



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Б.В. ДЗЮНДЗЮК, А.Ф. МЕЛЬНИКОВ,
В.В. СЕМЕНЕЦ, Л.И. ШКЛЯРОВ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ
ЭКЗАМЕНАМ
ПО МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЫ**

ХАРЬКОВ 1998

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Б.В. ДЗЮНДЗЮК, А.Ф. МЕЛЬНИКОВ,
В.В. СЕМЕНЕЦ, Л.И. ШКЛЯРОВ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ
ПО МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЫ**

Рекомендовано министерством
образования Украины

ХАРЬКОВ 1998

Дзюндзюк Б.В., Мельников О.Ф., Семенець В.В., Шкляров Л.Й. Навчальний посібник до вступних іспитів з математики. — Харків: ХТУРЕ, 1998. — 552 с. — Рос. мовою.

ISBN 5-7763-2772-5

За редакцією д-ра техн. наук, проф. В.В. Семенця

Приведены теоретические сведения по основным разделам курса математики факультета довузовской подготовки. Каждый раздел содержит ссылки на литературу, позволяющую освоить теоретический материал.

Даны задания для письменного экзамена по математике, которые предлагались абитуриентам Харьковского государственного технического университета радиоэлектроники (ХТУРЭ) в 1995-1997 годах, а также школьникам на олимпиадах, которые проводились в ХТУРЭ в 1996-1997 годах. Подавляющее большинство заданий приведено с решениями. Кроме того, приведены задания, которые предлагались в 1995-1997 годах на собеседованиях с абитуриентами, имеющими на это право.

Пособие содержит также контрольные задания для абитуриентов, обучающихся в системе довузовской подготовки заочно.

Для учащихся и учителей средних школ, лицеев, колледжей, гимназий, а также учащихся и преподавателей системы довузовской подготовки.

Наведені теоретичні відомості з основних розділів курсу математики факультету довузівської підготовки. Кожен розділ містить посилання на літературу, яка дозволяє засвоїти теоретичний матеріал.

Наведені завдання для письмового іспиту з математики, які були запропоновані абітурієнтам Харківського державного технічного університету радіоелектроніки (ХТУРЕ) у 1995-1997 роках, а також учням на олімпіадах, що проводилися в ХТУРЕ у 1996-1997 роках. Більшість завдань наведена з розв'язками. Крім того, наведені завдання, які були запропоновані у 1995-1997 роках на співбесідах з абітурієнтами, які мали на це право.

Посібник містить у собі також контрольні завдання для абітурієнтів, які навчаються в системі довузівської підготовки заочно.

Для учнів та вчителів середніх шкіл, лицей, коледжів, гімназій, а також учнів та викладачів системи довузівської підготовки.

Іл. 264. Бібліогр.: 8 назв.

Рецензенти: В.С.ПРОЦЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, професор (ХАІ);
В.В. КАРМАЗІН, канд. техн. наук, професор (ХТУРЕ)

ISBN 5-7763-2772-5

© Б.В. Дзюндзюк,
А.Ф. Мельников,
В.В. Семенець,
Л.И. Шкляров, 1998

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДЗЮНДЗЮК Борис Васильович
МЕЛЬНИКОВ Олександр Федорович
СЕМЕНЕЦЬ Валерій Васильович
ШКЛЯРОВ Леонід Йосипович

Навчальний посібник до вступних іспитів з математики

Відповідальний випусковий В.В.Семенець
Редактор О.Г.Троценко

Підп. до друку 23.03.98. Формат 60х84¹/₁₆. Умов. друк. арк. 31,9. Облік вид.
арк. 28,8. Зам. № 357. Тираж 100 прим. Ціна договірна.

ХТУРЕ. 310726 Харків, просп. Леніна, 14.

Надруковано у видавництві ХТУРЕ.
310726 Харків, просп. Леніна, 14.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1 Краткие сведения из теории	4
Тема 1.1 Алгебраические неравенства.....	4
Тема 1.2 Алгебраические уравнения.....	13
Тема 1.3 Системы алгебраических уравнений	32
Тема 1.4 Логарифмические уравнения	42
Тема 1.5 Показательные уравнения	48
Тема 1.6 Системы логарифмических и показательных уравнений	49
Тема 1.7 Логарифмические неравенства	53
Тема 1.8 Показательные неравенства	61
Тема 1.9 Тригонометрические уравнения	70
Тема 1.10 Тригонометрические неравенства	88
Тема 1.11 Системы тригонометрических уравнений	97
Тема 1.12 Тожественные преобразования тригонометрических выражений	106
Тема 1.13 Планиметрия.....	113
Тема 1.14 Стереометрия.....	123
Тема 1.15 Метод координат, векторы.....	138
Тема 1.16 Производная функции.....	145
Тема 1.17 Касательная к графику функции	146
2 Варианты вступительного письменного экзамена по математике (с решениями).....	152
3 Варианты заданий по математике на олимпиаде (с решениями)	425
4 Варианты билетов письменного экзамена для самостоятельного решения	504
5 Варианты билетов для собеседования по математике	511
6 Контрольные задания для абитуриентов, обучающихся заочно в системе довузовской подготовки	528
Анализ ошибок и трудностей, возникающих при сдаче вступительного экзамена по математике	548
Список рекомендуемой литературы	550

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для абитуриентов, учителей школ, а также для преподавателей, работающих в системе довузовской подготовки.

При подготовке пособия использованы материалы вступительных испытаний, которые проводятся в Харьковском государственном техническом университете радиоэлектроники (ХТУРЭ). Система вступительных испытаний в ХТУРЭ, как и в других ВУЗах, включает целый комплекс мероприятий (олимпиады по математике, вступительные экзамены, собеседование и др.). Цель настоящего пособия — помочь будущим абитуриентам в подготовке к вступительным испытаниям по математике, способствовать созданию прочной основы математических знаний.

Учебное пособие включает следующие разделы:

1. Краткие сведения из теории.
2. Варианты вступительных экзаменов в 1995-1997 годах (89 вариантов с решениями).
3. Варианты заданий на олимпиадах в 1995-1997 годах (26 вариантов с решениями).
4. Варианты заданий для письменного экзамена для самостоятельного решения (19 вариантов).
5. Варианты заданий по собеседованию за 1995-1997 года (85 вариантов).
6. Контрольные задания для абитуриентов, обучающихся заочно в системе довузовской подготовки.

В конце учебного пособия приведен анализ трудностей, встречающихся при сдаче вступительного экзамена. Приведен список учебной литературы.

1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Тема 1.1 Алгебраические неравенства

Литература: [1, § 3.1-3.4; 4, гл. VI, §§ 17; 6, гл. 9].

Две функции, соединённые между собой знаком $>$, $\geq$, $<$ или $\leq$, образуют неравенство

$$\begin{aligned} f(x) > \varphi(x) & \quad (f(x) \geq \varphi(x)); \\ f(x) < \varphi(x) & \quad (f(x) \leq \varphi(x)). \end{aligned}$$

Решением этих неравенств называется значение x , удовлетворяющее этим неравенствам. Решить неравенство — значит найти множество всех решений или установить, что неравенство не имеет решений.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называют множество всех значений неизвестного, на котором существуют функции $f(x)$ и

$\varphi(x)$. При определении ОДЗ часто вводятся также дополнительные условия, которые связаны с характером неравенства. Например, для

неравенства $x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ область определения ОДЗ находится следующим образом:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2] \cup [3; +\infty).$$

Здесь уточнено, что левая часть неравенства, которая по условию не

превышает $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$, не может быть отрицательной.

Говорят, что два неравенства эквивалентны (равносильны), если множества всех решений этих неравенств совпадают. Неравенство эквивалентно совокупности неравенств, если множество всех его решений совпадает с объединением всех решений неравенств, входящих в эту совокупность.

Под множеством решений системы неравенств понимают пересечение множеств решений всех неравенств, входящих в эту систему.

Говорят, что неравенство эквивалентно системе неравенств, если множество его решений совпадает с множеством решений этой системы.

Будем рассматривать решение рациональных неравенств методом интервалов. Существуют различные схемы реализации этого метода [1].

Рассмотрим одну из этих схем, предполагая, что решается неравенство $f(x) > \varphi(x)$. В случае неравенства $f(x) < \varphi(x)$ эта схема аналогична.

1. Перенести все члены неравенства влево:

$$f(x) - \varphi(x) > 0.$$

2. Левую часть полученного неравенства привести к общему знаменателю:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ разложить на множители. Если при этом появляются одинаковые множители, нужно заменить их соответствующей степенью. Например:

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-a)}{x-c} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2(x-b)}{x-c} > 0.$$

При сокращении нужно иметь в виду, что

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-a)} > 0 \Leftrightarrow x-a \neq 0, \frac{x-b}{x-c} > 0.$$

4. Исключить из разложения нелинейные множители. Это исключение выполняется следующим образом.

Если в разложении имеется множитель $ax^2 + bx + c$, где $b^2 - 4ac < 0$, то его исключение зависит от знака старшего коэффициента a и выполняется по правилам:

$$\frac{(ax^2 + bx + c)P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \end{cases}.$$

Если в разложении имеется множитель $(x-a)^{2k}$, то его исключение осуществляется по правилам:

$$\frac{(x-a)^{2k}P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \end{cases},$$

$$\frac{(x-a)^{2k}P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \end{cases},$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \end{cases},$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0 \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \end{cases}.$$

Нелинейный множитель $(x-a)^{2k+1}$ исключается по правилу:

$$\frac{(x-a)^{2k+1}P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)P(x)}{Q(x)} > 0.$$

5. На числовой оси отметить точки, в которых обращаются в нуль все множители, стоящие в числителе и знаменателе левой части неравенства, полученного в результате выполнения пунктов “1” — “4”. При этом, если неравенство нестрогое, точки, соответствующие множителям числителя, будем отличать полными кружками, а точки, соответствующие множителям знаменателя, пустыми. Если неравенство строгое, все точки отмечаются пустыми кружками.

6. Поставить знак в каждом промежутке, на которые числовая ось разбивается отмеченными точками.

Вначале поставить знак в самом правом промежутке на числовой оси по правилу: знак “+” ставится, если число множителей вида $(a-x)$ четное, и знак “-”, если это число нечетное. Знаки в остальных промежутках ставятся с учетом того, что они чередуются в соседних промежутках.

7. Выбираются промежутки, в которых стоит знак “+”, если неравенство, полученное в пункте “4”, имеет вид $F(x) > 0$, или “-”, если это неравенство имеет вид $F(x) < 0$. Эти промежутки включают в себя крайние точки, отмеченные на числовой оси полными кружками, и не включают точки,

отмеченные пустыми кружками. Объединение этих промежутков и представляет собой множество решений данного неравенства.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{3x - 2 - x^2} - \frac{3}{7x - 4 - 3x^2} > 0.$$

Решение: приведем к общему знаменателю левую часть неравенства

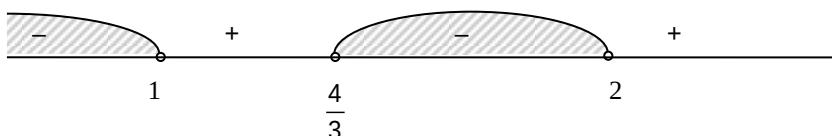
$$\begin{aligned} \frac{3}{3x^2 - 7x + 4} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} > 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{(3x - 4)(x - 1)} - \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3(x - 2) - (3x - 4)}{(3x - 4)(x - 1)(x - 2)} > 0 &\Leftrightarrow \frac{-2}{(3x - 4)(x - 1)(x - 2)} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(3x - 4)(x - 1)(x - 2)} < 0. \end{aligned}$$

Левая часть полученного неравенства не содержит нелинейных множителей.

Отметим на числовой оси точки $x = \frac{4}{3}$, $x = 1$, $x = 2$. Эти точки разбивают

численную ось на интервалы $(-\infty; 1)$, $(1; \frac{4}{3})$, $(\frac{4}{3}; 2)$,

$(2; +\infty)$. Отметим эти интервалы знаком “+” или “-” в соответствии с изложенными правилами:



Выберем интервалы, отмеченные знаком “-”. Их объединение и содержит множество решений данного неравенства.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (\frac{4}{3}; 2)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0.$$

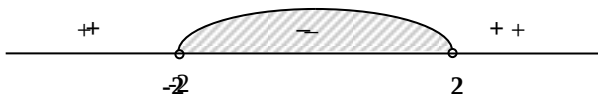
Решение: разложим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на множители:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0.$$

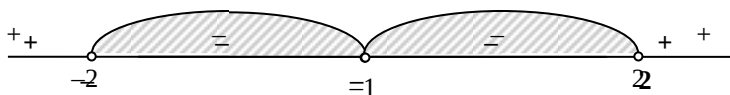
Полученная дробь содержит два нелинейных множителя: $x^2 + 2$ и $(x+1)^2$. Первый из них строго положителен и может быть опущен, второй множитель исключим в соответствии с пунктом “4”:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ (x+2)(x-2) < 0. \end{cases}$$

Далее, на числовой оси отметим точки $x = -2$, $x = 2$ и образующиеся при этом интервалы знаками:



Выберем интервал $(-2; 2)$, отмеченный знаком “-” (так как $((x-2)(x+2) < 0)$), и нанесем на числовую ось точку $x = -1$. Эта точка попадает в выбранный интервал. “Выкалывая” точку $x = -1$, получаем интервалы $(-2; -1)$ и $(-1; 2)$, объединение которых образует множество решений данного неравенства:



Ответ : $(-2; -1) \cup (-1; 2)$.

Иррациональные неравенства

Решение иррациональных неравенств обычно состоит в сведении их к эквивалентным системам рациональных неравенств.

Неравенство вида $\sqrt[n]{f(x)} < \varphi(x)$. Решение этого неравенства зависит от чётности или нечётности n .

а) $n = 2k$; в этом случае

$$\sqrt[n]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi^n(x), \end{cases}$$

б) $n = 2k + 1$; в этом случае

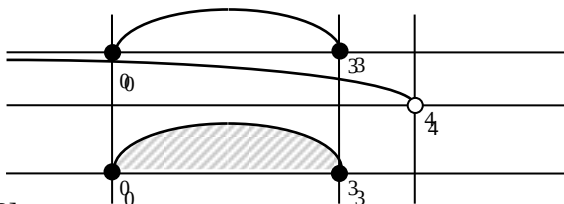
$$\sqrt[n]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) < \varphi^n(x).$$

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{3x - x^2} < 4 - x.$$

Решение: перейдем к эквивалентной системе рациональных неравенств:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - x^2} < 4 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x^2 \geq 0 \\ 4 - x > 0 \\ 3x - x^2 < (4 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - x) \geq 0 \\ x < 4 \\ 3x - x^2 < 16 - 8x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - x) \geq 0 \\ x < 4 \\ 2x^2 - 11x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - x) \geq 0 \\ x < 4 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3 - x) \geq 0 \\ x < 4 \end{cases}. \end{aligned}$$



Ответ : $[0; 3]$.

Неравенство вида $\sqrt[n]{f(x)} > \varphi(x)$. В зависимости от чётности или нечётности n решение этого неравенства выполняется следующим образом:

а) $n = 2k$; в этом случае

$$\sqrt[n]{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) > \varphi^n(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

б) $n = 2k + 1$; в этом случае

$$\sqrt[n]{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) > \varphi^n(x).$$

Пример 4. Решить неравенство

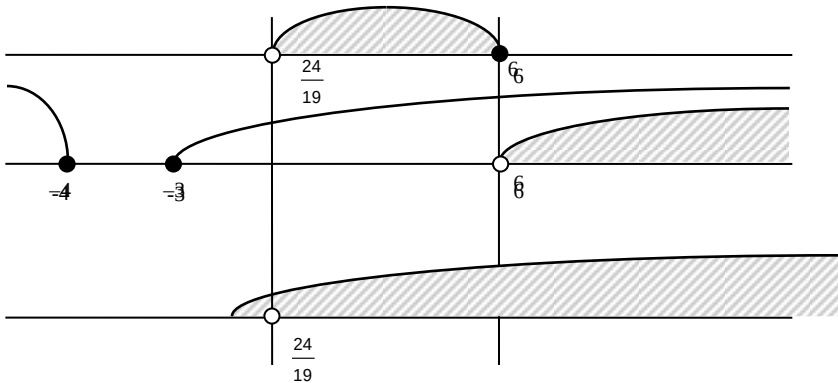
$$\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x.$$

Решение: перейдем к эквивалентной совокупности систем рациональных неравенств:

$$\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ (x+4)(x+3) > (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x < 0 \\ (x+4)(x+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 19x > 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ (x+4)(x+3) \geq 0. \end{cases}$$

В данном случае удобно искать решение, используя две параллельно расположенные оси — по одной для каждой из систем неравенств, входящих в рассматриваемую совокупность и “результатирующую” ось:



Ответ: $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$.

Неравенство вида $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)}$. В зависимости от чётности или нечётности n неравенство решается следующим образом:

а) $n = 2k$; в этом случае

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases},$$

б) $n = 2k + 1$; в этом случае

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x).$$

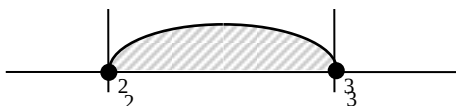
Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}$$

Решение: перейдем к эквивалентной системе рациональных неравенств:

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2-x) \geq 0 \\ (x-3)(2-x) < 4x^2 + 12x + 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2-x) \geq 0 \\ 5x^2 + 7x + 17 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2-x) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0.$$



Ответ: $[2; 3]$.

Пример 6. Решить неравенство

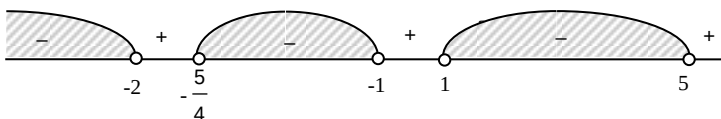
$$\sqrt[3]{\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}.$$

Решение: данное неравенство эквивалентно рациональному неравенству:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+2) + 7(x+1)(x-1) - 6(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 15x - 25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-5)(x+\frac{5}{4})}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0$$



-

Ответ : $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; 5)$.

При решении более сложных иррациональных неравенств обычно находят область определения ОДЗ неравенства и затем осуществляют эквивалентные преобразования неравенства на ОДЗ или на её частях.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$$

Решение: область определения ОДЗ данного неравенства определяется из условия:

$$4x^2 - 19x + 12 > 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x - 4) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; +\infty).$$

Таким образом,

$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; +\infty) \\ x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7).$$

Ответ : $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства:

$$D = \left(-\infty; \frac{-5-2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}; +\infty\right).$$

Запишем неравенство в виде $\sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} \geq 7 - (x^2 + 2x)$ и сделаем подстановку $x^2 + 2x = t$. Относительно t получаем неравенство

$$\sqrt{5t+1} \geq 7-t \Leftrightarrow \begin{cases} 7-t \geq 0 \\ 5t+1 \geq (7-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 7 \\ t^2 - 19t + 48 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 7 \\ 3 \leq t \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 7 \\ t \geq -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow t \in [3; +\infty).$$

Таким образом, $t \geq 3$. Возвращаясь к неизвестной x , получаем:

$$x^2 + 2x \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$$

Пересекая полученное решение с ОДЗ, найдем решение рассматриваемого неравенства: $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

Ответ : $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

Тема 1.2 Алгебраические уравнения

Литература: [1, §1.1-1.2; 4, гл.V, §14; 6, гл. 6].

Уравнения

Под уравнением мы будем понимать равенство двух функций

$$f(x) = \varphi(x), \quad (1.1)$$

которое рассматривается на множестве, представляющем собой пересечение областей определения $D(f)$ и $D(\varphi)$ функций соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$.

В зависимости от характера функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ обычно рассматривают уравнения рациональные, иррациональные, логарифмические, показательные и тригонометрические. Напомним некоторые общие понятия, связанные с задачей решения таких уравнений.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения (1.1) называется множество всех значений x , при которых обе части уравнения имеют смысл. Те значения x , при которых левая и правая части уравнения (1.1) принимают одинаковые значения, называются корнями, или решениями, этого уравнения. Совокупность всех корней уравнения (1.1) называется множеством его решений.

Два уравнения называются эквивалентными на некотором множестве, если на этом множестве каждый корень одного уравнения является корнем другого, и наоборот, или если эти уравнения корней не имеют.

Например, уравнения $(x^2 - 5)(x + 2) = 0$ и $x + 2 = 0$ эквивалентны на множестве Q рациональных чисел (хотя они не эквивалентны на множестве R вещественных чисел).

Уравнение

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \quad (1.2)$$

называется следствием уравнения (1.1), если все корни уравнения (1.1) являются корнями уравнения (1.2).

Если на некотором множестве решение уравнения (1.1) совпадает с объединением решений совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = \varphi_1(x); \\ f_2(x) = \varphi_2(x); \\ \\ f_k(x) = \varphi_k(x), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

то уравнение (1.1) и совокупность уравнений (1.3) называются на этом множестве эквивалентными. Решение уравнения (1.1) обычно осуществляется по следующей схеме:

1. Отыскивается область допустимых значений (ОДЗ) уравнения.
2. Уравнение (1.1) путём различного рода преобразований сводится к уравнению, корни которого могут быть найдены по известным формулам или по известному алгоритму. Находятся корни преобразованного уравнения.
3. Проверяется принадлежность найденных корней к ОДЗ.
4. Выполняется проверка тех из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Сделаем несколько практических указаний, связанных с реализацией общей схемы решения уравнений.

1. В некоторых случаях нецелесообразно находить ОДЗ решаемого уравнения, поскольку проверка найденных значений неизвестного по условию исходного уравнения является составной частью решения уравнения. Однако в данном пособии авторы при решении каждого примера находят ОДЗ, считая, что это полезно при обучении решению задач.
2. При нахождении ОДЗ для уравнения (1.1) следует найти области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ ($D(f)$, $D(\varphi)$) и рассмотреть

множество $D(f)^\circ \cap D(\varphi)$. Кроме того, при поиске ОДЗ следует помнить, что в ряде случаев знак равенства в уравнении (1.1) дает возможность ввести дополнительные условия, учёт которых позволит более простыми средствами и с учётом условия задачи найти ОДЗ. Например, в уравнении $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$ левая часть уравнения строго положительна. Это позволяет ввести условие $x > 0$. Таким образом, ОДЗ для этого уравнения определяется из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 24 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x - 2\sqrt{6})(x + 2\sqrt{6}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2\sqrt{6}; +\infty).$$

При этом нет необходимости вводить в систему неравенств для определения ОДЗ «громоздкое» неравенство $1 + x\sqrt{x^2 - 24} \geq 0$, которое оказывается следствием указанной системы неравенств. Заметим, что в некоторых случаях ОДЗ уравнения есть пустое множество, как например, в уравнениях $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 4$ или

$$\arcsin(x^2 + 2x + 3) = \frac{\pi}{4}.$$

В этом случае уравнение не имеет действительных корней. Возможно также, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки, и тогда решение уравнения заключается в проверке того, что эта точка определяет решение уравнения.

Например, уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 - x}$ имеет область определения ОДЗ = $\{1\}$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень уравнения и, следовательно, других корней уравнение не имеет.

3. За исключением простейших уравнений (линейных, квадратных и некоторых других), перед отысканием корней уравнение (1.1) преобразуется к более простому виду. Корни этого более простого уравнения могут быть найдены по известным формулам (как, например, у квадратного уравнения), либо путём последовательного выполнения простых операций (разложение на множители и пр.). Приёмы, с помощью которых такого рода преобразования могут быть выполнены, зависят от вида функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и будут рассмотрены дальше.

Пусть уравнение (1.1) в результате преобразований приводится к уравнению

$$f^*(x) = \varphi^*(x), \quad (1.4)$$

корни которого легко находятся.

На практике редкими бывают случаи, когда уравнения (1.1) и (1.4) эквивалентны. Чаще всего не существует таких преобразований уравнения (1.1), которые приводили бы к эквивалентному ему уравнению (1.4). В результате преобразований может оказаться, что уравнение (1.4) становится следствием уравнения (1.1). При этом возможно появление “посторонних” корней, т.е. таких корней уравнения (1.4), которые не являются корнями уравнения (1.1). К этому нарушению эквивалентности уравнений (1.1) и (1.4) приводят преобразования, расширяющие область определения уравнения. Такими преобразованиями являются, например, возведение обеих частей уравнения в чётную степень, умножение обеих частей уравнения на функцию, которая существует в области определения уравнения и обращается в ней в нуль.

Если в результате преобразования уравнения (1.1) к (1.4) уравнение (1.1) становится следствием уравнения (1.4), может произойти “потеря” корней. Это возможно, если в результате указанного преобразования происходит сужение области определения уравнения (1.1). К такого рода преобразованиям приводят, например, извлечение корня чётной степени из обеих частей уравнения, умножение обеих частей уравнения на функцию, которая определена в некоторых точках области определения исходного уравнения, или сокращение обеих частей уравнения на некоторый множитель, который существует в области определения исходного уравнения и обращается в этой области в нуль.

Следует иметь в виду, что при появлении “посторонних” корней они могут быть обнаружены и исключены из решения уравнения. В случае же потери корней нет методов, которые позволили бы восстановить потерянные корни. Поэтому при решении уравнений нужно с большой осторожностью использовать преобразования, приводящие к сужению области определения уравнений. Однако неправильно было бы совершенно отказаться от таких преобразований. Например, нужно иметь в виду, что извлечение корней чётной степени из обеих частей уравнения в случае, когда обе эти части строго положительны, не приводят к “потере” корней. Не приводит к “потере” корней также сокращение уравнения на функцию, которая существует в области определения уравнения и не обращается в нуль в этой области.

4. Проверка принадлежности найденных корней к ОДЗ уравнения позволит отбросить “посторонние” корни уравнения, которые ОДЗ не принадлежат. Однако следует иметь в виду, что часто “посторонние” корни попадают в ОДЗ, и поэтому проверка принадлежности корней к ОДЗ не позволяет исключить все “посторонние” корни, получаемые при решении уравнения.

5. Если в процессе решения уравнения (1.1) для исключения “посторонних” корней были выполнены преобразования, приводящие к расширению области определения ОДЗ уравнения, полученные решения подвергаются проверке. При этом полученные корни, принадлежащие к ОДЗ, подставляются в исходное уравнение (1.1). Если при этой подстановке уравнение (1.1) превращается в тождество, то такие корни включаются в решение уравнения (1.1). В противном случае они исключаются из этого решения как посторонние.

Рациональные и иррациональные уравнения

К рациональным относятся уравнения (1.1) в случае, когда $f(x)$ или $\varphi(x)$ либо многочлены, либо дробно-рациональные функции.

Если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $\varphi(x)$ содержит неизвестную под знаком радикала, то уравнение (1.1) является иррациональным.

Уравнение вида

$$p_n(x) = 0, \quad (1.5)$$

где $p_n(x)$ — многочлен;

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0.$$

Опуская простейшие ситуации, когда $p_n(x)$ линейная или квадратная функция, $p_n(x)$ — многочлен третьей и более высоких степеней. При этом мы ограничимся случаем, когда коэффициенты $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Справедливы следующие утверждения:

а) если уравнение (1.5) с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена;

б) целая рациональная функция $p_n(x)$ делится без остатка на линейный двучлен $x - a$ тогда и только тогда, когда $x = a$ является корнем уравнения (1.5);

в) если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения (1.5), то q

является делителем старшего коэффициента a_0 , а p — делитель свободного члена a_n .

Проиллюстрируем метод решения алгебраических уравнений на следующих примерах.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0.$$

Решение: рассмотрим делители свободного члена 12:

$$\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 12.$$

Найдем среди делителей корень исходного уравнения:

$$2^4 - 4 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 + 12 = 0.$$

Таким образом, $x_1 = 2$. Разделим многочлен $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12$ на двучлен $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 & \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 - 17x - 6} \\ \hline x^4 - 2x^3 & \\ \hline & -2x^3 - 13x^2 + 28x + 12 \\ & -2x^3 + 4x^2 \\ \hline & -17x^2 + 28x + 12 \\ & -17x^2 + 34x \\ \hline & -6x + 12 \\ & -6x + 12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Остальные корни исходного уравнения могут быть найдены при решении кубического уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 17x - 6 = 0.$$

Рассмотрим делители свободного члена этого уравнения

$$\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 6$$

и среди них будем искать корень уравнения:

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 2 - 17 - 6 = 24 \neq 0;$$

$$x = -2 \Rightarrow -8 - 8 + 34 - 6 = 12 \neq 0;$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 8 - 34 - 6 = -40 \neq 0;$$

$$x = -1 \Rightarrow -1 - 2 - 2 + 17 - 6 = 8 \neq 0;$$

$$x = 3 \Rightarrow 27 - 18 - 51 - 6 = -48 \neq 0;$$

$$x = -3 \Rightarrow -27 - 18 + 51 - 6 = 0.$$

Таким образом, $x = -3$. Разделим кубический многочлен $x^3 - 2x^2 - 17x - 6$ на двучлен $x + 3$:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 17x - 6 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ x^2 - 5x - 2 \end{array} \right. \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ -5x^2 - 17x - 6 \\ \underline{-5x^2 - 15x} \\ -2x - 6 \\ \underline{-2x - 6} \\ 0 \end{array}$$

Оставшиеся два корня исходного уравнения находятся при решении квадратного уравнения:

$$x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Ответ : $\left\{ -3; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}; \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right\}.$

Рациональные уравнения, сводящиеся к виду (1.5), решаются подстановкой (введением новой неизвестной). Многообразие такого рода уравнений проиллюстрируем следующими примерами

Пример 10. Решить уравнение:

$$(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81.$$

Решение: в данном случае $D = R$.

$$(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81 \Leftrightarrow (x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) = 81.$$

Сделаем подстановку (введем новую неизвестную t) $x^2 - 6x = t$, тогда:

$$t^2 - 2(t + 9) = 81 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 99 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t = -9. \end{cases}$$

Поэтому исходное уравнение эквивалентно следующей совокупности уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 11 \\ x^2 - 6x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 11 = 0 \\ (x - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm 2\sqrt{5} \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{3 - 2\sqrt{5}; 3; 3 + 2\sqrt{5}\}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

В данном случае ОДЗ = $R \setminus \{0\}$.

Сделаем подстановку:

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Тогда

$$4(t^2 - 2) + 12t = 47 \Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{11}{2} \\ t = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 11x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}; \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

Простейшими из иррациональных уравнений являются уравнения вида

$$\sqrt{ax + b} \mp \sqrt{cx + d} = p, \quad (1.6)$$

где $a, b, c, d, p \in R$.

Решение этих уравнений осуществляется возведением обеих частей уравнения в квадрат, “изолированием” оставшегося при этом радикала и

повторным возведением обеих частей уравнения в квадрат. В результате таких преобразований уравнение (1.6) сводится к (1.5).

Пример 12. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$$

Решение: область определения данного уравнения определяется в результате решения системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x+7 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{3} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty).$$

Преобразуем данное уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x+7 &= 4 + 4\sqrt{x+1} + x+1 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} - 2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Оба найденных корня принадлежат ОДЗ. Но так как при решении уравнения использовались преобразования, нарушающие эквивалентность уравнений (укажите их), то найденные корни необходимо проверить:

$$x_1 = -1; \sqrt{3*(-1)+7} - \sqrt{-1+1} = 2;$$

$$\sqrt{4} = 2;$$

$$2 = 2;$$

$$x_2 = 3; \sqrt{3*3+7} - \sqrt{3+1} = 2;$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{4} = 2;$$

$$4 - 2 = 2;$$

$$2 = 2.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

К уравнениям вида (1.6) подстановками сводится целый ряд иррациональных уравнений вида

$$\sqrt{a*f(x)+b} \pm \sqrt{c*f(x)+d} = p. \quad (1.7)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$$

Решение: в данном случае ОДЗ = R , так как все квадратные трёхчлены, стоящие под радикалом, в рассматриваемом уравнении имеют отрицательные дискриминанты, а их старшие коэффициенты положительны.

Выполним подстановку $x^2 + x + 1 = t$, $t > 0$. Тогда данное уравнение сводится к виду

$$\begin{aligned}\sqrt{t+3} + \sqrt{t} &= \sqrt{2t+7} \Rightarrow t+3+2\sqrt{t(t+3)}+t=2t+7 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)}=2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=1. \end{cases}\end{aligned}$$

Значение $t = -4$ не подходит ($t > 0$), поэтому

$$x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1; \sqrt{(-1)^2 - 1 + 1} = \sqrt{2*(-1)^2 + 2*(-1) + 9}; \\ \sqrt{4} + 1 &= \sqrt{9}; \\ 3 &= 3; \\ x_2 &= 0; \sqrt{0+0+4} + \sqrt{0+0+1} = \sqrt{9}; \\ 3 &= 3;\end{aligned}$$

Ответ : $\{-1;0\}$.

Иррациональные уравнения вида:

$$\sqrt[3]{ax+b} \pm \sqrt[3]{cx+d} = p; a, b, c, d, p \in R. \quad (1.8)$$

При решении этих уравнений левая и правая его части возводятся в куб:

$$(a+b)^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b), \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

Далее, если исходное уравнение имеет решение, то в полученном уравнении разность кубических корней заменяется правой частью исходного

уравнения. Затем оставшийся кубический корень “изолируется”.
 Последующее возведение обеих частей полученного уравнения в куб приводит его к виду (1.5).
 Рассмотрим примеры.

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$$

Решение: в данном случае ОДЗ = R . Возведем обе части уравнения в куб:

$$5x+7 - (5x-12) - 3\sqrt[3]{(5x-12)(5x+7)}(\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12}) = 1$$

Заменим разность $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12}$ правой частью исходного уравнения, т.е. 1:

$$5x+7 - 5x+12 - 3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = 1.$$

Изолируем оставшийся кубический корень и возведем обе части уравнения в куб:

$$-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = -18 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5x+7)(5x-12) = 216 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3. \end{cases}$$

Выполнив проверку, найдем, что множеством решений данного уравнения является $\{-3; 4\}$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$$

Решение: ОДЗ = R . Возведем обе части уравнения в куб:

$$x + x - 16 + 3\sqrt[3]{x(x-16)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}) = x - 8.$$

Заменим сумму $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}$ правой частью уравнения:

$$x - 8 + 3\sqrt[3]{x(x-16)}(x-8) = 0.$$

Вынесем за скобки общий множитель $\sqrt[3]{x-8}$;

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x-8}(\sqrt[3]{(x-8)^2} + 3\sqrt[3]{x(x-16)}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-8=0 \\ \sqrt[3]{(x-8)^2} = -3\sqrt[3]{x(x-16)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ 7x^2 - 112x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x = \frac{56 \pm 12\sqrt{21}}{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка показывает, что числа $8, \frac{56 \pm 12\sqrt{21}}{7}$ являются корнями уравнения.

Остановимся на этом подробнее.

Выполним проверку корня $x = 8 + \frac{12}{7}\sqrt{21}$. Подставим его в левую часть исходного уравнения и обозначим результат через a :

$$a = \sqrt[3]{8 + \frac{12}{7}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{\frac{12}{7}\sqrt{21} - 8}.$$

Возведем в куб:

$$a^3 = \frac{24}{7}\sqrt{21} - 3\sqrt[3]{\frac{16}{7}}\left(\sqrt[3]{8 + \frac{12}{7}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{\frac{12}{7}\sqrt{21} - 8}\right).$$

Получим кубическое уравнение для a :

$$a^3 + \frac{6\sqrt[3]{98}}{7}a - \frac{24}{7}\sqrt{21} = 0.$$

Правая часть исходного уравнения при $x = 8 + \frac{12}{7}\sqrt{21}$ равна $\sqrt[3]{\frac{12}{7}\sqrt{21}}$.

Убедимся, что $\sqrt[3]{\frac{12}{7}\sqrt{21}}$ является корнем этого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{12}{7}\sqrt{21} + \frac{6\sqrt[3]{98}}{7}\sqrt[3]{\frac{12}{7}\sqrt{21}} - \frac{24}{7}\sqrt{21} &= \frac{12}{7}\sqrt[3]{21\sqrt{21}} - \frac{21}{7}\sqrt{21} = \\ &= \frac{12}{7}\sqrt{21} - \frac{12}{7}\sqrt{21} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{8 + \frac{12}{7} \sqrt{21}} + \sqrt[3]{\frac{12}{7} \sqrt{21} - 8} = \sqrt[3]{\frac{12}{7} \sqrt{21}},$$

и поэтому $8 + \frac{12}{7} \sqrt{21}$ является корнем рассматриваемого уравнения.

Аналогично можно показать, что $x = 8 - \frac{12}{7} \sqrt{21}$, а также $x = 8$ входят в множество решений уравнения. (Сделайте это самостоятельно.)

Ответ : $\left\{ 8, 8 \pm \frac{12}{7} \sqrt{21} \right\}.$

К виду (1.8) подстановками сводятся иррациональные уравнения следующего вида:

$$\sqrt[3]{a * f(x) + b} \pm \sqrt[3]{c * f(x) + d} = p; a, b, c, d, p \in R. \quad (1.9)$$

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = 4.$$

Решение: ОДЗ в данном уравнении определяется из условия $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty]$. Сделаем подстановку $\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$.

Уравнение сводится к виду:

$$\sqrt[3]{9-t} + \sqrt[3]{7+t} = 4.$$

Решим его по описанному выше методу:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9-t} + \sqrt[3]{7+t} = 4 &\Leftrightarrow 9-t + 7+t + 3\sqrt[3]{(9-t)(7+t)}(\sqrt[3]{9-t} + \sqrt[3]{7+t}) = 64 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12\sqrt[3]{(9-t)(7+t)} = 48 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(9-t)(7+t)} = 4 \Leftrightarrow (9-t)(7+t) = 64 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow x = 0$.

Выполнив проверку, получим, что $x = 0$ — решение данного уравнения.

Ответ: $\{0\}$.

**Иррациональные уравнения, сводящиеся
подстановками к уравнениям вида (1.5)**

Пример 17. Решить уравнение

$$(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$$

Решение: найдём ОДЗ:

$$x^2 + 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right).$$

Таким образом,

$$x^2 + 5x + 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} - 4 = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 5x + 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} - 4 = 0$.

Сделав подстановку $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = t$, $t \geq 0$, приведем уравнение к квадратному:

$$\begin{cases} t^2 - 3t - 4 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \Rightarrow t = 4. \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Поэтому

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 2. \end{cases}$$

Оба корня принадлежат ОДЗ.

Проверяем корни и убеждаемся, что они входят в множество решений данного уравнения.

Ответ: $\{-7; 2\}$.

Пример 18. Решить уравнение

$$\frac{3(x-2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{2(x^2 - 1)} = 1$$

Решение: найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Таким образом, $D = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

Преобразуем данное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{3(x-2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{2(x^2 - 1)} = 1 &\Leftrightarrow 3(x-2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 - 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 3 = 0. \end{aligned}$$

Введём подстановку $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = t$, $t \geq 0$, тогда уравнение сводится к квадратному:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1 \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверим только один из этих корней (проверку остальных корней выполнить самостоятельно). Подставим $x = \frac{3 - \sqrt{73}}{4}$ в правую часть исходного уравнения:

$$\frac{3\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}-2\right)+4\sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}\right)^2-3\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}\right)-8+9}}{2\left(\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}\right)^2-1\right)}=$$

$$\frac{3\frac{-5-\sqrt{73}}{4}+12}{2\left(\frac{82-6\sqrt{73}}{16}-1\right)}=\frac{33-3\sqrt{73}}{8\left(\frac{41-3\sqrt{73}}{8}-1\right)}=\frac{33-3\sqrt{73}}{33-3\sqrt{73}}=1.$$

Следовательно, $x = \frac{3-\sqrt{73}}{4}$ входит во множество решений уравнения.

Ответ : $\left\{0; \frac{3}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}\right\}.$

Пример 19. Решить уравнение

$$5\sqrt[3]{x^5\sqrt{x}} + 3\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}} = 8.$$

Решение: область определения данного уравнения $D = R$. Обратите внимание, что в этом уравнении содержатся сложные степени x . В подобных случаях решение нужно начинать с вычисления этих сложных степеней. В рассматриваемом уравнении

$$5x^{\frac{6}{15}} + 3x^{\frac{4}{15}} = 8$$

сделаем подстановку $x^{\frac{2}{15}} = t$, $t \geq 0$, тогда

$$\begin{cases} 5t^3 + 3t^2 - 8 = 0 \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим кубическое уравнение

$$5t^3 + 3t^2 - 8 = 0.$$

Легко заметить, что $t = 1$ — корень уравнения:

$$\begin{array}{r}
 5t^3 + 3t^2 - 8 \Big| \frac{t-1}{5t^2 + 8t + 8} \\
 \underline{5t^3 - 5t^2} \\
 8t^2 - 8 \\
 \underline{8t^2 - 8t} \\
 8t - 8 \\
 \underline{8t - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Квадратный трёхчлен $5t^2 + 8t + 8$ не имеет действительных корней. Поэтому

$$x^{\frac{2}{15}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ответ : $\{-1; 1\}$.

Иррациональные уравнения, решение которых основывается на использовании формул сокращенного умножения

К такому типу иррациональных уравнений относятся уравнения, которые с помощью формул сокращённого умножения сводятся к каким-либо из уже рассмотренных типов уравнений. Проиллюстрируем основную идею решения таких уравнений на следующих примерах.

