УДК 621.372.00

РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ ПРИ ЧАСТОТНОМ АНАЛИЗЕ СХЕМ

ПРАСОЛ И.В., СЕМЕНЕЦ В.В.

Предложен алгоритм получения упрощенной модели линейной электронной схемы для задачи анализа и оптимизации в частотной области. В качестве исходной использована модель в базисе узловых потенциалов. Алгоритм основан на выделении существенных и несущественных реактивных емкостных элементов в заданном диапазоне частот. Введены критерии разбиения и аппроксимация обратной матрицы.

Частотный анализ линейных аналоговых электронных схем с помощью ЭВМ осуществляют дискретно-частотным методом. Для каждого значения частоты входных сигналов решается система линейных сравнений с комплексными коэффициентами

$$H \cdot X = J, \tag{1}$$

где H – некоторая матрица схемы; X – вектор неизвестных; J – задающий вектор.

С целью снижения вычислительных затрат в качестве уравнений (1) часто используют упрощенные уравнения, которые могут быть получены эвристически или формальными методами. Среди последних заслуживают внимания методы автоматизированной редукции по полной математической модели схемы.

Известны алгоритмы, основанные на исключении внутренних переменных исходной модели, построенной в однородном координатном базисе узловых потенциалов. Он имеет следующие недостатки: формируемая модель адекватна в ограниченном диапазоне частот: возможна потеря адекватности при наличии в схеме внутренних доминирующих реактивностей. Для их устранения целесообразно увеличивать размер модели путем учета части внутренних узлов в качестве формальных полюсных. Однако более эффективно вводить внутренние переменные в модель схемы, представленную в виде уравнений

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_c \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_c \\ -I_i \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где H_{cc}, H_{ci}, H_{ic}, H_{ii} – субматрицы матрицы модели размерностей $c \times c, c \times i, i \times c, i \times i$ соответственно; Φ_c – вектор потенциалов полюсов схемы размерности c; V_i, I_i – соответственно векторы напряжений и токов емкостей схемы размерности i; J_c – вектор полюсных токов размерности c; c, i – число полюсов и емкостей схемы соответственно.

Уравнения (2), непрерывные к вариациям параметров элементов схемы, могут быть получены всегда, если емкостные элементы не образуют контуры между собой или через полюса [1,2].

Рассмотрим алгоритм формирования уравнений по модели (2), который сохраняет для заданного частотного диапазона минимальное количество внутренних переменных модели (2).

Если схема содержит только емкостные реактивные элементы, то множество всех емкостей схемы C представляется в виде объединения:

$$\hat{C} = \hat{C}_s \cup \hat{C}_m, \tag{3}$$

где $\hat{C}_s, \hat{C}_m$ – множества существенных и несущественных реактивностей соответственно, а s, m – их мощности. Критерий такого разбиения будет определен ниже. Второе блочное уравнение системы (2) имеет следующий вид:

$$H_{is} \cdot \Phi_c + H_{ii} \cdot V_i = -I_i, \tag{4}$$

где Φ_c, V_i, I_i – изображения соответствующих векторов по Лапласу. При условии, что матрица H_{ii} – неособенная, а также учитывая соотношение $I_i = p \cdot C_{ii} \cdot V_i$, получаем

$$H_{ii}^{-1} \cdot H_{ic} \cdot \Phi_c + V_i = -p \cdot H_{ii}^{-1} \cdot C_{ii} \cdot V_i, \tag{5}$$

где C_{ii} – диагональная матрица параметров емкостных элементов; $p = j \cdot \omega$ – комплексная переменная.

Предположим, что матрица $A = p \cdot H_{ii}^{-1} \cdot C_{ii}$ простой структуры для всех значений модуля p в интервале $[0, \omega_{max}]$, где ω_{max} – верхняя граница частотного диапазона.

