УДК 621.372

А. В. ГРИЦУНОВ

К ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРАХ

Исследование связи видов колебаний в резонаторах и замедляющих структурах актуально в связи с решением проблем электромагнитной совместимости радиосредств [1]. Предполагается, что обмен энергией между основным и конкурирующими видами за счет связи между ними в генераторах M-типа значительно влияет на амплитуду конкурирующих видов и, как следствие, на уровень внеполосных излучений этих приборов.

Результаты исследований связанных колебаний и волн [2, 3] мало пригодны для решения задачи возбуждения колебаний, связанных через характерные для приборов M-типа неоднородности (неточности в изготовлении замедляющей системы, спицы пространственного заряда и т. п.). Для решения многих задач электроники СВЧ необходим удобный для практического использования математический аппарат теории связанных видов колебаний.

В теории возбуждения объемных резонаторов [4, 5] предполагается, что поле вынужденного колебания складывается из полей собственных колебаний данного резонатора. В силу ортогональности последних присутствуют только те виды, для которых интеграл

$$\int\limits_V \frac{\partial \bar{j}_{\text{внешн}}}{\partial t} \bar{E}_p dV \tag{1}$$

отличен от нуля. Здесь $\bar{j}_{\text{внешн}}$ — плотность тока внешних возбуждающих факторов (штырей, витков, щелей и т. п.); $\bar{E}_p(\bar{r})$ — структура p-го собственного вида. Интегрирование производится по всему объему резонатора V, причем подынтегральная функция отлична от нуля только в местах расположения упомянутых элементов связи резонатора с внешними цепями. Очевидно, что при этом амплитуды различных видов не зависят друг от друга.

При введении внутрь резонатора неоднородности (деформация стенки, проводящий штырь, область с иной диэлектрической проницаемостью ε, свободные заряды и т. д.) система его собственных колебаний соответствующим образом изменяется. Найдя новую систему, можно решить задачу о поле вынужденных колебаний в таком резонаторе.

Однако осуществление подобного подхода связано с известными математическими трудностями. Поэтому при исследовании резонаторов с неоднородностью часто прибегают к методу связанных колебаний [2], основная идея которого заключается в следующем. Предполагается, что первоначальная структура собственных колебаний с введением неоднородности существенно не меняется, а изменение амплитуды полей видов колебаний обусловлено взаимным влиянием этих видов, которое учитывается с помощью коэффициентов связи. Задача при этом сводится к определению коэффициентов связи.

По такой методике исследуем колебания, связанные введением в резонатор электронного пространственного заряда с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Этот случай представляет наибольший интерес в электронике СВЧ.

Предположим, что нам известна полная система векторных функций $\overline{E}_q(\overline{r})$ и собственных частот ω_{0q} $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ данного объемного резонатора в отсутствие пространственного заряда. Суммарное электрическое поле в резонаторе можно представить в виде [5]

$$\overline{E}(\overline{r}, t) = \sum_q A_q \overline{E}_q - \operatorname{grad}\Phi, \tag{2}$$

где $A_q(t)$ — амплитуда q-го вида; потенциал Φ удовлетворяет обобщенному уравнению Пуассона: $\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\Phi) = -\rho/\varepsilon_0$ (3). Найдем амплитуды электрических полей всех видов колебаний в резонаторе как функции плотности стороннего тока возбуждения $\overline{j}_{\text{внешн}}$. При решении уравнений Максвелла для объемного резонатора получим два исходных уравнения электрического поля в его объеме:

$$\Delta\overline{E}_q + \varepsilon\mu\left(\frac{\omega_{0q}}{c}\right)^2 \overline{E}_q = 0; \tag{4}$$

$$\Delta\overline{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\mu\frac{\partial\overline{j}}{\partial t}, \tag{5}$$

где $\overline{j}$ — плотность полного тока в данной точке резонатора.