Пример 20. Решить уравнение

$$\frac{x\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \frac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16.$$

Решение: ОДЗ = $R \setminus \{1\}$. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{x\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \frac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} &= 16 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[5]{x^6} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \frac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[5]{x^3} - 1)(\sqrt[5]{x^3} + 1)}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \frac{(\sqrt[5]{x} - 1)(\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} + 1)}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} - 14 = 0.$$

Сделаем подстановку $\sqrt[5]{x} = t$ и получим кубическое уравнение $t^3 + t^2 + t - 14 = 0$. Среди делителей свободного члена подберём корень $t = 2$ и выполним деление:

$$\begin{array}{r} t^3 + t^2 + t - 14 \bigg| t - 2 \\ t^3 - 2t^2 \\ \hline 3t^2 + t - 14 \\ 3t^2 - 6t \\ \hline 7t - 14 \\ 7t - 14 \\ \hline 0 \end{array}$$

Так как $t^2 + 3t + 7 > 0$ и $\forall t \in R$, то решение уравнения сводится к отысканию x из равенства $\sqrt[5]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 32$.

Ответ: $\{32\}$.

Иррациональные уравнения, содержащие сложные радикалы

К числу таких уравнений относятся уравнения вида:

$$\sqrt{ax + b + m\sqrt{cx + d}} \pm \sqrt{kx + p + n\sqrt{cx + d}} = l; \quad (1.10)$$

$$a, b, c, d, l, m, n, p \in R.$$

Подстановкой $\sqrt{cx + d} = t$ данное уравнение сводится к типу, рассмотренному ранее.

Пример 21. Решить уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4.$$

Решение: область определения D уравнения найдем из системы неравенств:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - \sqrt{x+11} \geq 0 \\ x+11 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{x+11} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 11 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Таким образом, ОДЗ = $\left[\frac{1+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Сделаем подстановку: $\sqrt{x+11} = t$, $t > 0$, следовательно, $x = t^2 - 11$.
Получаем:

$$\sqrt{t^2 + t - 11} + \sqrt{t^2 - t - 11} = 4, \text{ при } t > 0.$$

Рассмотрим решение уравнения, входящего в эту систему:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + t - 11} + \sqrt{t^2 - t - 11} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t - 11} = 4 - \sqrt{t^2 - t - 11} \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 + t - 11 = 16 - 8\sqrt{t^2 - t - 11} + t^2 - t - 11 &\Leftrightarrow 4\sqrt{t^2 - t - 11} = 8 - t \Rightarrow \\ \Rightarrow 16t^2 - 16t - 176 = 64 - 16t + t^2 &\Leftrightarrow 15t^2 = 240 \Leftrightarrow t^2 = 16. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{cases} t^2 = 16 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Находим x из условия $\sqrt{x+11} = 4 \Rightarrow x = 5$. Выполнив проверку, найдём, что $x = 5$ - решение уравнения.

Ответ : {5}.

Тема 1.3 Системы алгебраических уравнений

Литература: [1, §2.1-2.2; 4, гл. V §16; 6, гл. 6].

Системы уравнений

Под системой уравнений понимают некоторое конечное множество уравнений, которые в совокупности содержат n неизвестных. В общем

случае можно рассмотреть системы, состоящие из m уравнений при $m > n$, $m = n$, $m < n$. Мы ограничимся только случаем, когда $m = n$.

Будем называть решением системы уравнений упорядоченный набор из n чисел, который при подстановке его в каждое уравнение системы обращает их в тождество. Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что система уравнений решений не имеет. В последнем случае говорят, что система уравнений несовместна.

Две системы уравнений равносильны (или эквивалентны), если у них совпадают множества решений. Система уравнений эквивалентна совокупности систем уравнений, если множество её решений совпадает с объединением множеств решений систем, входящих в рассматриваемую совокупность.

Решение систем уравнений обычно ведётся по той же схеме, что и решение уравнений.

1. Отыскивается ОДЗ системы уравнений.
2. Данная система путём некоторых преобразований приводится к более простой. Находится множество решений преобразованной системы.
3. Проверяется принадлежность найденных решений ОДЗ исходной системе уравнений.
4. Производится проверка найденных решений системы уравнений, принадлежащих ОДЗ.

Сделаем некоторые замечания относительно приведённой схемы решения.

1. Наиболее употребительной формой описания ОДЗ является система неравенств, которым удовлетворяют координаты точек, принадлежащих ОДЗ.
2. В процессе преобразования исходной системы уравнений может быть получена система уравнений, которая эквивалентна или неэквивалентна данной. Это зависит от характера преобразований так же, как и в случае одного уравнения.
3. Проверка принадлежности решений преобразованной системы области определения ОДЗ исходной системы осуществляется путём проверки истинности всех неравенств, описывающих ОДЗ. Решения, не входящие в ОДЗ, отбрасываются.
4. При необходимости проверки найденных решений (в случае, когда преобразования системы могут привести к появлению посторонних решений), они подставляются в исходную систему, и в каждом уравнении системы выполняются те действия, которые выполняются при проверке одного уравнения. Если в результате такой подстановки оба уравнения обращаются в тождества, то данное решение включается в множество решений исходной системы.

Системы линейных алгебраических уравнений

В линейных системах все неизвестные могут принимать любые значения из R .

Рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решение такой системы можно получить исключением какой-либо из неизвестных в одном из уравнений. Такое исключение приводит к системам, эквивалентным исходным.

Пример 22. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + y = -2. \end{cases}$$

Решение: умножим второе уравнение на 2 и прибавим его к первому.

Получим уравнение $7x = 3$, т.е. $x = \frac{3}{7}$. Подставив это значение во второе уравнение системы, найдём $y = -\frac{20}{7}$.

Ответ : $\left\{ \left(\frac{3}{7}; -\frac{20}{7} \right) \right\}$.

Пример 23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение: используя первое уравнение системы, исключаем неизвестную x_1 из второго, третьего и четвёртого уравнений. Для этого из второго уравнения вычтем первое, умноженное на 2, а из четвёртого уравнения вычтем первое, умноженное на 2. Получим систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4; \\ 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -9. \end{cases}$$

Используя второе уравнение системы, исключим неизвестную x_2 из третьего и четвёртого уравнений системы. Для этого из третьего уравнения вычтем

второе, умноженное на $\frac{2}{5}$, а из четвёртого вычтем второе, умноженное на

$$\frac{7}{5}:$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \\ 9x_3 - 18x_4 = 20; \\ 4x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Исключим неизвестную x_3 из четвёртого, вычитая из него третье

уравнение, умноженное на $\frac{4}{9}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \\ 9x_3 - 18x_4 = 20; \\ 2x_4 = -\frac{7}{9}. \end{cases}$$

Решив полученную треугольную систему, найдём последовательно:

$$\begin{cases} x_4 = -\frac{7}{18}; \\ x_3 = 2x_4 + \frac{20}{9} = \frac{13}{9}; \\ x_2 = -\frac{8}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = -\frac{43}{18}; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ : $\left\{ \left(\frac{2}{3}; -\frac{43}{18}; \frac{13}{9}; -\frac{7}{18} \right) \right\}.$

Системы нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

Для систем нелинейных алгебраических уравнений, в отличие от систем линейных уравнений, не существует универсального метода решения. При решении таких систем применяют различные способы, основанные на использовании особенностей уравнений, составляющих данную систему. Довольно часто эти способы имеют своей целью упростить исходную систему до такого состояния, когда можно исключить какую-либо из неизвестных из одного уравнения системы.

1. Замена исходной системы уравнений эквивалентной совокупностью систем уравнений

Пример 24. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2,5 - y; \\ 6(x-y)^2 + x = 0,125 + y. \end{cases}$$

Решение: в данном случае $x, y \in R$. Преобразуем данную систему уравнений к виду

$$\begin{cases} 12(x+y)^2 + (x+y) - 2,5 = 0; \\ 6(x-y)^2 + (x-y) - 0,125 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы является квадратным уравнением относительно $x+y$. Если обозначить $x+y = t$, то уравнение преобразуется к квадратному:

$$12t^2 + t - 2,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{12} \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, первое уравнение данной системы может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{12}; \\ x + y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Аналогично, второе уравнение рассматриваемой системы является квадратным уравнением относительно $x - y$ и может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{12}; \\ x - y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений эквивалентна следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = \frac{5}{12} \\ x + y = -\frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{12} \\ x - y = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = \frac{5}{12} \\ x - y = -\frac{1}{4} \\ x + y = -\frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{12} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{6} \\ x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{5}{24} \\ y = -\frac{7}{24} \\ x = -\frac{3}{8} \\ y = -\frac{1}{8} \end{array} \right\}$$

Ответ : $\left\{ \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3} \right); \left(-\frac{5}{24}; -\frac{7}{24} \right); \left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8} \right) \right\}$.

2. Замена исходной системы уравнений на эквивалентную ей с помощью арифметических операций

Пример 25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158; \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

Решение: в данном случае ОДЗ = $\{(x; y) / x, y \in R\}$. Сложим уравнения системы и вычтем их. Получим систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -27 \\ x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 343 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^3 = -27 \\ (x - y)^3 = 343 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(2; -5)\}$.

Пример 26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3; \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение: для данной системы ОДЗ = $\{(x; y) / x, y \in R\}$. Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе: $3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0$. Данное уравнение однородное. Так как x и y одновременно не обращаются в нуль ($x = 0, y = 0$ не являются решением данной системы):

$$3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 8\frac{x}{y} + 4 = 0.$$

Обозначим $\frac{x}{y}$ через t :

$$3t^2 - 8t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2; \\ t = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2; \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Перейдём от исходной системы уравнений к системе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x = \frac{2}{3}y \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ 3y^2 = 3 \\ x = \frac{2}{3}y \\ -\frac{1}{9}y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \\ x = -2 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ : $\{(-2;-1);(2;1)\}$.

3. Решение системы уравнений с помощью подстановок (методом замены)

Пример 27. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 88} + \sqrt{x + 6y} = 19; \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 88} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений состоит из точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3y - 88 \geq 0; \\ x + 6y \geq 0. \end{cases}$$

Сделаю замену

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y - 88} = u, u \geq 0; \\ \sqrt{x + 6y} = v, v \geq 0, \end{cases}$$

получим систему уравнений относительно новых неизвестных:

$$\begin{cases} 5u + v = 19 \\ 3u = 1 + 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 19 - 5u \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 \\ u = 3. \end{cases}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y - 88} = 3 \\ \sqrt{x + 6y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3y - 97 = 0 \\ x + 6y = 16. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и прибавим к нему второе. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 210 = 0 \\ y = \frac{16 - x}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -\frac{21}{2} \\ y = \frac{16 - x}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \\ x = -\frac{21}{2} \\ y = \frac{53}{12}. \end{cases}$$

Ответ : $\left\{ (10; 1); \left(-\frac{21}{2}; \frac{53}{12} \right) \right\}.$

Пример 28. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 2} = 7; \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ рассматриваемой системы уравнений определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geq 0; \\ 2x + y + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Представим данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7; \\ (x+y) + (2x+y+2) = 25 \end{cases}$$

и сделаем замену:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = u, u \geq 0; \\ \sqrt{2x+y+2} = v, v \geq 0. \end{cases}$$

Получим относительно новых неизвестных систему уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 + v = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 7 \\ (u+v)^2 - 2uv = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 7 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 4 \\ u = 4 \\ v = 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 \\ \sqrt{2x+y+2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 9 \\ 2x+y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ x = -9 \\ y = 25. \end{cases}$$

Ответ : $\{(5;4);(-9;25)\}$.

Пример 29. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}; \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений определяется условиями

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} \geq 0 \\ y + \frac{1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $xy \neq 0$ в D , разделим второе уравнение системы на xy и запишем систему в виде

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}; \\ \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right) = 4. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} = u, u \geq 0; \\ \sqrt{y + \frac{1}{x}} = v, v \geq 0. \end{cases}$$

Получим систему уравнений относительно неизвестных u и v :

$$\begin{cases} u + v = 2\sqrt{2} \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{2} \\ (u + v)^2 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{2} \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2} \\ v = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y + \frac{1}{x}} = \sqrt{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ y + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 1 = 2y \\ xy + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy + 1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ : $\{(1;1)\}$.

Тема 1.4 Логарифмические уравнения

Литература: [1, §1.3; 4, гл.V, §14, п.152; 6, гл. 7].

Логарифмические уравнения

Заметим, если в уравнении содержится выражение $\log_{f(x)} \varphi(x)$, то в систему условий, определяющих ОДЗ такого уравнения, должны быть включены условия

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

1. Решение логарифмических уравнений потенцированием

Решение таких уравнений строится следующим образом:

— все логарифмы, входящие в уравнение, приводятся к одному основанию в соответствии с правилом

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0;$$

— все множители, стоящие перед логарифмами, переносятся в показатели степеней в соответствии с правилом

$$\alpha \log_b f(x) = \log_b f^\alpha(x) \quad (b > 0, b \neq 1, f(x) > 0);$$

— все члены уравнения, не стоящие под знаком логарифма, вводятся под логарифм в соответствии с правилом

$$f(x) = \log_a a^{f(x)} \quad (a > 0; a \neq 1);$$

— полученное уравнение потенцируется и затем решается.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{6} \log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}.$$

Решение: найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; +\infty).$$

Приведём все логарифмы, входящие в уравнение, к основанию 2:

$$\frac{1}{6} \log_2(x - 2) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \log_2 \sqrt{3x - 5}.$$

Умножим уравнение на 6:

$$\log_2(x - 2) - 2 = -2 \log_2 \sqrt{3x - 5}.$$

Преобразуем далее уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \log_2(x - 2) - \log_2 4 &= \log_2 \frac{1}{3x - 5} \Leftrightarrow \log_2 \frac{x - 2}{4} = \\ &= \log_2 \frac{1}{3x - 5} \Rightarrow \frac{x - 2}{4} = \frac{1}{3x - 5} \Rightarrow (x - 2)(3x - 5) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Корень $x = \frac{2}{3} \notin \text{ОДЗ}$ и является посторонним.

Проверим корень $x = 3$, подставив его в исходное уравнение:

$$\frac{1}{6} \log_2(3 - 2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3 * 3 - 5};$$

$$\frac{1}{6} \log_2 1 - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{4};$$

$$-\frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} 2;$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Полученное тождество показывает, что $x = 3$ — решение данного уравнения.

Ответ : {3}.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2 - \lg 4 + \lg 0,12}{\lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x} = 1.$$

Решение: найдём ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x > 0 \\ \lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x \neq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $\lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x = 0$ и исключим его корни из промежутка $(0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lg(\sqrt{3x+1} + 4) = \lg 2x &\Rightarrow \sqrt{3x+1} + 4 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 2x - 4 \Rightarrow \\ 3x + 1 = 4x^2 - 16x + 16 &\Leftrightarrow 4x^2 - 19x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{15}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Корень $x = 1$ — посторонний (в чём легко убедиться проверкой).

Таким образом, ОДЗ $= \left(0; \frac{15}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$.

Учитывая, что $x \in \text{ОДЗ}$, запишем исходное уравнение в виде

$$2 - \lg 4 + \lg 0,12 = \lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x$$

и решим его по описанному методу:

$$\begin{aligned} \lg 100 - \lg 4 + \lg 0,12 &= \lg(\sqrt{3x+1} + 4) - \lg 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg \frac{100 \cdot 0,12}{4} &= \lg \frac{\sqrt{3x+1} + 4}{2x} \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3x+1} + 4}{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{3x+1} &= -4 + 6x \Rightarrow 3x + 1 = 16 - 48x + 36x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 36x^2 - 51x + 15 &= 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 17x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{12} \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка корней путем подстановки их в исходное уравнение показывает, что корень $x = \frac{5}{12}$ — посторонний, а корень $x = 1$ — решение уравнения.

Часто решение можно построить таким образом, чтобы исключить появление посторонних корней. Например, в данном примере достаточно сделать подстановку $\sqrt{3x+1} = t$, $t \geq 0 \Rightarrow 3x+1 = t^2$, $4-6x = 6-2t^2$:

$$\begin{cases} t = 2t^2 - 6 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - t - 6 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ t = 2 \Rightarrow t = 2 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x+1} = 2 \Rightarrow 3x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ : {1}.

2. Решение логарифмических уравнений подстановками (введение новой неизвестной)

Решение этих уравнений выполняется в такой последовательности:

- все логарифмы, входящие в уравнение, приводятся к одному основанию;
- в уравнении логарифмируются все произведения, частные, степени;
- все выражения вида $\log_a a^{f(x)}$ заменяются на $f(x)$;
- выполняется подстановка и затем уравнение решается методами, рассмотренными ранее.

Часто по заданному логарифмическому уравнению не представляется возможным определить, какая подстановка должна быть сделана в этом уравнении. По этому поводу заметим, что не нужно стремиться с самого начала решения найти эту подстановку. Нужно последовательно выполнять указанные пункты решения, после первых трех из них подстановка легко определяется.

При отыскании ОДЗ логарифмического уравнения будем учитывать, что

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (0;1) \\ 0 < f(x) < \varphi(x) \\ a \in (1;+\infty) \\ f(x) > \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$$

Решение:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty).$$

Таким образом, ОДЗ = $(0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдём во всех логарифмах, входящих в уравнение, к основанию 3:

$$\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3(3x)} + \log_3^2 x = 1$$

Прологарифмируем частное и произведение в первом слагаемом и учтём, что $\log_3 3 = 1$:

$$\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1.$$

Теперь подстановка очевидна: $\log_3 x = t$. Получаем рациональное уравнение, которое решаем:

$$\begin{aligned} \frac{1-t}{1+t} + t^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (t-1)\left(t+1 - \frac{1}{1+t}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t-1) \frac{(t+1)^2 - 1}{t+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ t^2+2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \\ t=-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, получаем совокупность уравнений:

$$\begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 0 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Проверка показывает, что все три корня входят в решение уравнения.

Ответ : $\left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}.$$

Решение : ОДЗ данного уравнения найдём, решив следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_{\sqrt{5}} x < 0 \\ \log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x < 1 \\ \log_x 5\sqrt{5} \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \\ x^{-3} \leq 5\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \\ x \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right).$$

Таким образом, ОДЗ = $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

Перейдём во всех логарифмах, входящих в уравнение, к основанию x и запишем уравнение в виде (учтём, что $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right)$):

$$\sqrt{3\log_x \sqrt{5} + 3} = -\sqrt{6} * \log_x \sqrt{5}.$$

Сделаем подстановку: $\log_x \sqrt{5} = t$

$$\begin{cases} \sqrt{3(t+1)} = -\sqrt{6}t \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(t+1) = 6t^2 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\log_x \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$, т.е. $x = \frac{1}{5}$.

Выполним проверку найденного корня:

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} \sqrt{\log_{\frac{1}{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = 2\sqrt{-\frac{3}{2} + 3} = -2\sqrt{\frac{3}{2}} = -\sqrt{6};$$

$x = \frac{1}{5}$ — решение уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Тема 1.5 Показательные уравнения

Литература: [1, §1.4; 4, гл. V §14, п.151; 6 гл. 7].

Показательные уравнения

Уравнение вида:

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}, a > 0, a \neq 1$$

ОДЗ такого уравнения находится как пересечение множеств: $D(f) \cap D(\varphi)$, решение его сводится к решению уравнения $f(x) = \varphi(x)$.

Решение: область определения данного неравенства $D = R \setminus \{0\}$.

Представим неравенство в виде

$$10^{\frac{2}{x}} - \frac{17}{4} * 10^{\frac{1}{x}} * 5^{\frac{1}{x}} + 5^{\frac{2}{x}} \geq 0$$

и разделим его на $5^{\frac{2}{x}}$:

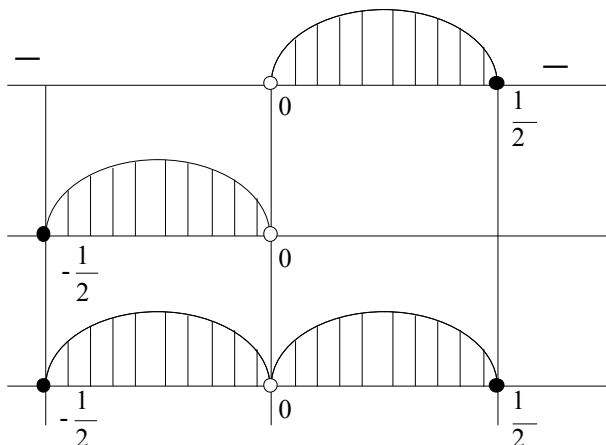
$$2^{\frac{2}{x}} - \frac{17}{4} * 2^{\frac{1}{x}} + 1 \geq 0.$$

Сделаем замену $2^{\frac{1}{x}} = t; t > 0$ и рассмотрим систему неравенств относительно неизвестной t :

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - \frac{17}{4}t + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-4)\left(t - \frac{1}{4}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty).$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^x} \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{1}{x} \leq -2 \\ \frac{1}{x} \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{1+2x}{x} \leq 0 \\ \frac{1-2x}{x} \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$



Таким образом, $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

4. Показательные неравенства, содержащие выражения вида

$$x^{\log_a x}, a > 0, a \neq 1$$

Пример 24. Решить неравенство

$$x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} \geq 0,5^{3 - 2,5 \log_{0,5} x}.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства R_+ . Прологарифмируем данное неравенство по основанию 0,5, изменив знак неравенства:

$$(0,5 \log_{0,5} x - 3) \log_{0,5} x \leq 3 - 2,5 \log_{0,5} x$$

и сделаем замену $\log_{0,5} x = t$:

$$\begin{aligned}(0,5t - 3)t &\leq 3 - 2,5t \Leftrightarrow 0,5t^2 - 3t - 3 + 2,5t \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-2; 3].\end{aligned}$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$\begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ -2 \leq \log_{0,5} x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ \frac{1}{8} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{8}; 4\right].$$

Ответ: $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$.

Пример 25. Решить неравенство

$$2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства R_+ . Учитывая, что

$$2^{\log_{0,5}^2 x} = \left(2^{\log_{0,5} x}\right)^{\log_{0,5} x} = \frac{1}{x^{\log_{0,5} x}},$$

получаем:

$$\frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5.$$

Сделав замену $x^{\log_{0,5} x} = t, t > 0$, имеем систему неравенств относительно неизвестной t :

$$\begin{aligned}&\begin{cases} t > 0 \\ \frac{1}{t} + t > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2,5t + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t - 2)\left(t - \frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).\end{aligned}$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x^{\log_{0,5} x} < \frac{1}{2} \\ x^{\log_{0,5} x} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ \log_{0,5}^2 x > 1 \\ \log_{0,5}^2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ \log_{0,5}^2 x - 1 > 0 \\ 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ \log_{0,5} x > 1 \\ \log_{0,5} x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x < \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).$

5. Показательно-степенные неравенства вида

$$f(x)^{\varphi(x)} > 1$$

Это неравенство эквивалентно следующей совокупности систем неравенств:

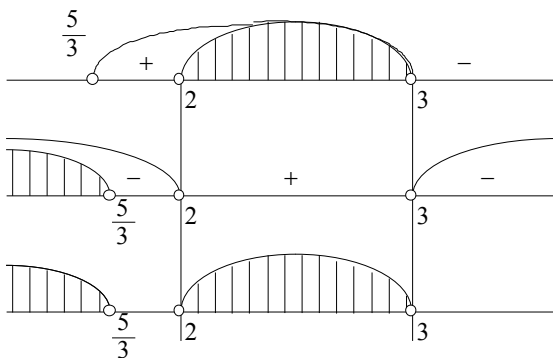
$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) < 0 \\ f(x) > 1 \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 26. Решить неравенство

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1.$$

Решение: запишем систему для данного неравенства:

$$\begin{cases} 0 < 3-x < 1 \\ \frac{3x-5}{3-x} > 0 \\ 3-x > 1 \\ \frac{3x-5}{3-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; 3) \\ \frac{3x-5}{3-x} > 0 \\ x < 2 \\ \frac{3x-5}{3-x} < 0. \end{cases}$$



Следовательно, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (2; 3)$.

Пример 27. Решить неравенство

$$\left(4x^2 + 2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$$

Решение: перейдем к решению системы

$$\begin{aligned} & \left[\begin{cases} 0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x^2 + 2x < 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x(2x+1) < 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\ & \left[\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x^2 + 2x > 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x(2x+1) > 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \\ x(2x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty). \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \right] \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

6. Показательно-степенные неравенства вида

$$f(x)^{\alpha(x)} > f(x)^{\beta(x)}$$

Это неравенство эквивалентно следующей совокупности:

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \alpha(x) < \beta(x) \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ \alpha(x) > \beta(x). \end{cases}$$

Пример 28. Решить неравенство:

$$\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \left(x^2 + x + 1\right)^3.$$

Решение: составим систему для данного неравенства:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 < x^2 + x + 1 \leq 1 \\ \frac{x+5}{x+2} \leq 3 \\ x^2 + x + 1 \geq 1 \\ \frac{x+5}{x+2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq 0 \\ \frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \\ \frac{2x+1}{x+2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \leq 0 \\ \frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \\ x(x+1) \geq 0 \\ \frac{2x+1}{x+2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \\ x \in [-2; -1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right]. \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$

Тема 1.9 Тригонометрические уравнения

Литература: [1, §1.5; 4, гл.V, §14, п.155; 6, гл. 8].

Тригонометрические уравнения

Рассмотрим вначале простейшие тригонометрические уравнения. Умение правильно записать их решения важно, так как методы решения произвольных тригонометрических уравнений, как правило, заключаются в сведении указанных к эквивалентным системам простейших уравнений. К числу простейших тригонометрических уравнений относятся описанные далее:

$\sin x = \alpha$, $|\alpha| \leq 1$. Все решения такого уравнения записываются в виде

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

В трех следующих случаях, когда $a \in \{-1; 0; 1\}$, решение уравнения представляется формулами:

$$\text{ï ðè à} = 0 \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ï ðè à} = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ï ðè à} = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что $\arcsin(-a) = -\arcsin(a)$. Поэтому, если $-1 < a < 0$, то решение уравнения $\sin x = a$ может быть записано в виде

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin(a) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Решение:

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При решении уравнения $\sin(\alpha - x) = a, 0 \leq a \leq 1$ целесообразно преобразовать его к виду $\sin(x - \alpha) = -a$ и затем записать решение следующим образом:

$$x = \alpha + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение: запишем уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

тогда:

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1} * \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + (-1)^{n+1} * \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} * \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{9}(6n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = a, |a| \leq 1$. Все решения этого уравнения записываются в виде

$$x = \mp \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

В трех следующих случаях, когда $a \in \{-1; 0; 1\}$, решение уравнения записывается по формулам:

$$\text{ï ð è } \alpha = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ï ð è } \alpha = -1 \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ï ð è } \alpha = 1 \quad x = (2\pi n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение:

$$x = \mp \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \mp \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \mp \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При решении уравнения $\cos(\alpha - x) = a, 0 < a < 1$ целесообразно преобразовать его к виду $\cos(x - \alpha) = a$. Его решение имеет вид

$$x = \alpha \mp \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$. Все решения такого уравнения записываются в виде

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $a = 0$ решение записывается в виде $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, решение уравнения $\operatorname{tg} x = a, a < 0$ записывается в виде $x = -\operatorname{arctg} |a| + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение: запишем уравнение

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

тогда

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Все решения данного уравнения записываются в виде:

$$x = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $a = 0$ решение имеет вид

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$, решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, $a < 0$ записывается в виде

$$x = \pi - \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\operatorname{arccctg} a + \pi(n+1), n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

(Обратите внимание на то, что в решении $n+k, n, k \in \mathbb{Z}$ k может быть заменено на n .)

Пример 6. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\sqrt{3}.$$

Решение: запишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Тогда

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \operatorname{arccctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -\operatorname{arccctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

Как отмечалось выше, решение произвольных тригонометрических уравнений обычно сводится к решению эквивалентной совокупности

простейших тригонометрических уравнений. При этом может оказаться, что среди полученной совокупности возможных решений некоторые серии решений содержатся в других (например, решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

содержатся среди решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$). Такие решения можно исключить из совокупности полученных решений.

Пусть, например, получены две серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k, k \in \mathbb{Z}.$$

Выясним, содержится ли одна из этих серий узлов в другой. Для этого рассмотрим равенство

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k \Leftrightarrow 3 + 4n = 1 + 2k \Leftrightarrow k = 2n + 1.$$

Полученное равенство показывает, что решение x_1 содержится в решении x_2 и $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$, и поэтому решение x_1 должно быть опущено.

В общем случае предполагают, что серия решений x_1 содержит параметр $n \in \mathbb{Z}$, а серия решений x_2 — параметр $k \in \mathbb{Z}$. Чтобы выяснить, содержится ли одна из этих серий в другой, нужно приравнять эти решения и найти зависимость n от k . Если эта зависимость линейна ($n = ak + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$), то серия решений x_2 содержится в серии решений x_1 . Если хотя бы один из коэффициентов (a или b) не целый, то нужно найти зависимость k от n . Если эта зависимость имеет вид $k = \alpha n + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, то серия решений x_1 содержится в серии решений x_2 . При условии, что либо α , либо β не целое, серии решений x_1 и x_2 не содержат одно другое.

В некоторых случаях из полученного решения тригонометрического уравнения нужно исключить совокупность корней (которые, например, не входят в область определения уравнения). Пусть из серии решений x_1 , которая содержит параметр n , нужно исключить совокупность тех корней, которые входят в серию решений x_2 , содержащих параметр m . Чтобы выполнить такое исключение, серии решений x_1 и x_2 приравниваются и из полученного равенства n выражается через $m \cdot n = A(m)$. Если существуют $m \in \mathbb{Z}$, при

которых $A(m) \in Z$, то из серии решений x_1 должны быть исключены корни, соответствующие $n = A(m)$.

Пусть, например, из серии решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ нужно исключить числа $\frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$.

Запишем равенство

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \Rightarrow n = 2m + 1$$

Таким образом, нечетные n должны быть исключены из серии решений x . В результате исключения

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$$

Переходя к решению произвольных тригонометрических уравнений, заметим, что решение всякого тригонометрического уравнения начинается с выполнения всех формул приведения, которые можно использовать.

1. Тригонометрические уравнения типа

$$\begin{aligned} \sin mx \mp \sin nx \mp \sin px \mp \sin kx &= 0; \\ \cos mx \mp \cos nx \mp \cos px \mp \cos kx &= 0; \\ \sin mx \mp \sin nx \mp \sin px &= 0; \\ \cos mx \mp \cos nx \mp \cos px &= 0; \\ \sin mx \mp \sin nx \mp \cos px \mp \cos kx &= 0, \end{aligned}$$

где $m, n, p, k \in R$.

Решение таких уравнений сводится к группировке, последующему разложению правой части уравнения на множители и переходу к решению эквивалентной совокупности простейших уравнений.

Пример 7. Решить уравнение

$$\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$$

Решение: в данном случае ОДЗ $= R$. Сгруппируем правую часть уравнения:

$$(\cos 9x - \cos 7x) + (\cos 3x - \cos x) = 0.$$

Воспользуемся формулой разности косинусов

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} :$$

$$\begin{aligned} -2 \sin 8x \sin x - 2 \sin 2x \sin x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x (\sin 8x + \sin 2x) &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ,$$

запишем уравнение в виде $\sin x \sin 5x \cos 3x = 0$ и запишем его эквивалентной совокупностью простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} m, m \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Выясним, не содержатся ли какие-либо из полученных серий решений x_1, x_2, x_3 в других:

а) $\pi n = \frac{\pi}{5} k \Leftrightarrow k = 5n$, следовательно, решение x_1 содержится в решении x_2 и поэтому x_1 следует исключить из решения;

б) $\frac{\pi}{5} k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} m \Leftrightarrow 6k = 5 + 10m$, что невозможно при $k, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{5} k; \frac{\pi}{6} (2m + 1) \mid k, m \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Тригонометрические уравнения типа

$$\begin{aligned}\sin^2 mx \mp \sin^2 nx \mp \sin^2 px \mp \sin^2 kx &= a, a \in 0;2; \\ \cos^2 mx \mp \cos^2 nx \mp \cos^2 px \mp \cos^2 kx &= a, a \in 0;2; \\ \sin^2 mx \mp \sin^2 nx \mp \cos^2 px \mp \cos^2 kx &= a, a \in 0;2; \\ \sin^2 mx \mp \sin^2 nx \mp \sin^2 px &= \frac{3}{2}; \\ \cos^2 mx \mp \cos^2 nx \mp \cos^2 px &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Указанные уравнения сводятся к уравнениям, рассмотренным ранее с помощью формул понижения порядка:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0.$$

Решение: ОДЗ уравнения R . Применив формулы понижения порядка, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned}\frac{1 + \cos x}{2} + \frac{1 + \cos 3x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 8x}{2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 8x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x + \cos 3x) + (\cos 4x + \cos 8x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x \cos 6x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos 2x (\cos x + \cos 6x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \cos 2x \cos \frac{7}{2}x \cos \frac{5}{2}x &= 0 \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 0 & x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos \frac{7}{2}x = 0 \Leftrightarrow & x_2 = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \cos \frac{5}{2}x = 0 & x_3 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.\end{aligned}$$

Сравнение решений показывает, что ни одно из них не содержится в других решениях.

$$\underline{\text{Ответ}} : \left\{ \frac{\pi}{4}(2n+1); \frac{\pi}{5}(2k+1); \frac{\pi}{7}(2m+1) / k; n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Тригонометрические уравнения типа

$$\sin ax \sin bx \mp \sin mx \cos nx \mp \cos px \cos kx = 0.$$

Такие уравнения сводятся к уравнениям, рассмотренным ранее с помощью формул

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\cos x \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4x\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 5x\right).$$

Решение: ОДЗ данного уравнения R . Запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) = \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right)) + \frac{1}{2} \left(\sin(9x - \pi) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) \right).$$

Сократив на $\frac{1}{2}$ и воспользовавшись формулами приведения, сведем уравнение к виду, рассмотренному ранее:

$$\cos x + \cos 3x = \cos 3x + \sin 5x - \sin 9x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 7x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Решения x_1 и x_2 не содержатся одно в другом.

$$\underline{\text{Ответ}} : \left\{ \frac{\pi}{14}(2n+1); \frac{\pi}{2} m / n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Рассмотрим тригонометрические уравнения, которые решаются подстановками.

4. Тригонометрические уравнения вида

$$P_n(\sin \alpha x) = 0; P_n(\cos \alpha x) = 0; P_n(\operatorname{tg} \alpha x) = 0; P_n(\operatorname{ctg} \alpha x) = 0,$$

где $P_n(t)$ — многочлен n -й степени, сводятся подстановками $\sin \alpha x = t, \cos \alpha x = t, \operatorname{tg} \alpha x = t, \operatorname{ctg} \alpha x = t$ соответственно к целым рациональным уравнениям, рассмотренным ранее.

Пример 10. Решить уравнение

$$\cos^2 2x + 6 \cos 2x = \frac{25}{16}.$$

Решение: в данном уравнении ОДЗ $= R$. Сделаем подстановку $\cos 2x = t, 0 \leq t \leq 1$. Тогда

$$\begin{cases} t^2 + 6t - \frac{25}{16} = 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{25}{4} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} + 2\pi k.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} + 2\pi k.$

5. К уравнениям, которые решаются подстановками, сводятся и другие тригонометрические уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$tgx + ctgx + tg^2x + ctg^2x + tg^3x + ctg^3x = 6.$$

Решение: ОДЗ данного уравнения

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, ОДЗ = $R \setminus \{ \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \}$. Преобразуем уравнение, учитывая, что

$$\begin{aligned} tg^2x + ctg^2x &= (tgx + ctgx)^2 - 2; \\ ctg^3x + tg^3x &= (tgx + ctgx)(tg^2x - tgxctgx + ctg^2x) = \\ &= (tgx + ctgx)((tgx + ctgx)^2 - 3); \\ tgx + ctgx + (tgx + ctgx)^2 - 2 + (tgx + ctgx)((tgx + ctgx)^2 - 3) &= 6. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку: $tgx + ctgx = t$. Тогда

$$t + t^2 - 2 + t(t^2 - 3) - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0.$$

Среди делителей 8 подбираем корень $t = 2$ и разделим левую часть уравнения на $t - 2$.

Квадратный трехчлен $t^2 + 3t + 4$ не имеет действительных корней. Следовательно,

$$tgx + ctgx = 2 \Rightarrow ctgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Все полученные решения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 12. Решить уравнение

$$5 \sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0.$$

Решение: область определения уравнения ОДЗ = R . Преобразуем уравнение к виду

$$\begin{aligned}
& 5(1 + \sin 2x) - 11(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 5(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) - 11(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x)^2 - 11(\sin x + \cos x) + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Сделаем подстановку $\sin x + \cos x = t$ (обратите внимание, что $|t| \leq \sqrt{2}$). Получаем квадратное уравнение

$$\begin{cases} 5t^2 - 11t + 2 = 0 \\ |t| \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{5} \\ |t| \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \mp \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = \mp \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4} (8n + 1), n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \mp \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4} (8n + 1) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

6. Уравнения вида $f(\sin \alpha x, \cos \alpha x) = 0$, где $f(U, V)$ — однородная функция порядка k (т.е. $f(tU, tV) = t^k f(U, V)$), называются однородными тригонометрическими уравнениями. Эти уравнения приводятся к виду $P_k(\operatorname{tg} \alpha x) = 0$, где $P_k(t)$ — многочлен степени k , и подстановкой $\operatorname{tg} \alpha x = t$ сводятся к алгебраическому уравнению.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$$

Решение: ОДЗ уравнения $= R$. Запишем уравнение в виде

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Данное уравнение — однородное, левая часть его не содержит общий множитель, поэтому ни один член левой части уравнения не может обратиться в нуль. Следовательно, левую часть уравнения можно разделить на любой ее член.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x &= 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \operatorname{arctg} 3 + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi m \mid n, m \in Z \right\}.$

Пример 5. Решить уравнение

$$0,125 * 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \right)^{-x}.$$

Решение: область определения уравнения $\text{ОДЗ} = R$.

Представим уравнение в виде

$$2^{-3} * 2^{2(2x-3)} = \left(2^{\frac{1}{2}} * 2^{-3} \right)^{-x}$$

и преобразуем его к виду

$$2^{-3+2(2x-3)} = \left(2^{-\frac{5}{2}} \right)^{-x} \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 4x - 9 = \frac{5}{2}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 9 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: {6}.

Тема 1.6 Системы логарифмических и показательных уравнений

Литература: [1, §2.4; 4, гл. V, §16, п. 170; 6, гл. 7].

Системы логарифмических и показательных уравнений

Одним из основных способов решения систем логарифмических и показательных уравнений является сведение их к системам алгебраических уравнений. Часто при этом преобразования приводят к расширению области определения системы. В таком случае необходимо сделать проверку найденных решений.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

Решение: для данной системы уравнений ОДЗ состоит из точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} x + y > 0; \\ x - y > 0. \end{cases}$$

Преобразуем рассматриваемую систему уравнений к алгебраической:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 * 10^{\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x^2 - y^2) = \lg 100 - \lg 5 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверим найденное уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10^{1+\lg\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 50 \\ \lg\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2 - \lg 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10^{1+\lg 5} = 50 \\ \lg 4 + \lg 5 = \lg 100 - \lg 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10 * 10^{\lg 5} = 50 \\ \lg 20 = \lg 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 50 = 50 \\ \lg 20 = \lg 20. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}.$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81; \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$$

Решение : ОДЗ данной системы уравнений:

$$\text{ОДЗ} = \{(x; y) / x, y \in R_+\}; \quad R_+ = (0; \infty).$$

Преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4; \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = U, U > 0; \\ \sqrt{y} = V, V > 0. \end{cases}$$

Получим систему уравнений относительно U и V :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2U - V = 4 \\ UV = 30 \\ U > 0 \\ V > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} V = 2U - 4 \\ U(2U - 4) = 30 \\ U > 0 \\ V > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} V = 2U - 4 \\ U^2 - 2U - 15 = 0 \\ U > 0 \\ V > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} U = 5 \\ U = -3 \\ V = 2U - 4 \\ U > 0 \\ V > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 5 \\ V = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 36. \end{cases}$$

Выполнив проверку, убедимся, что $(25; 36)$ — решение данной системы.

Ответ : $\{(25;36)\}$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 * \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 * \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0 \\ \lg(3x - y) + \lg(y + x) - 4 \lg 2 = 0. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений определяется условиями:

$$\begin{cases} 3x - y > 0 \\ y + x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы

$$3 * \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 * \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0.$$

Оно является квадратным относительно $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = t$:

$$\begin{cases} 3t^2 + 7t - 6 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, первое уравнение системы эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x-y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 2.$$

Потенцируя второе уравнение системы, получаем:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x - y = 2 \\ (3x - y)(y + x) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ (x + 2)(3x - 2) - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 3x^2 + 4x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases} \\ y = -\frac{26}{3} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{26}{3}\right) \notin \text{ОДЗ}$. Выполнив проверку, убедимся, что

$(2; 2)$ — решение данной системы.

Ответ: $\{(2; 2)\}$.

Тема 1.7 Логарифмические неравенства

Литература: [1, §3.5; 4, гл.VI, §17, п.185; 6, гл. 9].

Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств основывается на следующих свойствах монотонности логарифмических функций:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ a > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пример 9. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(3x - 8) > \log_{0,3}(x^2 + 4).$$

Решение: в соответствии с (1.11) получаем:

$$\begin{aligned} \log_{0,3}(3x - 8) > \log_{0,3}(x^2 + 4) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8 > 0 \\ 3x - 8 < x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{3} \\ x^2 - 3x + 12 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{3} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{8}{3}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$2 \log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) > \frac{2}{3}.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства $(3; +\infty)$. Преобразуем данное неравенство:

$$2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_8 \frac{(x-2)^2}{x-3} > \log_8 4$$

и перейдем к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ \frac{(x-2)^2}{x-3} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ \frac{(x-4)^2}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{\frac{1}{3}}(x+9).$$

Решение: ОДЗ данного неравенства $(0; +\infty)$. Приведем все логарифмы к основанию 3 и выполним потенцирование:

$$\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_3 x - \log_3(5x) > -\log_3(x+9) \Leftrightarrow$$

$$2 \log_3 \sqrt{3} + \log_3 x - 2 \log_3(5x) > -2 \log_3(x+9) \Leftrightarrow$$

$$\log_3 3 + \log_3 x + \log_3(x+9)^2 > \log_3(5x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\log_3(3x(x+9)^2) > \log_3(25x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ 3x(x+9)^2 > 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ 3(x+9)^2 - 25x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ 3x^2 + 29x + 243 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$$

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение логарифмических неравенств методом замены неизвестной (подстановки)

Пример 12. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$$

Решение: ОДЗ данного неравенства $(0;10) \cup (10;+\infty)$. Сделаем подстановку $\lg x = t$ и получим относительно неизвестной t рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} < 1 &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 3 - t + 1}{t - 1} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 2)^2}{t - 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2 \\ t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow t < 1 \end{aligned}$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем:

$$\begin{cases} x \in (0;10) \cup (10;+\infty) \\ \lg x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;10).$$

Ответ: $(0;10)$.

Пример 13. Решить неравенство

$$\log_2^2(x - x^2 + 2) + 3\log_{0,5}(x - x^2 + 2) + 2 \leq 0.$$

Решение: найдем ОДЗ данного неравенства:

$$x - x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1;2).$$

Таким образом, ОДЗ $= (-1;2)$.

Перейдем во всех логарифмах, входящих в неравенство, к основанию 2:

$$\log_2^2(x - x^2 + 2) - 3\log_2(x - x^2 + 2) + 2 \leq 0.$$

и сделаем замену $\log_2(x - x^2 + 2) = t$. Получим неравенство относительно неизвестной t :

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [1;2].$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ 1 \leq \log_2(x - x^2 + 2) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ 2 \leq x - x^2 + 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ x^2 - x \leq 0 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ x(x - 1) \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ x(x - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x \in [0; 1].
\end{aligned}$$

Ответ: $[0; 1]$.

Решение логарифмических неравенств на основе анализа области допустимых значений

Пример 14. Решить неравенство

$$\frac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x + 3)} > 0.$$

Решение: найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -8x - x^2 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ \lg(x + 3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 8) < 0 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup (-2; 0).
\end{aligned}$$

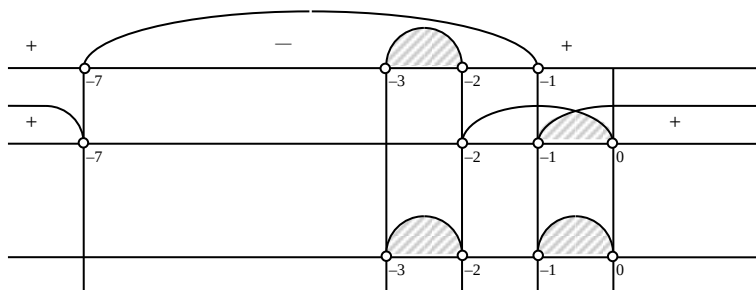
Таким образом, ОДЗ = $(-3; -2) \cup (-2; 0)$.

Заметим, что ОДЗ распадается на два множества — интервал $(-3; -2)$, где $\lg(x + 3) < 0$ и интервал $(-2; 0)$, в точках которого $\lg(x + 3) > 0$. Следовательно,

$$\frac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; -2) \\ \lg 7 - \lg(-8x - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ \lg 7 - \lg(-8x - x^2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-3; -2) \\ x^2 + 8x + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; -2) \\ (x+1)(x+7) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-2; 0) \\ x^2 + 8x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ (x+1)(x+7) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-3; -2) \cup (-1; 0)$.

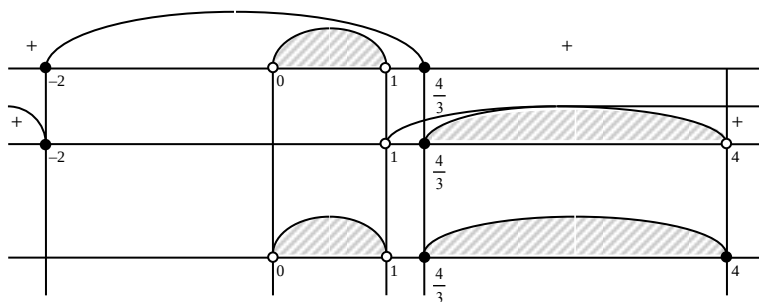
Пример 15. Решить неравенство

$$\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства $(0; 1) \cup (1; 4)$. Рассматривая интервалы, входящие в ОДЗ, получаем:

$$\begin{cases} x \in (0;1) \\ \frac{3}{8-2x} \leq \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \\ 3x^2 \leq 8-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ \frac{3}{8-2x} \geq \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ 3x^2 \geq 8-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0;1) \\ 3x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \\ 3(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ 3x^2 + 2x - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ 3(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right) \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $(0;1) \cup \left[\frac{4}{3};4\right)$.

Решение логарифмических неравенств путем сведения их к эквивалентным системам или к эквивалентным совокупностям систем более простых неравенств

Пример 16. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{\log_{0,5}(x^2 - 1)} < 0.$$

Решение: область определения данного неравенства:

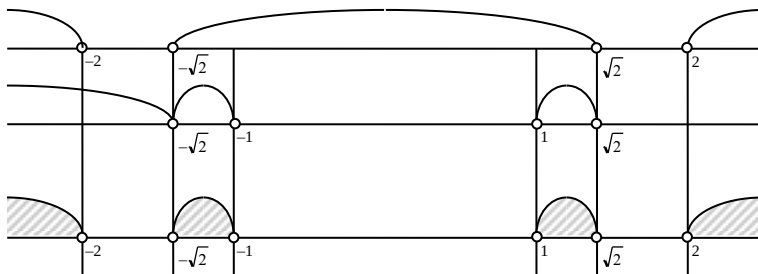
$$D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

Заменяем данное неравенство эквивалентной совокупностью систем неравенств:

$$\frac{x^2 - 4}{\log_{0,5}(x^2 - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \log_{0,5}(x^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ \log_{0,5}(x^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x + 2) > 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем:



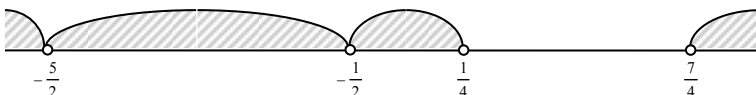
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty).$

Пример 17. Решить неравенство

$$\frac{\log_6\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right)}{4x^2 + 2x + 15} > 0.$$

Решение: найдем область определения данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0 \\ 4x^2 + 12x + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{7}{4}\right) > 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

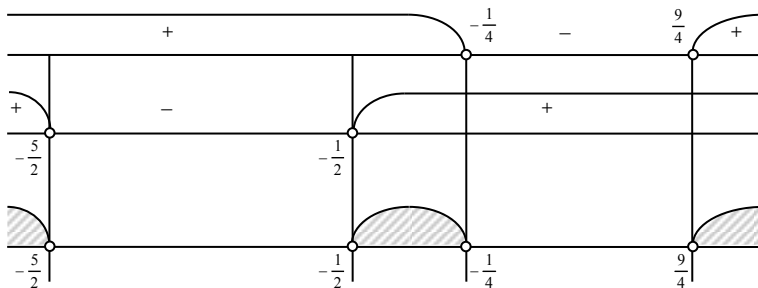


$$D = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right).$$

Заменим данное неравенство эквивалентной совокупностью систем неравенств:

$$\begin{cases} \log_6\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right) > 0 \\ 4x^2 + 12x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{9}{16} > 0 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_6\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right) < 0 \\ 4x^2 + 12x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{9}{16} < 0 \\ 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) > 0 \\ \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) < 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) > 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right) > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) > 0. \end{cases}$$



Ответ : $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right).$

Тема 1.8 Показательные неравенства

Литература: [1, § 3.6; 4, гл.VI, §17, п.184; 6, гл. 9].

Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств, как правило, основывается на следующих свойствах монотонности показательной функции:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

1. Показательные неравенства типа

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, a > 0, a \neq 1$$

Пример 18. Решить неравенство

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243.$$

Решение:

$$\begin{aligned}(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243 &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 6 > 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).\end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

Пример 19. Решить неравенство

$$2^{\sqrt{x}+1} - 16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} \geq 0.$$

Решение: ОДЗ данного неравенства $[0; +\infty)$. Приведем данное неравенство к виду

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{x}+1} - 16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} &\geq 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}+1} \geq 2^4 \cdot 2^{\frac{x}{4}-5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}+1} &\geq 2^{\frac{x}{4}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq \frac{x}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 8 \geq x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} - 8 \leq 0.\end{aligned}$$

Сделаем замену $\sqrt{x} = t, t \geq 0$ и получим для новой неизвестной t систему неравенств

$$\begin{aligned}\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 4t - 8 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \left(t - (2 + \sqrt{12})\right)\left(t - (2 - \sqrt{12})\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \in [0; 2 + \sqrt{12}].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x \in [0; +\infty) \\ \sqrt{x} \leq 2 + \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; +\infty) \\ x \leq 8(2 + \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 8(2 + \sqrt{3})].$$

Ответ: $[0; 8 \cdot (2 + \sqrt{3})].$

2. Решение показательных неравенств с помощью замены неизвестной (подстановки)

Пример 20. Решить неравенство

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} \geq 250.$$

Решение: запишем данное неравенство в виде

$$\frac{1}{5} * 5^{2x} + 5 * 5^x - 250 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{2x} + 25 * 5^x - 1250 \geq 0$$

и, сделав замену $5^x = t$, $t > 0$, получим относительно новой неизвестной t систему неравенств

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 + 25t - 1250 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t + 50)(t - 25) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [25; +\infty).$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$5^x \geq 25 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty).$$

Ответ: $[2; +\infty)$.

Пример 21. Решить неравенство

$$2^x - 3 * 2^{0,5(x-3)} \geq 3^{2+\lg_3 5} - 19.$$

Решение: преобразуем данное неравенство:

$$\begin{aligned} 2^x - 3 * 2^{0,5(x-3)} &\geq 3^{2+\lg_3 5} - 19 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x - 3 * 2^{0,5x} * 2^{-1,5} &\geq 9 * 3^{\lg_3 5} - 19 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x - \frac{3}{2\sqrt{2}} * 2^{0,5x} &\geq 45 - 19 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} * 2^x - 3 * 2^{0,5x} - 52\sqrt{2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Сделав замену $2^{0,5x} = t$, $t > 0$, получим

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}t^2 - 3t - 52\sqrt{2} \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}\left(t + \frac{13\sqrt{2}}{4}\right)(t - 4\sqrt{2}) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [4\sqrt{2}; +\infty).$$

Таким образом,

$$2^{0,5x} \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{0,5x} \geq 2^{2,5} \Leftrightarrow 0,5x \geq 2,5 \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow x \in [5; +\infty).$$

Ответ: $[5; +\infty)$.

3. Однородные показательные неравенства

Пример 22. Решить неравенство

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 3^{2x} \leq 0.$$

Решение: преобразуем данное неравенство к виду

$$2 * 2^{2x} - 5 * 2^x * 3^x + 3 * 3^{2x} \leq 0 \text{ и разделим его на } 3^{2x} > 0:$$

$$2 * \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \leq 0.$$

Сделав замену $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0$, получим систему неравенств

относительно неизвестной t :

$$\begin{cases} t > 0 \\ 2t^2 - 5t + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 2(t-1)\left(t - \frac{3}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0].$$

Ответ: $[-1; 0]$.

Пример 23. Решить неравенство

$$10^{\frac{2}{x}} - \frac{17}{4} * 50^{\frac{1}{x}} + 5^{\frac{2}{x}} \geq 0$$

Пример 14. Решить уравнение

$$4 \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin(\pi + x) \cos x + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(\pi + x) = 1.$$

Решение: для данного уравнения $ОДЗ = R$. Воспользовавшись формулами приведения, запишем уравнение в виде

$4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$ и заменим в правой части единицу на $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку $\operatorname{tg} x = t$:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi m \mid n, m \in Z \right\}$.

К однородным сводятся уравнения $a \cos t + b \sin t = c$. Действительно, записав это уравнение в виде

$$a \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} \right) + 2b \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = c \left(\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} \right),$$

сведем его к

$$(a - c) \cos^2 \frac{t}{2} - (a + c) \sin^2 \frac{t}{2} + 2b \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 0.$$

Пример 15. Решить уравнение

$$4 \sin 3z + \frac{1}{3} \cos 3z = 3.$$

Решение: для данного уравнения $\text{ОДЗ} = R$. Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 4 * 2 \sin \frac{3z}{2} \cos \frac{3z}{2} + \frac{1}{3} \left(\cos^2 \frac{3z}{2} - \sin^2 \frac{3z}{2} \right) &= 3 \left(\cos^2 \frac{3z}{2} + \cos^2 \frac{3z}{2} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8 \sin \frac{3z}{2} \cos \frac{3z}{2} - \frac{8}{3} \cos^2 \frac{3z}{2} - \frac{10}{3} \sin^2 \frac{3z}{2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \sin^2 \frac{3z}{2} + 4 \cos^2 \frac{3z}{2} - 12 \sin \frac{3z}{2} \cos \frac{3z}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Разделим уравнение на $\cos^2 \frac{3z}{2}$:

$$5 \tan^2 \frac{3z}{2} - 12 \tan \frac{3z}{2} + 4 = 0$$

и сделаем подстановку $\tan \frac{3z}{2} = t$:

$$5t^2 - 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{5} \\ t = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \tan \frac{3z}{2} = \frac{2}{5} \\ \tan \frac{3z}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{3} \arctg \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \pi n, n \in Z \\ z = \frac{2}{3} \arctg 2 + \frac{2}{3} \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{2}{3} \arctg \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \pi n; \frac{2}{3} \arctg 2 + \frac{2}{3} \pi m \mid n, m \in Z \right\}.$

7. Тригонометрические уравнения, содержащие выражения вида

$\sin^k x + \cos^n x$, $k, n \in \mathbb{N}$. Наиболее простыми из таких уравнений являются уравнения, содержащие

$\cos^4 x + \sin^4 x$, $\cos^6 x + \sin^6 x$, $\cos^8 x + \sin^8 x$ и т.д. Эти уравнения в ряде случаев сводятся к алгебраическим с помощью подстановки $\sin 2x = t$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}.$$

Решение: в данном случае $\text{ОДЗ} = \mathbb{R}$. Учтем, что

$$\begin{aligned} \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha &= (\sin^4 \alpha)^2 + (\cos^4 \alpha)^2 = (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2 \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha = \\ &= \left((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right)^2 - 2 \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha = \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{8} \sin^4 2\alpha, \end{aligned}$$

и получим

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 4x \right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 4x &= \frac{41}{128} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 4x + \frac{1}{4} \sin^4 4x - \frac{1}{8} \sin^4 4x - \frac{41}{128} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8} \sin^4 4x - \sin^2 4x + \frac{87}{128} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16 \sin^4 4x - 128 \sin^2 4x + 87 &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку $\sin^2 4x = t, 0 \leq t \leq 1$;

$$\begin{cases} 16t^2 - 128t + 87 = 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} \\ t = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\sin^2 4x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 8x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mp \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ : $\left\{ \mp \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4} / n \in \mathbb{Z} \right\}.$

8. Введение вспомогательного аргумента при решении тригонометрических уравнений. Метод введения вспомогательного аргумента относится к уравнениям вида

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Мы уже рассматривали способ сведения таких уравнений к однородным. Этот прием является наиболее употребимым при решении рассматриваемого уравнения в случае, когда коэффициенты a, b, c являются рациональными числами. В случае, когда какие-либо из коэффициентов a, b, c — иррациональные числа, сведение уравнения к однородному и последующее его решение может привести к квадратному уравнению с громоздкими коэффициентами и к громоздкой форме представления решения данного уравнения. В этом случае более удобным может оказаться метод введения вспомогательного аргумента, который состоит в следующем.

Обе части уравнения $a \sin x + b \cos x = c$ делятся на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1; \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1; \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1,$$

то можно считать значения $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ значениями синуса и косинуса некоторого аргумента φ (который называют вспомогательным аргументом):

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда уравнение сводится к виду

$$\sin x \sin \varphi + \cos x \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, то решение существует и

$$x = \varphi \mp \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

где $\varphi = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Если $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, то решения нет.

Решение может быть представлено и иначе, если обозначить

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

Пример 17. Решить уравнение

$$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$$

Решение: для рассматриваемого уравнения $D = R$. Запишем уравнение в виде

$$\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sqrt{3} \cos x + \sin x.$$

В данном случае $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}$. Умножим уравнение на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

В левой части введем вспомогательный аргумент $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, а в правой

$\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, тогда

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{6} \sin 3x &= \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) &= \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} & \end{aligned}$$

Ответ : $\left\{ \frac{\pi}{8} (4k + 1); \frac{\pi}{12} (12n + 1) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Тема 1.10 Тригонометрические неравенства

Литература: [1; §3.7; 4 гл.VI §17 п. 187; 6. гл.9].

Тригонометрические неравенства

Рассмотрим вначале простейшие тригонометрические неравенства.

1. $\sin x > a$, $|a| \leq 1$.

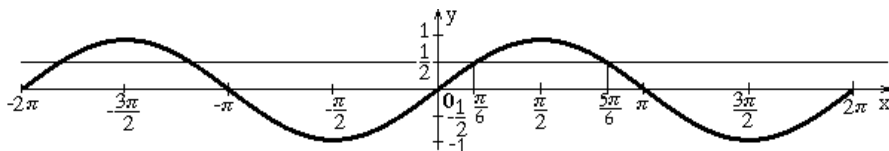
Множество решений этого неравенства будем искать с помощью графика функции $y = \sin x$ следующим образом. Рассмотрим часть графика, соответствующую отрезку оси Ox длиной в период 2π . Проведем прямую $y = a$, найдем точки пересечения этой прямой с рассматриваемой частью

графика $y = \sin x$ и спроецируем на ось Ox . Промежутки оси Ox , заключенные между точками, на которых $\sin x > a$, определяют множество решений данного неравенства на рассматриваемом отрезке оси Ox . Множество всех решений неравенства - совокупность таких промежутков на всех отрезках, $[2\pi n; (2n + 1)\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 18. Решить неравенство

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

Решение: построим график функции $y = \sin x$:



Выберем отрезок $[0; 2\pi]$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$. Найдем точки пересечения этой прямой с синусоидой и спроецируем их на ось Ox .

Получим точки $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$. Как видно из графика, при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$

$\sin x > \frac{1}{2}$ и поэтому точки интервала $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ являются множеством

решений рассматриваемого неравенства на отрезке $[0; 2\pi]$. Множество всех решений неравенства — совокупность интервалов

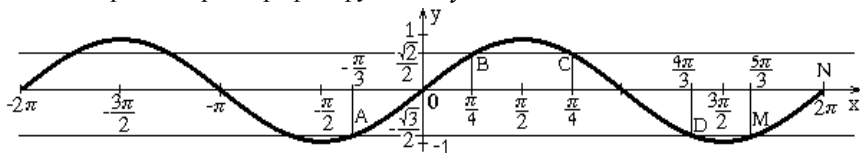
$$\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right) / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right) / n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 19. Решить неравенство

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение: рассмотрим график функции $y = \sin x$:



Выберем на оси Ox отрезок длиной в период $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$. Заметим, что в данном случае удобнее рассматривать этот отрезок, чем отрезок $[0; 2\pi]$, так как отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ соответствует две дуги синусоиды AB и CD ,

лежащие между прямыми $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а отрезку $[0; 2\pi]$ — три такие дуги: OB , CD , MN .

Спроецируем точки A, B, C, D на ось Ox и найдем абсциссы этих точек.

Очевидно (см. график), что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ множеством решений

данного неравенства являются промежутки $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ и $\left[\frac{3}{4}\pi; \frac{4}{3}\pi\right]$.

Множеством всех решений данного неравенства является совокупность

промежутков $\left\{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ответ: $\left\{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

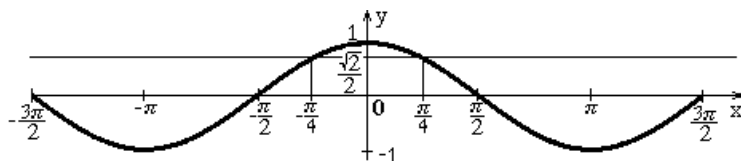
2. $\cos x > a$, $|a| \leq 1$.

Решение неравенства с учетом того, что рассматривается график функции $y = \cos x$. Проиллюстрируем это следующими примерами

Пример 20. Решить неравенство

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение: рассмотрим график функции $y = \cos x$ на отрезке длиной в период $[-\pi; \pi]$. (Заметим, что этот отрезок удобнее рассматривать при решении данного неравенства, чем, например, отрезок $[0; 2\pi]$.)



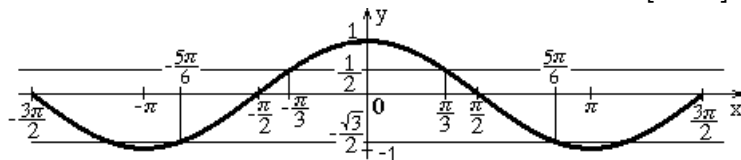
Как следует из графика, множеством решений данного неравенства на выбранном отрезке $[-\pi; \pi]$ является интервал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, множеством всех решений рассматриваемого неравенства является совокупность интервалов $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) / n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пример 21. Решить неравенство

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2}.$$

Решение: рассмотрим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$:



Рассматривая части косинусоиды, лежащей в полосе, заключенной между прямыми $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, находим, что на отрезке $[-\pi; \pi]$ множества решений данного неравенства является $\left[-\frac{5}{6}\pi; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5}{6}\pi\right]$.

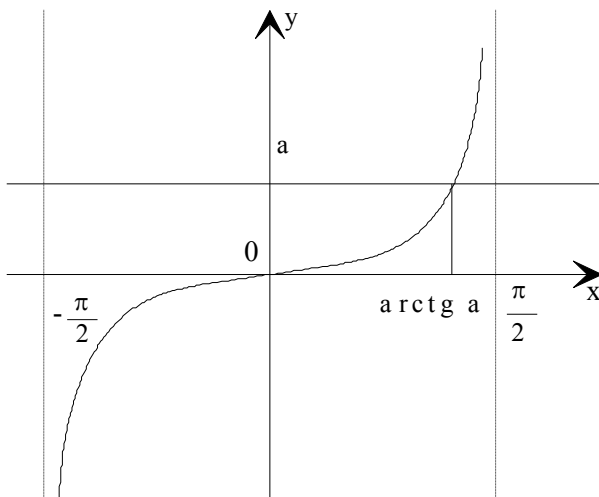
Следовательно, множество всех решений данного неравенства- совокупность множеств

$$\left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right] / n \in \mathbb{Z} \right\}.$

3. $\operatorname{tg} x \geq a, a \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$:



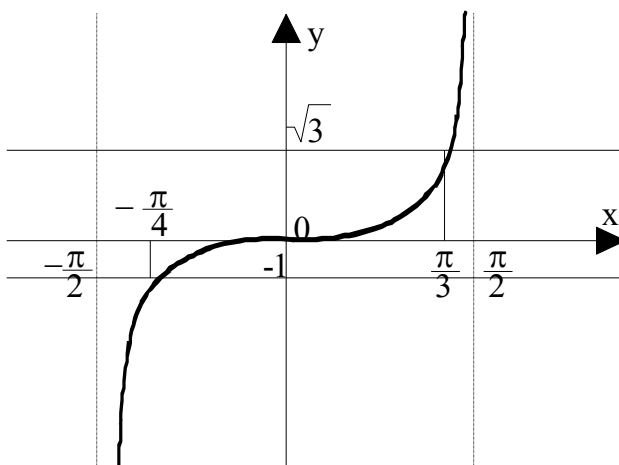
Из графика следует, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ множеством решений неравенства является промежуток $\left[\operatorname{arctg} a; \frac{\pi}{2} \right).$

Следовательно, множество всех решений неравенства- совокупность промежутков $\left[\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

Пример 22. Решить неравенство

$$-1 \leq \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}.$$

Решение: сделав замену $2x - \frac{\pi}{4} = t$, получим неравенство относительно неизвестной t : $-1 \leq \operatorname{tg} t < \sqrt{3}$. Рассмотрим график функции $y = \operatorname{tg} t$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и найдем множество решений данного неравенства на этом интервале:



Множество решений данного неравенства на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ — промежуток $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$. Множество всех решений данного неравенства — совокупность промежутков $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

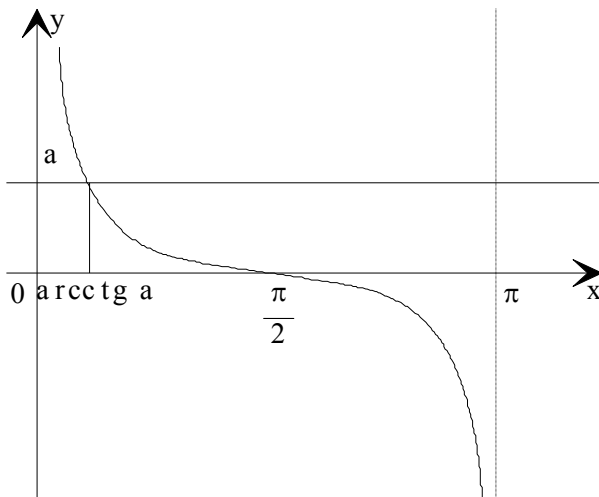
Таким образом,

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} n \leq x < \frac{7}{24} \pi + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \left[\frac{\pi}{2} n; \frac{7}{24} \pi + \frac{\pi}{2} n \right] / n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4. $\operatorname{ctg} x \geq a, a \in \mathbb{R}.$

Множество решений неравенства будем искать, используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$:



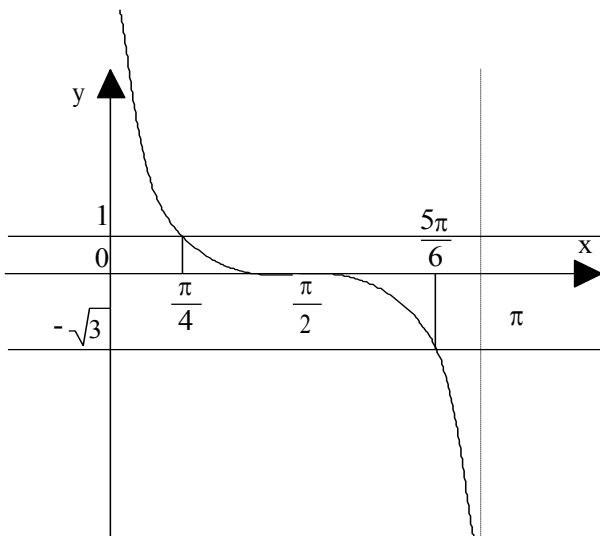
Множество решений неравенства на интервале $(0; \pi)$ — промежуток $(0; \operatorname{arcctg} a)$. Множество всех решений неравенства — совокупность промежутков $(\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n] / n \in \mathbb{Z}.$

Пример 23. Решить неравенство

$$-\sqrt{3} < \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) \leq 1.$$

Решение: сделав замену $3x + \frac{\pi}{8} = t$, рассмотрим неравенство

$$-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} t \leq 1.$$



На интервале $(0; \pi)$ множество решений данного неравенства — промежуток $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5}{6}\pi\right)$. Множество всех решений данного неравенства — совокупность промежутков $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{5}{6}\pi + \pi n\right) / n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 3x + \frac{\pi}{8} < \frac{5}{6}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} + \pi n \leq 3x < \frac{17}{24}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}n \leq x < \frac{17}{72}\pi + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left[\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}n; \frac{17}{72}\pi + \frac{\pi}{3}n \right) / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение более сложных неравенств обычно состоит в сведении их к эквивалентным неравенствам или к эквивалентным системам (совокупностям систем неравенств, рассмотренным ранее или сходными с ними).

Пример 24. Решить неравенство

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0.$$

Решение: преобразуем данное неравенство, введя вспомогательный угол:

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) > 0.\end{aligned}$$

Сделаем замену $x - \frac{\pi}{6} = t$, получим неравенство $\cos t > 0$, множество решений

которого — совокупность интервалов $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Возвращаясь к неизвестной x , получаем

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ : $\left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \right) / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 25. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0.$$

Решение : ОДЗ данного неравенства

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$, получаем неравенство относительно неизвестной t :

$$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - \sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow t \in (1; \sqrt{3}).$$

Возвращаясь к неизвестной x , получаем неравенство $1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, множество решений которого — совокупность интервалов

$$\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ : $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right) / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 26. Решить неравенство

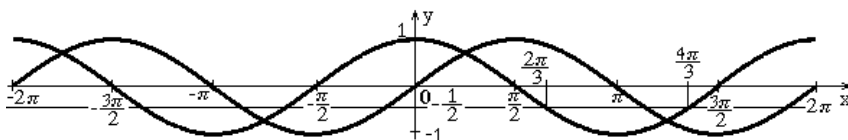
$$\sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \leq 0.$$

Решение: данное неравенство эквивалентно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x + \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Будем рассматривать решение совокупности этих систем, используя графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.



Анализируя графики этих функций, находим, что на отрезке $[0; 2\pi]$ решение данного неравенства — множество $\left[\frac{2}{3}\pi; \pi\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi; 2\pi\right]$. Таким образом, множество всех решений данного неравенства — совокупность множеств $\left[\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \pi(2n+1)\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right], n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{ \left[\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \pi(2n+1)\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right] / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Тема 1.11 Системы тригонометрических уравнений

Рассмотрим наиболее употребляемые способы решения систем тригонометрических уравнений.

Пример 27. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin y \\ x - y = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Решение: в данном случае ОДЗ = $\{(x, y) | x, y \in R\}$. Выразим y из второго уравнения и подставим его в первое:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x - \frac{5\pi}{3} \\ \sin x - 2 \sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{5\pi}{3} \\ \sin x - 2\left(\sin x \cdot \cos \frac{5\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{5\pi}{3} \\ \sin x - 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \frac{5\pi}{3} \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3} + \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y = -\frac{7}{6}\pi + \pi n, n \in Z \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}(2n+1); \frac{\pi}{6}(6n-7)\right) \middle| n \in Z\right\}$.

Пример 28. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{6} \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Решение: для данной системы уравнений ОДЗ состоит из точек (x, y) , где

$x, y \in R \setminus \frac{\pi}{2} + \pi k \middle| k \in Z$. Выразим y через x из второго уравнения и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{6} \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6} \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6} \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$:

$$\frac{t \cdot (1 - t)}{1 + t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6t \cdot (1 - t) = 1 + t \Leftrightarrow 6t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}(1 - 4n) \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}(1 - 4m). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } & \left\{ \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}(1 - 4n) \right); \right. \\ & \left. \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi m; -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}(1 - 4m) \right) \middle| n, m \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Пример 29. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0,25 \\ \sin y \cdot \cos x = 0,75. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ рассматриваемой системы уравнений $\{(x, y) | x, y \in R\}$. Сложим и вычтем уравнения системы:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 1 \\ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ \sin(x - y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x - y = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что нельзя в обоих уравнениях записать, например,

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - y = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \end{cases}$$

так как это может привести к потере решений.

Выберем во втором уравнении вначале $m = 2k$, затем $m = 2k + 1$:

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x - y = \frac{\pi}{6} + \pi(2k + 1), k \in Z \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x - y = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi + \pi(n+k) \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k); n, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+k) \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-k); n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\left\{ \left(\frac{5}{6}\pi + \pi(n+k); -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k) \right); \left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{3} + \pi(n-k) \right) \middle| n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 30. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений — множество точек,

$$\left\{ (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Преобразуем систему уравнений}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = 2 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = 2 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 1 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \cos(x-y) + \cos(x+y) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Учтем, что если $\sin(x+y) = 1$, то $\cos(x+y) = 0$, тогда

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x-y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi(n+m) \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi(n-m); n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \pi(n+m); \frac{\pi}{4} + \pi(n-m) \right) \middle| n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 31. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5 \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 6 \cos x = 5 - 4 \cos y \\ 6 \sin x = -4 \sin y. \end{cases}$$

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим их:

$$36 = 25 - 40 \cos y + 16 \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \mp \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\cos y = \frac{1}{8}$, находим из первого уравнения системы:

$$\cos x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \mp \arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{cases} x_1 = -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in Z \\ y_1 = -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, n \in Z \\ x_2 = -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in Z \\ y_2 = \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, n \in Z \\ x_3 = \arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in Z \\ y_3 = -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, n \in Z \\ x_4 = \arccos \frac{3}{4} + 2\pi m, m \in Z \\ y_4 = \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \right].$$

Так как в процессе решения мы возводили уравнения системы в квадрат, это могло привести к появлению посторонних решений. Поэтому полученные решения необходимо проверить. Легко убедиться (сделайте это сами), что решения (x_1, y_1) и (x_4, y_4) — посторонние, а решения (x_2, y_2) и (x_3, y_3) составляют множество решений рассматриваемой системы уравнений.

Ответ: $\left\{ \left(-\arccos \frac{3}{4} + 2\pi m; \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n \right); \right.$
 $\left. \left(\arccos \frac{3}{4} + 2\pi m; -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n \right) \middle| n, m \in Z \right\}.$

Пример 32. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2 \sin y \cdot \sin(x + y) = \cos x. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ данной системы уравнений определяется условиями

$$\begin{cases} y \in R \\ x \neq \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$2 \sin y \cdot \sin(x + y) = \cos x \Leftrightarrow \cos x - \cos(x + 2y) = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Получим систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 2y = -x + \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctgx} + \sin 2y = \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -x + \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctgx} + \sin\left(-x + \frac{\pi}{2} + \pi m\right) = \sin 2x. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\operatorname{ctgx} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi m\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctgx} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \sin 2x \\ \operatorname{ctgx} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi(2k + 1)\right) = \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctgx} + \cos x = \sin 2x \\ \operatorname{ctgx} - \cos x = \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + 1\right) = 2 \sin x \cdot \cos x \\ \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) = 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + 1 - 2 \sin x\right) = 0 \\ \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1 - 2 \sin x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases},$$

таким образом,

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; k, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; k, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k; k, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{2}(m-2k) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(m-2k) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(m-k) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(m-k), k, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2}(m - 2k) \right); \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2}(m - 2k + 1) \right); \right. \\ \left. \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(m - k) \right); \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(m - k) \right) \right\} \Big| k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тема 1.12 Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Тригонометрия

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \mp \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \mp \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta}{1 \pm \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \alpha, 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \mp \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \mp \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \mp \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \mp \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}; \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\alpha + \beta), a^2 + b^2 \neq 0,$$

где вспомогательный угол β определяется как $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\arcsin \alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

$$\arccos \alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = \pi - \operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Пример 1. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Решение: по формуле $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Решение: так как $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, то $\cos \alpha < 0$ и поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -0,6.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,8) \cdot (-0,6) = 0,96,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,36 - 0,64 = -0,28.$$

Ответ: 0,96; -0,28.

Пример 3. Вычислить $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha}$, если $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Решение: так как $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, то по формулам

$$\sin \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}},$$

находим $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Следовательно, $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha} = 4$.

Ответ: $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha} = 4$.

Пример 4. Упростить выражение $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$.

Решение:

$$\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2}}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2}} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha} = tg 2\alpha.$$

Ответ: $tg 2\alpha$.

Пример 5. При каких значениях α и β справедливо равенство

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)?$$

Решение: имеем

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta .$$

Поэтому равенство приводится к виду

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0$$

или

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 0 ,$$

т.е.

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 0 .$$

Отсюда получаем

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 0, \quad \alpha + \beta = 360^\circ \cdot k ,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0, \quad \alpha = 360^\circ \cdot l ,$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0, \quad \beta = 360^\circ \cdot m .$$

Итак, равенство возможно в трех случаях:

$$\alpha + \beta = 360^\circ \cdot k , \quad \alpha = 360^\circ \cdot l , \quad \beta = 360^\circ \cdot m ,$$

где k, l, m — любые целые числа.

Иногда для преобразования в произведение вводится вспомогательный угол.

Пример 6. Преобразовать в произведение $1 - 2 \sin \alpha$.

Решение:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin \alpha &= 2 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) = 2(\sin 30^\circ - \sin \alpha) = 4 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} = 4 \sin \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) . \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 4 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} = 4 \sin \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) .$$

Пример 7. Доказать тождество

$$\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha = \sin 3\alpha \cos 5\alpha .$$

Решение:

$$\begin{aligned}
 \sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha &= \frac{\sin(5\alpha + 3\alpha) + \sin(5\alpha - 3\alpha)}{2} - \sin 2\alpha = \\
 &= \frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{2} - \sin 2\alpha = \\
 \frac{\sin 8\alpha - \sin 2\alpha}{2} &= \frac{2 \sin \frac{8\alpha - 2\alpha}{2} \cos \frac{8\alpha + 2\alpha}{2}}{2} = \sin 3\alpha \cos 5\alpha.
 \end{aligned}$$

Ответ: тождество доказано.

Пример 8.

Доказать, что если $A + B + C = \pi$ ($A, B, C > 0$) и угол C тупой, то $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$.

Решение:

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(\pi - C) = -\operatorname{tg} C > 0, \text{ т.к. } C \text{ — тупой угол.}$$

Итак: $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} > 0$.

Так как A и B меньше $\pi/2$, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B > 0$, поэтому $1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B > 0$, $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$.

Пример 9.

Доказать, что если $\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$, то $\cos 2\gamma \leq 0$.

Решение:

$$\cos 2\gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}.$$

Для того чтобы показать, что $\cos 2\gamma \leq 0$, достаточно доказать, что

$$1 - \operatorname{tg}^2 \gamma \leq 0.$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}
 1 - \operatorname{tg}^2 \gamma &= 1 - \left(\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \right)^2 = 1 - \frac{(1 + \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 + \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим числитель:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 + \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2 &= (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta) - (1 + \sin \alpha \sin \beta)^2 = \\ &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 1 - 2 \sin \alpha \sin \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= -(\sin \alpha + \sin \beta)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\cos 2\gamma \leq 0$.

Пример 10.

Доказать, что если $A + B + C = \pi$, то

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Решение:

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= \sin 2A + 2 \sin(B + C) \cdot \cos(B - C) = \\ &= \sin 2A + 2 \sin(\pi - A) \cdot \cos(B - C) = \\ &= \sin 2A + 2 \sin A \cdot \cos(B - C) = 2 \sin A \cos A + 2 \sin A \cdot \cos(B - C) = \\ &= 2 \sin A \cdot (\cos A + \cos(B - C)) = \\ &= 2 \sin A \cdot 2 \cos \frac{A + B - C}{2} \cos \frac{A - B + C}{2} = 4 \sin A \cdot \cos \frac{\pi - 2C}{2} \cos \frac{\pi - 2B}{2} = \\ &= 4 \sin A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.\end{aligned}$$

Пример 11.

Доказать, что $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Решение:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 \alpha$ и заменим $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ на

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= tg\alpha \frac{\sqrt{3} + tg\alpha}{1 - \sqrt{3}tg\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3} - tg\alpha}{1 + \sqrt{3}tg\alpha} = tg\alpha \cdot tg\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

Пример 12.

Доказать, что $tga + tgb + tgc - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} = tga \cdot tgb \cdot tgc$.

Решение: рассмотрим сумму $tga + tgb + tgc$:

$$\begin{aligned} tga + tgb + tgc &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} = \frac{\sin(a+b) \cos c + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} = \\ &= \frac{\sin(a+b) \cos c + \cos(a+b) \sin c - \cos(a+b) \sin c + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} = \\ &= \frac{\sin(a+b+c) + \sin c(\cos a \cdot \cos b - \cos(a+b))}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} = \\ &= \frac{\sin(a+b+c) + \sin c(\cos a \cdot \cos b - \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} = \\ &= \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} + tga \cdot tgb \cdot tgc. \\ tga + tgb + tgc - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} &= tga \cdot tgb \cdot tgc. \end{aligned}$$

Тема 1.13 Планиметрия

Литература: [1, ч. II п. 7; 4, геометрия гл. I; 6 гл.10].

Перечень основных формул

I. Пусть L — длина окружности радиуса R , ℓ — длина ее дуги, тогда

$$L = 2\pi R, \ell = \frac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ} = R \alpha^P,$$

где α° — градусная мера угла, соответствующая данной дуге; α^P — радианная мера угла.