Обозначив $A_1 = \omega_{max} \cdot A'$, где $A' = H_{ii}^{-1} \cdot C_{ii}$, считаем известным инвариантное правое подпространство матрицы A_1 размерности s. Базис этого подпространства, соответствующий таким собственным значениям l_j матрицы A_1, что $|\lambda_j| > 1$ $(j = \overline{1,s})$, обозначим $X_i, \ldots, X_s$. Составим матрицу $T = [X_1, \ldots, X_s]$ размерностью $i \times s$. Так как векторы X_i линейно независимы, то существует минор матрицы T размером $s \times s$, отличный от нуля. Предположим, что он располагается в первых s строках матрицы T. Если это не выполняется, то минор всегда может быть получен путем перестановок соответственно строк и столбцов матрицы так, чтобы ее спектр не менялся. Разобьем матрицы T и A на блоки следующим образом:

$$T = \begin{bmatrix} E_{ss} \\ K_{ms} \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} A_{ss} & A_{sm} \\ A_{ms} & A_{mm} \end{bmatrix} = p \cdot \begin{bmatrix} A'_{ss} & A'_{sm} \\ A'_{ms} & A'_{mm} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

где E_{ss} – единичная матрица порядка s.

Построим матрицы порядка s:

$$S = \begin{bmatrix} E_{ss} & 0 \\ K_{ms} & E_{mm} \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} E_{ss} & 0 \\ -K_{ms} & E_{mm} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Умножим уравнение (5) слева на S^{-1} и осуществим переход к новым переменным Z_i в соответствии с преобразованием:

$$V_i = S \cdot Z_i, \tag{8}$$

а тогда уравнение (5) перепишется в виде:

$$G_{ic} \cdot \Phi_c + Z_i = -G_{ii} \cdot Z_i, \tag{9}$$

где $G_{ic} = S^{-1} \cdot H_{ii}^{-1} \cdot H_{ic}$; $G_{ii} = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

В [3] доказано, что

$$S^{-1} \cdot A_1 \cdot S = \begin{bmatrix} L & A_{sm1} \\ 0 & A_{mm1} - K_{ms} A_{sm1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $L = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ ($|\lambda_j| > 1$, $j = \overline{1,s}$), а индекс «1» относится к субматрицам матрицы A_1, представленной в блочном виде аналогично (6). При этом $S_r(A_1) = S_r(L) \bigcup S_r(A_{mm1} - K_{ms} \cdot A_{sm1})$, где $S_r(\cdot)$ обозначает спектр матрицы $(\cdot)$. Так как диагональные элементы матрицы L по модулю больше единицы, то

$$\rho(A_{mm1} - K_{ms} \cdot A_{sm1}) < 1, \qquad (11)$$

где $\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус матрицы $(\cdot)$. Это неравенство и является критерием разбиения (3).

Поскольку спектральный радиус матрицы равен максимальному из модулей ее собственных чисел, а при умножении матрицы на скаляр все собственные числа умножаются на его величину, то (11) остается справедливым для всех w из интервала $[0, w_{max}]$. Представим уравнение (9) в соответствии с блочным разбиением (6):

$$\begin{aligned} G_{sc} \cdot \Phi_c + Z_s &= -p \cdot L' \cdot Z_s - p \cdot A'_{sm} \cdot Z_m; \\ G_{mc} \cdot \Phi_c + Z_m &= -p \cdot (A'_{mm} - K_{ms} \cdot A'_{sm}) \cdot Z_m, \end{aligned} \qquad (12)$$

где $L' = \mathrm{diag}\{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s\}$; λ'_j ($j = \overline{1,s}$) – собственные значения матрицы A', соответствующие значениям λ'_j ($j = \overline{1,s}$); $G_{ic} = \left[G^t_{sc},\, G'_{mc}\right]^t$.

Из второго блочного уравнения (12) найдем Z_m:

$$Z_m = -(E_{mm} + p \cdot G_{mm})^{-1} \cdot G_{mc} \cdot \Phi_c, \qquad (13)$$

где $G_{mm} = A'_{mm} - K_{ms} \cdot A'_{sm}$.

Согласно лемме Неймана, матрица $E_{mm} + p \cdot G_{mm}$ на основании неравенства (11) имеет обратную во всем диапазоне рассматриваемых частот. Поэтому можно получить низкочастотное приближение:

$$(E_{mm} + p \cdot G_{mm})^{-1} \approx E_{mm} + p \cdot G_{mm}. \qquad (14)$$

При этом погрешность аппроксимации обратной матрицы оценивается величиной

$$\left\|O_a(p^2)\right\| = \frac{|p|^2 \cdot \|G_{mm}\|^2}{1 - |p| \cdot \|G_{mm}\|}, \qquad (15)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает матричную норму. Тогда

$$Z_m \approx -(E_{mm} + p \cdot G_{mm}) \cdot G_{mc} \cdot \Phi_c. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в первые блочные уравнения (2) и (12) с учетом (8) и выделяя свободные члены и коэффициенты при первой степени p, получаем

$$\begin{bmatrix} H_{cc} - G_{cm} \cdot G_{mc} + p \cdot G_{cm} \cdot G_{mm} \cdot G_{mc} & G_{cs} \\ G_{sc} - p \cdot A'_{sm} \cdot G_{mc} & E_{ss} + p \cdot L' \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Phi_c \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_c \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где G_{cs}, G_{cm} обозначают первые s и последующие m столбцов матрицы $G_{ci} = H_{ci} \cdot S$.