Считая $\mu = 1$ во всем объеме резонатора и подставляя в уравнение (5) выражение для $\overline{E}$ из уравнения (2), после несложных преобразований получаем

$$\sum_q \varepsilon\left(\frac{\partial^2 A_q}{\partial t^2} + \omega_{0q}^2 A_q\right)\overline{E}_q = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\overline{j}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{grad}\Phi. \tag{6}$$

Представим $\overline{j}$ в виде $\overline{j} = \overline{j}_{\text{внешн}} + \rho\overline{v}$ (7), где $\overline{v} = \overline{v}(\overline{r}, t)$ — скорость элемента пространственного заряда (фактически электрона) в данной точке внутри резонатора; $\frac{\partial\overline{j}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t} + \rho\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}$ (8), где при $v \ll c$

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t} = -\left|\frac{e}{m}\right|\overline{E}(\overline{r}, t). \tag{9}$$

Подставляя в формулу (9) $\overline{E}(\overline{r}, t)$ из (2), с учетом соотношений ортогональности [5]

$$\int_V \varepsilon \overline{E}_p \overline{E}_q dV = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q; \\ N_p, & \text{если } p = q; \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_V \varepsilon \operatorname{grad} \Phi \overline{E}_p dV = 0, \tag{11}$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} + (\omega_{0p}^2 + \omega_{pp}^2) A_p = -\frac{1}{N_p \varepsilon_0} \int_V \frac{\partial \overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t} \overline{E}_p dV +$$

$$+ \frac{1}{N_p \varepsilon_0} \left|\frac{e}{m}\right| \sum_{q \neq p} A_q \int_V \rho(\overline{r}) \overline{E}_q \overline{E}_p dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \left|\frac{e}{m}\right| \int_V \rho(\overline{r}) \operatorname{grad} \Phi \overline{E}_p dV, \tag{12}$$

где

$$\omega_{pp}^2 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left|\frac{e}{m}\right| \int_V \rho(\overline{r}) E_p^2 dV. \tag{13}$$

Первый индекс в величине ω_{pp} указывает на некоторое сходство ее с плазменной частотой, хотя, как видно из уравнения (13), будучи связанной со структурой p-го колебания (на что указывает второй индекс), она не является плазменной частотой в обычном смысле.

Вычисление последнего члена в уравнении (12) представляет значительные трудности.

Можно показать, что если условие

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_{0p}}\right)^2 \ll 1, \tag{14}$$

где $\omega_p^2 = -\left|\frac{e}{m}\right| \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, удовлетворяется во всем объеме резонатора, то этим слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым членом в правой части уравнения (12). Практически для частоты 9,375 МГц ($\lambda = 3{,}2$ см) условие (14) удовлетворяется при концентрациях электронов до 10^{17} м$^{-3}$.

Обозначив

$$\beta_{pq} = -\frac{1}{N_p \varepsilon_0 \omega_p'^2} \left|\frac{e}{m}\right| \int_V \rho(\overline{r}) \overline{E}_p \overline{E}_q dV, \tag{15}$$

где $\omega_p'^2 = \operatorname{Re}\{\omega_{0p}^2 + \omega_{pp}^2\}$, получим

$$\frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} + (\omega_{0p}^2 + \omega_{pp}^2) A_p = \frac{1}{N_p \varepsilon_0} \int_V \frac{\partial \overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t} \overline{E}_p dV - \sum_{q \neq p} \omega_p'^2 \beta_{pq} A_q. \tag{16}$$

Выражение (16) представляет собой уравнение возбуждения для случая связанных колебаний. Из него видно, что введение электронного пространственного заряда в резонатор, во-первых, изменяет собственную частоту p-го вида колебания (слагаемое $A_p \omega_{pp}^2$) — известный из электроники эффект электронного смещения частоты и, во-вторых, делает его амплитуду зависящей от амплитуд A_q других видов колебаний, существующих в резонаторе (слагаемые $\omega_p'^2 \beta_{pq} A_q$). Множители β_{pq} назовем коэффициентами связи p-го вида колебания с q-ми видами.