II. Через S будем обозначать площади треугольника. Имеем:

$$S = \frac{ah}{2},$$

где a — основание, h — высота.

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

где p — полупериметр; a, b, c — стороны.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \ell}{2},$$

где ℓ — угол между a и b .

Если треугольник равносторонний, то

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

где a — сторона треугольника.

Отметим следующее соотношение между элементами треугольника со сторонами a, b, c и соответственно противолежащими углами A, B, C .

1. Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанного круга.

2. Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A.$$

Приведем также формулы для радиусов r , вписанного в треугольник круга, R , описанного около треугольника круга:

$$r = \frac{S}{p}, R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S},$$

где S — площадь треугольника; p — его полупериметр; a, b, c — стороны.

Для параллелограмма, ромба и трапеции имеем соответственно:

$S = b \cdot h$, где b и h — основание и высота параллелограмма;

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба;

$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — ее высота;

$S = m \cdot h$, где m — средняя линия трапеции.

Для правильного многоугольника:

$S = \frac{P \cdot a}{2}$, где P — периметр многоугольника, a — его апофема.

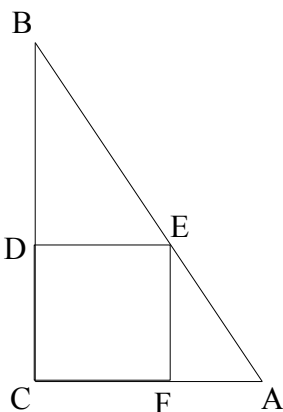
Для круга и кругового сектора:

$S = \pi \cdot R^2$, где R — радиус круга;

$$S = \frac{R \cdot \ell}{2} = \frac{R^2 \cdot \alpha^p}{2} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha^0}{360},$$

где ℓ — длина дуги сектора, α^p — радианная мера дуги сектора, α^0 — градусная мера.

Пример 1. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.



Решение: обозначим через C, D, E, F вершины квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник ABC . Вершина E квадрата лежит на гипотенузе, вершина C совпадает с вершиной прямого угла треугольника. Найдем сторону квадрата.

Учитывая, что треугольники BDE и AEF подобны, имеем

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BC - CD}{DE} = \frac{EF}{FA} = \frac{EF}{AC - CF}.$$

Обозначим для удобства сторону квадрата через x и, учитывая, что $BC = a$, $AC = b$, получаем

$$\frac{a - x}{x} = \frac{x}{b - x} \Rightarrow ab - (a + b)x + x^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{ab}{a + b}.$$

Периметр квадрата равен $\frac{4ab}{a + b}$.

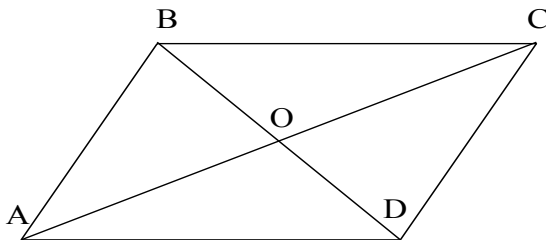
Ответ: $\frac{4ab}{a + b}$.

Пример 2. Дан ромб. Сумма длин его диагоналей равна m , а его площадь равна S . Найти сторону ромба.

Решение: обозначим через x и y полудиагонали AO и BO (O — центр рассматриваемого ромба $ABCD$). Составим уравнения, из которых найдем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = AB.$$

Имеем



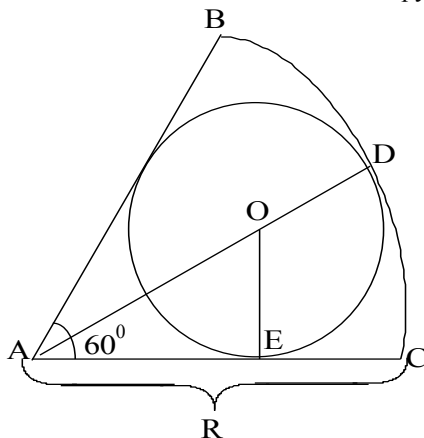
$$\begin{cases} x + y = \frac{m}{2} \\ x \cdot y = \frac{S}{2} \end{cases}$$

Возведем в квадрат первое уравнение и вычтем из него удвоенное второе:

$$(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 = \frac{m^2}{4} - S, \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} - S}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}.$

Пример 3. В круговой секторе, дуга которого содержит 60° , вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.



Решение: пусть $ABDC$ — рассматриваемый сектор, D — середина его дуги, центр которой находится в точке A . O — центр круга, вписанного в сектор. Обозначим через R радиус дуги сектора. Выразим r радиус вписанного круга. Рассмотрим треугольник AOE , где OE — радиус, проведенный в точку касания E . Так как $\angle AOE = 30^\circ$, то

$$\frac{OE}{AO} = \frac{r}{R - r} = \frac{1}{2}, \text{ что дает } r = \frac{R}{3}.$$

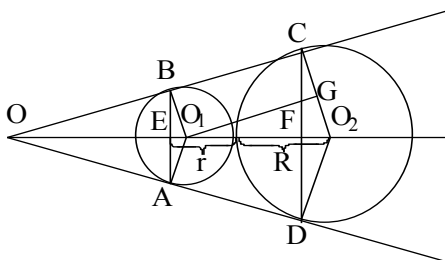
Площади сектора и вписанного в него

круга равны соответственно $\frac{\pi R^2}{6}$ и $\frac{\pi R^2}{9}$. Значит, искомое отношение равно

$$\frac{R^2}{9} : \frac{R^2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2:3.

Пример 4. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.



Решение: обозначим через O_1, O_2 центры соответственно меньшей и большей окружностей, через A, B, C, D точки касания общих касательных, точку пересечения общих касательных с прямой O_1O_2 обозначим через O . Соединим точки касания A, B и C, D отрезками прямых.

Требуется найти площадь трапеции $ABCD$. Найдем длины ее оснований AB, CD и высоту. Предварительно найдем синус угла O_2O_1G , где O_1G — перпендикуляр, опущенный из O_1 на CO_2 . Обозначим угол O_1O_2G через α . Рассмотрим треугольник O_2O_1G . В нем гипотенуза $O_1O_2 = R + r$, а катет $O_2G = R - r$. Поэтому

$$\sin \alpha = \frac{O_2G}{O_1O_2} = \frac{R - r}{R + r}.$$

Определим AB и CD . Из треугольников ABO_1 и CDO_2 , учитывая, что $\angle EBO_1 = \angle FCO_2 = \alpha$, имеем $BE = BO_1 \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha$, $BA = 2r \cdot \cos \alpha$,

$CD = 2R \cdot \cos \alpha$. Далее определим высоту трапеции EF . Так как $EO_1 = r \cdot \sin \alpha$, $FO_2 = R \cdot \sin \alpha$, $EF = O_1O_2 + O_1E - O_2F$, то $EF = R + r + r \cdot \sin \alpha - R \cdot \sin \alpha$.

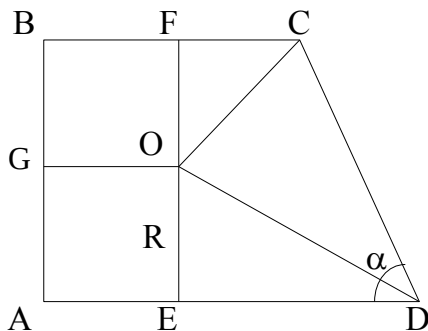
Найдем теперь площадь трапеции :

$$\begin{aligned} \frac{AB + CD}{2} EF &= (r + R) \cos \alpha \left[R \left(1 - \frac{R - r}{R + r} \right) + r \left(1 + \frac{R - r}{R + r} \right) \right] = \\ &= (r + R) \sqrt{1 - \frac{(R - r)^2}{(R + r)^2}} \cdot \left(\frac{2Rr}{R + r} + \frac{2Rr}{R + r} \right) = \frac{8(Rr)^{\frac{3}{2}}}{R + r}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8(Rr)^{\frac{3}{2}}}{R + r}.$

Пример 5. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α . Найти высоту трапеции, если периметр ее равен p .

Решение: пусть $ABCD$ — заданная трапеция, O — центр вписанного в нее круга, E, F, G — точки касания его со сторонами AD, BC, AB . По условию задачи $\angle ADC = \alpha$. Радиус круга обозначим через R . Высота трапеции h равна $2R$. Найдем R . Выразим периметр трапеции p через R . Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то



суммы длин противоположных сторон равны:

$AB + CD = BC + AD$. Поэтому

$$AD + BC = \frac{p}{2}. \text{ Найдем}$$

$AD = AE + DE$. Имеем $AE = R$.

Из треугольника EDO с учетом

того, что $\angle EDO = \frac{\alpha}{2}$, имеем

$$DE = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \text{ Значит,}$$

$$AD = \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \cdot R.$$

Аналогично, учитывая, что $\angle FCO = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, находим

$$BC = BF + FC = R \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Значит, $AD + BC = R \left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)$.

Отсюда для R получаем уравнение $R \left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{2}$,

$$\text{из которого } R = \frac{p}{2 \left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Упростим полученное выражение для R . Так как

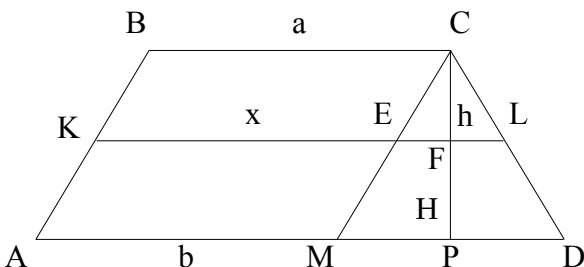
$$\begin{aligned}
 2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= 2 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= 2 + \frac{2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \\
 &= \frac{2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{\sin \alpha} = \frac{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha},
 \end{aligned}$$

$$R = \frac{p \cdot \sin \alpha}{8 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

$$H = 2R = \frac{p \cdot \sin \alpha}{4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Ответ: $H = \frac{p \cdot \sin \alpha}{4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$

Пример 6. Основания трапеции равны a и b . Найти длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.



Решение: пусть отрезок $KL = x$ делит площадь трапеции $ABCD$ ($BC = a$, $AD = b$) пополам. Проведем $CM \parallel AB$. Обозначим: h — высота $\triangle CEL$, H — высота трапеции $ABCD$.

Так как $\triangle CEL \sim \triangle CMD$, то

$$\frac{EL}{MD} = \frac{CF}{CP} \text{ или } \frac{x - a}{b - a} = \frac{h}{H}.$$

По условию $S_{KBCL} = 1/2 S_{ABCD}$. Поэтому

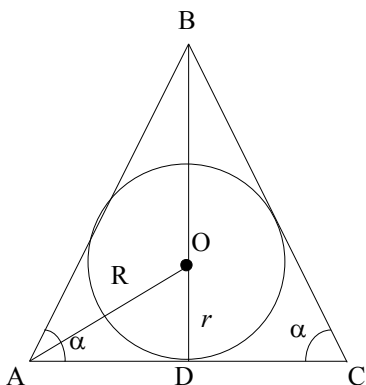
$$\frac{a+x}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot H \quad \text{или} \quad \frac{h}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b+a}{x+a}.$$

Значит, $\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b+a}{x+a},$

откуда $2 \cdot (x^2 - a^2) = b^2 - a^2, \text{ т.е. } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$

Ответ: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$

Пример 7. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.



Решение: пусть ABC — равнобедренный треугольник, $\angle A = \angle C = \alpha$.

Обозначим $AC = b$. По теореме синусов

$$\frac{b}{\sin \angle B} = 2R,$$

где R — радиус описанного круга.

Так как угол при основании равен α , то

$$\angle B = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\sin \angle B = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

Значит, $R = \frac{b}{2 \sin 2\alpha}.$

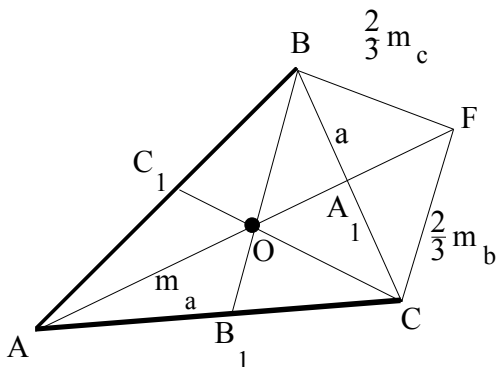
Пусть O — центр вписанного круга.

Тогда $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$, поэтому $r = OD = AD \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

Отсюда $\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

Ответ: $\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Пример 8. В треугольнике ABC даны медианы m_a , m_b и m_c . Найти его



стороны a , b и c .

Решение: для вычисления стороны a продолжим отрезок AA_1 на расстояние

$$A_1F = \frac{1}{3} m_a \text{ и точку } F$$

соединим с вершинами B и C . Пусть O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Четырехугольник $OBFC$ — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма

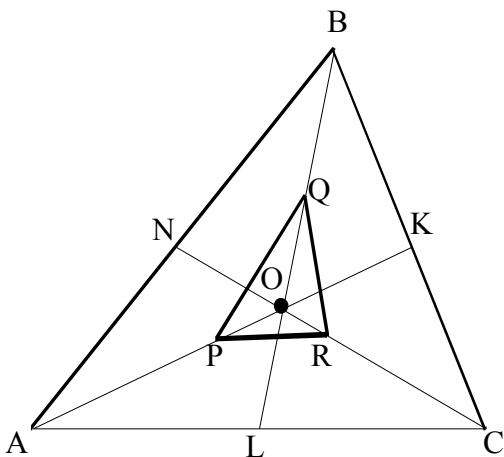
$$a^2 + \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3} m_c\right)^2, \text{ отсюда следует, что}$$

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

Аналогично находим b и c .

Пример 9. Дан треугольник ABC , площадь которого равна 1. На медианах AK , BL и CN $\triangle ABC$ взяты соответственно точки P , Q и R так, что

$$\frac{AP}{PK} = 1, \frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}, \frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}.$$



Найти площадь треугольника PQR .

Решение: пусть O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Тогда $S_{\triangle AOB} =$

$$S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим $\triangle POQ$:

$$OP = \frac{2}{3}AK - \frac{1}{2}AK = \frac{1}{6}AK,$$

$$OQ = \frac{2}{3}BL - \frac{1}{3}BL = \frac{1}{3}BL.$$

Так как

$$S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2}OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ,$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB,$$

то

$$\frac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{OP \cdot OQ}{OA \cdot OB} = \frac{\frac{1}{6}AK \cdot \frac{1}{3}BL}{\frac{2}{3}AK \cdot \frac{2}{3}BL} = \frac{1}{8}.$$

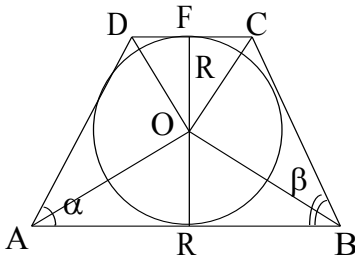
Следовательно,

$$S_{\triangle QOR} = \frac{1}{12}S_{\triangle BOC}, \quad S_{\triangle POR} = \frac{1}{24}S_{\triangle AOC}.$$

Поэтому $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{12}.$

Ответ: $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{12}.$

Пример 10. Около круга радиуса R , описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.



Дано: $ABCD$ — трапеция, (O, R) — вписанная окружность, $\angle DAE = \alpha$, $\angle EBC = \beta$.

Найти: $S_{\text{тр.}}$

Решение: пусть $FE \perp AB$, F, E — точки касания вписанной окружности с трапецией. Проведем AO, DO, OB, OC . Так как точка O лежит на биссектрисах углов

DAE и EBC , то $\angle OAE = \frac{\alpha}{2}$,

$\angle EBO = \frac{\beta}{2}$. Так как DO и CO — биссектрисы соответственно углов CDA и

BCF , то $\angle FDO = \frac{1}{2} \angle CDA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle OCF = \frac{1}{2}$, $\angle BCF = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Учитывая это, из $\triangle AEO$ и $\triangle EBO$ получаем, что $AE = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $EB =$

$R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

Аналогично из $\triangle DOF$ и $\triangle CFO$:

$$DF = R \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, FC = R \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{AB + CD}{2} &= \frac{AE + EB + DF + FC}{2} = \frac{R}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= \frac{R}{2} \left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} \right) = R \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \\ &= R \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$S_{\text{тр.}} = \frac{AB + CD}{2} \cdot FE, FE = 2R,$$

$$S_{\text{тр.}} = \frac{4R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Ответ : $\frac{4R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$

Тема 1.14 Стереометрия

Литература: [1, ч. 2, п. 8; 4, геометрия, гл. II, III; 6 гл.11].

Основные формулы

Для призмы и пирамиды.

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = P \cdot \ell$, где P — периметр перпендикулярного сечения призмы, ℓ — ее боковое ребро;

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = \frac{P \cdot a}{2}$, где P — периметр основания правильной пирамиды, a — апофема;

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = \frac{P_1 + P_2}{2}$, где P_1 и P_2 — периметры оснований правильной усеченной пирамиды, a — апофема.

Далее для цилиндра, конуса и шара.

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$, где R — радиус основания цилиндра, H — его высота;

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = \pi \cdot R \cdot \ell$, где ℓ — образующая конуса;

$S_{\hat{\alpha} \hat{\Gamma} \hat{\epsilon}} = \pi \cdot (R_1 + R_2) \cdot \ell$, где R_1 и R_2 — радиусы оснований усеченного конуса;

$S_{\text{бок}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$, где R — радиус шара.

Через V будем обозначать объемы тел.

Для призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара.

$V = S \cdot H$, где S — площадь основания призмы, H — ее высота;

$V = \frac{S \cdot H}{3}$, где S — площадь основания пирамиды, H — ее высота;

$V = \frac{H}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$, где S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды;

$V = \pi \cdot R^2 \cdot H$, где R — радиус основания цилиндра, H — его высота;

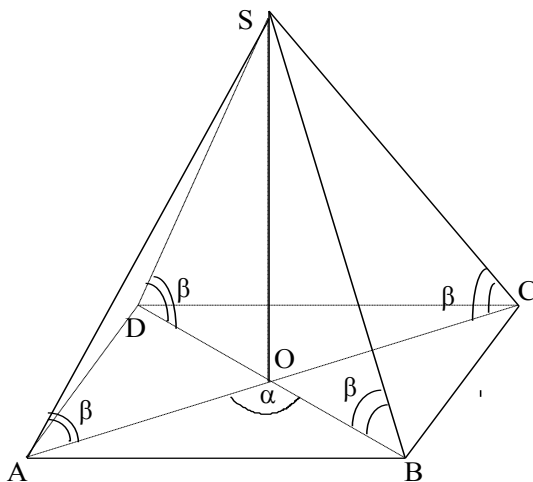
$V = \frac{\pi \cdot H}{3} \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2)$, где R_1 и R_2 — радиусы основания усеченного конуса;

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, где R — радиус шара.

Пример 1. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник с диагональю, равной b , и углом α между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с основанием угол β . Найти объем пирамиды.

Решение: поскольку все боковые ребра рассматриваемой пирамиды $ABCD S$ составляют с плоскостью основания один и тот же угол β , то вершина S пирамиды проектируется в центр O окружности, описанной вокруг основания, т.е. в точку пересечения диагоналей основания. Найдем площадь основания пирамиды и ее высоту OS . Площадь основания

$$2 \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \alpha = \frac{b^2}{2} \cdot \sin \alpha.$$

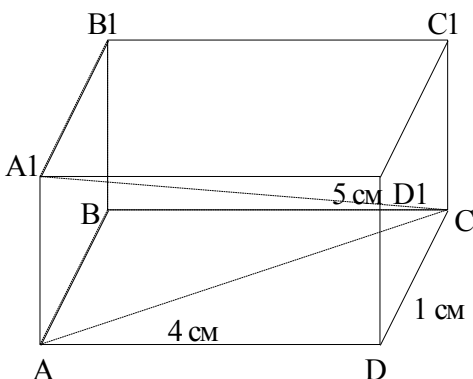


Далее из треугольника AOS имеем $OS = AO \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$.

$$\text{Объем пирамиды } \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \cdot \sin \alpha}{2} \cdot \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{2} = \frac{b^3 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{12}.$$

Ответ: $\frac{b^3 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{12}$.

Пример 2. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 см и 4 см и острым углом 60° . Большая диагональ



параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

Решение: пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — данный параллелепипед, $AD = 4 \text{ см}$,

$CD = 1 \text{ см}$, $\angle BAD = 60^\circ$,

$A_1 C = 5 \text{ см}$. Поскольку площадь основания равна $AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ см}^2$, то для нахождения объема остается найти высоту параллелепипеда AA_1 .

Предварительно найдем диагональ основания AC .

Учитывая, что $\angle ADC = 120^\circ$ и применяя к треугольнику ACD теорему косинусов, имеем

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{16 + 1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{21} \text{ см}.$$

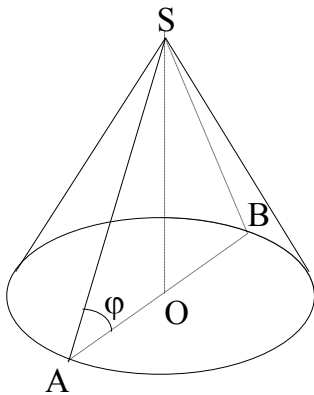
Теперь из треугольника AA_1C находим

$$AA_1 = \sqrt{(A_1 C)^2 - (AC)^2} = \sqrt{25 - 21} = 2 \text{ см}.$$

Исходный объем равен $4\sqrt{3} \text{ см}^3$.

Ответ: $4\sqrt{3} \text{ см}^3$.

Пример 3. Площадь боковой поверхности конуса втрое больше площади основания. Найти угол между образующей и основанием.



Решение: пусть r — радиус основания данного конуса, ℓ — образующая. Рассмотрим осевое сечение ASB конуса. Площади основания и боковой поверхности равны соответственно

$$\pi \cdot r^2 \text{ и } \pi \cdot r \cdot \ell. \text{ По условию } \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot r \cdot \ell} = \frac{r}{\ell} = \frac{1}{3}$$

Обозначим через φ искомый угол OAS .

Учитывая, что $AO = r$, $AS = \ell$, имеем

$$\cos \varphi = \frac{AO}{AS} = \frac{r}{\ell} = \frac{1}{3}, \text{ что дает } \varphi = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$.

Пример 4. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Стороны нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b ($a > b$). Найти объем усеченной пирамиды.

Решение: пусть $ABCA^1B^1C^1$ — рассматриваемая пирамида, O и O^1 — центры нижнего и верхнего оснований, D — проекция A^1 на плоскость нижнего основания. Поскольку AO и A^1O^1 есть радиусы кругов, описанных вокруг

нижнего и верхнего оснований, то

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad A^1O^1 = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом,

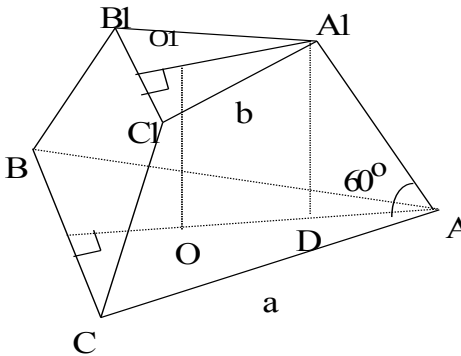
$$AD = AO - A^1O^1 = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3}.$$

Найдем высоту A^1D пирамиды и ее объем. Из треугольника ADA^1 , в котором $\angle DAA^1 = 60^\circ$, имеем

$$A^1D = AD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3} \sqrt{3} = a - b$$

Объем пирамиды

$$\frac{1}{3}(a-b) \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} (a^3 - b^3).$$



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^3 - b^3)$.

Пример 5. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, равный β .

Решение: обозначим через R радиус основания конуса, через O — центр основания. Пусть ABS — треугольник, получающийся в сечении, D — середина AB . Выразим через R площадь сечения и полную поверхность конуса. Рассматривая треугольники AOS и ADS , находим

$$AS = \frac{AO}{\cos \beta} = \frac{R}{\cos \beta}$$

и площадь сечения

$$\frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS \cdot \sin \alpha = \frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cos^2 \beta}.$$

Полная поверхность конуса

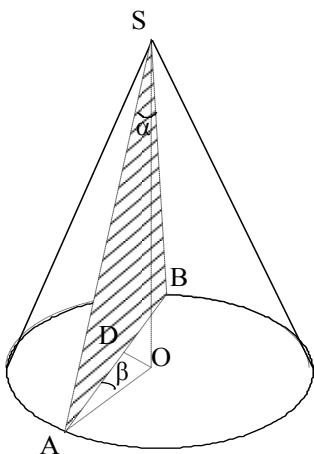
$$\begin{aligned} \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot \frac{R}{\cos \beta} &= \frac{\pi \cdot R^2(1 + \cos \beta)}{\cos \beta} = \\ &= \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

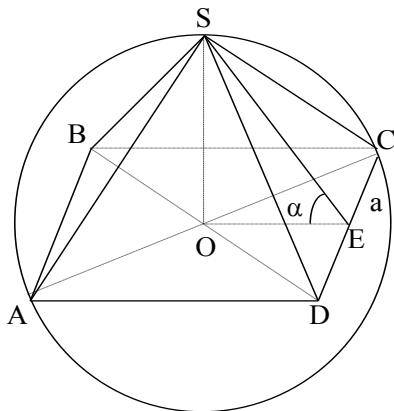
Отсюда исходное отношение

$$\frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \beta} : \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{4\pi \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sin \alpha}{4\pi \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$

Пример 6. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a ; боковая грань составляет с плоскостью основания угол α . Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.





Решение: рассмотрим сечение ACS заданной пирамиды $ABCS$, проходящее через ее вершину и диагональ основания AC . Это сечение пересекает шар, описанный вокруг пирамиды по большому кругу. Значит, радиус R круга, описанного вокруг треугольника ACS , совпадает с радиусом шара. Обозначим через φ угол ASC . Так как

$$AC = a\sqrt{2}, \text{ то по теореме синусов имеем } 2R = \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin \varphi}, \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \varphi}.$$

Найдем $\sin \varphi$. Обозначим через O центр основания пирамиды, а через E — середину ребра CD . По условию $\angle OES = \alpha$. Выразим $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ через $\operatorname{tg} \alpha$. Так как $OC = \sqrt{2} \cdot OE$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OS}{OE} = \frac{OS}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot OC} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{1 + 2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} : \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{a + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 2\alpha}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Заменив в полученном ранее выражении для $R \cdot \sin \varphi$ на $\frac{2\sqrt{2} \cdot \sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha}$,

$$\text{получаем } R = \frac{a \cdot (3 + \cos 2\alpha)}{4 \sin 2\alpha}.$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{a \cdot (3 + \cos 2\alpha)}{4 \sin 2\alpha}.$$

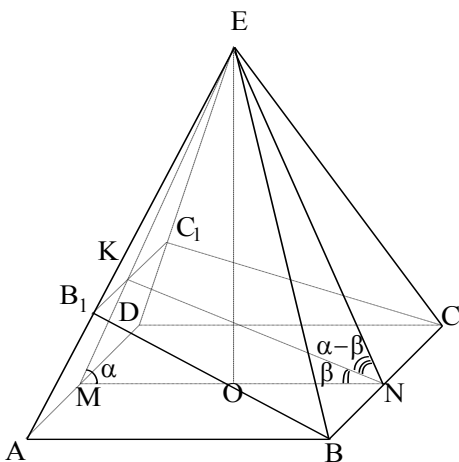
Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Через его ребро проведена плоскость, составляющая с основанием угол β . Сторона основания равна a . Определить площадь сечения.

Дано: $\angle EMN = \alpha$, $\angle KNM = \beta$, $AB = a$.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$.

Решение:

$MN = a$, $\angle MKN = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.



По теореме синусов

$$\frac{KN}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$KN = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$\triangle ADE \sim \triangle B_1C_1E$:

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot KE}{ME} = \frac{a \cdot KE}{NE}.$$

Из $\triangle KNE$:

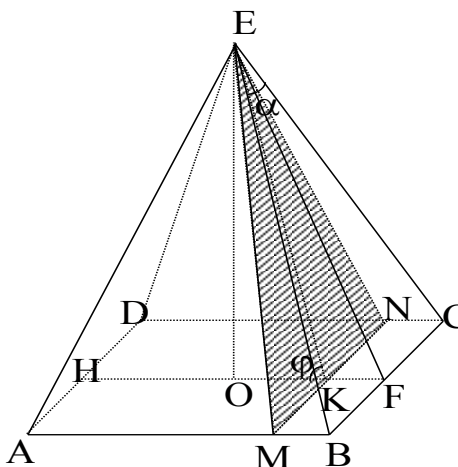
$\angle KNE = \alpha - \beta$, $\angle NKE = \alpha + \beta$,

$$\frac{KE}{NE} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$B_1C_1 = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч.}} &= \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot KN = \frac{a + \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{a^2 (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \sin \alpha}{2 \sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$



Пример 8. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость параллельно стороне основания. Сторона основания пирамиды равна a , а плоский угол при вершине равен α . Угол между сечением и основанием равен φ .

Найти площадь сечения пирамиды.

Дано: $\angle EKO = \varphi$, $AB = a$, $ABCD$ — квадрат, $\angle BEC = \alpha$.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$.

Решение: пусть $H = OE$,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} MN \cdot KE, \quad MN = a,$$

$$KE = \frac{H}{\sin \varphi}.$$

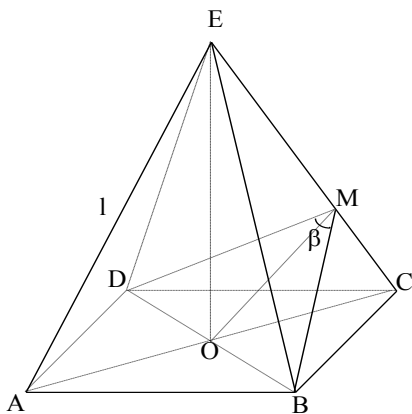
$$\triangle EOF: OF = \frac{a}{2}, FE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$H = \sqrt{FE^2 - OF^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\tilde{n} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi} = \frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi}.$$

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi}.$

Пример 9. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 1, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен β .



Дано: $EABCD$ — пирамида, $ABCD$ — квадрат,

$AE = l$, $OM \perp EC$, $\angle BMD = \beta$.

Найти: V .

Решение: пусть $EC = l$.

Пусть $OC = OB = x$,

$ME = \tilde{NE} - MC$,

$$CM = \sqrt{x^2 - OM^2}.$$

Из $\triangle OMB$: $OM =$

$$= OB \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \delta \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

$$CM = \delta \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Получаем уравнение

$$x^2 = l \cdot x \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$x \neq 0, \quad x = \hat{l} \tilde{N} = l \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

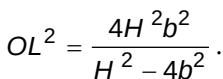
$$H = EO = \sqrt{CE^2 - OC^2} = \sqrt{\kappa^2 - \kappa^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}} = l \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} 2x^2 \cdot H = \frac{2}{3} l^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} (1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}) = \frac{2}{3} l^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{-\cos \beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{l^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cos \beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$(\cos \frac{\beta}{2} < 0, \text{ д. ё. } \frac{\beta}{2} > 45^\circ, \text{ потому что } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\hat{l} \hat{A}}{\hat{l} \hat{l}} = \frac{\hat{l} \tilde{N}}{\hat{l} \hat{l}} > 1).$$

Ответ: $-\frac{2}{3} \frac{l^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cos \beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$

Пример 10. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h , и перпендикуляр на боковую грань, равный b . Найти объем пирамиды.



пусть $OE = H \Delta OEL \sim \Delta MEK$:

$$\frac{OL}{H} = \frac{MK}{EK}, ME = \frac{H}{2},$$

$$EK = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - b^2}.$$

$$\frac{OL}{H} = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - b^2}},$$

$$\Delta OCE \sim \Delta MEN: \frac{OC}{H} = \frac{MN}{EN}, EN = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - h^2}$$

$$\frac{OC}{H} = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - h^2}}, OC^2 = \frac{4H^2 h^2}{H^2 - 4h^2}.$$

$$OC^2 = 2 \cdot OL^2 \Rightarrow \frac{\cancel{4H}^2 h^2}{H^2 - \cancel{4h}^2} = 2 \cdot \frac{\cancel{4H}^2 b^2}{H^2 - \cancel{4b}^2}$$

$$h^2(H^2 - 4b^2) = 2b^2(H^2 - 4h^2)$$

$$h^2 \cdot H^2 - 4b^2h^2 = 2b^2H^2 - 8b^2h^2$$

$$2b^2H^2 - h^2H^2 = 8b^2h^2 - 4b^2h^2$$

$$H^2(2b^2 - h^2) = 4b^2h^2.$$

$$H = \frac{2bh}{\sqrt{2b^2 - h^2}}, OL^2 = \frac{4H^2 b^2}{H^2 - 4b^2} = \frac{4b^2}{1 - 4\left(\frac{b}{H}\right)^2}.$$

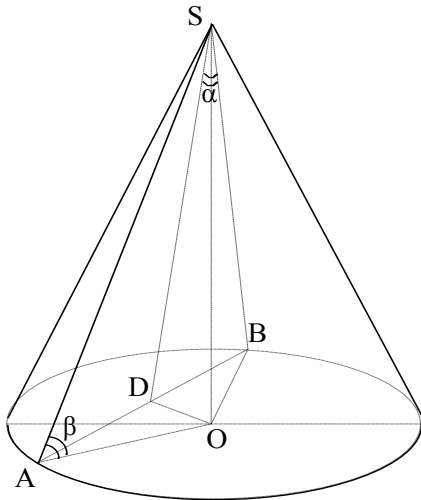
$$\left(\frac{b}{H}\right)^2 = \frac{2b^2 - h^2}{4h^2}, \quad OL^2 = \frac{4b^2}{1 - \frac{2b^2 - h^2}{h^2}} = \frac{4b^2 h^2}{2h^2 - 2b^2} = \frac{2b^2 h^2}{h^2 - b^2}.$$

$$V = \frac{1}{3} (2OL)^2 \cdot H = \frac{4}{3} \cdot \frac{2b^2 h^2}{h^2 - b^2} \cdot \frac{2bh}{\sqrt{2b^2 - h^2}} = \frac{16b^3 h^3}{3(h^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - h^2}}.$$

Ответ : $\frac{16b^3 h^3}{3(h^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - h^2}}.$

Пример 11. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основной угол, равный β .

Дано: $\angle ASB = \alpha$, $\angle SAO = \beta$.



Найти: $\frac{S_{\text{сеч.}}}{S_{\text{п.к}}}$.

Решение: обозначим через R радиус основания конуса, пусть D — середина AB .

Из $\triangle AOS$: $AS = \frac{AO}{\cos \beta} = \frac{R}{\cos \beta}$.

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} R^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2 \cos^2 \beta}.$$

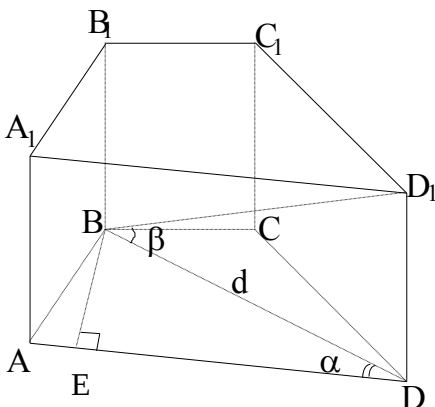
$$S_{\text{п.к}} = \pi R^2 + \pi R \cdot \frac{R}{\cos \beta} = \frac{\pi R^2 (1 + \cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{2\pi R^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}.$$

Тогда:

$$\frac{S_{\text{н.а.}}}{S_{\text{п.к.}}} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2 \cos^2 \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{2\pi R^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \alpha}{4 \cos \beta \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Ответ : $\frac{\sin \alpha}{4 \cos \beta \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$

Пример 12. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, у которой диагональ d , а угол между диагональю и большим основанием



равен α . Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β .

Найти объем призмы.

Дано: $BD = d$, $\angle BDA = \alpha$,
 $\angle DBD_1 = \beta$.

Найти: V .

Решение:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

$$\text{Из } \triangle BDE : BE = d \cdot \sin \alpha,$$

$$DE = d \cdot \cos \alpha.$$

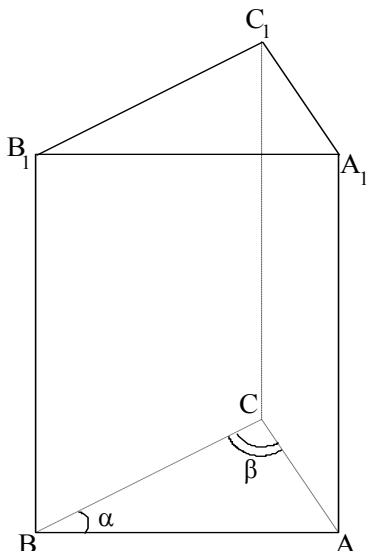
$$S_{\text{осн.}} = BE \cdot DE = d^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle DBD_1 : H = DD_1 = d \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$V = \frac{d^3}{2} \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Ответ: $\frac{d^3}{2} \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$

Пример 13. Одна из сторон прямой треугольной призмы равна a , а прилежащие к ней углы соответственно равны α и β . Найти боковую поверхность призмы, зная, что ее объем равен V .



Дано: $BC = a$, $\angle ACB = \beta$,
 $\angle CBA = \alpha$, $V_{\text{пр}} = V$.

Найти: $S_{\text{б.}}$.

Решение: пусть H — высота призмы. По теореме синусов :

$$\frac{AA_1}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))},$$

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \tilde{AN} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$V = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 H \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$H = \frac{2V \sin(\alpha + \beta)}{a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$S_{\text{б.}} = (AB + BC + AC) \cdot H = a \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right) \frac{2V \sin(\alpha + \beta)}{a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta} =$$

$$= \frac{2V (\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta)}{a \sin \alpha \cdot \sin \beta} =$$

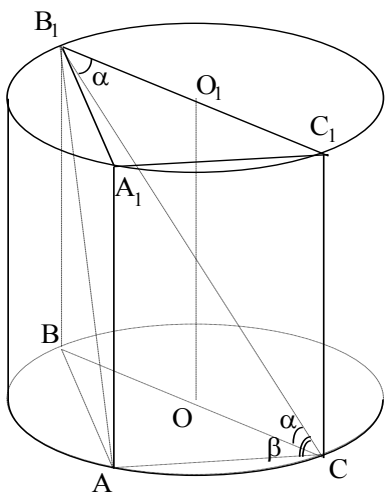
$$= \frac{2V \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{a \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{4V \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{a \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{8V \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{4a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2V \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\frac{2V \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.$

Пример 14. Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с прилежащими к ней сторонами основания призмы углы, равные соответственно α и β . Найти объем призмы, если высота цилиндра равна H .



Дано: $OO_1 = H$, $\angle C_1 B_1 C = \alpha$,
 $\angle ACB_1 = \beta$.

Найти: $V_{\text{пр.}}$

Решение: из условия: основания призмы — прямоугольные треугольники.

Из ΔBB_1C и ΔAB_1C :

$$BC = BB_1 \operatorname{ctg} \alpha = H \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$B_1C = \frac{H}{\sin \alpha}, AC = B_1C \cdot \cos \beta = \frac{H \cos \beta}{\sin \alpha}.$$

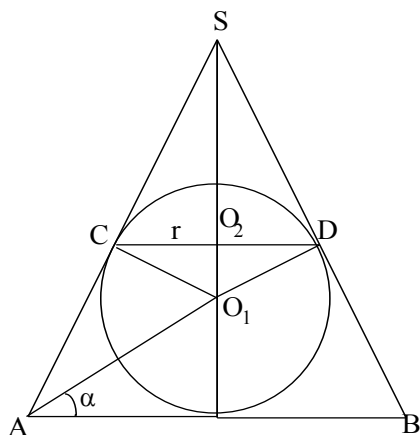
$$\begin{aligned} \text{Тогда } AB &= \sqrt{BC^2 - AC^2} = \\ &= \sqrt{H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - H^2 \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}} = \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{2}} = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}.$

Пример 15. В конус вписан шар. Радиус окружности касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r . Прямая, соединяющая центр

шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с основанием конуса угол, равный α . Найти объем конуса.



Дано: $CO_2 = r$, $\angle O_1AB_2 = \alpha$.

Найти: V_K .

Решение:

$$\angle OAS = 2\alpha, \angle ACO_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Из треугольников O_2CO_1 , AOO_1 , AOS последовательно находим

$$CO_1 = \frac{\tilde{r} \hat{l}_2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{r}{\sin 2\alpha},$$

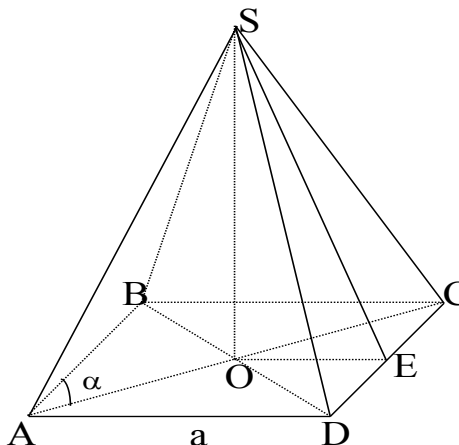
$$\hat{A} \hat{l} = \hat{l} \hat{l}_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha},$$

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$V_K = \frac{1}{3} \pi \cdot \hat{A} \hat{l}^2 \cdot \hat{l} S = \frac{1}{3} \pi \frac{r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin^3 2\alpha} = \frac{2}{3} \pi r^3 \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{\sin 4\alpha \cdot \sin^3 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \pi r^3 \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{\sin 4\alpha \cdot \sin^3 2\alpha}.$

Пример 16. Найти плоский угол при вершине боковой грани правильной четырехугольной пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен α .