Учитывая погрешность выражения (16), обусловленную аппроксимацией (15), оценим динамическую погрешность ММ (17) как

$$\left\|O_м(p^2)\right\| = \left\| \begin{matrix} G_{mc} \\ |p| \cdot A'_{sm} \end{matrix} \right\| \cdot \left\|O_a(p^2)\right\| \cdot \|G_{mc}\|. \qquad (18)$$

Представим уравнение (4) и первое блочное системы (2) в соответствие с (6):

$$\begin{aligned} H_{cc} \cdot \Phi_c + H_{cs} \cdot V_s + H_{cm} \cdot V_m &= J_c; \\ G_{sc} \cdot \Phi_c + V_s &= -p \cdot A'_{ss} \cdot V_s - p \cdot A'_{sm} \cdot V_m; \\ G_{mc} \cdot \Phi_c + V_m &= -p \cdot A'_{ms} \cdot V_s - p \cdot A'_{mm} \cdot V_m. \end{aligned} \qquad (19)$$

Заметим, что матрицы $G_{(\bullet)(\bullet)}$ и $A'_{(\bullet)(\bullet)}$ системы (19) в общем случае не совпадают с одноименными матрицами, рассмотренными выше.

Используя лемму Неймана, из третьего блочного уравнения (19) находим низкочастотное приближение

$$V_m \approx -\left(E_{mm} - p \cdot A'_{mm}\right) \cdot G_{mc} \cdot \Phi_c - p \cdot A'_{ms} \cdot V_s. \qquad (20)$$

Подставляя (20) в остальные уравнения (19) и пренебрегая членами, содержащими p во второй степени и выше, получаем уравнения редуцированной модели

$$\begin{gathered} \left(H_{cc} - H_{cm} \cdot G_{mc} + p \cdot H_{cm} \cdot A'_{mm} \cdot G_{mc}\right) \cdot \Phi_c + \\ + \left(H_{cs} - p \cdot H_{cm} \cdot A'_{ms}\right) \cdot V_s = J_c; \qquad (21) \\ \left(G_{sc} - p \cdot A'_{sm} \cdot G_{mc}\right) \cdot \Phi_c + \left(E_{ss} + p \cdot A'_{ss}\right) \cdot V_s = 0. \end{gathered}$$

Рассмотренный алгоритм редукции обладает свойством адаптации к условиям его применения, так как модель формируется для заданного априори частотного диапазона, а при фиксированных границах диапазона возможно динамически настраивать модель по точности путём варьирования состава множества C_s. Это позволяет включать в состав маршрута схемотехнических расчётов этап редукции модели с последующим использованием их в процедурах анализа и параметрической оптимизации.

Литература: 1. *Прасол И.В.* Алгоритм построения моделей аналоговых схем в пространстве напряжений сторон многополюсника.– К.– 1985. Рукопись деп. УКРНИИНТИ.– №1505.– 14 с.. 2. *Валеев К.Г.* Расщепление спектра матриц.– К.:Наука.– 1986.– 86 с. 3. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления.– М.:Наука.– 1984.– 176 с.

Прасол Игорь Викторович, канд. техн. наук, доцент кафедры биомедицинских электронных устройств и систем ХТУРЭ. Научные интересы: компьютерное моделирование и оптимизация сложных аналоговых схем, синтез цифровых схем, проектирование портативных диагностических устройств. Увлечения и хобби: нетрадиционные методы лечения, психология, автотуризм. Адрес: 310723, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-64.

Семенец Валерий Васильевич, д-р техн. наук, профессор, проректор по учебно-методической работе ХТУРЭ. Научные интересы: конструкторское проектирование БИС, логический синтез. Увлечения: футбол. Адрес: 310723, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 30-27-05.