Решим уравнение (16) относительно A_2 для частного случая двух связанных колебаний на частотах $\omega_1^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{p1}^2$, $\omega_2^2 = \omega_{02}^2 + \omega_{p2}^2$ при условии

$$\int\limits_V \frac{\partial \overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t} \overline{E}_2 dV = 0, \tag{17}$$

т. е. когда второй вид непосредственно извне не возбуждается.

Строго говоря, при этом необходимо решать систему двух дифференциальных уравнений (16) относительно A_1 и A_2, так как эти величины взаимосвязаны. Но если наложить условие $\beta_{12} A_2 \ll \beta_{21} A_1$, что с учетом примерного равенства β_{12}, β_{21} означает значительное превалирование амплитуды первого вида, можно ограничиться решением уравнения $\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \omega_2^2 A_2 = -\omega_2'^2 \beta_{21} A_1$ (18). Здесь $A_1 = A_{1m} e^{i\omega_1' t}$, A_{1m} находится из решения обычного уравнения возбуждения (считая $\beta_{12} = 0$). Положим частоты ω_1 и ω_2 равными:

$$\omega_1 = \omega_1' \left(1 - \frac{i}{2Q_1}\right); \quad \omega_2 = \omega_2' \left(1 - \frac{i}{2Q_2}\right), \tag{19}$$

где $\omega_1' = \omega_2' = \omega'$ (вырожденные виды); Q_1, Q_2 — добротности соответственно первого и второго видов колебаний. Тогда

$$A_2 = \beta_{21} Q_2 A_{1m} e^{i\left(\omega' - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{20}$$

или

$$A_{2m} = \beta_{21} Q_2 A_{1m}, \tag{21}$$

где

$$\beta_{21} = -\frac{1}{N_2 \varepsilon_0 \omega'^2} \left| \frac{e}{m} \right| \int\limits_V \rho(\overline{r}) \overline{E}_1 \overline{E}_2 dV. \tag{22}$$

Точное решение (с учетом обратного влияния второго колебания на первое) в случае совпадения частоты пространственной гармоники тока $\overline{j}_{\text{внешн}}$ с собственной вырожденной частотой ω' дает

$$A_{1m} = \frac{Q_1}{\omega'^2 (1 + \beta_{12}\beta_{21} Q_1 Q_2) N_1 \varepsilon_0} \int\limits_V \left(\frac{\partial \overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t}\right)_m \overline{E}_1 dV; \tag{23}$$

$$A_{2m} = \frac{\beta_{21}Q_1Q_2}{\omega'^2(1+\beta_{12}\beta_{21}Q_1Q_2)\,N_1\varepsilon_0}\int\limits_V \left(\frac{\partial \overline{j}_{\text{внешн}}}{\partial t}\right)_m \overline{E}_1 dV. \qquad (24)$$

Графики зависимостей A_{1m}, A_{2m} от коэффициента связи (при условии $Q_1 = Q_2 = Q$, $\beta_{12} \approx \beta_{21} \approx \beta$) показаны на рис. 1.

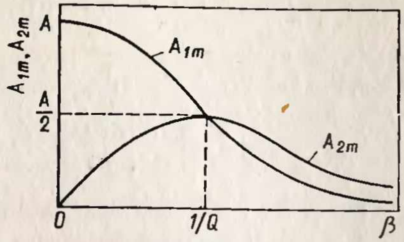

Рис. 1

Изложенная теория позволяет простым путем вычислять коэффициенты связи, если известны структуры связанных видов и распределение пространственного заряда в пределах резонатора.