Дано: $\angle SAO = \alpha$.

Найти: $\angle DSC$.

Решение:

пусть $\angle DSC = \varphi$, $AD = a$.

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{из } \triangle AOS : OS = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle OSE : ES &= \sqrt{SO^2 + OE^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Из $\triangle DES$:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{DE}{ES} = \frac{a}{2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}.$$

Ответ: $\varphi = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}.$

Тема 1.15 Метод координат, векторы

Литература: [1, ч. 2, п. 9; 4, геометрия, гл. IV; 6 гл.17].

Для векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ основные операции выполняются по правилам:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; $\vec{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

б) $k \cdot \vec{a} = \vec{c}$, $\vec{c}(k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1)$;

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Пример 1. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

Решение: по условию $(\vec{c}; \vec{\alpha}) = 0$. Значит,

$$0 = (\vec{c}, \vec{\alpha}) = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a}, \vec{b}) + 10(\vec{a}, \vec{b}) - 8|\vec{b}|^2.$$

Отсюда, учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, имеем

$$6(\vec{a}, \vec{b}) = 3, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные, то косинус искомого угла

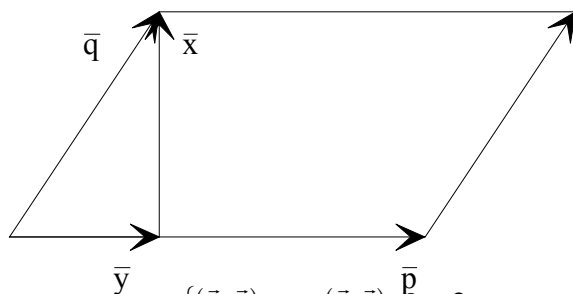
$$\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}.$$

Значит, искомый угол равен $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 2. Зная векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, на которых построен параллелограмм, выразите через них вектор, совпадающий с высотой, перпендикулярной к стороне $\vec{p}$.

Решение: обозначим исходный вектор через $\vec{x}$. Будем искать $\vec{x}$ в виде $\vec{x} = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q}$, где α и β — числовые множители. Найдем α и β . Для этого составим систему уравнений относительно неизвестных α, β .



Так как $\vec{p} \perp \vec{x}$ и $\vec{y} = \vec{q} - \vec{x} \perp \vec{x}$, то $(\vec{p}, \vec{x}) = 0$.
Заменяя здесь $\vec{x}$ на $\alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q}$, получаем

$$\begin{cases} (\vec{p}, \vec{p}) \cdot \alpha + (\vec{p}, \vec{q}) \cdot \beta = 0 \\ (\vec{p}, \vec{p}) \cdot \alpha^2 + 2(\vec{p}, \vec{q}) \cdot \alpha \cdot (\beta - 1) - (\beta - 1) \cdot (\vec{q}, \vec{q}) = 0. \end{cases}$$

Решим систему

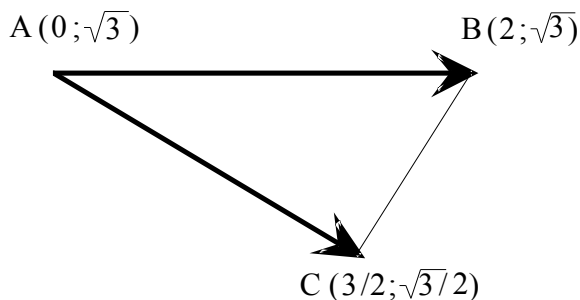
$$\alpha = -\frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})}, \beta = 1.$$

Значит, $\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})} \cdot \vec{p}$.

Ответ: $\vec{q} - \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})} \cdot \vec{p}$.

Пример 3. Найти величины углов и длины сторон треугольника с вершинами $A(0; \sqrt{3})$, $B(2; \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение: сделаем схематический чертеж.



Мы знаем, что для вычисления координат вектора $\overrightarrow{AB}$, надо из координат его конца В вычесть соответствующие координаты его начала А. Поэтому $\overrightarrow{AB}$ (2;

0), $|\overrightarrow{AB}| = 2$. Аналогично находим $\overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

По формуле $\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ получаем

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

следовательно, $\angle A = 30^\circ$. Так как $\overline{BA} = -\overline{AB}$, то $\overline{BA}(-2;0)$. Имеем

$$\overline{BC}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), |\overline{BC}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\text{Поэтому } \cos \angle C = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{(-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2};$$

следовательно, $\angle B = 60^\circ$. Тогда $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 90^\circ$.

Ответ: $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$.

Пример 4. Найти проекцию вектора $\overline{b}(-2;1)$ на направление вектора $\overline{a}(3;-4)$.

Решение: известно, что

$$\text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|}.$$

Поэтому

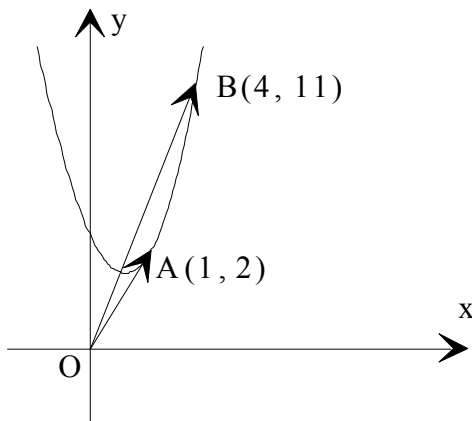
$$\text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -2.$$

Пример 5. В декартовой прямоугольной системе координат O_{xy} на части

кривой $y = x^2 - 2x + 3$, лежащей в первой четверти, задана точка

$A(x_1, y_1)$ с абсциссой $x_1 = 1$ и $B(x_2, y_2)$ с ординатой $y_2 = 11$. Найти

скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



Решение: так как точка

$A(x_1, y_1)$, $x_1 = 1$ лежит на

кривой $y = x^2 - 2x + 3$, то

$$y_1 = x_1^2 - 2x_1 + 3 = 2.$$

Точка $B(x_2, y_2)$, $y_2 = 11$

также принадлежит кривой

$y = x^2 - 2x + 3$. Поэтому

$$y_2 = 11 = x_2^2 - 2x_2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^2 - 2x_2 - 8 = 0. \text{ Решения}$$

этого уравнения есть — 2 и 4.

Но по условию точка B лежит

в первой четверти. Поэтому $x_2 = 4$.

Итак, $\vec{OA}(1; 2)$, $\vec{OB}(4; 11)$. Значит, скалярное произведение

$$\left(\vec{OA}, \vec{OB} \right) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 11 = 26.$$

Ответ: 26.

Пример 6. В декартовой прямоугольной системе координат O_{xy} на кривой $y = 2x^2 - 3x + 5$ заданы точка $A(x_1, y_1)$ с абсциссой $x_1 = 1$ и B — точка пересечения этой кривой с кривой $y = 2x^2 - 2x + 3$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

Решение: найдем сначала координату y_1 точки A и координаты точки B .

Так как координаты $x_1 = 1, y_1$ точки A удовлетворяют уравнению

$$y = 2x^2 - 3x + 5, \text{ то } y_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 4. \text{ Так как точка } B$$

принадлежит кривым $y = 2x^2 - 3x + 5$ и $y = 2x^2 - 2x + 3$, то абсцисса x точки B удовлетворяет уравнению

$$2x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x = 2.$$

Значит, ордината точки B $y_2 = 7$.

Итак, $\vec{OA}(1; 4)$, $\vec{OB}(2; 7)$. Отсюда получаем, что искомое скалярное произведение $\left(\vec{OA}, \vec{OB} \right) = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 30$.

Ответ: 30.

Пример 7. Даны три некопланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны.

Решение: указанные в условии задачи три вектора будут компланарны лишь в том случае, если существуют такие числа α , β и γ , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) + \beta(3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) + \gamma(-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}) = 0.$$

Перепишем это равенство так:

$$(\alpha + 3\beta - \gamma)\vec{a} + (2\alpha - \beta + 5\gamma)\vec{b} + (-\alpha + \beta - 3\gamma)\vec{c} = 0.$$

Так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некопланарны, то последнее равенство может иметь место лишь в том случае, если коэффициенты при $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ одновременно обращаются в нуль:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0; \\ 2\alpha - \beta - 5\gamma = 0; \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что ей удовлетворяет любая тройка чисел α, β, γ , связанных равенствами $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$, в частности, тройка

$\alpha = -2$, $\beta = \gamma = 1$. Таким образом, векторы $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны.

Пример 8. Даны три некопланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Вычислить значения p и q , при которых векторы $p\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ коллинеарны.

Решение: если указанные в условии векторы коллинеарны, то найдется такое число k , что $k(p\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}) = 0$. Перепишем это равенство так:

$$(kp + 1)\vec{a} + (kq + p)\vec{b} + (k + q)\vec{c} = 0.$$

Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некопланарны, то последнее равенство может выполняться лишь в том случае, если

$$\begin{cases} kp + 1 = 0; \\ kq + p = 0; \\ k + q = 0. \end{cases}$$

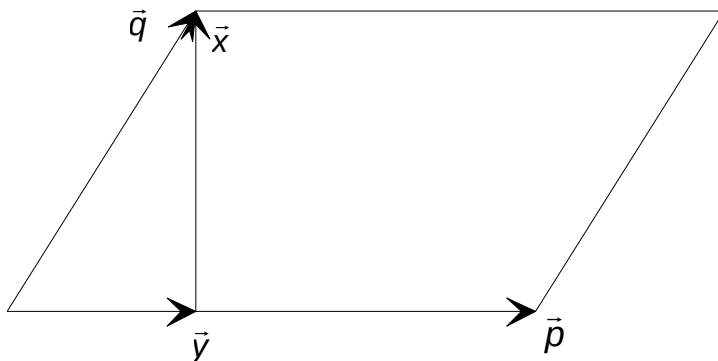
Исключая из этой системы k , имеем

$$\begin{cases} -pq + 1 = 0; \\ -q^2 + p = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $p = q = 1$.

Ответ: $p = q = 1$.

Пример 9. Зная векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, на которых построен параллелограмм, выразите через них вектор, совпадающий с высотой, перпендикулярной к стороне $\vec{p}$.



Решение: обозначим искомый вектор через $\vec{x}$. Будем искать $\vec{x}$ в виде $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, где α и β — числовые множители. Найдем α и β . Для этого составим систему уравнений относительно неизвестных α , β .

Так как $\vec{p} \perp \vec{x}$ и $\vec{y} = \vec{q} - \vec{x} \perp \vec{p}$, то $(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, $(\vec{x} - \vec{q}, \vec{p}) = 0$. Заменяя здесь $\vec{x}$ на $\alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, получаем

$$\begin{cases} (\vec{p}, \vec{p})\alpha + (\vec{p}, \vec{q})\beta = 0. \\ (\vec{p}, \vec{p})\alpha^2 + 2(\vec{p}, \vec{q})\alpha(\beta - 1) - (\beta - 1)(\vec{q}, \vec{q}) = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\alpha = -\frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})}, \quad \beta = 1$$

Значит, $\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})} \vec{p}$.

Ответ: $\vec{q} - \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{(\vec{p}, \vec{p})} \vec{p}$.

Тема 1.16 Производная функции

Литература: [1, ч. 2, п. 9; 4, геометрия, гл. VI §21 п. 208212; 6 гл.15].

Производные основных элементарных функций составляют следующую таблицу:

I. $(c)' = 0$.

II. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R, x \in R$.

III. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a \in R_+ \setminus \{1\}, x \in R$.

IV. $(e^x)' = e^x, x \in R$.

V. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in R_+$.

VI. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, x \in R_+, a \in R_+ \setminus \{1\}$.

VII. $(\sin x)' = \cos x, x \in R$.

VIII. $(\cos x)' = -\sin x, x \in R$.

IX. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}$.

X. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in R \setminus \{ \pi n, n \in Z \}$.

$$\text{XI. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1).$$

$$\text{XII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1).$$

$$\text{XIII. } (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in R.$$

$$\text{XIV. } (\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in R.$$

Правила дифференцирования

Пусть U, V — функции, $C \in R$, тогда:

$$\text{I. } (C \cdot U)' = \tilde{N} \cdot U'.$$

$$\text{II. } (U + V)' = U' + V'.$$

$$\text{III. } (U \cdot V)' = U \cdot V' + U' \cdot V.$$

$$\text{IV. } \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

$$\text{V. } (U(V(x)))' = U'(V(x)) \cdot V'(x).$$

Тема 1.17 Касательная к графику функции

Литература: [1, ч. 2, п. 9; 4, геометрия, гл. VI §21 п. 215; 6 гл.15].

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ записывается в виде

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — точка касания.

Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a; b)$, то на $(a; b)$ функция

$y = f(x)$ возрастает (убывает).

Если точка x_0 — точка экстремума функции $\frac{S_{\text{н.а.}}}{S_{\text{г.б.}}}$ и производная $f'(x_0)$

существует, то $f'(x_0) = 0$.

Пусть $f'(x)$ существует на множестве $(x_0 - n; x_0) \cup (x_0; x_0 + n)$ то:

- а) если $f'(x) < 0$ на $(x_0 - n; x_0)$, $f'(x) > 0$ на $(x_0; x_0 + n)$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум;
- б) если $f'(x) > 0$ на $(x_0 - n; x_0)$, $f'(x) < 0$ на $(x_0; x_0 + n)$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2 \cdot x}{1 - x^2}.$$

Решение: функция существует при всех значениях $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, то есть областью ее существования является множество, состоящее из интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. Найдем производную функции

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2)}{(1 - x^2)^2} > 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Значит, во всех интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ функция возрастает.

Пример 2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = (2^x - 1) \cdot (2^x - 4)^2.$$

Решение: найдем производную функции $f(x)$. Представим эту функцию в виде:

$$f(x) = \varphi(2^x),$$

где $\varphi = (t - 1) \cdot (t - 4)^2 = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$.

Тогда $\varphi'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3 \cdot (t^2 - 6t + 8),$

$$f' = 3(2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8)2^x \ln 2 = 3 \cdot 2^x \ln 2 \cdot (2^x - 2) \cdot (2^x - 4).$$

Поскольку $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; 1), (2; +\infty)$, то на этих интервалах $f(x)$ возрастает. Поскольку $f'(x) < 0$ на интервале $(1; 2)$, то на этом интервале $f(x)$ убывает.

Пример 3. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x.$$

Решение: найдем производную

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = \\ &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Так как $f'(x) > 0$ при $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) > 0$, то есть при

$$x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \text{ то функция } f(x) \text{ возрастает на каждом}$$

из интервалов $\left(2\pi n - \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $f'(x) < 0$ при

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \text{ то функция } f(x) \text{ убывает на каждом из}$$

интервалов $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Найти экстремумы функции $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

Решение: функция определена на множестве $\mathbb{R}$. Найдем производную

$$y' = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} (3 - x).$$

Критическими являются точки $x_1 = 0, x_2 = 3$. Заметим, что при переходе через точку $x_1 = 0$ $y'(x)$ знак не меняет, а при переходе через точку $x_2 = 3$ слева направо $y'(x)$ меняет знак с «+» на «-». Следовательно, в точке $x_2 = 3$ функция $y(x)$ имеет максимум.

Пример 5. Найти экстремум функции $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

Решение: функция $y(x)$ определена на множестве $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Найдем производную $y'(x)$:

$$y'(x) = 2x - \frac{2}{1+2x} = \frac{2 \cdot (2x^2 + x - 1)}{1+2x} = \frac{4 \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}{1+2x}.$$

Заметим, что в D функция имеет только одну критическую точку $x = \frac{1}{2}$.

При переходе через эту точку слева направо $y'(x)$ меняет знак с «-» на «+».

Следовательно, в точке $x = \frac{1}{2}$ $y(x)$ имеет минимум, $y_{\min} = \frac{1}{4} - \ln 2$.

Ответ: $y_{\min} = \frac{1}{4} - \ln 2$.

Рассмотрим задачи о нахождении наименьшего и наибольшего значения $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Задача решается следующим образом:

- находятся критические точки функции $f(x)$, далее выбираются критические точки, которые расположены на отрезке $[a; b]$;
- среди значений функции в выбранных критических точках и на концах отрезка выбираются наибольшее и наименьшее значения.

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^5 - x^3 + x + 2 \text{ на отрезке } [-1; 1].$$

Решение: найдем $y'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$. Критические точки найдем из уравнения $5x^4 - 3x^2 + 1 = 0$. Это уравнение имеет пустое множество решений. Найдем значение данной функции на концах отрезка $[-1; 1]$:

$$y(-1) = 1; y(1) = 3.$$

Поэтому наименьшим значением функции $y(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ является значение $y(-1) = 1$:

$$\min_{[-1; 1]} y(x) = 1.$$

Наибольшим значением функции $y(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ является значение $y(1) = 3$:

$$\max_{[-1; 1]} y(x) = 3.$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение: функция $f(x)$ определена во всех точках отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, так как

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \text{ на } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Найдем критические точки:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos 2x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin 2x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

Поскольку $f'(x)$ определена во всех точках $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то критические точки функции $f(x)$ найдем из уравнения

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \cos 2x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x\right) \\
& - \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x\right) \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos x + \sin x) - \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cdot ((\cos x + \sin x)^2 - \sin x \cdot \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cdot (1 + \sin x \cdot \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Критическая точка $x = \frac{\pi}{4}$ находится на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вычислим $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Следовательно, $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 1$, $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0$.

Ответ: $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 1$, $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0$.

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 0,5 \cdot \cos 2x + \sin x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение: найдем критические точки $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
& f'(x) = -\sin 2x + \cos x; -\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (-2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Среди критических точек на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ расположены точки $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{6}$.

Вычислим $f(0) = 0,5$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,5$.

Таким образом, $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0,5$; $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0,75$.

Ответ: $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0,5$; $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0,75$.

2 ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ (С РЕШЕНИЯМИ)

Вариант № 1.

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$.
2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(2x^2 + 5 \cdot x + 1) < 0$.
3. Доказать тождество $\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \sin 4\alpha$.
4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке $x = -2$.
5. В равнобокой трапеции средняя линия равна m , а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь трапеции.

Решения:

1. Записав уравнение в виде $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2 \cdot x - 3}$ (2.1)

и возведя обе части в куб, получим

$$x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x - 2 = 2 \cdot x - 3,$$

после упрощения получим $3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 0$.

С учетом (2.1) уравнение принимает вид

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0 \text{ или } (x-1)(x-2)(2x-3) = 0,$$

отсюда находим
$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3/2. \end{cases}$$

Ответ: $\{1; 2; 3/2\}$.

2. Запишем неравенство с учетом области допустимых значений и свойств логарифмической функции в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 5x + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 5x > 0 \Rightarrow x(2x + 5) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2,5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2,5) \cup (0; \infty)$.

3. ОДЗ:
$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq \pi/4 + \pi n/2 \\ \alpha \neq \pi m \\ \alpha \neq \pi/2 + \pi k \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая область допустимых значений, преобразуем левую часть равенства

$$\frac{\cos 4\alpha + 1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \cos 2\alpha \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 4\alpha.$$

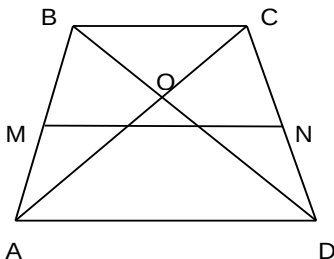
$$\frac{1}{2} \cdot \sin 4\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 4\alpha, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0); \quad x_0 = -2; \quad y'(x) = -4 - 6x; \\ f(x_0) &= 2 - 4(-2) - 3(-2)^2 = -2; \quad f'(x_0) = -4 - 6(-2) = 8. \\ y + 2 &= 8(x + 2); \quad y = 8x + 14 \text{ — уравнение касательной.} \end{aligned}$$

Ответ: $y = 8x + 14$.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция
 $AB=CD$
 $AC \perp BD$
 $MN = m$ — средняя линия

Вычислить площадь трапеции S_{ABCD} .

$$MN = \frac{AD + BC}{2},$$

$AC=BD$ — диагонали равнобокой трапеции.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} BD^2.$$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — прямоугольные, равнобедренные: $BO = OC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$ и

$$AO = OD = \frac{AD}{\sqrt{2}};$$

$$BD = BO + OD = \frac{BC + AD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \frac{BC + AD}{2} = \sqrt{2} \cdot MN = \sqrt{2}m.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2}MN)^2 = MN^2, \text{ т.е. } S_{ABCD} = m^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = m^2$.

Вариант № 2.

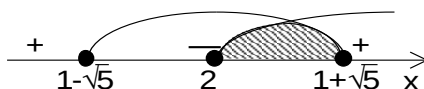
1. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.
2. Решить неравенство $\log_{1/2}(x^2 - 4x + 6) < -2$.
3. Доказать тождество $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}$.
4. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$.
5. Найти площадь ромба, если его острый угол равен 30° , а площадь круга, вписанного в ромб, равна Q .

Решения:

1. ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{5} \end{matrix} \right| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5})) \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Методом интервалов находим



$$x \in [2; 1 + \sqrt{5}].$$

$$4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

$x_1 = 0 \notin \text{ОДЗ}$, следовательно $x=3$.

Проверка: $\sqrt{4 + 6 - 9} = 3 - 2 \Rightarrow 1 = 1.$

Ответ: {3}.

2. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}.$

Исходя из определения логарифмической функции, имеем:

$$x^2 - 4x + 6 > 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2})) > 0$$

Методом интервалов находим



Ответ: $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty).$

3. Преобразуем левую часть равенства

$$\sin^2 \alpha + \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos(2\pi/3)) =$$

$$= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

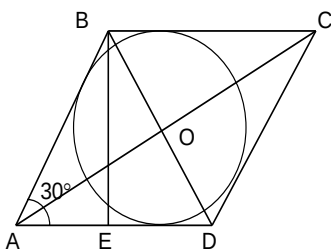
$$4. \quad y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2, \quad y'(x_0) = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3.$$

Пусть α — угол, который касательная образует с осью Ox , тогда из геометрического смысла производной следует $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 3$,

$\alpha = \operatorname{arctg} 3$. Угол, который образует касательная с осью ординат, равен $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$.

5.



Дано: $ABCD$ — ромб

$$S_{кр} = Q$$

$$\angle BAD = 30^\circ.$$

Вычислить площадь ромба S_{ABCD} .

Пусть r — радиус вписанного круга,

$$\pi r^2 = Q, \quad r = \sqrt{Q/\pi}, \quad BE = 2r.$$

$$\text{Из } \triangle ABE: AB = \frac{BE}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{Q/\pi}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = (4\sqrt{Q/\pi})^2 \cdot 0,5 = \frac{8Q}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{8Q}{\pi}$.

Вариант № 3.

$$1. \quad \text{Решить уравнение } \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

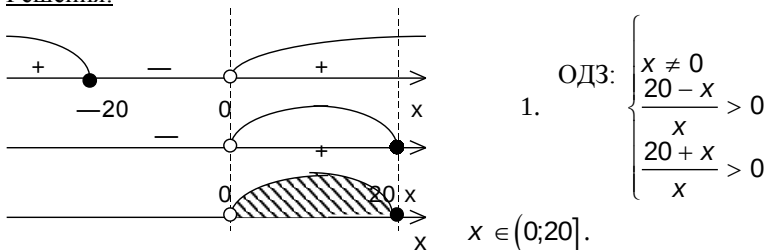
$$2. \quad \text{Решить неравенство } 4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0.$$

$$3. \quad \text{Доказать тождество } \sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \cdot \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$4. \quad \text{Доказать, что } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \quad a > 0, b > 0.$$

5. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V , найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

Решения:



Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x} \neq 0$.

$$\sqrt{20+x} + \sqrt{20-x} = \sqrt{6x}.$$

Возводим обе части равенства в квадрат:

$$\begin{aligned} 20+x+2\sqrt{400-x^2}+20-x=6x &\Rightarrow \sqrt{400-x^2}=3x-20 \Rightarrow \\ \Rightarrow 400-x^2=9x^2-120x+400 &\Rightarrow 10x^2-120x=0 \Rightarrow x(x-12)=0 \Rightarrow \\ x_1=0 \notin \text{ОДЗ}; \quad x_2=12. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{20+12}{12}} + \sqrt{\frac{20-12}{12}} &= \sqrt{6}; \quad \sqrt{\frac{32}{12}} + \sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{6}; \quad \sqrt{\frac{16}{6}} + \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{6}; \quad \frac{4+2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}; \\ \sqrt{6} &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 12$.

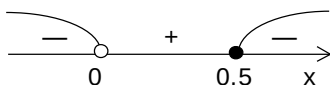
2. ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{1}{4} \cdot 4^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 3 \leq 0 \Rightarrow 4^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} - 12 \leq 0.$$

Сделаем замену переменных: $2^{\frac{1}{x}} = t, t > 0$.

$t^2 - t - 12 \leq 0 \Rightarrow (t-4)(t+3) \leq 0$
 $0 < t \leq 4$
 Возвратимся к замене

$$2^{\frac{1}{x}} \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup [0,5; \infty).$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [0,5; \infty).$

3. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2} \left(\sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 4\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 4\alpha + \cos 4\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Поскольку $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, то $a^2 - ab + b^2 \geq ab$.

Отсюда, учитывая, что $a + b > 0$, получим

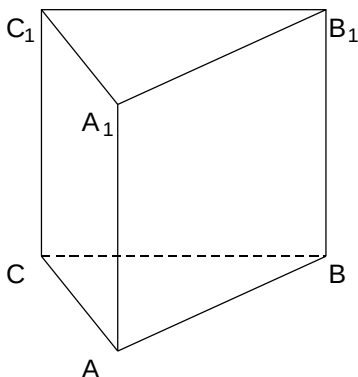
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b), \quad a^3 + b^3 \geq ab(a + b).$$

Следовательно, $3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2$.

Прибавим к обеим частям этого неравенства $a^3 + b^3$:

$$4a^3 + 4b^3 \geq (a + b)^3, \quad \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3, \text{ что и требовалось доказать.}$$

5.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма;

V — объем призмы;

Найти длину стороны основания призмы.

Пусть x — длина стороны основания

призмы, H — длина бокового ребра.

Тогда $V = H \cdot S_{ABC}$, т.е.

$$V = H \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ откуда } H = \frac{4V}{x^2 \sqrt{3}}.$$

Найдем сумму длин всех ребер призмы: $S = 3H + 6x = 6x + \frac{4V\sqrt{3}}{x^2}$.

Таким образом, получаем функцию $S(x) = 6x + \frac{4V\sqrt{3}}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$,

наименьшее значение которой требуется найти в указанном промежутке.

Найдем критические точки функции $S(x)$:

$$S'(x) = 6 - \frac{8V\sqrt{3}}{x^3}, 6 - \frac{8V\sqrt{3}}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{8V\sqrt{3}}{6} = \frac{4V}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}.$$

На промежутке $\left(0; \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}\right)$, $S'(x) < 0$ (функция убывает), на промежутке

$\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}; \infty\right)$, $S'(x) > 0$ (функция возрастает). Следовательно, при

$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$ функция $S(x)$ имеет минимум, совпадающий с ее наименьшим

значением на рассматриваемом промежутке $(0; \infty)$. Длина стороны

основания этой призмы $x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$.

Вариант № 4.

1. Решить уравнение $\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$.

2. Решить неравенство $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3 + 1}{3}$

в точке его пересечения с осью абсцисс.

4. Решить уравнение $\cos^3 3x + \cos^{11} 7x = -2$.

5. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d , составляет с боковым ребром призмы угол α . Определить объем призмы.

Решения:

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$.

Производим замену переменной $\sqrt[3]{x} = t$.

$$\begin{aligned}\frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} - \frac{t^2 - 1}{t + 1} = 4 &\Rightarrow \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t^2 - 1} - \frac{(t - 1)(t + 1)}{t + 1} = 4 \Rightarrow t^2 + 1 - t + 1 - 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -1 \notin \hat{I} \text{ ÄÇ.} \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ: $\{8\}$.

2. ОДЗ: $x \in (0; \infty)$

Производим замену переменной $\log_{0,5} x = t$.

$$t^2 + t - 2 \leq 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 1) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq t \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \log_{0,5} x \leq 1 \Rightarrow 0,5 \leq x \leq 4$$

Ответ: $[0,5; 4]$.

3. Найдем точку пересечения функции с осью абсцисс:

$$\frac{x^3 + 1}{3} = 0 \Rightarrow x_0 = -1.$$

Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

$$y(x_0) = 0; y'(x) = x^2; y'(x_0) = 1; y = x + 1.$$

Ответ: $y = x + 1$.

4. Любое решение уравнения есть решение эквивалентной системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = -1 \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение имеет решение $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$. Чтобы найти решение системы, нужно найти такие k и n , для которых будет выполнено равенство

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7} \Leftrightarrow k = \frac{(3n-2)}{7}.$$

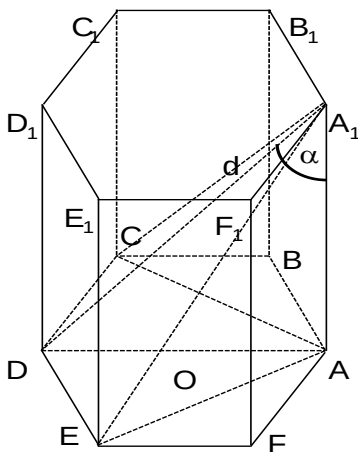
Поскольку $k, n \in \mathbb{Z}$, то последнее равенство будет выполнено лишь тогда, когда $n = 7t + 3, t \in \mathbb{Z}$, тогда $k = 3t + 1$.

Итак, решениями системы являются те $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, где

$k = 3t + 1, t \in \mathbb{Z}$, то есть $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi t + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

5.



Дано:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма;

$DA_1 = d, \angle AA_1D = \alpha$.

Найти V_{np} .

Из каждой вершины призмы, например из вершины A_1 , можно провести три диагонали (A_1E, A_1D, A_1C). Они проектируются на плоскость $ABCDEF$ в диагонали основания (AE, AD, AC). Из наклонных A_1E, A_1D, A_1C наибольшая та, у которой проекция самая большая. Следовательно, наибольшая из трех

взятых диагоналей есть A_1D (в призме есть еще диагонали, равные A_1D , но нет больших).

Из $\triangle A_1AD$ ($\angle ADA_1 = 90^\circ, \angle DA_1A = \alpha, DA_1 = d$): $H = AA_1 = d \cos \alpha$,

$AD = d \sin \alpha$. Площадь равностороннего $\triangle AOB$ равна $\frac{1}{4} AO^2 \sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot AO^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{AD}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot d^2 \sin^2 \alpha.$$

$$V_{np} = S_{\text{осн}} H = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Ответ: $V_{np} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

Вариант № 5.

1. Решить уравнение $x + 12\sqrt{x} - 64 = 0$.
2. Решить неравенство $\log_2 x^2 + \log_2 (x-1)^2 > 2$.
3. Доказать тождество $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = -1$.
4. Известно, что прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ является касательной к

линии, заданной уравнением $y = 0,5x^4 - x$. Найти координаты точки касания.

5. Вычислить площадь ромба, если его периметр равен $2p$, а диагонали относятся как $m:n$.

Решения:

1. ОДЗ: $x \in [0; \infty)$.

Обозначив $\sqrt{x} = t, t \geq 0$, получаем уравнение $t^2 + 12t - 64 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} t_1 = -16 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

t_1 не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16.$$

Ответ: $\{16\}$.

2. ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Учитывая свойства логарифмической функции, запишем неравенство в виде $\log_2 x^2(x-1)^2 > 2 \Rightarrow x^2(x-1)^2 > 4 \Rightarrow |x(x-1)| > 2$, что равносильно совокупности двух неравенств:

$$\begin{cases} x(x-1) > 2 \\ x(x-1) < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) > 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

3. ОДЗ: $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Преобразуем левую часть неравенства

$$\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -1.$$

$-1 = -1$, $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

4. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

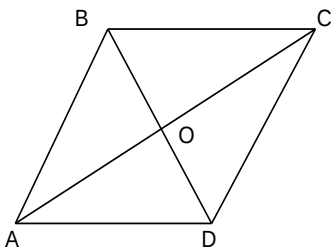
В данной задаче $f'(x_0) = 2x_0^3 - 1$ и $f'(x_0) = -3/4$. Отсюда следует, что $2x_0^3 - 1 = -3/4$. Решая данное уравнение, получаем $x_0 = 0.5$.

Ординату y_0 находим путем подстановки x_0 в функцию $y = 0.5x^4 - x$,

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{32} - \frac{1}{2} = -\frac{15}{32}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{15}{32}\right)$.

5.



Дано: $ABCD$ — ромб

$$P_{ABCD} = 2p$$

$$AC:BD = m:n.$$

Вычислить площадь ромба S_{ABCD} .

Пусть $AO = mx$, $BO = nx$. Тогда

$$AB = \frac{P_{ABCD}}{4} = \frac{p}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle ABO: AO^2 + BO^2 = AB^2; m^2x^2 + n^2x^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

$$S_{ABCD} = 2AO \cdot BO = 2mnx^2 = \frac{2mnp^2}{4(m^2 + n^2)} = \frac{mnp^2}{2(m^2 + n^2)}.$$

Ответ: $\frac{mnp^2}{2(m^2 + n^2)}.$

Вариант № 6.

1. Решить уравнение $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$.
2. Решить неравенство $\log_{3^{-1}} \frac{4x^2-1}{x} \geq -1$.
3. Доказать тождество $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} = 2 \sin \alpha$.
4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.
5. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найти периметр этой трапеции.

Решения:

$$1. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -7/5 \\ x \geq -3/2 \\ x \geq -4/3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4/3; \infty).$$

Запишем равносильное уравнение $\sqrt{5x+7} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+3}$.

Возведя обе части в квадрат, получим

$$5x+7 = 3x+4 + 2\sqrt{(3x+4)(2x+3)} + 2x+3,$$

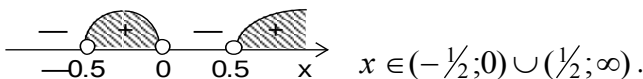
$$2\sqrt{(3x+4)(2x+3)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+4 = 0 \\ 2x+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4/3 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}, x_2 = -3/2 \notin \text{ОДЗ},$$

следовательно $x = -4/3$.

$$\text{Проверка: } \sqrt{-20/3+7} - \sqrt{-8/3+3} = 0 \Rightarrow \sqrt{1/3} - \sqrt{1/3} \Rightarrow 0 = 0.$$

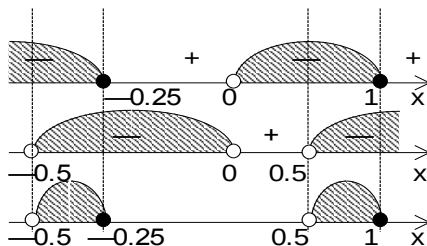
Ответ: $\{-4/3\}$.

$$2. \quad \text{ОДЗ: } \frac{4x^2-1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)}{x} > 0.$$



$$\log_3 \frac{4x^2-1}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{4x^2-1}{x} \leq 3 \Rightarrow \frac{4x^2-3x-1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{4(x-1)(x+1/4)}{x} \leq 0.$$

Методом интервалов находим:



$$x \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}; 1] .$$

ОТВЕТ: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}; 1] .$

3. ОДЗ:

$$\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha \neq 0 \Rightarrow \cos \alpha + \cos 4\alpha \neq 0 \Rightarrow 2 \cos^5 \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^5 \frac{\alpha}{2} \neq 0 \\ \cos^3 \frac{\alpha}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + 2 \cos 4\alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \cos 4\alpha)}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha.$$

$$2 \sin \alpha = 2 \sin \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi n, \alpha \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi k, n, k \in \mathbb{Z}, \text{ и т.д.}$$

4. Находим точку пересечения графика функции с осью Ox :

$$y = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

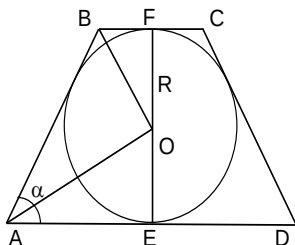
$$y(x_0) = 0, y' = \frac{3x^2}{3} = x^2, y'(x_0) = 1, y = x + 1$$

ОТВЕТ: $y = x + 1$.

5. Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция

$$\underline{AB=CD, OE=OF=R, \angle BAD=\alpha}$$

Вычислить периметр P_{ABCD} .



Так как AO — биссектриса $\angle BAD$, BO — биссектриса $\angle ABC$, то из $\triangle AOE$, где $\angle OAE = \alpha/2$; $OE = R$

$$\Rightarrow AE = OE \cdot \operatorname{ctg} \angle OAE = R \operatorname{ctg} \alpha/2.$$

Из $\triangle BOF$, где

$$\angle OBF = \frac{\pi - \angle BAD}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF = OF \cdot \operatorname{ctg} \angle OBF = R \operatorname{tg} \alpha/2 = R \operatorname{tg} \alpha/2,$$

т.к. для трапеции, описанной около окружности, $AB + CD = AD + BC$, то

$$P_{ABCD} = 2(AD + BC) = 4(AE + BF) = 4R(\operatorname{ctg} \alpha/2 + \operatorname{tg} \alpha/2) = \frac{8R}{\sin \alpha}.$$

Ответ: $\frac{8R}{\sin \alpha}.$

Вариант № 7.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$.
2. Решить неравенство

$$\log_5((x + 3)(x + 5)) + \log_{0,2}(x + 3) < 1,5 \log_{\sqrt{5}} 2.$$

3. Доказать тождество $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$
4. Под каким углом к оси OX наклонена касательная, проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M_0(2; -4)$?
5. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, гипотенуза равна c . Определить площадь круга, вписанного в этот треугольник.

Решения:

1. ОДЗ: $x \in [2; \infty).$

Запишем уравнение, равносильное исходному: $\sqrt{2x - 4} = 1 + \sqrt{x + 5}.$

Возведем в квадрат обе части равенства

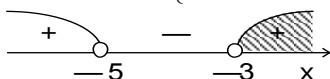
$$2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x + 5} + x + 5 \Leftrightarrow x - 10 = 2\sqrt{x + 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 20x + 100 - 4x - 20 = 0 \\ x - 10 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 24x + 80 = 0 \\ x - 10 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 20 \Rightarrow x = 20 \\ x \geq 10. \end{cases}$$

Проверка: $\sqrt{36} - \sqrt{25} = 1$; $6 - 5 = 1$; $1 = 1$

Ответ: $\{20\}$.

2. ОДЗ: $\begin{cases} (x+3)(x+5) > 0 \\ x > -3 \end{cases}$



$$x \in (-3; \infty).$$

Приводим логарифмические выражения к одному основанию:

$$\log_5((x+3)(x+5)) - \log_5(x+3) < 3\log_5 2 \Rightarrow \log_5(x+5) < \log_5 8 \Rightarrow x+5 < 8 \Rightarrow x < 3.$$

С учетом ОДЗ имеем: $x \in (-3; 3)$.

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

3. ОДЗ: $\begin{cases} \alpha \neq \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha \neq -\pi/2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}, \alpha \neq \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \alpha \neq -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

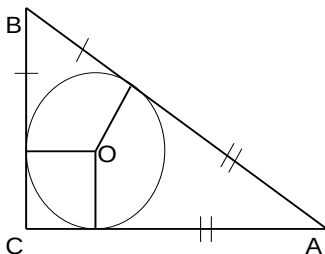
что и требовалось доказать.

4. $y' = 3x^2 - 2x - 7$; $y'(2) = 12 - 11 = 1$.

Исходя из геометрического смысла производной функции $y' = \operatorname{tg} \alpha$, имеем $\operatorname{tg} \alpha = y'(2) = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$.

Ответ: $\alpha = \pi/4$.

5.



Дано: ABC — прямоугольный треугольник

$$AB = c$$

$$P_{ABC} = 2p$$

Вычислить площадь вписанного круга $S_{кр}$.

Пусть r — радиус вписанной в треугольник окружности.

Для прямоугольного треугольника имеет место равенство

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{AC + BC + AB - 2AB}{2} = \frac{2p - 2c}{2} = p - c;$$

$$S_{кр} = \pi r^2 = \pi(p - c)^2.$$

Ответ: $S_{кр} = \pi(p - c)^2$.

Вариант № 8.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$.

2. Решить неравенство $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$.

3. Доказать тождество

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

4. Составить уравнение касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и

$y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

5. В равнобокую трапецию вписан круг. Найти площадь круга, если большее основание трапеции равно a , а угол при меньшем основании равен 120° .

