МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО БАЛАНСА В ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Альджаафрех М. Р., Наумейко И.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

В работе исследовано поведение моделей экономики и экологических популяций на базе системы типа Лотка – Вольтерра [1,2]. Рассматривается поведение такой динамической системы при различных возмущениях. Численные эксперименты с исходной и преобразованной системами показывают, что малое по амплитуде периодическое воздействие на популяцию может приводить к нарушению устойчивости и даже к хаотической динамике системы.

Прикладное значение работы определяется тем, что полученные в ней результаты позволяют прогнозировать результат внешнего влияния на экологические и экономические системы.

Пусть внешние факторы вызывают периодическое изменение абсолютной и относительной скорости одного из «видов»:

$$\begin{aligned} dx/dt &= rx - \gamma_1 xy, \\ dy/dt &= -S(t)y + \gamma_2 xy + n\cos\Omega t. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $S(t) = s(1 + \frac{n}{s}\cos\Omega t)$; Ω – частота периодических возмущений, близка к частоте предельного цикла без возмущений. Автономная система, соответствующая (1), при $n = 0$ имеет нетривиальное состояние равновесия $x_* = s/\gamma_2$, $y_* = r/\gamma_1$.

Во всех случаях периодического возмущения базовой модели для численного решения задачи Коши типа (1-2), соответствующие модели приводятся к форме:

$$Z' = f(Z, m, \Omega, t), \tag{2}$$

где $f(Z,m,\Omega,t) = F(Z) + P(m,\Omega,t)$, $Z^T = (x(t), y(t))$, при начальных условиях $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ для каждой траектории.

Здесь автономное слагаемое вектора правой части системы (2) для всех моделей одинаково.

Ниже риведены результаты работы MathCad-программы – график решения по точкам (рис. 1) для численности «жертв». Бифуркационный параметр – **Ω** мало отличается от частоты 1/T цикла в (2); r, s, g_0, g_1 – нормированные к 1 параметры из (1); при этом $T \approx 1$.

В полном соответствии с теорией [3], численное решение $x(t)$ показывает, что амплитуда колебаний меняется нерегулярно, с тенденцией к неограниченному увеличению с ростом t.

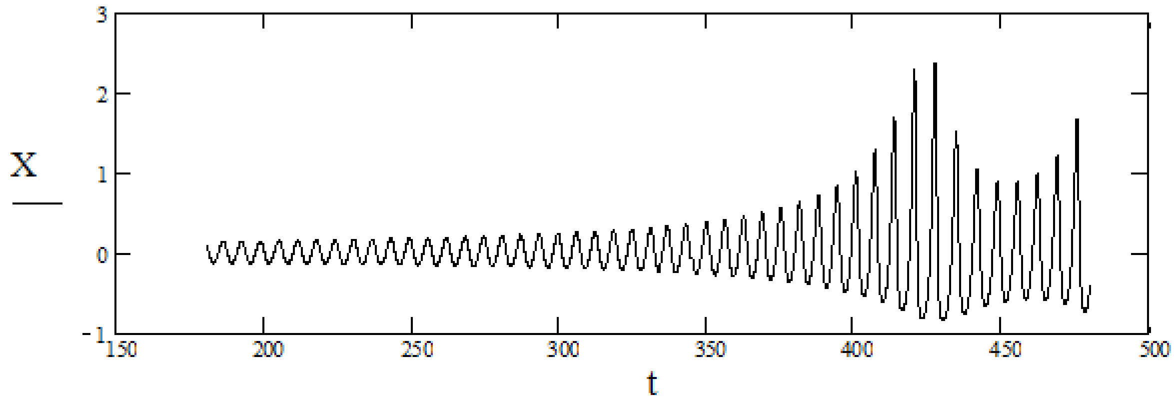

Рис. 1 - Решение $x(t)$ для «жертв»

Выводы

Качественная теория дифференциальных уравнений предсказывает неограниченные хаотические движения неавтономной системы вблизи периодического решения автономной при совпадении периодов. Численные эксперименты показывают, что:

1) фазовые портреты систем имеют вид 2-мерной проекции нерезонансного тора;

2) синусоидальное воздействие на популяцию, как путем изменения скорости размножения одного из видов, так и самой численности, приводит к непериодической динамике системы;

3) в работе определены параметры возмущений, приводящие вблизи «резонанса» Ω=1/T, как к непериодическому росту популяций, так и к непериодическим движениям в конечной области, или к стабилизации вблизи нуля.

Всё это подтверждает, что даже достаточно простые модели экосистем выявляют их неустойчивость – чувствительность к малым внешним возмущениям. Помимо экологии, эти результаты найдут применение в макроэкономике при исследовании конкуренции субъектов экономической деятельности – фирм, компаний и государств.

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В.Вольтерра. –М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.–288 с.

2. Jost, C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose [Text] / C. Jost, G. Devulder, J.A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // J. Anim. Ecol.– 2005.– № 74(5).–C. 809–816.

3. Мартынюк, А. А. Хаотическая потеря устойчивости предельного цикла в задаче Вольтерра [Текст] / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Докл. АН Украины. – 1996. – № 4. – С. 1–7.