В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости коэффициента связи между взаимно перпендикулярными видами колебаний H'_{111}, H''_{111} в цилиндрическом резонаторе, пронизываемом от торца к торцу однородным электронным потоком круглого поперечного сечения, от полярных координат оси этого потока r и φ. По оси ординат отложен коэффициент связи в относительных единицах, R_0 — радиус резонатора. Из графиков видно, что наибольшая связь между колебаниями достигается

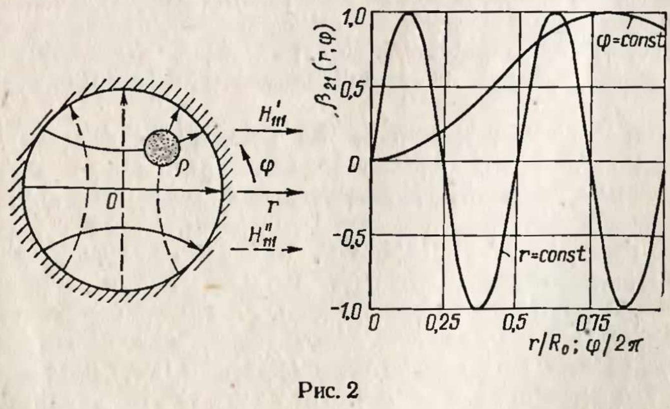

Рис. 2

при помещении пространственного заряда в тех областях резонатора, где электрические поля обоих колебаний максимальны и векторы их образуют между собой наименьший угол. Отрицательный знак коэффициента связи означает изменение фазы второго колебания в уравнениях (18—24) на π.

Полученные в работе результаты позволяют с большей степенью точности описать взаимодействие видов колебаний в замедляющих системах приборов СВЧ.

Список литературы: 1. *Электромагнитная* совместимость радиоэлектронных средств и непреднамеренные помехи. Общие вопросы ЭМС: Межсистемные помехи/Сост. Дональд Р. Ж. Уайт—М.: Сов. радио, 1977.—352 с. 2. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 352 с. 3. *Пироженко В. К.* К теории несимметричных связанных электродинамических линий передач.— Радиотехника, 1972, вып. 21, с. 141—150. 4. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны.— М.: Сов. радио, 1957.—582 с. 5. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике.— М.: Сов. радио, 1973.—400 с.

Поступила 3 июля 1979 г.

УДК 621.376.332

В. Д. БОБРЫШЕВ, канд. физ.-мат. наук,
В. М. ДМИТРИЕВ, д-р физ.-мат. наук, *Н. Н. ПРЕНЦЛАУ*

СИСТЕМА АПЧ СВЧ-ГЕНЕРАТОРОВ К РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ ПРОХОДНОГО РЕЗОНАТОРА С ПОДАВЛЕННОЙ НЕСУЩЕЙ

Применение традиционных методов автоматической подстройки частоты (АПЧ) генераторов СВЧ-диапазона к частоте сверхпроводящего резонатора позволило получить не только уникальные результаты [1], но и в известной степени удовлетворить непрерывно возрастающую потребность в малосерийных, достаточно мощных высокостабильных генераторах различного назначения. Для дальнейшего повышения ресурса их работы, надежности и экономичности необходимо более детально проанализировать и, возможно, пересмотреть устоявшиеся взгляды на предельно реализуемые в системах АПЧ параметры без использования явления сверхпроводимости и сверхнизких температур.

В статье рассмотрена одна из возможных систем АПЧ с частотным эталоном в виде проходного предельного резонатора с подавлением несущей, обеспечивающая долговременную относительную нестабильность частоты $\Delta f/f \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ при температуре не ниже 77 К. Отметим, что использование для этой цели сложных мостовых схем [2] неприемлемо из-за неудовлетворительной эталонности, повышенных габаритов и себестоимости.

Требования к параметрам резонаторов, используемых в качестве частотных дискриминаторов систем АПЧ. Проходной резонатор с подавленной несущей. По сути любой дискриминатор представляет собой четырехполюсник, преобразующий частотные флуктуации СВЧ-генератора в амплитудные или фазовые. Воспользуемся известным соотношением, связывающим комплексные амплитуды сигналов на входе $\dot{A}$ и выходе $\dot{B}$ произвольного четырехполюсника с коэффициентом прохождения $\dot{T}(\omega)$

$$\dot{B} = \dot{A}\dot{T}(\omega) = \dot{A}\,|T(\omega)|\,e^{j\psi_T(\omega)}, \tag{1}$$

где $|T(\omega)|$, $\psi_T(\omega)$ — амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики соответственно.