Решения:

$$1. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in [4; \infty).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3x + 4 + x - 4 + 2\sqrt{(3x + 4)(x - 4)} = 4x \Rightarrow (3x + 4)(x - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \\ x \geq 4. \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Проверка: $\sqrt{16} + 0 = 4; 4 = 4.$

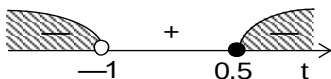
Ответ: $\{4\}.$

$$2. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty).$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$\frac{2 - t}{1 + t} \leq 1 \Rightarrow \frac{2 - t - 1 - t}{1 + t} \leq 0 \Rightarrow \frac{1 - 2t}{1 + t} \leq 0.$$



$$\begin{cases} t < -1 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2 2^{-1} \\ \log_2 x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получаем $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup [\sqrt{2}; \infty).$

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup [\sqrt{2}; \infty).$

3. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ & = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2(1 - \cos(\alpha - \beta)) = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned}$$

$$4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Найдем точки пересечения кривых

$$2x^2 - 5 = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 2; (-5; 45), (2; 3).$$

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

$y' = 4x$; $y' = 2x - 3$ — производные функций.

Запишем уравнения касательных к графикам функций в точках их пересечения.

а) $(-5; 45)$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 5, & y(-5) &= 45, & y &= 45 - 20(x + 5); \\ y' &= 4x, & y'(-5) &= -20, & y &= -20x - 55 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 5, & y(-5) &= 45, & y &= 45 - 13(x + 5); \\ y' &= 2x - 3, & y'(-5) &= -13, & y &= -13x - 20 \end{aligned};$$

б) $(2; 3)$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 5, & y(2) &= 3, & y &= 3 + 8(x - 2); \\ y' &= 4x, & y'(2) &= 8, & y &= 8x - 13 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 5, & y(2) &= 3, & y &= 3 + x - 2 \\ y' &= 2x - 3, & y'(2) &= 1, & y &= x + 1. \end{aligned}$$

Ответ: $(-5; 45)$:

$$\begin{aligned} y &= -20x - 55 \\ y &= -13x - 20 \end{aligned}$$

$(2; 3)$:

$$\begin{aligned} y &= 8x - 13 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

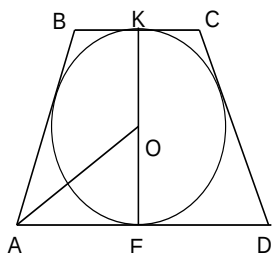
5. Дано: $ABCD$ — трапеция

$$AB=CD$$

$$AD=a$$

$$\angle CBA=120^\circ$$

Найти площадь круга $S_{кр}$.



AO — биссектриса угла BAE , и, т.к.
 $\angle BAE = 180^\circ - \angle CBA = 60^\circ$, то $\angle OAE = 30^\circ$. Из
 $\triangle AOE$, где $AE = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$,

$$r = OE = AE \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}}; S_{\text{êð}} = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$

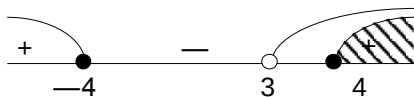
Ответ: $S_{\text{êð}} = \frac{\pi a^2}{12}.$

Вариант № 9.

1. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \frac{7}{\sqrt{x - 3}}.$
2. Решить неравенство $(1,25)^{1 - (\log_2 x)^2} < (0,64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x}.$
3. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке ее пересечения с осью Oy ?
4. Доказать, что если $A + B + C = \pi$, $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, угол C — тупой, то $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$.
5. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r .

Решения:

$$1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 4)(x + 4) \geq 0 \\ x > 3 \end{cases}$$



$$x \in [4; \infty).$$

Преобразуем исходное уравнение к виду $\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = 7.$

Пусть $x^2 - 9 = t, t \geq 0$, тогда

$$\sqrt{t-7} + \sqrt{t} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{t-7} = 7 - \sqrt{t} \Rightarrow \begin{cases} t-7 = 49 - 14\sqrt{t} + t \\ 7 - \sqrt{t} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14\sqrt{t} = 56 \\ t \leq 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 16 \Rightarrow x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow |x| = 5 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5 \notin \text{АЧ} \Rightarrow x = 5.$$

Проверка: $\frac{\sqrt{25-16}}{\sqrt{2}} + \sqrt{8} = \frac{7}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}; \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$

Ответ: $\{5\}$.

2. ОДЗ: $x \in (0; \infty)$.

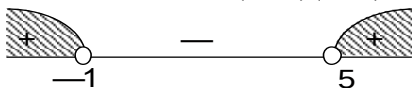
Приведем показательные выражения к одному основанию:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-\log_2^2 x} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2+\log_2 x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1-\log_2^2 x} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-4-4\log_2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \log_2^2 x < -4 - 4\log_2 x \Rightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x - 5 > 0.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$t^2 - 4t - 5 > 0 \Rightarrow (t-5)(t+1) > 0$$



$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x > 32 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (32; \infty).$$

Ответ: $(0; \frac{1}{2}) \cup (32; \infty)$.

3. Найдем точку пересечения графика функции с осью Oy : $x_0=0 \Rightarrow y_0=0$.

Исходя из геометрического смысла производной, $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к оси Ox , находим $y' = 6x_0^2 - 1 = \operatorname{tg} \alpha$,

$$y'(x_0) = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}\pi.$$

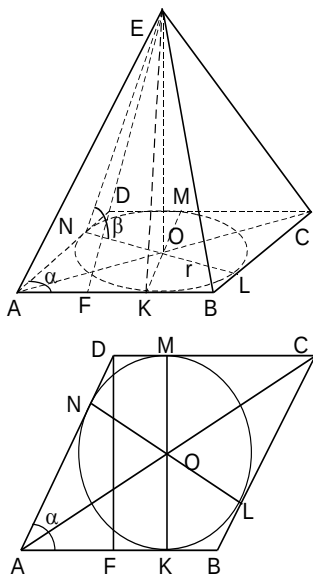
Ответ: $\{\frac{3}{4}\pi\}$.

4. Из соотношения $A + B + C = \pi$ имеем $A + B = \pi - C$.

Найдем $\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(\pi - C) = -\operatorname{tg} C > 0$, так как C — тупой угол.

Таким образом $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} > 0$. Так как $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B > 0$, следовательно $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 0$, то есть $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$, что и требовалось доказать.

5.



Дано: $EABCD$ — пирамида,
 $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$,
 $\angle ENO = \angle EKO = \beta$,
 $NL \perp AD$, $ON = OK = r$.

Вычислить объем пирамиды V и полную площадь поверхности $S_{\text{пол}}$.

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом β , следовательно, т. E проецируется в т. O — центр вписанной в ромб окружности радиуса r .

$$OK = r, \quad MK = 2OK = 2r.$$

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot DF, \quad (DF \text{ — высота ромба}),$$

$$DF = MK = 2r, \quad AB = AD \text{ — сторона ромба.}$$

$$\text{Из } \triangle ADF: AD = DF \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2r}{\sin \alpha}.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{2r}{\sin \alpha} \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin \alpha}. S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{\triangle ABE} = 4 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot KE = 2AB \cdot KE.$$

$$\text{Из } \triangle OKE \text{ находим } KE = \frac{OK}{\cos \beta} = \frac{r}{\cos \beta}; OE = OK \cdot \operatorname{tg} \beta = r \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$S_{\triangle OK} = 2 \cdot \frac{2r}{\sin \alpha} \cdot \frac{r}{\cos \beta} = \frac{4r^2}{\sin \alpha \cos \beta};$$

$$S_{\text{нож}} = S_{\text{окл}} + S_{\triangle OK} = \frac{4r^2}{\sin \alpha} + \frac{4r^2}{\sin \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{4r^2}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} \right) = \frac{8r^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{окл}} \cdot OE = \frac{1}{3} \cdot \frac{4r^2}{\sin \alpha} \cdot r \operatorname{tg} \beta = \frac{4r^3 \operatorname{tg} \beta}{3 \sin \alpha}$$

Ответ: $V = \frac{4r^3 \operatorname{tg} \beta}{3 \sin \alpha}; S_{\text{нож}} = \frac{8r^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \cos \beta}.$

Вариант № 10.

1. Решить уравнение $\frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{x}.$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$

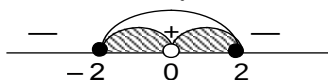
3. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1;1;2), B(3;4;2), C(5;6;4).$ Найдите величину внешнего угла треугольника при вершине $B.$

4. Пусть $\operatorname{tg} \theta = n \cdot \operatorname{tg} \varphi (n > 0).$ Доказать, что $\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi) \leq \frac{(n-1)^2}{4n}.$

5. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину $l.$ Из трех плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны $\alpha,$ а третий равен $\beta.$ Найти объем пирамиды.

Решения:

1. ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)(2+x) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$



$x \in [-2; 0) \cup (0; 2].$

Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{2(2 - \sqrt{4 - x^2}) - 2 - \sqrt{4 - x^2}}{4 - 4 + x^2} = \frac{1}{x}.$$

Умножим обе части неравенства на $x^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} 4 - 2\sqrt{4 - x^2} - 2 - \sqrt{4 - x^2} &= x \Leftrightarrow 2 - x = 3\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4 - 4x + x^2 = 36 - 9x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 10x^2 - 4x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 5x^2 - 2x - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1,6. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка:

$$x_1=2: \quad \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$x_2=-1,6:$$

$$\frac{2}{2 + \sqrt{1,44}} - \frac{1}{1 - \sqrt{1,44}} = -\frac{1}{1,6}; \quad \frac{2}{3,2} - \frac{1}{0,8} = -\frac{1}{1,6}; \quad -\frac{1}{1,6} = -\frac{1}{1,6}.$$

Ответ: $\{-1,6; 2\}$.

2. ОДЗ:

$$6^{x+1} - 36^x > 0 \Leftrightarrow 6^{x+1} > 6^{2x} \Leftrightarrow x + 1 > 2x \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1).$$

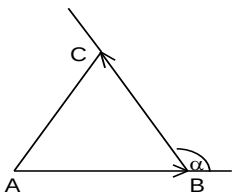
Опираясь на монотонность и определение логарифмической функции, запишем равносильное неравенство:

$6^{x+1} - 36^x \leq 5 \Rightarrow 36^x - 6 \cdot 6^x + 5 \geq 0$, знак неравенства изменен на противоположный, т.к. основание логарифма меньше 1.

Пусть $6^x = t, t > 0$

$$t^2 - 6t + 5 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^x \leq 1 \\ 6^x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \log_6 5 \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$.



3. Рассмотрим $\triangle ABC$:

Внешний угол α $\triangle ABC$ находим как угол между

векторами $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|}, \text{ где } \overline{AB}(2;3;0), \overline{BC}(2;2;2).$$

$$\cos \alpha = \frac{4 + 6}{\sqrt{4 + 9} \sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{10}{2\sqrt{39}} = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{39}}.$

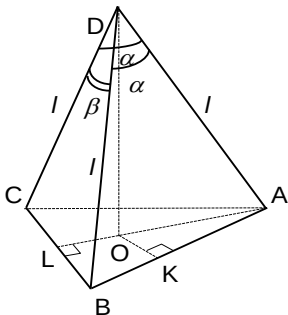
$$4. \quad \operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(n-1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + n \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2(\theta - \varphi) &= \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + n \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg} \varphi + n \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2} = \frac{(n-1)^2}{\operatorname{ctg}^2 \varphi + 2n + n^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi} = \\ &= \frac{(n-1)^2}{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 2n + n^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + 4n} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg} \varphi - n \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2 + 4n} \leq \frac{(n-1)^2}{4n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5.



Дано: $DABC$ — пирамида,

$AD=CD=BD=l$,

$\angle CDA = \angle ADB = \alpha, \angle BDC = \beta$.

Вычислить объем пирамиды V .

Высота DO проходит через центр круга, описанного около $\triangle ABC$, где

$$AB = AC = 2l \sin \frac{\alpha}{2}, BC = 2l \sin \frac{\beta}{2}.$$

Точка O лежит на перпендикуляре KO , проведенном к стороне AB через ее середину.

$\triangle AOK \sim \triangle ABL$ (прямоугольные, $\angle A$ — общий):

$$\frac{AO}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{AL}, AO = \frac{\frac{1}{2}AB^2}{AL}.$$

$$AL = \sqrt{AB^2 - LB^2}, LB = \frac{1}{2}BC = l \sin \frac{\beta}{2},$$

$$AL = \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = l \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$AO = \frac{2l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{l \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Из $\triangle AOD$ ($\angle DOA = 90^\circ$, $AD = l$):

$$\begin{aligned} DO = H &= \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}} = \\ &= l \sqrt{\frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}} = l \sqrt{\frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}} = \\ &= l \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}. \end{aligned}$$

$$S_{ocf} = \frac{1}{2} BC \cdot AL = \frac{1}{2} 2l \sin \frac{\beta}{2} l \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = l^2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{ocf} \cdot H = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos \beta}{2}} = \\ &= \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Ответ: $V = \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}.$

Вариант № 11.

1. Решить уравнение $\cos x - \sin x = 4 \cos x \cdot \sin^2 x$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$$

3. Решить неравенство $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

4. Доказать, что функция $y = x + \frac{1}{1+x^2}$ возрастает на всей числовой оси.

5. Правильный треугольник со стороной a вписан в окружность. Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

Решения:

1. $\cos x - \sin x = 2(2 \sin x \cos x) \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 2 \sin x \sin 2x$.

Преобразуем правую часть с помощью тождества:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

$$\cos x - \sin x = \cos x - \cos 3x \Rightarrow \cos 3x - \sin x = 0.$$

Используя формулу приведения $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, получаем:

$$\cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow -2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + \frac{\pi}{4}) = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ (2x - \frac{\pi}{4}) = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\{-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. ОДЗ:
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \log_2(xy) = \log_2 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}.$$

Перейдем к равносильной системе уравнений. Если умножим второе уравнение на 2, прибавим и вычтем из первого уравнения, тогда

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 196 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 14 \\ x-y = \pm 2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 14 \\ x-y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 14 \\ x-y = -2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\{(6; 8), (8; 6)\}$.

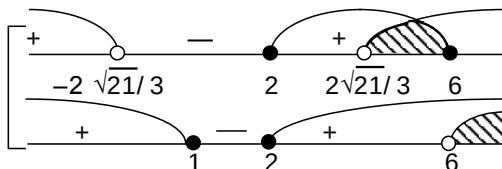
3. ОДЗ: $x \in [2; \infty)$.

Возведем неравенство в квадрат:

$$x+3 < x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow 6-x < 2\sqrt{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 6] \\ 36 - 12x + x^2 < 4(x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 6] \\ 3x^2 - 28 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (6; \infty) \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 6] \\ \left(x - \frac{2\sqrt{21}}{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{21}}{3}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (6; \infty) \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$



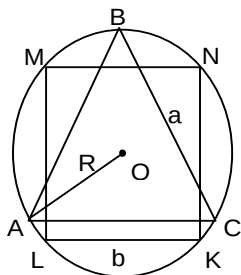
Ответ: $x \in \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; \infty\right)$.

4. Необходимо показать, что $y'(x) > 0$ для всех $x \in R$.

$$y' = 1 - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x+x^2+x^2+x^4}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^2 + x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} > 0, x \in \mathbb{R}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

5.



Пусть R — радиус окружности, a — сторона треугольника, b — сторона квадрата. Имеет место соотношение для вписанного в окружность правильного треугольника и квадрата:

$$\begin{cases} a = R\sqrt{3} \\ b = R\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

$$S = \frac{2}{3}a^2.$$

Ответ: $\frac{2}{3}a^2$.

Вариант № 12.

1. Решить уравнение $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$
3. Решить неравенство $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$.
4. Доказать, что функция $y = 2x + \sin x$ возрастает на всей числовой оси.
5. Окружность радиуса R вписана в равнобокую трапецию. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

Решения:

$$1. 2\sin 2x \cdot \cos x = 4\sin^3 x \Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x = 4\sin^3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{ \pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid n, k \in \mathbb{Z} \}$.

2. ОДЗ: $x > 0, y > 0$.

Приведем логарифмические функции к одному основанию:

$$\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y = 4 \\ \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \log_2 x + \log_2 y = 8 \\ \log_2 x + 2 \log_2 y = 10. \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$, тогда

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ a + 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - 2a \\ 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{4; 16\}$.

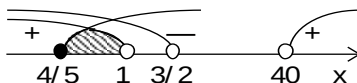
3. ОДЗ: $x \in [\frac{4}{5}; \infty)$.

Возведем в квадрат обе части неравенства

$$5x - 4 + 3x + 1 + 2\sqrt{(5x - 4)(3x + 1)} < 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{(5x - 4)(3x + 1)} < 12 - 8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(5x - 4)(3x + 1)} < 6 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2 - 7x - 4 < 36 - 48x + 16x^2 \\ x < \frac{3}{2} \\ x \in [\frac{4}{5}; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 41x + 40 > 0 \\ x < \frac{3}{2} \\ x \in [\frac{4}{5}; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 40) > 0 \\ x < \frac{3}{2} \\ x \in [\frac{4}{5}; \infty). \end{cases}$$

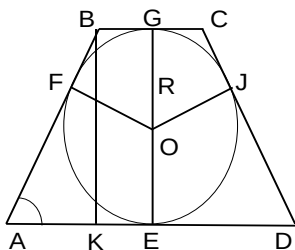


Ответ: $x \in [\frac{4}{5}; 1)$.

4. Для доказательства возрастания функции найдем производную и покажем, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $y'(x) > 0$.

$y' = 2 + \cos x$, действительно, т.к. $|\cos x| \leq 1$, $y' = 2 + \cos x > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

5.



Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция
 $EG = 2R$, $BC = EG/2 = R$,
 $AB = CD$.

Вычислить площадь трапеции S_{ABCD} .
 По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем
 $BF = BG = \frac{1}{2}BC = \frac{R}{2}$, $AF = AE$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot EG.$$

Найдем $AD = 2AE$. Пусть $AE = x$, $AB = x + \frac{R}{2}$.

Из $\triangle ABK$:

$$AB^2 = BK^2 + AK^2 = BK^2 + (AE - KE)^2 = 4R^2 + (x - \frac{R}{2})^2 = (x + \frac{R}{2})^2.$$

$$4R^2 + x^2 - Rx + \frac{R^2}{4} = x^2 + Rx + \frac{R^2}{4}, x = 2R, AD = 2x = 4R.$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot EG = \frac{R + 4R}{2} \cdot 2R = 5R^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 5R^2$.

Вариант № 13.

1. Решить уравнение $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}$.
2. Решить неравенство $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 2) > 2$.
3. Доказать тождество $\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.
4. Известно, что для некоторой функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак a .
5. Найдите конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R .

Решения:

$$1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ 2x + 2/x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x + 1/x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty).$$

Пусть $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = t, t > 0.$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{7}{12} \Rightarrow 12t^2 - 7t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{4}{3} \\ t_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow t = \frac{4}{3} \\ t > 0 \end{cases}$$

Следовательно,

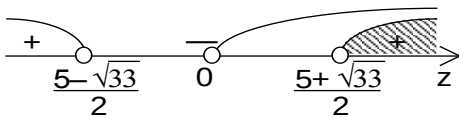
$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2x+2}{x+2} = \frac{16}{9} \Rightarrow 9x + 9 = 8x + 16 \Rightarrow x = 7.$$

Проверка: $\sqrt{\frac{16}{9}} - \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{7}{12}; \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}; \frac{7}{12} = \frac{7}{12}.$

Ответ: {7}.

2. Перейдем к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \\ 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 4 \end{cases} \Rightarrow 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 4 \Rightarrow 4^x - 5 \cdot 2^x - 2 > 0.$$



Пусть $2^x = z, z > 0$

$$z^2 - 5z - 2 > 0, \begin{cases} z > 0 \\ z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \text{ или } 2^x > \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \Rightarrow x \in (\log_2 \frac{5 + \sqrt{33}}{2}; \infty).$$

Ответ: $x \in (\log_2 \frac{5 + \sqrt{33}}{2}; \infty).$

3. ОДЗ: $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z},$

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Преобразуем левую часть выражения

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} &= \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})(1 + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha))}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) \cdot 2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

4. По условию

$$f(-1) = a - b + c < 1,$$

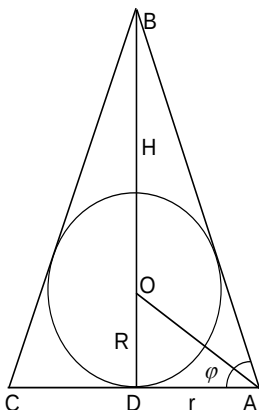
$$f(1) = a + b + c > -1,$$

$$f(3) = 9a + 3b + c < -4.$$

Умножим второе неравенство на -2 и сложим его почленно с первым и третьим: $8a < 0 \Rightarrow a < 0$.

Ответ: $a < 0$.

5.



Пусть r — радиус основания конуса, H — длина его высоты, $\angle DAB = \varphi$. Тогда:

$$\angle DAO = \frac{\varphi}{2}, r = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, H = r \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Поэтому:

$$V_k = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2}, \varphi \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Введем новую переменную $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, тогда

$$V_k = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{(1-t^2)t^2}, t \in (0;1).$$

$$V'(t) = \frac{-2\pi R^3}{3} \cdot \frac{2t(1-t^2) - 2t^3}{(1-t^2)^2 t^4} = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{2(2t^2-1)}{(1-t^2)^2 t^3}.$$

$$V'(t) = 0 \text{ ĩ } \text{дѐ} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0;1).$$

На интервале $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ $V'(t) < 0$, а на интервале $(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$ $V'(t) > 0$, т.е. в точке $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ функция $V(t)$ имеет минимум, который совпадает с наименьшим значением этой функции на интервале $(0;1)$.

Далее находим: $\operatorname{tg} \varphi/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = R\sqrt{2}, H = R\sqrt{2} \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 4R$.

Ответ: $r = R\sqrt{2}, H = 4R$.

Вариант № 14.

1. Решить уравнение $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2-x}{2}}$.

2. Решить неравенство $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

3. Доказать тождество $\cos 4\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$.

4. К графику функции $y = (x+1)\sqrt{x}$ в некоторой точке проведена касательная, имеющая угловой коэффициент, равный 2, и не проходящая через начало координат. Найдите точки пересечения этой касательной с координатными осями.

5. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α . Определить объем этого параллелепипеда.

Решения:

1. ОДЗ:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 2-\sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;2].$$

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} 2 - x = 0 \\ \frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{2(2-x)} = 2 - \sqrt{x} \end{cases}.$$

Найдем решение уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{2(2-x)} = 2 - \sqrt{x} &\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ 2 - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4\sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(3\sqrt{x} - 4) = 0 \\ x \leq 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3\sqrt{x} = 4 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 16/9 \end{cases}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем совокупность решений

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 16/9 \end{cases}.$$

Проверка:

$$x=0: \quad \frac{2}{2} = \sqrt{\frac{2}{2}}, 1 = 1.$$

$$x=2: \quad \frac{0}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{0}{2}}, 0 = 0.$$

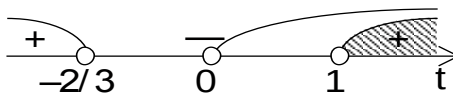
$$x=16/9: \quad \frac{2 - 16/9}{2 - 4/3} = \sqrt{\frac{2 - 16/9}{2}}, \frac{2}{9 \cdot 2/3} = \sqrt{\frac{2}{9 \cdot 2}}, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{0; 16/9; 2\}$.

2. ОДЗ: $x \in (0; \infty)$.

$$3^{\lg x + 2} < 3 \cdot 3^{2(\lg x + 2)} - 2.$$

Пусть $3^{\lg x + 2} = t, t > 0$.



$$3t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow 3(t-1)(t + \frac{2}{3}) > 0 \Rightarrow t > 1 \Rightarrow$$

$$3^{\lg x + 2} > 1 \Rightarrow \lg x + 2 > 0 \Rightarrow \lg x > -2 \Rightarrow x > 0,01.$$

Ответ: $x \in (0,01; \infty)$.

3. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2\alpha \neq \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \mp \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq \pi/4 + \pi/2 n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \mp \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \alpha \neq \pi/4 + \pi/2 n, n \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть выражения

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha &= \frac{\cos 4\alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha = \\ &= -\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}. \end{aligned}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}, \alpha \neq \pi/4 + \pi/2 n, n \in \mathbb{Z}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = 2(x - x_0)$, где x_0, y_0 — координаты точки касания.

$$\text{По условию } 2 = y'(x_0) \text{ и } y' = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}, y'(x_0) = \sqrt{x_0} + \frac{x_0+1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Получаем уравнение $\sqrt{x_0} + \frac{x_0+1}{2\sqrt{x_0}} = 2$, решениями которого являются

$$x_0^{(1)} = 1, x_0^{(2)} = 1/9.$$

Найдем ординаты точек касания

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = (x_0 + 1)\sqrt{x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^{(1)} = 1 \\ y_0^{(1)} = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_0^{(2)} = 1/9 \\ y_0^{(2)} = 10/9 \cdot 1/3 = 10/27. \end{cases}$$

Следовательно, есть две касательные с угловым коэффициентом 2 к графику заданной функции:

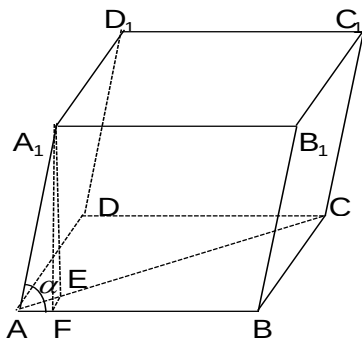
$$\begin{cases} y - 10/27 = 2(x - 1/9) \\ y - 2 = 2(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4/27 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Касательная $y = 2x + 4/27$ не проходит через начало координат. Найдем точки, в которых она пересекает оси координат:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4/27 \end{cases}, \begin{cases} x = -2/27 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 4/27), (-2/27; 0)$.

5.



Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед;
 все грани его — равные ромбы;
 $AB=a$, $\angle A_1AB=\alpha$.

Найти объем параллелепипеда V_{Π}
 $V_{\Pi}=S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H=AE$.

Диагональ AC — биссектриса $\angle DAB$,
 $\angle CAB=\alpha/2$. $S_{\text{осн}} = a^2 \sin \alpha$.

Из $\triangle A_1AF$: $AF = AA_1 \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha$,

$$\text{из } \triangle AFE: AE = \frac{AF}{\cos \alpha/2} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \alpha/2}.$$

Следовательно, из $\triangle AA_1E$: $H = \sqrt{A_1A^2 - AE^2}$,

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha/2}} = \frac{a}{\cos \alpha/2} \sqrt{\cos^2 \alpha/2 - \cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{a}{\cos \alpha/2} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos \alpha/2} \sqrt{\sin^2 3\alpha/2 \sin^2 \alpha/2}.$$

$$V_{\Pi} = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{a^3 \sin \alpha}{\cos \alpha/2} \sqrt{\sin^2 3\alpha/2 \sin^2 \alpha/2} = 2a^3 \sin \alpha/2 \sqrt{\sin^2 3\alpha/2 \sin^2 \alpha/2}$$

Ответ: $V_{\Pi} = 2a^3 \sin \alpha/2 \sqrt{\sin^2 3\alpha/2 \sin^2 \alpha/2}$.

Вариант № 15.

1. Решить уравнение $\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2$.

2. Решить неравенство $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

3. Доказать тождество $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \cos(\pi - \alpha) = 1$.
4. Найти производную функции $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$.
5. Стороны параллелограмма равны 7 и 9 см, а диагонали относятся, как 4:7. Вычислить длины диагоналей параллелограмма.

Решения:

1. ОДЗ: $x^2 + 4x + 12 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

По определению логарифма имеем

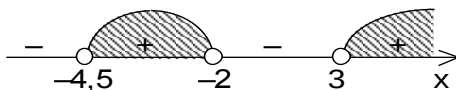
$$x^2 + 4x + 12 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; -3\}$.

2. ОДЗ: $x \neq -2, x \neq 3$.

$$\frac{x - 3 - 3(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} < 0 \Rightarrow \frac{-2x - 9}{(x + 2)(x - 3)} < 0 \Rightarrow \frac{2(x + \frac{9}{2})}{(x + 2)(x - 3)} > 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-4.5; -2) \cup (3; \infty)$.

3. Д: $\begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \neq 0 \\ \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0 \\ \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Преобразуем левую часть равенства

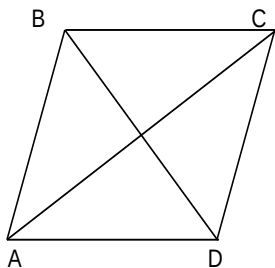
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} - \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} - \cos \alpha =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 1 + \cos \alpha - \cos \alpha = 1.$$

$1 = 1$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

4. $y' = 3(x^4 - x^2 + 1)^2 \cdot (4x^3 - 2x) = 6(x^4 - x^2 + 1)^2 \cdot (2x^3 - x).$

5.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм

$$AB = 7 \text{ см}$$

$$AD = 9 \text{ см}$$

$$BD:AC = 4:7.$$

Найти длины диагоналей AC и BD .

Пусть длины диагоналей AC и BD соответственно равны $7x$ и $4x$ ($x > 0$). Тогда из

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 \text{ получаем}$$

$$49x^2 + 16x^2 = 2(49 + 81) \Rightarrow 65x^2 = 2 \cdot 130 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

$$AC = 14, \quad BD = 8.$$

Ответ: 14 см и 8 см.

Вариант № 16.

1. Решить уравнение $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$.

2. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 5} < 0$.

3. Доказать тождество $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

4. Найти производную функции $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$.

5. Основания трапеции равны 28 и 11 см, а боковые стороны равны 25 и 26 см. Вычислить площадь трапеции.

Решения:

1. ОДЗ: $\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1.$

Преобразуем уравнение, используя свойства и определение логарифма,

$$\log_2(3-x)(1-x) = 3 \Rightarrow (3-x)(1-x) = 8 \Rightarrow 3 - 4x + x^2 = 8 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

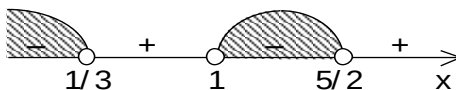
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \Rightarrow x = -1 \\ x < 1. \end{cases}$

Ответ: $\{-1\}$.

$$2. \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 5} < 0 \Rightarrow \frac{3(x-1)(x-\frac{1}{3})}{2(x-\frac{5}{2})} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{5}{2}) < 0 \\ x \neq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Методом интервалов находим:



Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; \frac{5}{2})$.

$$3. \quad D: 1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \neq 0 \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha + \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть равенства

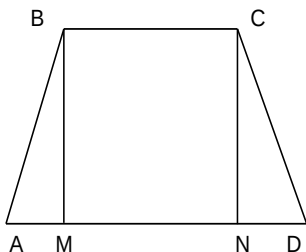
$$\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

$$4. \quad y' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - (x^3 - 3x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 6x - x^3 + 3x^2 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2}.$$

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция
 $AD=28$ см, $BC=11$ см
 $AB=25$ см, $CD=26$ см.

Вычислить площадь трапеции S_{ABCD} .

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BM.$$

Пусть $BM = CN = h$, $AM = x$, $ND = AD - AM - MN = 17 - x$.

Из $\triangle AMB$: $BM^2 = AB^2 - AM^2 \Rightarrow h^2 = 25^2 - x^2$.

Из $\triangle CND$: $CN^2 = CD^2 - DN^2 \Rightarrow h^2 = 26^2 - (17 - x)^2$.

Далее

$$25^2 - x^2 = 26^2 - (17 - x)^2 \Rightarrow 625 - x^2 = 676 - 289 + 34x - x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 238 = 34x \Rightarrow x = 7.$$

Из соотношения $h^2 = 25^2 - x^2$ получаем $h=24$, тогда

$$S_{ABCD} = \frac{28 + 11}{2} \cdot 24 = 468.$$

Ответ: 468 см^2 .

Вариант № 17.

1. Решить уравнение $\lg(x - 3) + \lg(x + 6) = \lg 2 + \lg 5$.
2. Решить неравенство $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x} \geq 0$.
3. Доказать тождество $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$.
4. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$.
5. Диагонали параллелограмма равны 20 и 30 см, а разность сторон равна 12 см. Вычислить стороны параллелограмма.

Решения:

$$1. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > 3, x \in (3; \infty).$$

Преобразуем уравнения, используя свойства и определение логарифма,

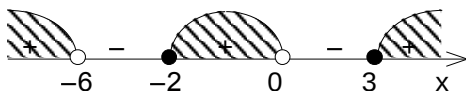
$$\lg(x-3)(x+6) = \lg 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+7)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \notin \text{O\AA C} \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: {4}.

$$2. \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x(x+6)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x+2)(x-3)(x+6) \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x+6 \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов



Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup [2; 0) \cup [3; \infty)$.

3. D:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha \neq 0 \\ \cos 2\alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \sin 2\alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} \neq 0 \\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть неравенства

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha (\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

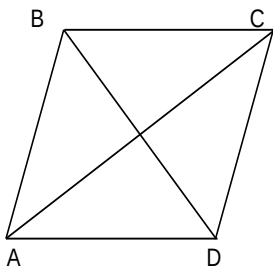
$$= \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha, 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

$$4. \quad y' = \frac{1}{3} (x^2 - 4x)^{-2/3} \cdot (2x - 4) = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}}.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}}.$

5.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $AB=CD$, $AD=BC$,
 $AC=30$ см, $BD=20$ см,
 $AD-AB=12$ см

Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$.

Пусть $AB=x$, $AD=12+x$ ($x>0$).

Из соотношения $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$

имеем

$$2(x^2 + (12+x)^2) = 30^2 + 20^2 \Rightarrow x^2 + 144 + 24x + x^2 = 650 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 + 24x - 506 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 253 = 0 \Rightarrow (x+23)(x-11) = 0 \Rightarrow$$

$x_1=-23$ — посторонний корень, $x_2=11$.

$AB=11$, $AD=23$.

Ответ: 11 и 23 см.

Вариант № 18.

1. Решить уравнение $\lg(x-4) + \lg(x+3) = \lg(5x+4)$.
2. Решить неравенство $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0$.
3. Доказать тождество $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
4. Найти производную функции $y = \sqrt[5]{x^2 + 6x}$.
5. Основания равнобокой трапеции равны 36 и 100 см. Вычислить длину окружности, вписанной в эту трапецию.

Решения:

$$1. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x-4 > 0 \\ x+3 > 0 \\ 5x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > -3 \\ x > -4/5 \end{cases} \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4; \infty).$$

Преобразуем уравнение, используя свойства и определение логарифма:

$$\lg(x-4)(x+3) = \lg(5x+4) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 5x + 4 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow$$

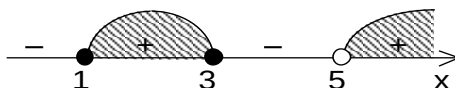
$$\Rightarrow (x+2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \notin \hat{A}\hat{C} \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 8.$$

Ответ: {8}.

$$2. \quad \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+14+3x^2-14x-5}{2(x-5)} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x^2-12x+9}{2(x-5)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3(x^2-4x+3)}{2(x-5)} \geq 0 \Rightarrow \frac{3(x-1)(x-3)}{2(x-5)} \geq 0.$$

Методом интервалов находим



Ответ: $x \in [1; 3] \cup (5; \infty)$.

$$3. \quad D: 1 - \cos \alpha \neq 0 \Rightarrow \cos \alpha \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем левую часть равенства

$$\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} =$$

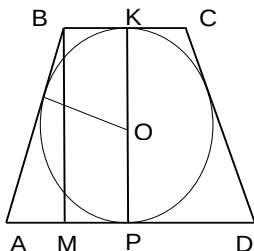
$$= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

$$4. \quad y' = \frac{1}{5}(x^2 + 6x)^{-4/5} \cdot (2x + 6) = \frac{2(x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 6x)^4}}.$$

Ответ: $\frac{2(x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 6x)^4}}.$

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция
 $AB=CD$
 $AD=100$ см, $BC=36$ см.

Вычислить длину окружности C .

$C = 2\pi R$ — длина окружности радиуса R .

Пусть $OK = OP = R$, тогда $KP = BM = 2R$.

Найдем радиус окружности. Из $\triangle ABM$: $BM^2 = AB^2 - AM^2$.

Из соотношения $AD + BC = AB + CD$ для сторон описанной трапеции

определим $AB = \frac{AD + BC}{2} = \frac{100 + 36}{2} = 68$,

$$AM = \frac{AD - BC}{2} = \frac{100 - 36}{2} = \frac{64}{2} = 32.$$

Далее $BM^2 = 4R^2 = 68^2 - 32^2 = (68 - 32)(68 + 32) = 36 \cdot 100$.

$$R^2 = 36 \cdot 25 \Rightarrow R = 30.$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 30 = 60\pi.$$

Ответ: 60π см.

Вариант № 19.

1. Решить неравенство $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81 \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

4. Хорда параболы $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ касается кривой $y = \frac{-1}{x-1}$

в точке с абсциссой $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найдите a .

5. В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α . Определить объем пирамиды.

Решения:

1. ОДЗ: $2 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2)$.

Пусть $t = \sqrt{2-x}, t > 0$.

$$\frac{4}{t} - t < 2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 4 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < -1 - \sqrt{5} \Rightarrow t > -1 + \sqrt{5} \\ t > -1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{5} - 1 \Rightarrow 2-x > 6 - 2\sqrt{5} \Rightarrow x < 2\sqrt{5} - 4.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2\sqrt{5} - 4)$.

2. ОДЗ: $x > 0, y > 0$.

Запишем равносильную систему уравнений:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x} = a, a > 0 \\ \sqrt{y} = b, b > 0 \end{cases}$ тогда, $\begin{cases} 2a - b = 4 \\ a \cdot b = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 + 2a \\ (-4 + 2a)a = 30 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = -3 < 0 \text{ — посторонний корень.}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 36. \end{cases}$$

Ответ: $\{25; 36\}$.

3. На основании формул $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$ и $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$ получаем

$$\frac{1 + \cos x}{2} + \frac{1 + \cos 3x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 8x}{2} = 0,$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 8x = 0,$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 6x \cdot \cos 2x = 0,$$

$$2 \cos 2x (\cos x + \cos 6x) = 0,$$

$$4 \cos 2x \cdot \cos \frac{7}{2}x \cdot \cos \frac{5}{2}x = 0,$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos \frac{7}{2}x = 0 \\ \cos \frac{5}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\{\frac{\pi}{4}(2n+1); \frac{\pi}{7}(2k+1); \frac{\pi}{5}(2m+1)\}$
 $n, k, m \in \mathbb{Z}$.

4. Найдем уравнение касательной к кривой $y = -1/(x-1)$ в точке $x_0=2$:

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, которая является хордой параболы.

$$y_0 = y(2) = -1, y'(x) = 1/(x-1)^2, y'(2) = 1, y = -1 + x - 2 = x - 3.$$

Абсциссы x_1 и x_2 концов хорды являются корнями уравнения

$$x - 3 = -a^2x^2 + 5ax - 4 \text{ или корнями уравнения}$$

$$a^2x^2 + (1 - 5a)x + 1 = 0, \text{ причем } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ или } \frac{-(1 - 5a)}{2a^2} = 2.$$

Таким образом, для нахождения a получаем систему:

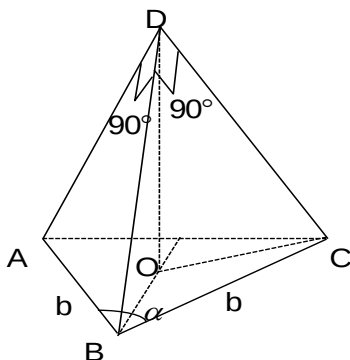
$$\begin{cases} (1 - 5a)^2 - 4a^2 > 0 \\ 5a - 1 = 4a^2. \end{cases}$$

Из уравнения $4a^2 - 5a + 1 = 0$ найдем $a_1=1, a_2=1/4$.

Проверкой устанавливаем, что решением системы является $a=1$.

Ответ: $\{1\}$.

5.



Дано: $DABC$ — пирамида;
 $AB=BC=b$;
 $\angle ABC=\alpha$,
 $\angle ADB=\angle CDB=90^\circ$.

Найти объем пирамиды V_{DABC} .

Все боковые ребра пирамиды равны как стороны равнобедренных прямоугольных треугольников, поэтому высота DO пирамиды проходит через точку O — центр окружности, описанной около основания.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha .$$

Из $\triangle BDC$: $DC = BC / \sqrt{2} = b\sqrt{2}/2$.

Из $\triangle DOC$: $H = DO = \sqrt{DC^2 - OC^2}$, где $OC=R$ — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то $\angle BAC=90^\circ-\alpha/2$. По теореме синусов

$$BC = 2R \sin(90^\circ - \alpha/2), R = \frac{b}{2 \cos \alpha/2}.$$

$$\text{Тогда } H = \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4 \cos^2 \alpha/2}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2 \cos^2 \alpha/2 - 1}{\cos^2 \alpha/2}} = \frac{b}{2 \cos \alpha/2} \sqrt{\cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot b^2 \sin \alpha \frac{b}{2 \cos \alpha/2} \sqrt{\cos \alpha} = \frac{b^3}{6} \sin \alpha/2 \sqrt{\cos \alpha}.$$

Ответ: $V_{DABC} = \frac{b^3}{6} \sin \alpha/2 \sqrt{\cos \alpha}.$

Вариант № 20.

