tau}^{(1),0}\right)\frac{1}{|n|}(1-\tilde{\delta}_{n,1}^{(1)})}{\left(1-C_{i\tau}^{(1),nN}\right)\left(\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_1)-\frac{1}{N}\sum_{s\neq0}\frac{1}{|s|}\tilde{\delta}_{s,1}^{(1)}\right)\hat{F}_{i\tau}(\gamma_2)},$$

$$\hat{F}_{i\tau}(\gamma_2)=\frac{1}{\hat{D}_{i\tau}^{(1)}(\gamma_2)-\frac{1}{N}\sum_{s\neq0}\frac{1}{|s|}\tilde{\delta}_s^{(1)}}-\frac{1}{\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}},$$

а $\upsilon^{(1)}_{1,\text{ñï ëí}.\Sigma_2}$ представляет собой электрический потенциал Дебая, соответствующий рассеянному одиночным сплошным конусом $\theta=\gamma_2$ полю в отсутствии конической поверхности $\theta=\gamma_1$. Устремляя ширину конических секторов к нулю ($u^{(1)}\to1$), из (16), (17) получаем выражения для $\upsilon^{(1)}_{1,\text{ñï ëí}.\Sigma_2}$ в случае возбуждения сплошного конуса $\theta=\gamma_2$ электрическим радиальным диполем.

В рассматриваемом случае биконической поверхности спектр собственных значений состоит из множества корней уравнения с малой правой частью ($N/\ln((1-u_1)/2)<<1$):

$$P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_2)P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)\times$$

$$\times\left(\left[P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_2)\frac{1}{Nn}-\frac{\Gamma(1/2+\hat{\mu}+nN)}{\Gamma(1/2+\hat{\mu}-nN)}\bar{\tilde{A}}_{\hat{\mu}}^{-nN}\times\right.\right.$$

$$\left.\times P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_2)\right]P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)-$$

$$\left.-\tilde{\bar{L}}_{\hat{\mu}}P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_2)\right)^{-1}=-\frac{N}{\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}},\ nN\geq1 \quad , \tag{18}$$

$$\tilde{\bar{L}}_{\mu}=\tilde{\bar{L}}_{\mu}(\gamma_1,\gamma_2)=\bar{\tilde{A}}_{\hat{\mu}}P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_1)-\frac{1}{N}P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_2)\sum_{\substack{p\neq0\\p\neq n}}\frac{1}{|p|}\tilde{\delta}_{p,1}^{(1)}.$$

Корни уравнения (18) находятся в окрестности нулей присоединенных функций Лежандра $P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-m}(\cos\gamma_2)$, $m\geq0$ и имеют вид ($\gamma_2\neq\pi/2$):

$$\tilde{z}_s=\hat{\beta}_s-\frac{N}{\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}}\times$$

$$\times\left.\frac{\pi P_{-1/2+\hat{\mu}}(-\cos\gamma_2)[P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_1)]^2}{\cos\pi\hat{\mu}\frac{d}{d\hat{\mu}}P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)}\right|_{\hat{\mu}=\hat{\beta}_s}+$$

$$+O(\ln^2(1-u^{(1)})),$$

$$P_{-1/2+\hat{\beta}_s}(\cos\gamma_2)=0;$$

$$\tilde{z}_s^{-nN}=\alpha_s^{-nN}-\frac{N}{\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}}\times$$

$$\times\frac{\pi(-1)^{nN}}{\cos\pi\hat{\mu}}\frac{\Gamma(1/2+\hat{\mu}+nN)}{\Gamma(1/2+\hat{\mu}-nN)}\frac{P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(-\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\mu}P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_2)}\times$$

$$\times[P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-nN}(\cos\gamma_1)]^2\,|_{\mu=\alpha_s^{-nN}}+O(\ln^{-2}(1-u^{(1)})),$$

$$nN\geq1,\ s\geq0;\ P^{-nN}_{-1/2+\alpha_s^{-nN}}(\cos\gamma_2)=0.$$

Следует отметить, что при $\gamma_2\geq\pi/2$, $nN\geq1$ наименьшим корнем уравнения (18) и, соответственно, наименьшим собственным значением спектра является $\tilde{z}_0$. Для $\gamma_2\neq\pi/2$

$$\tilde{z}_0=\tilde{\beta}_0-\frac{1}{\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}}\times$$

$$\times\left.\frac{\pi P_{-1/2+\hat{\mu}}(-\cos\gamma_2)[P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma_1)]^2}{\cos\pi\hat{\mu}\frac{d}{d\mu}P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)}\right|_{\mu=\tilde{\beta}_0}+$$

$$+O(\ln^2(1-u^{(1)})). \tag{19}$$

Учитывая, что при $\pi/2<\gamma_2<\pi$,

$$\frac{P_{-1/2+\tilde{\beta}_0}(-\cos\gamma_2)}{\cos\pi\tilde{\beta}_0\frac{d}{d\hat{\mu}}P_{-1/2+\hat{\mu}}(\cos\gamma_2)|_{\mu=\tilde{\beta}_0}}>0,$$