1. Решить неравенство $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.
2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{x-y}{2^2} + 2 \frac{y-x}{2^2} = 2,5 \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6. \end{cases}$$
3. Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0$.
4. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \log_{4x} 32x^3$ на отрезке $[2;8]$.
5. Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в m раз больше объема вписанного шара.

Решения:

1. ОДЗ: $x \in [2; \infty)$.

Возведем обе части неравенства в квадрат:

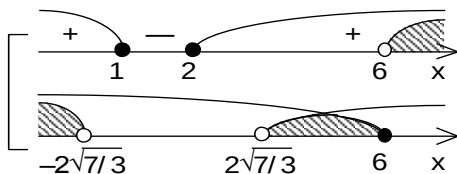
$$x+3 < x-1 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + x-2 \Rightarrow 6-x < 2\sqrt{(x-1)(x-2)}.$$

Перейдем к равносильной совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ 6-x < 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 36-12x+x^2 < 4(x^2-3x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x > 6 \\ x \leq 6 \\ 3x^2-28 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

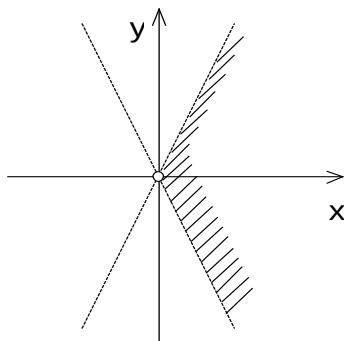
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x > 6 \\ x \leq 6 \\ (\sqrt{3}x-2\sqrt{7})(\sqrt{3}x+2\sqrt{7}) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2\sqrt{7/3}) \cup (2\sqrt{7/3}; \infty) \\ x \in [2; \infty). \end{cases}$$



Ответ: $x \in (2\sqrt{7/3}; \infty)$.

2.



$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - y > 0 \\ y + 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 2x \ (x > 0) \\ y > -2x. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение :

$$\text{пусть } 2 \frac{x-y}{2} = t, \ t > 0, \text{ тогда}$$

$$t + 1/t = 5/2 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \frac{x-y}{2} = 2 \\ 2 \frac{x-y}{2} = 1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 1 \\ \frac{x-y}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 2 \\ x-y = -2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение :

$$\lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(6(y + 2x)) \Rightarrow \lg(10(2x - y)) = \lg(6(y + 2x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x - 5y = 3y + 6x \Rightarrow x = 2y.$$

Запишем совокупность систем :

$$\begin{cases} \begin{cases} x - y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1 \\ x = 2y \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \notin \hat{A}\hat{C}.$$

Ответ: (4;2).

3. Воспользуемся формулой $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$:

$$0,5(\cos 2x - \cos 4x) + 0,5(\cos 4x - \cos 12x) = 0 \Rightarrow \cos 2x - \cos 12x = 0 \Rightarrow \\ -2 \sin 5x \sin 7x = 0$$

$$\begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \sin 7x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n / 5, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k / 7, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{\pi n / 5, \pi k / 7, n, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Преобразуем $f(x)$ к виду $f(x) = \frac{3 \log_2 x + 5}{\log_2 x + 2}$.

Сделаем замену $\log_2 x = t$, учтем, что t возрастает на отрезке $[1;3]$. Найдем

на $[1;3]$ наибольшее значение функции $f(t) = \frac{3t + 5}{t + 2}$:

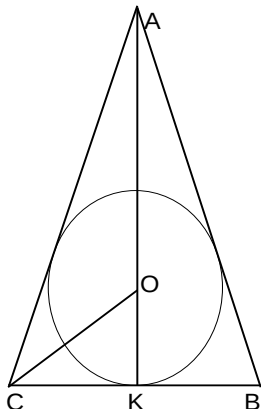
$$f'(t) = \frac{3(t+2) - (3t+5)}{(t+2)^2} = \frac{1}{(t+2)^2} > 0 \text{ на } [1;3], \text{ следовательно,}$$

наибольшее значение $f(t)$ принимает на $[1;3]$ при $t=3$. Учитывая, что

функция $t = \log_2 x$ возрастающая, приходим к выводу, что $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x=8$, $f(8) = \frac{3 \log_2 8 + 5}{\log_2 8 + 2} = \frac{14}{5}$.

Ответ: $\max_{[2;8]} f(x) = 14/5$.

5.



Дано: $V_k = m \cdot V_{ш}$.

Вычислить $\angle ACB$.

Обозначим радиус шара $OK=R$, $\angle ACB=x$.

ОС — биссектриса $\angle ACB$, $\angle OCK=x/2$.

Пусть $AK=H$, $CK=r$, тогда $CK=OK \cdot \operatorname{ctg} \angle OCK$,

$AK=CK \cdot \operatorname{tg} \angle ACB$,

$r = R \operatorname{ctg} x/2$, $H = R \operatorname{ctg} x/2 \cdot \operatorname{tg} x$,

$V_k = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi (R \operatorname{ctg} x/2)^2 \cdot R \operatorname{ctg} x/2 \operatorname{tg} x =$

$= \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg}^3 x/2 \operatorname{tg} x$, $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

По условию

$$\begin{aligned} \frac{\pi R^3}{3} \operatorname{ctg}^3 x/2 \operatorname{tg} x &= \frac{4}{3} m \pi R^3 \Rightarrow \operatorname{ctg}^3 x/2 \operatorname{tg} x = 4m \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x/2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 - \operatorname{tg}^2 x/2} = \\ &= 4m \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x/2 (1 - \operatorname{tg}^2 x/2)} = 2m. \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 x/2 = t$, $t > 0$.

$$t(1-t) = \frac{1}{2m} \Rightarrow t^2 - t + \frac{1}{2m} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}.$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2m} \geq 0 \Rightarrow m \geq 2, (m > 0).$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}, (x \in (0; \frac{\pi}{2})).$$

Ответ: $2 \arctg \sqrt{\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}$, $m \geq 2$.

Вариант № 21.

1. Решить уравнение $\sin^2(\pi/8 + x) = \sin x + \sin^2(\pi/8 - x)$.
2. Решить неравенство $\sqrt{3-x} > x - 2$.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ \lg(x-y)^2 = 2 \lg 2. \end{cases}$$
4. В шар радиуса R вписан цилиндр. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?
5. Даны вершины треугольника OAB : $O(0;0)$, $A(2a;0)$, $B(a;-a)$. Найти угол между стороной OB и медианой OM треугольника.

Решения:

1. Преобразуем уравнение, проводя понижение степеней по формуле $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$:

$$\frac{1 - \cos(\pi/4 + 2x)}{2} - \frac{1 - \cos(\pi/4 - 2x)}{2} = \sin x;$$
$$\cos(\pi/4 - 2x) - \cos(\pi/4 + 2x) = 2 \sin x.$$

Преобразуем левую часть в произведение:

$$2 \sin \frac{\pi/4 - 2x + \pi/4 + 2x}{2} \sin \frac{\pi/4 + 2x - \pi/4 + 2x}{2} = 2 \sin x;$$
$$\sin 2x \sin \pi/4 - \sin x = 0; 2 \cdot \sqrt{2}/2 \sin x \cos x - \sin x = 0;$$

$$\sin x(\sqrt{2} \cos x - 1) = 0.$$

Решаем далее совокупность двух уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \mp \pi/4 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\{\pi n; \mp \pi/4 + 2\pi k | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sqrt{3-x} > x-2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 3-x > (x-2)^2; \\ x-2 < 0 \\ 3-x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 3-x > x^2-4x+4; \\ x < 2, \\ x \leq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-3x+1 < 0, \\ x < 2, \\ x \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; (3+\sqrt{5})/2)$.

3. Преобразуем оба уравнения, используя свойства степеней и логарифмов:

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^5 \\ 2 \lg|x-y| = 2 \lg 2 \\ x \neq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 5 \\ |x-y| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 5 \\ x-y = 2 \\ x+2y = 5 \\ x-y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ x = 1/3 \\ y = 7/3 \end{cases}.$$

В силу тождественности проводимых при решении преобразований оба решения являются истинными.

Ответ: $\{(3;1), (1/3; 7/3)\}$.

4. Обозначим высоту, радиус основания и объем цилиндра соответственно через h , r и V . Тогда $V = \pi r^2 h$. Учитывая, что $r^2 = R^2 - h^2/4$, получим

$$V = \pi(R^2 - h^2/4)h = \pi(R^2 h - h^3/4).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V(h) = \pi(R^2h - h^3/4)$ в промежутке $(0; 2R)$.

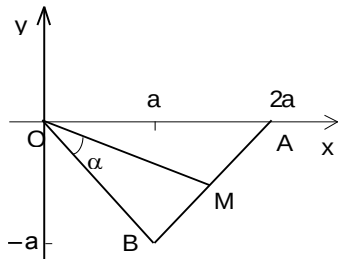
Производная этой функции $V'(h) = \pi(R^2 - 3/4h^2)$.

Приравнявая $V'(h)$ к нулю, получим единственную критическую точку $h_0 = 2R/\sqrt{3}$, принадлежащую промежутку $(0; 2R)$. Так как при переходе через эту точку $V(h)$ меняет знак с плюса на минус, то в ней функция $V(h)$ принимает максимальное значение.

А так как этот максимум единственный, то это максимальное значение и будет наибольшим значением функции $V(h)$.

Ответ: $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

5.



Найдем координаты точки M:

$$M((2a + a)/2; -a/2), M(3a/2; -a/2).$$

Тогда $\overline{OB}(a; -a), \overline{OM}(3a/2; -a/2)$.

Определим $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OM}}{|\overline{OB}| \cdot |\overline{OM}|} = \frac{a \cdot \frac{3}{2}a + (-a)(-a/2)}{\sqrt{a^2 + a^2} \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}/\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Итак $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Вариант № 22.

1. Решить неравенство $(x-3)\sqrt{x^2+4} \geq x^2-9$.
2. Решить уравнение

$$\sin(\pi/2 - 3x) - \sin(\pi - 5x) = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x).$$

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = (1/2)^{x^2 - 5x + 4}$ на отрезке $[0; 3]$.
5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60° , вектор $\vec{c}$ им перпендикулярен. Найти $|2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Решения:

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Проведем решение неравенства методом интервалов:

$$\begin{aligned} (x-3)\sqrt{x^2+4} - (x^2-9) \geq 0 &\Rightarrow (x-3)(\sqrt{x^2+4}) - (x-3)(x+3) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-3)(\sqrt{x^2+4} - x - 3) \geq 0. \end{aligned}$$

Первый корень уравнения $x=3$. Далее решаем уравнение

$$\sqrt{x^2+4} = x+3 \Rightarrow \begin{cases} x^2+4 = x^2+6x+9 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5/6 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x = -5/6.$$

Методом интервалов находим :



Ответ: $x \in [-5/6; 3]$.

2. Преобразуем уравнение, используя формулы приведения:

$$\cos 3x - \sin 5x - \sqrt{3} \cos 5x + \sqrt{3} \sin 3x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 2, и перегруппируем слагаемые:

$$(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x) - (\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\sin \frac{\pi}{6} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{6} \sin 3x) - (\sin 5x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 5x \sin \frac{\pi}{3}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{6} + 3x) - \sin(\frac{\pi}{3} + 5x) &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть в произведение:

$$-2 \cos(\frac{\pi}{4} + 4x) \sin(\frac{\pi}{12} + x) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений :

$$\begin{cases} \cos(\pi/4 + 4x) = 0 \\ \sin(\pi/12 + x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi/4 + 4x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi/12 + x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\pi/16 + \pi n/4, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/12 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}; -\frac{\pi}{12} + \pi k \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

3. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1. \end{cases}$

Так как $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$, то, обозначив $\log_y x = t$ в первом уравнении

системы, получаем $t + 1/t = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Значит, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \log_y x = 1 \\ y = x^2 - 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x^2 - 20 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 - 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

$x_1 = -4 \notin \text{ОДЗ}$. Следовательно, $x = 5$ и $y = 5$.

Ответ: (5;5).

4. Находим производную функции

$$f'(x) = (1/2)^{x^2 - 5x + 4} \ln 1/2 \cdot (2x - 5).$$

Определяем критические точки, решая уравнение $f'(x) = 0$.

Но $(1/2)^{x^2 - 5x + 4} \ln 1/2 \neq 0$, поэтому $2x - 5 = 0$, $x = 5/2$ — одна критическая точка, которая принадлежит промежутку (0;3).

Далее вычисляем :

$$f(0) = (1/2)^4 = 1/16, f(5/2) = (1/2)^{25/4 - 25/2 + 4} = (1/2)^{-9/4} = 2^{9/4},$$

$$f(3) = (1/2)^{9 - 15 + 4} = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4.$$

Наибольшее из этих чисел $2^{9/4}$, наименьшее $1/16$.

Ответ: $2^{2,25}; 1/16$.

5. Пусть $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Известно, что $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}^2} = \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m}}$, поэтому

$$|\vec{m}| = |2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})}.$$

Перемножим векторные многочлены

$$|\vec{m}| = \sqrt{4\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 - \vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2}.$$

Вычисляем скалярные произведения, помня, что

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \cos 90^\circ = 0, \cos 60^\circ = 1/2.$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{4 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1} = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: 2.

Вариант № 23.

1. Решить неравенство $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.
2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5 \\ \lg(x + y) + \lg(x - y) = \lg 1,2 + 1. \end{cases}$$
3. Решить уравнение
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \sin^{-2} x \cdot (1 + \cos 2x) = 0.$$
4. Функцию $y = 3^x$ представьте в виде суммы четной и нечетной функции.
5. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны a , а острые углы равны φ ; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания одинаковые углы β . Найти объем пирамиды.

Решения:

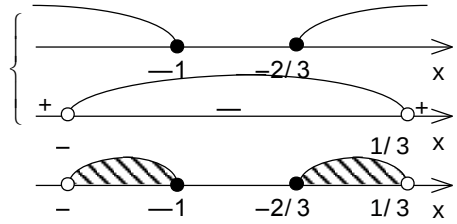
1. ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x + 7 \geq 0 \\ 3x^2 + 5x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ 3(x+1)(x+\frac{2}{3}) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{2}{3}; \infty).$$

Пусть $3x^2 + 5x + 2 = t, t \geq 0$, тогда

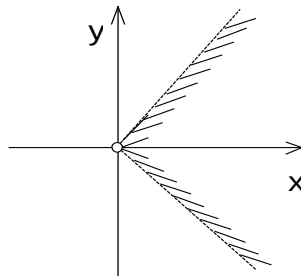
$$\sqrt{t+5} - \sqrt{t} > 1 \Rightarrow \sqrt{t+5} > 1 + \sqrt{t} \Rightarrow t+5 > 1 + 2\sqrt{t} + t \Rightarrow \sqrt{t} < 2 \Rightarrow 0 \leq t < 4.$$

$$\begin{aligned}
 &0 \leq 3x^2 + 5x + 2 < 4 \\
 &\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{2}{3}; \infty) \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{2}{3}; \infty) \\ 3(x+2)(x-\frac{1}{3}) < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



Ответ: $x \in (-2; -1] \cup [-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

2. ОДЗ: $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -x \\ y < x \end{cases}$



$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 20 \\ \lg(x^2 - y^2) = \lg 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ x = 4 \\ y = -2 \\ x = -4 \\ y = 2 \\ x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ x = 4 \\ y = -2 \\ x = -4 \\ y = 2 \\ x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\{(4; 2), (4; -2)\}$.

3. ОДЗ: $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x} &= 0 \Rightarrow -\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{ctg}^2 x = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0 \\
 \begin{cases} \operatorname{ctg} x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi m \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Пусть $f_1(x)$ — четная функция, $f_2(x)$ — нечетная функция:
 $f_1(-x) = f_1(x)$, $f_2(-x) = -f_2(x)$.

Тогда $3^x = f_1(x) + f_2(x)$, следовательно,

$$3^{-x} = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Получаем систему :

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = 3^x \\ f_1(x) - f_2(x) = 3^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} \\ f_2(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \end{cases}.$$

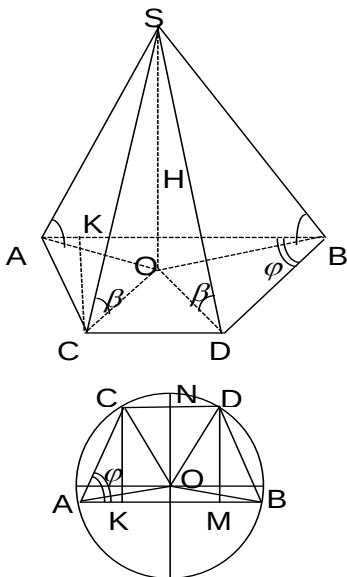
Ответ: $3^x = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$.

5. Дано: $SDABC$ — пирамида;
 $AC=CD=DB=a$;
 $\angle SDO=\angle SCO=\angle SAO=\angle SBO=\beta$
 $\angle CAB=\angle ABD=\varphi$

Найти объем пирамиды V_{SABDC} .

$$V_{SABDC} = \frac{1}{3} S_{ABDC} \cdot H, \quad S_{ABDC} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot CK.$$

Из $\triangle ACK$: $CK = a \cdot \sin \varphi$, $AK = a \cdot \cos \varphi$.



$$AB = KM + 2AK = a(1 + 2 \cos \varphi),$$

$$S_{ABCD} = 2a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi.$$

Так как все ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β , то вершина пирамиды проецируется в т. O — центр описанной окружности. Пусть $OC = OA = R$ — радиус окружности, описанной около трапеции.

Рассмотрим: $\triangle AOC = \triangle COD$, т.к.

$AC = CD$ по условию и

$OC = OA = OD = R$.

$$\angle ACO = \angle OCD = \frac{1}{2} \angle ACD =$$

$$\frac{1}{2} (180^\circ - \angle CAB) = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Из $\triangle CON$:

$$CO = \frac{CN}{\cos(90^\circ - \frac{\varphi}{2})} = \frac{CD}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\text{Из } \triangle CSO: H = SO = CO \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Окончательно имеем

$$V_{SABDC} = \frac{1}{3} 2a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Ответ: $V_{SABDC} = \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta.$

Вариант № 24.

1. Решить неравенство $\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}.$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$

4. Найдите значение $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a , и углом α между ними. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом β . Определить объем пирамиды.

Решения:

1. ОДЗ:
$$\begin{cases} 4x^2 + 12x + 11 \geq 0 \\ (x - 3)(2 - x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 3].$$

$$(x - 3)(2 - x) < 4x^2 + 12x + 11 \Rightarrow 5x^2 + 7x + 17 > 0 \text{ всегда, т.к.}$$

$$D = 49 - 340 = -291 < 0.$$

Ответ: $x \in [2; 3]$.

2. Пусть
$$\begin{cases} 3^x = a, a > 0 \\ 2^{y/2} = b, b > 0 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 725 \\ a - b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)(a + b) = 725 \\ a - b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 29 \\ a - b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x = 27 \\ 2^{y/2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2).

3.

$$\frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 8x = 0 \\ \cos 2x = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \mp 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pi/16 + \pi n/8, n \in \mathbb{Z} \\ x = \mp \pi/3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{16} (2n + 1); \frac{\pi}{3} (3k \mp 1) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

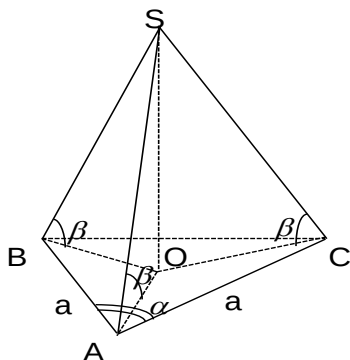
4. Подставим в данное равенство $x=2$, а затем $x=1/2$ и исключим из полученных числовых равенств $f(1/2)$:

$$\begin{cases} 2f(2) - 3f(1/2) = 4 \\ 2f(1/2) - 3f(2) = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(2) - 6f(1/2) = 8 \\ 6f(1/2) - 9f(2) = 3/4 \end{cases}$$

$$-5f(2) = 35/4, f(2) = -7/4.$$

Ответ: $f(2) = -7/4$.

5.



Дано: $SABC$ — пирамида;
 $AB=AC=a$;
 $\angle BAC=\alpha, \angle SBO=\angle SCO=\angle SAO=\beta$

Найти объем пирамиды V_{SABC} .

Точка O — центр окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, $OC = OB = OA = R$ — радиус окружности.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha.$$

Из $\triangle ABC$: $BC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$. По теореме

синусов

$$AO = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Из $\triangle SAO$: $OS = AO \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OS = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Ответ: $V_{SABC} = \frac{a^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$

Вариант № 25.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

2. Решить неравенство $\log_{0,5} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \leq 0$.

3. Преобразовать в произведение:

$$A = \sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha .$$

4. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$.

5. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

Решения:

1. Из условия неотрицательности подкоренных выражений находим область допустимых значений (ОДЗ) уравнения

$$\begin{cases} 3x + 7 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty).$$

Преобразуем уравнение, перенеся радикал из левой части уравнения в правую:

$$\sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1}.$$

В области допустимых значений обе части уравнения положительны, поэтому при возведении в квадрат получим равносильное в ОДЗ исходному уравнение

$$\begin{cases} 3x + 7 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 \\ x \in [-1; +\infty). \end{cases}$$

После преобразований

$$\begin{cases} x + 1 = 2\sqrt{x+1} \\ x \in [-1; +\infty). \end{cases}$$

Так как $x \geq -1$, то в первом уравнении, по-прежнему, обе части неотрицательны, поэтому еще раз можно возвести в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 4 = 4x + 1 \\ x \in [-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x \in [-1; +\infty). \end{cases}$$

Получаем $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; оба полученных значения входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

2. При решении этого неравенства ОДЗ будем учитывать, непосредственно проводя решение. После потенцирования, учитывая свойства логарифмов с основанием меньшим единицы, имеем

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ x \neq -4 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ x \neq -4 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} \geq 6. \end{cases}$$

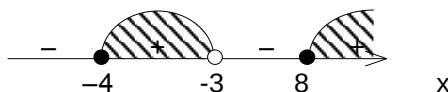
Таким образом, решениями исходного неравенства являются значения неизвестного, удовлетворяющие неравенству

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} \geq 6 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} \geq 0 \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Разложив числитель на множители, имеем

$$\begin{cases} \frac{(x + 3)(x - 8)}{x + 4} \geq 0 \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Решив это неравенство графически, получим



Ответ: $x \in (-4; -3] \cup [8; +\infty)$.

3. Перегруппировав слагаемые, получим

$$\begin{aligned} A &= (\sin 5\alpha + \sin 7\alpha) + (\sin 6\alpha + \sin 8\alpha) = 2 \sin 6\alpha \cos \alpha + 2 \sin 7\alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \cos \alpha (\sin 6\alpha + \sin 7\alpha) = 4 \cos \alpha \sin \frac{13}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 4 \cos \alpha \sin \frac{13}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

4. $D(f) = \{x \geq -1\}$. Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 1 - 1}{\sqrt{x+1} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \Rightarrow f(x) = 1 - (\sqrt{x+1} + 1)^{-1}.$$

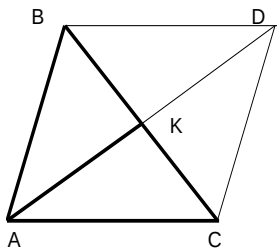
Используя правила отыскания производной, имеем

$$f'(x) = -(-1)(\sqrt{x+1} + 1)^{-2}(\sqrt{x+1} + 1)' = \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

При $x = 0$, получим $f'(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $f'(0) = \frac{1}{8}$.

5.



Дано: $\triangle ABC$; $AB=BC$; $AC = 4\sqrt{2}$ см; $BK=KC$;
 $AK=5$ см.

Найти: AB .

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$; $AB = DC$; $AC = BD$. Пусть $AB = x$;
 $AD = 2AK = 10$ см; $BC = x$. Тогда по свойству параллелограмма: $AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$,
 т.е.

$$100 + x^2 = 2x^2 + 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ см.}$$

Ответ: $AB = BC = 6$ см.

Вариант № 26.

1. Решить уравнение $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{\log_{x^2-x} 8}$.

3. Преобразовать в произведение

$$A = \cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha.$$

4. Найти $f'(2)$, если $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

5. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.

Решения:

1. Находим область допустимых значений уравнения, исходя из условий неотрицательности подкоренных выражений:

$$\begin{cases} 4x + 8 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty \right).$$

Преобразуем уравнение, перенося второй радикал из левой части в правую

$$\sqrt{4x+8} = 2 + \sqrt{3x-2}.$$

В области допустимых значений обе части уравнения положительны, значит при возведении в квадрат обеих частей уравнения получим равносильное исходному уравнение:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty \right) \\ 4x + 8 = 4 + 4\sqrt{3x-2} + 3x - 2. \end{cases}$$

После приведения подобных имеем

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty \right) \\ x + 6 = 4\sqrt{3x-2}. \end{cases}$$

Левая часть уравнения при $x \geq \frac{2}{3}$ положительна, значит после повторного возведения в квадрат снова получим равносильное уравнение

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \\ x^2 + 12x + 36 = 48x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \\ x^2 - 36x + 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \\ x_1 = 2; x_2 = 34. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 34$.

2. Учитывая свойства логарифмов, проводя преобразования, находим, что исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x > 0 \\ x^2 - x \neq 1 \\ -\log_2(x - 1) \leq \frac{1}{3} - \log_8(x^2 - x). \end{cases}$$

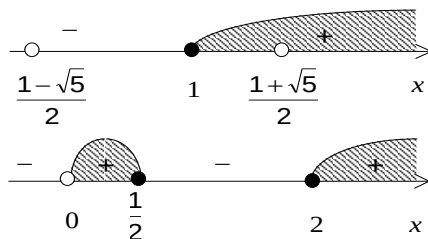
Так как при $x > 1$ выполняется неравенство $x^2 - x > 0$, то продолжая преобразования, получим

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x \neq 1 \\ -\log_2(x - 1) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_2 x - \frac{1}{3}\log_2(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x \neq 1 \\ 2\log_2(x - 1) - \log_2 x \geq -1. \end{cases}$$

После потенцирования получим:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x \neq 1 \\ \frac{(x - 1)^2}{x} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x \neq 1 \\ \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x} \geq 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств графически:



Следовательно, получим ответ: $x \in [2; +\infty)$.

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.

3. Последовательно группируя и преобразовывая сумму косинусов в произведение, получим:

$$\begin{aligned} A &= (\cos 5\alpha + \cos 9\alpha) + (\cos 8\alpha + \cos 12\alpha) = \\ &= 2 \cos 7\alpha \cos 2\alpha + 2 \cos 10\alpha \cos 2\alpha = \\ &= 2 \cos 2\alpha (\cos 7\alpha + \cos 10\alpha) = 4 \cos 2\alpha \cos \frac{17}{2} \alpha \cos \frac{3}{2} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 4 \cos 2\alpha \cos \frac{17}{2} \alpha \cos \frac{3}{2} \alpha$.

4. $D(f) = \{x > 1\}$. Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования:

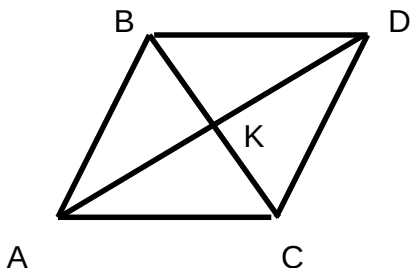
$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = (x-1)^{\frac{1}{6}} + (x-1)^{-\frac{2}{15}}.$$

Тогда $f'(x) = \frac{1}{6}(x-1)^{-\frac{7}{6}} - \frac{2}{15}(x-1)^{-\frac{17}{15}}.$

Найдем $f'(2)$: $f'(2) = \frac{1}{6} - \frac{2}{15} = \frac{1}{30}.$

Ответ: $f'(2) = \frac{1}{30}.$

5.



Дано: $\triangle ABC$; $AB=BC=4$ см; $BK=KC$;
 $AK=3$ см.

Найти: AC .

Достроим треугольник ABC до
 параллелограмма $ABDC$; $AC=BD=x$;
 $AB=DC=4$ см. $AK = KD = 3$ см.

Следовательно, $AD = 6$ см;
 $BC = 4$ см. Но по свойству
 параллелограмма $ABCD$:

$$AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 32 = 16 + 36 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10} \text{ см.}$$

Ответ: $AC = \sqrt{10}$ см.

Вариант № 27.

1. Решить уравнение $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}} x^2 + \frac{1}{\log_{x-1} \frac{1}{2}} \geq \log_{\frac{1}{2}} 2$.

3. Преобразовать в произведение

$$A = \cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha.$$

4. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1}$.

5. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна m .

Найти сторону треугольника.

Решения:

1. Находим область допустимых значений уравнения, исходя из условий неотрицательности подкоренных выражений:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 4x-7 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{4}; +\infty \right).$$

Перенесем второй радикал из левой части в правую:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-7} \\ x \in \left[\frac{7}{4}; +\infty \right). \end{cases}$$

Обе части уравнения положительны, значит, после возведения в квадрат обеих частей уравнения получим равносильное уравнение исходному в ОДЗ:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; +\infty \right) \\ x+2 = 2x-3 + 2\sqrt{(2x-3)(4x-7)} + 4x-4. \end{cases}$$

После приведения подобных имеем

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; +\infty \right) \\ 12-5x = 2\sqrt{8x^2-26x+21}. \end{cases}$$

Из неотрицательности правой части следует еще одно условие: $12-5x \geq 0$,

т.е. $x \leq \frac{12}{5}$. Тогда при $x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right]$ возможно снова возведение в квадрат обеих частей уравнения:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ 144-120x+25x^2 = 32x^2-104x+84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ 7x^2+16x-60=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ x_1 = -\frac{30}{7}; x_2 = 2, \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{30}{7}$ не входит в рассматриваемую область, $x = 2$ является корнем уравнения:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ 144 - 120x + 25x^2 = 32x^2 - 104x + 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ 7x^2 + 16x^2 - 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{7}{4}; \frac{12}{5} \right] \\ x_1 = -\frac{30}{7}; x_2 = 2 \end{cases} \quad x_1 = -\frac{30}{7} \text{ не входит в рассматриваемую область,}$$

$x_2 = 2$, как показывает проверка, является корнем уравнения

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = \sqrt{1}.$$

Ответ: $x = 2$.

2. Преобразуем неравенство, учитывая область допустимых значений:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2. \end{cases}$$

Так как $x > 1$, то $\log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} x$. Продолжая преобразования,

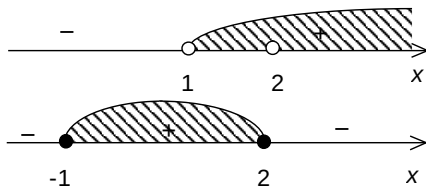
получим:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x(x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2. \end{cases}$$

После потенцирования будем иметь

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x(x - 1) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; 2) \cup (2; +\infty) \\ x^2 - x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств графически:



$$\Rightarrow x \in (1; 2).$$

Ответ: $x \in (1; 2).$

3. Перегруппировав слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned} A &= \cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha = \\ &= (\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) + (\cos 6\alpha - \cos 4\alpha) = 2 \sin \alpha \sin 4\alpha - 2 \sin \alpha \sin 5\alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (\sin 4\alpha - \sin 5\alpha) = -4 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{9}{2} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $A = -4 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{9}{2} \alpha.$

4. $D(f) = R \setminus \{-1\}$. Используя правила дифференцирования, находим

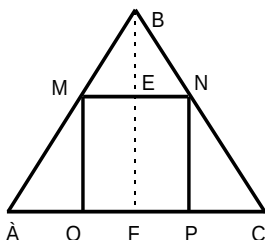
$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Подставив $x = 1$, находим: $f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$

Ответ: $f'(1) = 1.$

5. Дано: $\triangle ABC$; $AB=BC=AC$; $MNPQ$ квадрат; $MN=m$. Найти: AB .

BF — высота $\triangle ABC$, следовательно, $AC=2AF$; $AF=AQ+QF$, но



$$QF = \frac{1}{2} MN = \frac{m}{2}. \text{ В } \triangle AMQ \quad \angle A = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle A = \frac{MQ}{AQ} \Rightarrow AQ = \frac{m}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{m}{2} + \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{m(2 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$AB = AC = \frac{m(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{m(3 + 2\sqrt{3})}{3}.$$

Ответ: $AB = \frac{m(3 + 2\sqrt{3})}{3}.$

Вариант № 28.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}.$

2. Решить неравенство

$$\log_5(x - 3) + \frac{1}{2} \log_5 3 \leq \frac{1}{2} \log_5(x^2 + 6x + 7).$$

3. Преобразовать в произведение

$$A = \sin 5\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha.$$

4. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{1}{x + 1}.$

5. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

Решения:

1. Находим область допустимых значений уравнения, т.е. те значения неизвестного, при котором определены (имеют смысл) его левая и правая части:

$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; +\infty).$$

Поскольку рассматриваются арифметические корни, то обе части уравнения положительны. Следовательно, при возведении в квадрат получаем уравнение, равносильное исходному на множестве $x \in [4; +\infty)$:

$$3x + 4 + 2\sqrt{(3x + 4)(x - 4)} + x - 4 = 4x.$$

После приведения подобных имеем

$$\sqrt{(3x + 4)(x - 4)} = 0.$$

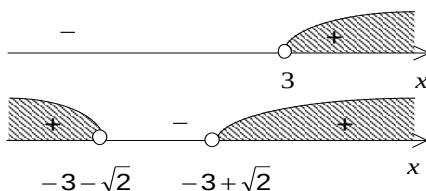
Таким образом, получаем два значения корня (произведение обращается в нуль, если хотя бы один из сомножителей равен нулю):

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Но значение $x_1 = -\frac{4}{3}$ не входит в ОДЗ. Следовательно, уравнение имеет лишь один корень: $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

2. Находим ОДЗ неравенства из условий:



$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 + 6x + 7 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ неравенства: $x \in (3; +\infty)$. Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство к виду:

$$\log_5 3(x - 3)^2 \leq \log_5 (x^2 + 6x + 7).$$

Так как основание логарифмов в левой и правой части равны и больше единицы, то с учетом ОДЗ получаем после потенцирования систему неравенств:

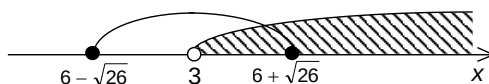
$$\begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ 3(x-3)^2 \leq x^2 + 6x + 7. \end{cases}$$

После преобразований имеем

$$\begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ 2x^2 - 24x + 20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ x^2 - 12x + 10 \leq 0. \end{cases}$$

Находим корни уравнения $x^2 - 12x + 10 = 0$. $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{26}$.

Для решения системы неравенств используем метод интервалов:



Взяв пересечение множеств, получаем ответ: $x \in (3; 6 + \sqrt{26}]$.

Ответ: $x \in (3; 6 + \sqrt{26}]$.

3. Перегруппировав слагаемые и используя формулы разности синусов, получим

$$A = \sin 8\alpha - \sin 6\alpha - (\sin 7\alpha - \sin 5\alpha) = 2 \sin \alpha \cos 7\alpha - 2 \sin \alpha \cos 6\alpha.$$

Выносим общий множитель и, используя формулу разности косинусов, имеем

$$A = 2 \sin \alpha (\cos 7\alpha - \cos 6\alpha) = -4 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{13}{2} \alpha.$$

Ответ: $A = -4 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{13}{2} \alpha.$

4. $D(f) = R \setminus \{-1\}$. Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$f(x) = x(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} + (x + 1)^{-1}.$$

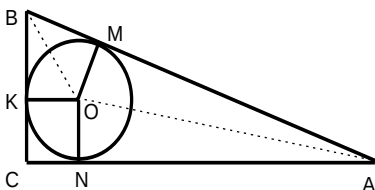
Используя правила дифференцирования, находим

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x') \left(x^2 + 3 \right)^{-\frac{1}{2}} + x \left(\left(x^2 + 3 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)' + (-1)(x + 1)^{-2} = \\ &= \left(x^2 + 3 \right)^{-\frac{1}{2}} + x \left(-\frac{1}{2} \right) \left(x^2 + 3 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x - (x + 1)^{-2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} - \frac{1}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Подставив $x = 1$, находим $f'(1) = \frac{3}{\sqrt{4^3}} - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $f'(1) = \frac{1}{8}$.

5.



Дано: $\angle C = 90^\circ$. Точка O — центр вписанной окружности, $BM = 5$ см; $AM = 12$ см.

Найти: AC и BC .

Точка O — центр вписанной окружности, является точкой пересечения биссектрис треугольника.
 $OK = OM = ON = x$, радиусы вписанной окружности, проведенные в точки касания окружности со сторонами треугольника.

Имеем: $\triangle BOK = \triangle BOM$ (прямоугольные; $OK = OM$;

$\angle KBO = \angle MBO$), следовательно, $BK = BM = 5$ см.

Аналогично, $\Delta NOA = \Delta MOA \Rightarrow AN = AM = 12$ см.

Четырехугольник $CKON$ — квадрат

$OK \perp BC$; $ON \perp AC$; $BC \perp AC$; $OK = ON$.

Тогда $AC = 12 + x$; $BC = 5 + x$; $AB = BM + AM = 17$ см. Запишем

теорему Пифагора: $(x + 12)^2 + (x + 5)^2 = 289$. Получаем квадратное уравнение:

$$2x^2 + 34x - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 17x - 60 = 0,$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -20.$$

Так как условию задачи удовлетворяет $x > 0$, находим катеты: $AC = 15$; $BC = 8$.

Ответ: $AC = 15$ см; $BC = 8$ см.

Вариант № 29.

1. Решить уравнение $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}}(x+2)(4-x) + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}}(4-x) > -2 \log_{49} 2.$$

3. Преобразовать в произведение $A = \sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha$.

4. Найти $f'(-1)$, если $f(x) = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

5. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти стороны треугольника.

Решения:

1. Находим область допустимых значений уравнения

$$\begin{cases} 15-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 15 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3].$$

В области допустимых значений обе части уравнения положительны, поэтому при возведении в квадрат обеих частей уравнения получим равносильное исходному уравнение:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 15 - x - 2\sqrt{(15-x)(3-x)} + 3 - x = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \sqrt{45 - 18x + x^2} = x + 9. \end{cases}$$

Для последующего возведения в квадрат полученного уравнения необходимо ввести условие $x + 9 \geq 0$, т.е. $x \geq -9$. Имеем:

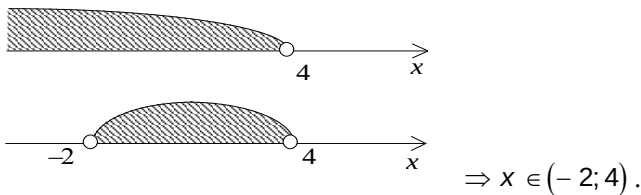
$$\begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ 45 - 18x + x^2 = x^2 + 18x + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $x = -1$.

2. Находим область допустимых значений неравенства

$$\begin{cases} (x+2)(4-x) > 0 \\ 4-x > 0. \end{cases}$$

Решив это неравенство графически, получим



Используя свойства логарифмов, перейдем к общему основанию логарифмов:

$$\begin{cases} x \in (-2; 4) \\ -\log_7(x+2)(4-x) + \log_7(4-x) > -\log_7 2. \end{cases}$$

Продолжая преобразования, получим

$$\begin{cases} x \in (-2; 4) \\ -\log_7 \frac{(x+2)(4-x)}{(4-x)} < \log_7 2. \end{cases}$$

Потенцируя полученное неравенство, имеем

$$\begin{cases} x \in (-2; 4) \\ x + 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 4) \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0).$$

Ответ: $x \in (-2; 0)$.

3. Перегруппировав слагаемые и используя формулы тригонометрии, получим

$$\begin{aligned} A &= \sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha = -2 \sin 2\alpha \cos 4\alpha + \cos 4\alpha = \\ &= 2 \cos 4\alpha \left(\frac{1}{2} - \sin 2\alpha \right) = 2 \cos 4\alpha \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin 2\alpha \right) = \\ &= 4 \cos 4\alpha \sin \left(\frac{\pi}{12} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right). \end{aligned}$$

Ответ: $A = 4 \cos 4\alpha \sin \left(\frac{\pi}{12} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right)$.

4. $D(f) = R \setminus \{0\}$. Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$f(x) = x - 2x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3}.$$

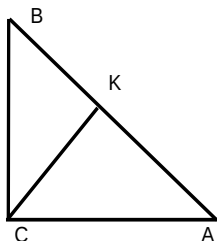
Используя правила отыскания производной, имеем

$$f'(x) = 1 - 2(-2)x^{-3} - \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = 1 + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^4 + 4x + 1}{x^4}.$$

Подставив значение $x = -1$, имеем $f'(-1) = \frac{(-1)^4 + 4(-1) + 1}{(-1)^4} = -2$.

Ответ: $f'(-1) = -2$.

5.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $CK = m$; $\angle BCK : \angle KCA = 1:2$.
Найти: AB ; AC ; BC .