приходим к неравенству

$$\tilde{\beta}_0 < \tilde{z}_0 . \quad (20)$$

В случае углов раствора сплошного конуса Σ_2, близких к π $(\pi-\gamma_2 << 1)$, спектральное значение $\tilde{z}_0$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{z}_0 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln\left(2/(\pi-\gamma_2)\right)} - \frac{1}{\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}},$$

$$-\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2} > 0 . \quad (21)$$

Анализ рассеянного такого типа биконической поверхностью поля показал, что в его структуре отсутствует сферическая ТЕМ волна, которая существует в структуре поля, рассеянного одиночным конусом, составленным из узких конических лент. Устремляя в (21) γ_2 к π, что приводит к исчезновению сплошного конуса, получаем наименьшее собственное значение спектра μ_0 [10] для системы из N узких секторов при возбуждении электрическим радиальным диполем, а в структуре рассеянного поля появляется сферическая ТЕМ волна.

Полагая в (18) $\gamma_2 = \pi/2$, что соответствует развороту сплошного конуса Σ_2 в плоскость, находим спектр собственных значений в этом случае, наименьшее из которых

$$\tilde{z}_0 = 3/2 - \frac{2\cos^2\gamma_1}{\frac{1}{N}\ln\frac{1-u^{(1)}}{2}} + O(\ln^{-2}(1-u^{(1)})). \quad (22)$$

Характер поведения электрического поля при $r << 1$ определяется слагаемым порядка $r^{-3/2+\tilde{z}_0}$, а магнитного – $r^{-1/2+\tilde{z}_0}$ и зависит как от угла раскрыва сплошного конуса $\Sigma_2 : \theta = \gamma_2$, так и от числа угловых размеров конических лент (19), (21), (22). Согласно (20)-(22) электрическое поле вблизи центра биконической поверхности ($r << 1$) имеет интегрируемую особенность, а магнитное поле убывает по мере приближения к центру. Однако эта особенность слабее по сравнению с особенностью электрического поля у вершины одиночного, сплошного идеально проводящего конуса и полупрозрачного одиночного конуса [10].

4. Выводы

Получено строгое аналитическое решение модельной задачи импульсного возбуждения незамкнутой биконической антенны специального вида. Метод решения рассмотренной задачи базируется на привлечении аппарата интегральных преобразований и метода задачи сопряжения. В приближении узких щелей и узких конических лент приведены представления для скалярных потенциалов, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля. Из найденного решения для биконической структуры специального вида получено решение для важного частного случая импульсного возбуждения щелевой конической антенны. Качественно изучена структура рассеянного поля, а также пространственный спектр начально-краевой задачи, что дало возможность исследовать влияние щелей и поведения поля вблизи вершины.

Научная новизна данной работы состоит в том, что в ней впервые получено строгое аналитическое решение для модельной задачи импульсного возбуждения конической антенны с продольными щелями, щелевой конической антенны с вставкой в виде сплошного экрана. Изучено влияние продольных щелей и сплошной вставки на структуру поля и его пространственно-временное распределение.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они могут быть использованы: как эталонные для сопоставления с результатами, полученными при решении подобных электродинамических задач приближенными или численными методами; при проектировании современных радиотехнических и радиофизических систем, элементами которых являются широкополосные или сверхширокополосные антенны и отражатели.

Литература: 1. *Meloney J.G., Smith G.S.*Optimization of a conical antenna for pulse radiation: an efficient design using resistive loading // Trans.on Ant.&Propagat. 1993. Vol.41. No.7. P. 940–947. **2.** *Борисов В.В.* Электромагнитные поля неустановившихся токов. СПб.: Изд-во С.–Петерб. ун-та, 1996. 208с. **3.** *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224с. **4.** *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 470 с. **5.** *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ., 1952. 475с. **6.** *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие транцендентные функции. В 3-х т. Т.1. М.: Наука, 1973. 407с. **7.** *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 252с. **8.** *Doroshenko V.A., KravchenkoV.F., Pustovoit V.I.* Diffraction of electromagnetic waves on an imperfectly conducting conical structure of a partial shape// Doklady Physics. 2006. Vol. 51, №10. P. 529–533. **9.** *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах рассеяния электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, №9. С. 1209–1213. **10.** *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т.8, №6. С.4–78.

Поступила в редколлегию 14.03.2009

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Панченко А.Ю.

Дорошенко Владимир Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики, декан факультета ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-13-72.

Климова Наталья Павловна, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры высшей математики ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-13-72.

Зуев Николай Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-13-72.

Титаренко Александр Михайлович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-13-72.