Поскольку CK — медиана, следовательно,
 $AK = CK = BK$ (по свойству медианы
прямоугольного треугольника, проведенной к
гипотенузе.) Следовательно, $AB = AK + BK = 2m$.

$$\angle C = 90^\circ; \angle BCK = \frac{1}{3} \angle C = 30^\circ; \angle KCA = 60^\circ.$$

Следовательно, $\triangle KCA$ — равносторонний, т.к.

$$CK = KA; \angle KCA = \angle KAC = 60^\circ \Rightarrow AC = CK = m.$$

BC находим по теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}.$$

Ответ: $AB = 2m$; $BC = m\sqrt{3}$; $AC = m$.

Вариант № 30.

1. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$.

2. Решить неравенство

$$2 \log_{25}(1+x)(3-x) - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}.$$

3. Преобразовать в произведение $A = \cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$.

4. Найти $f'(3)$, если $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.

5. Точка на гипотенузе равноудалена от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

Решения:

1. Находим область допустимых значений уравнения

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 9-x \geq 0 \\ 2x-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 9 \\ 2x \geq 12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [6; 9]$$

Преобразуем уравнение

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{9-x} + \sqrt{2x-12}.$$

Обе части уравнения в ОДЗ положительны, поэтому при возведении в квадрат обеих частей уравнения получим равносильное в ОДЗ уравнение

$$\begin{cases} x+1 = 9-x+2\sqrt{(9-x)(2x-12)}+2x-12 \\ x \in [6; 9] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(9-x)(2x-12)} = 2 \\ x \in [6; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 30x - 108 = 4 \\ x \in [6; 9] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 15x + 56 = 0 \\ x \in [6; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7; x_2 = 8 \\ x \in [6; 9]. \end{cases}$$

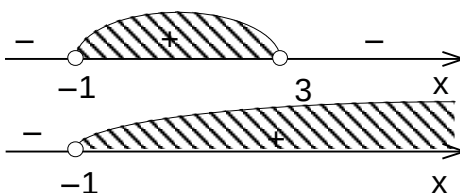
Ответ: $x_1 = 7; x_2 = 8$.

2. Находим ОДЗ

$$\begin{cases} (1+x)(3-x) > 0 \\ 1+x > 0. \end{cases}$$

Решив графически систему неравенств, имеем

$$\Rightarrow x \in (-1; 3).$$



Перейдем к общему

основанию логарифмов, используя свойства логарифмов:

$$\begin{cases} \log_5(1+x)(3-x) - \log_5(1+x) > \log_5 2 \\ x \in (-1; 3). \end{cases}$$

Продолжая преобразования, получим

$$\begin{cases} \log_5 \frac{(1+x)(3-x)}{(1+x)} > \log_5 2 \\ x \in (-1; 3). \end{cases}$$

После потенцирования находим

$$\begin{cases} 3 - x > 2 \\ x \in (-1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \in (-1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

3. После группировки и преобразования разности косинусов имеем

$$\begin{aligned} A &= \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \sin 4\alpha = \\ &= \sin 4\alpha (1 + 2 \sin 2\alpha) = 2 \sin 4\alpha \left(\frac{1}{2} + \sin 2\alpha \right) = \\ &= 2 \sin 4\alpha \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin 2\alpha \right) = 4 \sin 4\alpha \sin \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \alpha \right). \end{aligned}$$

Ответ: $A = 4 \sin 4\alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \alpha \right)$.

4. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Преобразуем функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 3x^{-1}.$$

Используя правила дифференцирования, имеем

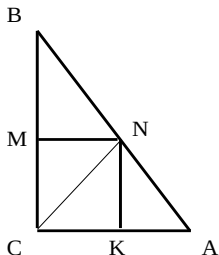
$$f'(x) = \frac{1}{3} - 3(-1)x^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2}.$$

При $x = 3$ получаем

$$f'(3) = \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $f'(3) = \frac{2}{3}$.

5.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $MN \perp BC$;

$NK \perp AC$; $MN = NK$; $AN = 30$ см;

$BN = 40$ см.

Найти: AC и BC .

Так как точка N является равноудаленной от обеих катетов, то CN — биссектриса $\angle C$. По свойству биссектрисы внутреннего угла

треугольника выполняется соотношение

$$\frac{BN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}. \text{ Если } AC = x, \text{ то } BC = \frac{4}{3}x.$$

$AB = AN + BN = 70$ см. По теореме Пифагора имеем:

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 4900 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 4900,$$

т.к. $x > 0$, то $x = 42$ см $\Rightarrow AC = 42$ см; $BC = \frac{4}{3}AC = 56$ см.

Ответ: $AC = 42$ см; $BC = 56$ см.

Вариант № 31.

1. Решить неравенство $x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

2. Решить уравнение $\log_3(9^x + 9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2 \cdot 3^x)$.

3. Преобразовать в произведение

$$A = 1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi).$$

4. Найти y' , если $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$.

5. Дан треугольник. Длины двух его сторон равны a и b , угол между ними равен α . Найти длину высоты, проведенной к третьей стороне.

Решения:

1. Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ следует решать по схеме:

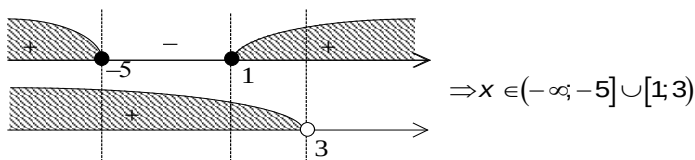
$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}.$$

В нашем случае неравенство равносильно совокупности систем:

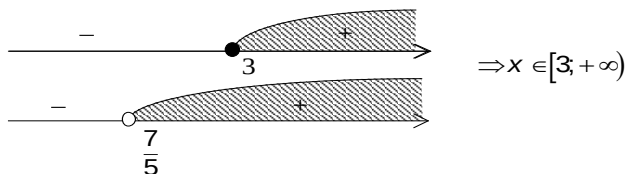
$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 < x^2 + 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 5) \geq 0 \\ x - 3 < 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 < x^2 + 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x < 3 \\ x \geq 3 \\ 10x > 14 \end{cases}.$$

Дальнейшее решение удобно проводить графически:



для второй системы



Взяв объединение двух множеств, получим решение исходного неравенства $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

2. Находим область допустимых значений уравнения

$$28 - 2 \cdot 3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 14 \Leftrightarrow x < \log_3 14.$$

Итак, ОДЗ $x \in (-\infty; \log_3 14)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_3(9^x + 9) &= \log_3 3^x + \log_3(28 - 2 \cdot 3^x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3(9^x + 9) = \log_3 3^x (28 - 2 \cdot 3^x). \end{aligned}$$

Потенцируя полученное уравнение, имеем

$$9^x + 9 = 3^x (28 - 2 \cdot 3^x).$$

Так как $9^x = 3^{2x}$, сделаем замену $t = 3^x$, учитывая, что $t > 0$. Получим уравнение

$$t^2 + 9 = t(28 - 2t), \text{ т.е. } 3t^2 - 28t + 9 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm 13}{3}; \quad t_1 = 9; \quad t_2 = \frac{1}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$\begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Сделаем проверку:

$$x_1 = 2 \quad \log_3 90 = 2 - \log_{\frac{1}{3}} 10,$$

$$\log_3 90 = \log_3 9 + \log_3 10,$$

$$\log_3 90 \equiv \log_3 90;$$

$$x_2 = -1 \quad \log_3 \frac{89}{9} = -1 - \log_3 \frac{89}{9}$$

$$\log_3 \frac{89}{9} \equiv \log_3 \frac{89}{9}.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

3. Используя формулы приведения, имеем

$$\begin{aligned} A &= 1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi) = 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \cos 5\alpha = \\ &= 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos 5\alpha) = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.

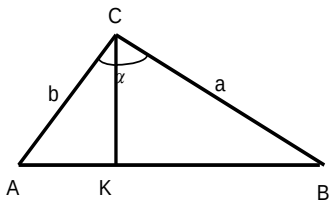
4. $D(y) = \{x \geq 0\}$. Преобразуем функцию к более удобному для дифференцирования виду:

$$y = \left(x + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } y' &= \frac{1}{2} \left(x + x^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(x + x^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}} \left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right).$$

5.



Дано:

$\triangle ABC$; $BC = a$; $AC = b$; $\angle ACB = \alpha$;

$CK \perp AB$.

Найти: CK .

Используем различные формулы для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2} CK \cdot AB,$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle ACB = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \alpha.$$

Так как левые части этих формул совпадают, то $CK \cdot AB = a \cdot b \sin \alpha$.
Сторону AB можно найти, используя теорему косинусов:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

Таким образом получим

$$CK = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}.$$

Ответ: $CK = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}.$

Вариант № 32.

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$.
2. Решить уравнение $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$.
3. Преобразовать в произведение

$$A = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - 1.$$

4. Найти y' , если $y = \sqrt{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x + 2}$.

5. Дан равнобедренный треугольник. Основание равно a , угол при основании α . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

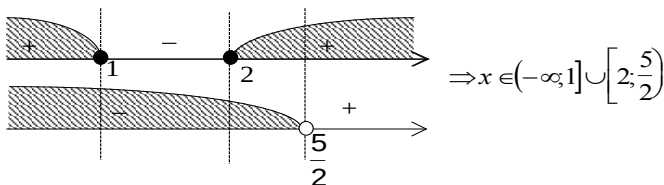
Решения:

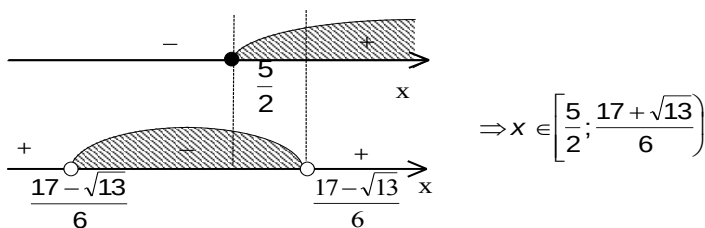
1. Используя схему решения иррационального неравенства, приходим к совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (2x-5)^2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x + 2 > 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 3\left(x - \frac{17 - \sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{17 + \sqrt{13}}{6}\right) < 0 \end{cases} \right]$$

Дальнейшее решение удобно проводить графически:





Взяв объединение обоих множеств, получим

$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup \left[2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right).$

2. Находим ОДЗ уравнения

$$2^{x+3} - 6 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \left(\log_2 \frac{3}{4}; +\infty \right).$$

Используя свойства логарифмических функций, после преобразований в ОДЗ имеем

$$\begin{aligned} \log_2(4^x + 1) &= \log_2 2^x + \log_2(2^{x+3} - 6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(4^x + 1) = \log_2 2^x \cdot (2^{x+3} - 6). \end{aligned}$$

После потенцирования получаем показательное уравнение

$$\begin{cases} 4^x + 1 = 2^x (8 \cdot 2^x - 6) \\ x \in \left(\log_2 \frac{3}{4}; +\infty \right). \end{cases}$$

Учитывая, что $4^x = 2^{2x}$, сделаем замену: $t = 2^x$, $t > 0$, приходим к

уравнению $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 + 1 = t(8t - 6) \end{cases}$ или $7t^2 - 6t - 1 = 0$.

Решив квадратное уравнение, находим корни $t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{7} < 0$, т.е.,

возвращаясь к исходной переменной, получаем: $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Проверкой убеждаемся в истинности полученного корня:

$$x = 0 \Rightarrow \log_2 2 \equiv 0 + \log_2 2.$$

Ответ: $x = 0$.

3. После использования формул приведения имеем

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - 1 = \\ &= \cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha - \sin^2 \alpha = \\ &= \cos 2\alpha + (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2\cos 3\alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 2\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha$.

4. Определим $D(y): 2x^2 - x + 1 > 0$, т.е. $x \in \mathbb{R}$. Преобразуем

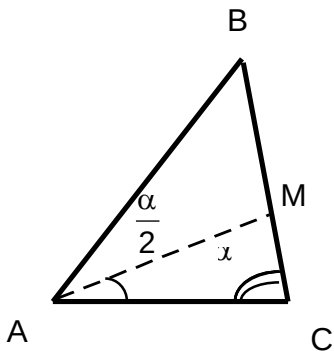
функцию $y = (2x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2}} + (x + 2)^{\frac{1}{3}}$.

Используя правила дифференцирования, находим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(2x^2 - x - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x^2 - x - 1)' + \frac{1}{3}(x + 2)^{-\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{4x - 1}{2\sqrt{(2x^2 - x - 1)}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{4x - 1}{2\sqrt{(2x^2 - x - 1)}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2}}$.

5.



Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC$; $AC = a$;

$\angle BAC = \alpha$; $\angle BAM = \angle MAC$.

Найти AM .

$$\angle BAM = \angle MAC = \frac{\alpha}{2};$$

т.к. $\triangle ABC$ – равнобедренный, то

$$\angle AMC = \pi - \frac{3}{2}\alpha.$$

По теореме синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin\left(\pi - \frac{3}{2}\alpha\right)},$$

получаем $AM = \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha}.$

Ответ: $AM = \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha}.$

Вариант № 33.

1. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0.$

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

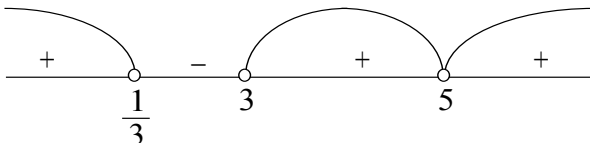
$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right).$$

3. Решить уравнение $\log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.
4. Вычислить $f'(3)$, если $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.
5. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$.

Решения:

1. $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0$.

$$\frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)}{(x - 5)^2} > 0$$



Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (3; 5) \cup (5; \infty)$.

2.

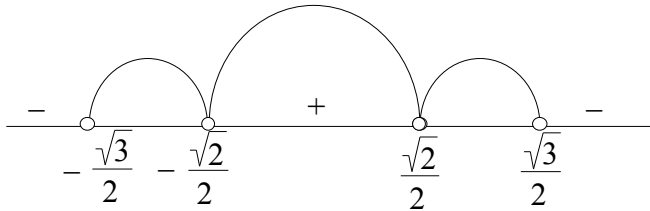
$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} = -\sin\frac{5\pi}{2} \cdot \sin 4\alpha = -\sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $-\sin 4\alpha$.

$$3. \log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3-4x^2 > 0 \\ 3-4x^2 \neq 1 \\ 9-16x^4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x) > 0 \\ 4x^2 \neq 2 \\ (3-4x^2)(3+4x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x) > 0 \\ x \neq \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\log_{3-4x^2}((3-4x^2)(3+4x^2)) = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$1 + \log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\log_{3-4x^2}(3+4x^2) = \log_{3-4x^2}(3-4x^2) + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\log_{3-4x^2}(3+4x^2) = \log_{3-4x^2}(2(3-4x^2))$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+4x^2 = 6-8x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \mp \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Проверка: $x = \mp \frac{1}{2}$

$$\log_2 8 = 2 + \frac{1}{\log_2 2}$$

$$3 = 3.$$

Ответ: $x = \mp \frac{1}{2}$.

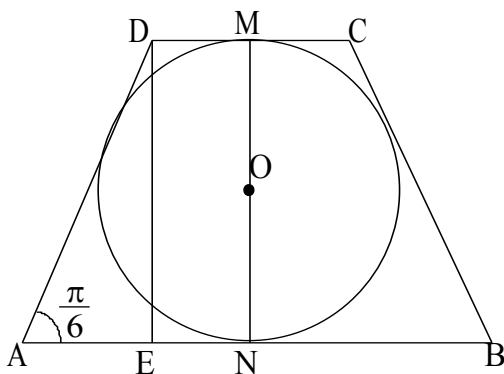
4. $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}.$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2}.$$

$$f'(3) = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $S_{ABCD} = S$,

$$AD = BC, \angle DAE = \frac{\pi}{6}, O$$

— центр вписанной окружности.

Найти: $AD = BC$.

Проведем $DE \perp AB$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle DAE$ ($\angle AED = 90^\circ$).

В $\triangle DAE$ катет DE лежит против угла в 30° , поэтому $AD = 2DE$.

Поскольку в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то площадь трапеции $ABCD$ можно найти по формуле

$$S_{ABCD} = AD \cdot DE = \frac{1}{2} AD^2. \text{ Поэтому } \frac{1}{2} AD^2 = S, \quad AD^2 = 2S, \quad AD = \sqrt{2S}.$$

Ответ: $AD = BC = \sqrt{2S}.$

Вариант № 34.

1. Решить неравенство $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1.$

2. Упростить выражение, преобразовав

$$\sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right) \text{ в произведение.}$$

3. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4.$$

4. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$

5. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить радиус этого круга, если угол при основании трапеции равен 30° .

Решения:

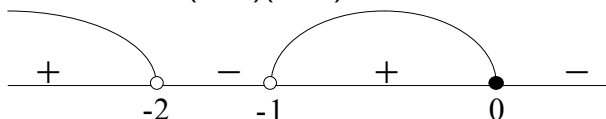
$$1. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1,$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} - 1 \geq 0,$$

$$\frac{\cancel{x^2} - 3x + \cancel{2} - \cancel{x^2} - 3x - \cancel{2}}{x^2 + 3x + 2} \geq 0,$$

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} \geq 0,$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} \leq 0.$$



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right) \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} = \sin \frac{13\pi}{4} \sin(2\alpha - \pi) = \\ &= -\sin(3\pi + \frac{\pi}{4}) \sin(\pi - 2\alpha) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

$$3. \log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x + 7 > 0 \\ 3x + 7 \neq 1 \\ 9 + 12x + 4x^2 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 2x + 3 \neq 1 \\ 6x^2 + 23x + 21 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{3} \\ x \neq -2 \\ (2x + 3)^2 > 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \\ (2x + 3)(3x + 7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty). \end{aligned}$$

$$\log_{3x+7}(2x + 3)^2 + \log_{2x+3}((2x + 3)(3x + 7)) = 4.$$

$$\begin{cases} 2 \log_{3x+7}(2x + 3) + \log_{2x+3}(3x + 7) + 1 - 4 = 0 \\ x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{3x+7}(2x+3) = t \\ 2t + \frac{1}{t} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3x+7}(2x+3) = t \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty) \\ \log_{3x+7}(2x+3) = 1 \\ \log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty) \\ \begin{cases} 2x+3 = 3x+7 \\ 2x+3 = \sqrt{3x+7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty) \\ \begin{cases} x = -4 \\ 4x^2 + 12x + 9 = 3x + 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty) \\ 4x^2 + 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty) \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

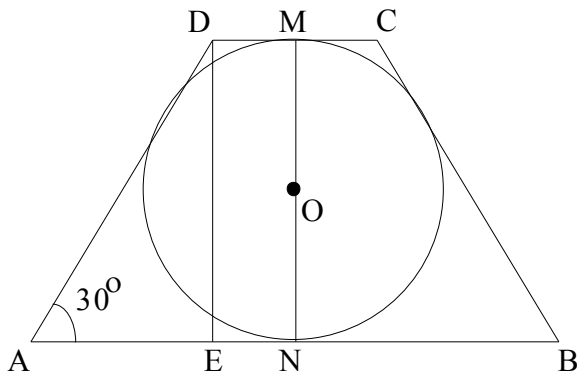
4. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

$$f'(0) = -3.$$

Ответ: -3.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция,
 $AD = BC$,
 $S_{ABCD} = S$, $\angle DAE = 30^\circ$, O —
 центр окружности,
 вписанной в $ABCD$.

Найти: R — радиус
 вписанной окружности.
 Проведем $DE \perp AB$, а
 также диаметр вписанной
 окружности MN так, что
 $MN \perp AB$. Тогда $MN \parallel DE$,
 $MN = DE = 2R$.

Поскольку в прямоугольном $\triangle ADE$ ($\angle AED = 90^\circ$) катет DE лежит
 против угла в 30° , то $AD = 2DE = 4R$.

Так как в равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность $(O; R)$,
 то площадь S_{ABCD} можно найти по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot DE$. Поэтому

$$4R \cdot 2R = S, \quad R^2 = \frac{S}{8}, \quad R = \frac{\sqrt{2S}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2S}}{4}$.

Вариант № 35.

1. Решить неравенство $\frac{15}{4 + 3x - x^2} > 1$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение
 $\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1$.

3. Решить неравенство $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x (2x^3)}$.

4. Вычислить $f'(2)$, если $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

5. Найти площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если
 ее большее основание равно a , а угол при меньшем основании 120° .

Решения:

1.

$$\frac{15}{4 + 3x - x^2} > 1$$

$$\frac{15}{4 + 3x - x^2} - 1 > 0$$

$$\frac{15 - 4 - 3x + x^2}{4 + 3x - x^2} > 0$$

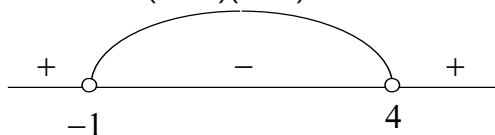
$$\frac{x^2 - 3x + 11}{4 + 3x - x^2} > 0.$$

Так как $x^2 - 3x + 11 > 0$, то

$$4 + 3x - x^2 > 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0,$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0.$$



Ответ: $x \in (-1; 4)$.

2.

$$\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1$$

$$= \sin^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = -\frac{\cos(2\alpha + 4\beta) + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} =$$

$$= -\cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta.$$

3. $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}.$

ОДЗ:

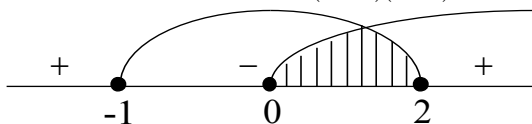
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x(2x^3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x 2 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x 2 \geq \log_x x^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ 2 \leq x^{-3} \\ x \in (1; \infty) \\ 2 \geq x^{-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ x^3 \leq \frac{1}{2} \\ x \in (1; \infty) \\ x^3 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \in (1; \infty) \\ x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (1; \infty).$$

$$\log_x 2 + 1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3},$$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_x 2 + 3} = t, t \geq 0 \\ t^2 - 2 \leq t \end{cases}.$$

$$(t - 2)(t + 1) \leq 0$$



$$0 \leq t \leq 2$$

$$\sqrt{\log_x 2 + 3} \leq 2,$$

$$\log_x 2 + 3 \leq 4,$$

$$\log_x 2 \leq 1,$$

$$\log_x 2 \leq \log_x x.$$

$$\begin{cases} x \in (0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}] \\ 2 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (2; \infty).$$

$$\begin{cases} x \in (1; \infty) \\ 2 \leq x \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (2; \infty).$

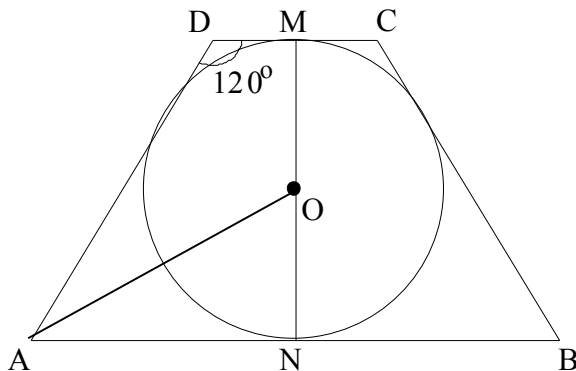
4. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}.$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 4x - \cancel{2x^3} + 4x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8x}{(x^2 + 2)^2}.$$

$$f'(2) = \frac{8 \cdot 2}{(4 + 2)^2} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}.$

5.



Так как $\angle ADC + \angle DAN = 180^\circ$, а по условию $\angle ADC = 120^\circ$, то

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD = BC$, $\angle ADC = 120^\circ$, $AB = a$, O — центр окружности, вписанной в $ABCD$.

Найти: $S_{кр}.$

Проведем диаметр MN вписанной окружности так, что $MN \perp AB$.

Поскольку трапеция равнобедренная, то

$$AN = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}.$$

$\angle DAN = 60^\circ$. Проведем AO , AO — биссектриса $\angle DAN$ (окружность $(O; R)$ вписана в $\angle DAN$, $R = ON$). Поэтому $\angle OAN = 30^\circ$. В прямоугольном $\triangle AON$ ($\angle ANO = 90^\circ$) $AN = \frac{a}{2}$, $\angle OAN = 30^\circ$, $R = ON = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$S_{кр.} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{12}$.

Вариант № 36.

1. Решить неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + 1}\right) + 1.$$

4. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

5. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S , а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного круга.

Решения:

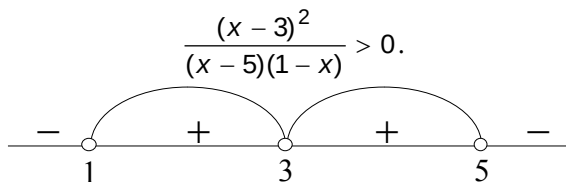
1. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0,$$

$$\frac{(4-x)(1-x) - x + 5}{(x-5)(1-x)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 5x + 4 - x + 5}{(x-5)(1-x)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{(x-5)(1-x)} > 0,$$



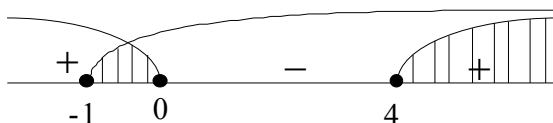
Ответ: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

$$\begin{aligned} 2. \cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 \\ = \frac{1 + \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \\ = \frac{\cos(2\alpha + 4\beta) - \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = -\sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta. \end{aligned}$$

Ответ: $= -\sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta$.

$$3. \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} + 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}.$$



$$x \in [-1; 0] \cup [4; \infty).$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} + 1 &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} &= \log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1). \end{aligned}$$

Тогда

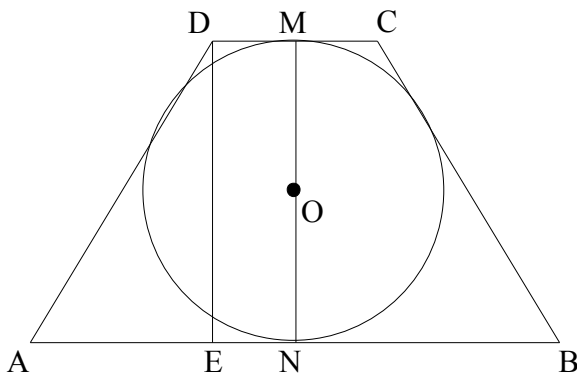
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x \in [-1; 0] \cup [4; \infty) \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} > \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 0] \cup [4; \infty) \\ \sqrt{x+1} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 0] \cup [4; \infty) \\ x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 0] \cup [4; \infty) \\ x < 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $x \in [-1; 0]$.

$$4. f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

$$f'(0) = -3.$$



Дано : $ABCD$ — трапеция,
 $AD = BC$,

$$DE \perp AB, DE = \frac{1}{2} AD,$$

$S_{ABCD} = S$, окружность
 вписана в трапецию $ABCD$.

Найти: R — радиус
 вписанной окружности.

5.

Поскольку в трапецию вписана окружность $(O; R)$, то площадь S_{ABCD} может быть найдена по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot DE$.

Проведем диаметр MN окружности $(O; R)$, $MN \perp AB$. Тогда $DENM$ — прямоугольник, и поэтому $DE = MN = 2R$.

По условию $AD = 2DE = 4R$.

Следовательно, $S_{ABCD} = S = 4R \cdot 2R$, $8R^2 = S$, $R = \sqrt{\frac{S}{8}} = \frac{\sqrt{2S}}{4}$.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{2S}}{4}$.

Вариант № 37.

1. Решить неравенство $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

4. Вычислить $f'(-1)$, если $f(x) = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

5. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R . Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

Решения:

1. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

$$\frac{2+x+5(2-x)}{4-x^2} - 1 < 0,$$

$$\frac{12-4x-4+x^2}{4-x^2} < 0,$$

$$\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0,$$

т.к. $x^2 - 4x + 8 > 0$, то $(2-x)(2+x) < 0$.

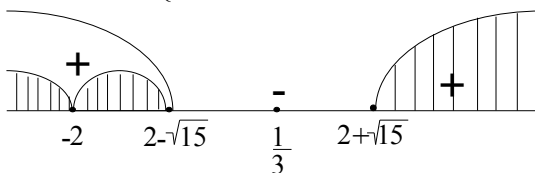
Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

2. $1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \\
&= 2\sin^2\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right) = \\
&\quad 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) = \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{4} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right). \\
\text{Ответ: } &2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).
\end{aligned}$$

$$3. \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4x - 11 > 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - (2 - \sqrt{15}))(x - (2 + \sqrt{15})) > 0 \\ x \neq -2, x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$$



$$x^2 - 4x - 11 = 0,$$

$$x = 2 \mp \sqrt{15},$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{-5 \mp 7}{6}.$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup (2 + \sqrt{15}; \infty).$$

Учтем, что (при $x \in \text{ОДЗ}$)

$$\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 = 2\log_5(x^2 - 4x - 11),$$

$$a \quad \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3 = \frac{3 \log_5(x^2 - 4x - 11)}{\log_5 11},$$

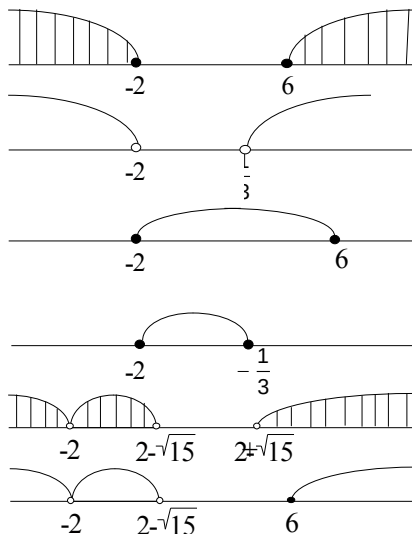
$$TO \quad \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup (2 + \sqrt{15}; \infty) \\ \left(2 - \frac{3}{\log_5 11}\right) \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0; \end{cases}$$

$$T.K. \quad 11 < 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_5 11 - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow 2 - \frac{3}{\log_5 11} < 0, \text{ поэтому:}$$

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x^2 - 4x - 11) \geq 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 11 \geq 1 \\ 3x^2 + 5x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 \geq 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x^2 - 4x - 11) \leq 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 11 \leq 1 \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x + 2) \geq 0 \\ (x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x + 2) \leq 0 \\ (x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup [6; \infty).$$

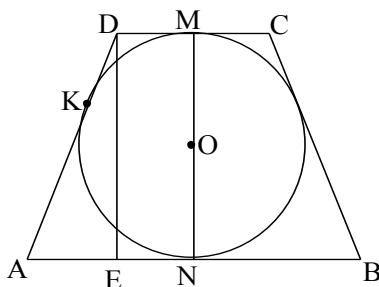
$$4. \quad f(x) = x - 2x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3}.$$

$$f'(x) = 1 + 4x^{-3} + x^{-4} = 1 + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4},$$

$$f'(-1) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

Ответ: -2.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция,

$$AD = BC, \quad DC = \frac{1}{2}DE,$$

$DE \perp AB$. Окружность $(O; R)$ вписана в трапецию $ABCD$.

Найти: S_{ABCD} .

Проведем диаметр MN окружности $(O; R)$, $MN \perp AB$, $MN = DE = 2R$. По условию задачи $DC = R$. Тогда

$$EN = DM = \frac{1}{2}DC = \frac{R}{2} \quad (EN = DM \text{ как противоположные стороны}$$

прямоугольника $DENM$), $DM = DK = \frac{R}{2}$ (как касательные, проведенные из

одной точки D , к окружности $(O; R)$. Пусть $AK = x$.

$AK = AN$ (как касательные, проведенные из точки A к окружности

$(O; R)$, поэтому $AN = x$, $AE = AN - EN = x - \frac{R}{2}$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ADE$ ($\angle AED = 90^\circ$). В нем

$$AD = AK + KD = x + \frac{R}{2}, \quad AE = x - \frac{R}{2}, \quad DE = 2R. \text{ По теореме Пифагора}$$

$$AD^2 = AE^2 + DE^2, \quad \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + 4R^2,$$

$$x^2 + Rx + \frac{R^2}{4} = x^2 - Rx + \frac{R^2}{4} + 4R^2, \quad 2Rx = 4R^2, \quad x = 2R.$$

Следовательно, $AD = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2}$.

Поскольку в равнобедренную трапецию ABCD вписана окружность, площадь трапеции ABCD может быть найдена по формуле

$$S_{ABCD} = AD \cdot DE = \frac{5R}{2} \cdot 2R = 5R^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 5R^2$.

Вариант № 38.

1. Решить уравнение $3x - \sqrt{18x + 1} + 1 = 0$.

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right).$$

3. Решить неравенство

$$\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \log_x \frac{2}{x}.$$

4. Найти интервалы монотонного убывания функции

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15.$$

5. Угол при вершине A трапеции ABCD равен α . Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.

Решения:

1. $3x - \sqrt{18x + 1} + 1 = 0$.

$$\text{ОДЗ: } x \in \left[-\frac{1}{18}; \infty\right).$$

$$3x + 1 = \sqrt{18x + 1},$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 18x + 1,$$

$$9x^2 - 12x = 0,$$

$$x(3x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Проверка:

$$x_1 = 0,$$

$$-\sqrt{1} + 1 = 0,$$

$$0 = 0.$$

$$x_2 = \frac{4}{3},$$

$$4 - \sqrt{25} + 1 = 0,$$

$$4 - 5 + 1 = 0,$$

$$0 = 0.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \left\{ 0; \frac{4}{3} \right\}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) &= \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = -\sin(2\pi - 4\alpha) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$3. \quad \left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right) \left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \log_x \frac{2}{x}.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ 14x - 2x^2 - 24 \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-3) \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-3) \geq 0 \\ (x-4)(x-3) \leq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$x \in \{3; 4\}.$$

Проверим, является ли решением $x = 3$ и $x = 4$:

$$1) \quad x = 3:$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) &\leq 2 \cdot \log_3 \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \log_3 \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 3^{-\frac{1}{3}} \leq \log_3 \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq \log_3 \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{9}}{3} \leq \frac{2}{3} \text{ — не верно.} \end{aligned}$$

$x = 3$ — не корень уравнения.

$$2) x = 4 :$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{4} - 1 \right) \leq 2 \cdot \log_4 \frac{2}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \log_4 \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \log_4 4^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

— верно.

$x = 4$ — корень уравнения.

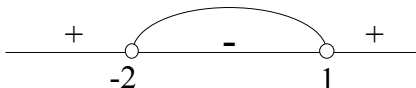
Ответ: $\{4\}$.

$$4. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$$

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 < 0$$

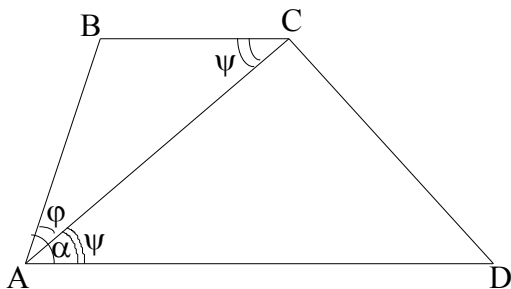
$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x + 2)(x - 1) < 0$$



Ответ: $x \in (-2; 1)$.

5.



Дано: ABCD — трапеция,
 $\angle BAD = \alpha$
 $AB = 2BC$.

Найти: $\angle BAC$.
 Обозначим $\angle BAC$ через φ , а через ψ $\angle CAD$. Из теоремы синусов следует, что $\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = 2$.

Поскольку $\angle CAD = \angle BCA = \psi$, то $\alpha = \varphi + \psi$. Тогда

$$\sin \psi = 2 \sin \varphi, \sin(\alpha - \varphi) = 2 \sin \varphi,$$

$$\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = 2 \sin \varphi,$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot (2 + \cos \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$

Вариант № 39.

1. Решить уравнение $2\sqrt{x+5} = x+2.$
2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right).$$

3. Решить неравенство $\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1.$
4. Найти интервалы монотонного убывания функции

$$y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2.$$

5. Площадь равнобокой трапеции равна S , угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α . Найти высоту трапеции.

Решения:

1. $2\sqrt{x+5} = x+2.$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; \infty).$$

$$4(x+5) = x^2 + 4x + 4,$$

$$\cancel{4x} + 20 = x^2 + \cancel{4x} + 4,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x_1 = -4 \in \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = 4.$$

Проверка:

$$x = 4,$$

$$2\sqrt{4+5} = 4+2,$$

$$2 \cdot 3 = 6,$$

$$6 = 6.$$

Ответ: $\{4\}.$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) \\
 &= \frac{1 - \cos\left(\frac{15}{4}\pi - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{17}{4}\pi - 2\alpha\right)}{2} = \\
 &= -\frac{\cos\left(\frac{15}{4}\pi - 4\alpha\right) + \cos\left(\frac{17}{4}\pi - 4\alpha\right)}{2} = \cancel{-\frac{\cos(4\pi - 4\alpha) \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

$$3. \log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 4^x - 12 > 0 \\ \log_2(4^x - 12) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ 4^x > 12 \\ 4^x > 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\log_4 13; \infty).$$

Так как $x > 1$ ($x \in (\log_4 13; \infty)$), то

$$\log_2(4^x - 12) \leq x,$$

$$4^x - 12 \leq 2^x,$$

$$2^{2x} - 2^x - 12 \leq 0,$$

$$2^x = t, \quad t > 0,$$

$$t^2 - t - 12 \leq 0,$$

$$(t - 4)(t + 3) \leq 0,$$

$$\begin{cases} 2^x = t, \quad t > 0 \\ -3 \leq t \leq 4 \end{cases},$$

$$2^x \leq 4$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \in (\log_4 13; \infty) \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (\log_4 13; 2]$.

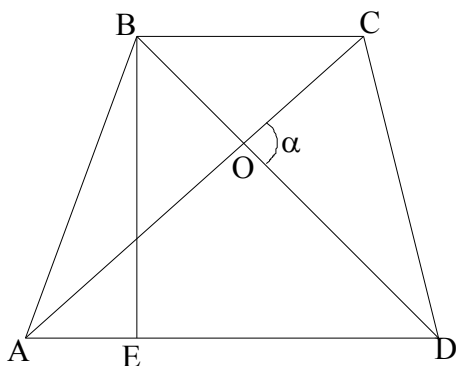
$$4. y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2.$$

$$y' = 4x^3 + x^2 < 0,$$

$$x^2(4x + 1) < 0,$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{4} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right).$$

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$, $S_{ABCD} = S$,
 $\angle COD = \alpha$, $BE \perp AD$.

Найти: BE .

Пусть $BE = h$. Составим уравнение, из которого найдем h . Так как $\angle AOD = \pi - \alpha$, то

$$\angle ADB = \frac{\pi - (\pi - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Из $\triangle BDE$ ($\angle BED = 90^\circ$) получим:

$DE = BE \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Поскольку длина DE равна длине средней линии трапеции, то

$$S = DE \cdot BE = h^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \text{ откуда } h = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{S}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}.$

Вариант № 40.

1. Решить уравнение $21 + \sqrt{2x - 7} = x$.

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1.$$

3. Решить неравенство $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$.

4. Найти интервалы монотонного убывания функции:

$$y = x^5 - 20x^3 + 1.$$

5. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α .

Найти высоту трапеции, если периметр ее равен P .

Решения:

1. $21 + \sqrt{2x - 7} = x$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ x \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{7}{2}; \infty\right) \\ x \in [21; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [21; \infty).$$

$$\sqrt{2x - 7} = x - 21,$$

$$2x - 7 = x^2 - 42x + 441,$$

$$x^2 - 44x + 448 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 484 - 448 = 36,$$

$$x = 22 \mp 6, x_1 = 28, x_2 = 16. \notin \text{ОДЗ}.$$

Проверка: $x_1 = 28$

$$21 + \sqrt{56 - 7} = 28,$$

$$21 + 7 = 28,$$

$$28 = 28.$$

Ответ: $\{28\}$.

$$\begin{aligned} 2. \cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 &= \cos^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) = \\ &= \frac{1 + \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \frac{\cos(2\alpha + 4\beta) - \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \\ &= -\sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta. \end{aligned}$$

Ответ: $-\sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta$.

3. $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$.

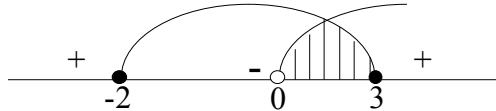
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 9^x - 6 > 0 \\ \log_3(9^x - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 9^x > 6 \\ 9^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > \log_9 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\log_9 7; 1) \cup (1; \infty).$$

$$\begin{cases} x \in (\log_9 7; 1) \\ \log_3(9^x - 6) \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (\log_9 7; 1) \\ 9^x - 6 \leq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (\log_9 7; 1) \\ 3^{2x} - 3^x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (1; \infty) \\ \log_3(9^x - 6) \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; \infty) \\ 9^x - 6 \geq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; \infty) \\ 3^{2x} - 3^x - 6 \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3^x = t, \quad t > 0 \\ t^2 - t - 6 \leq 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3^x = t, \quad t > 0 \\ (t - 3)(t + 2) \leq 0. \end{cases}$$

$$3^x \leq 3, \quad x \leq 1.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3^x = t, \quad t > 0 \\ t^2 - t - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t, \quad t > 0 \\ t \geq 3, \end{cases}$$

$$3^x \geq 3, \quad x \geq 1.$$

$$\begin{cases} x \in (\log_9 7; 1) \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\log_9 7; 1) \cup (1; \infty).$$

$$\begin{cases} x \in (1; \infty) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(\log_9 7; 1) \cup (1; \infty).$

$$4. \quad y = x^5 - 20x^3 + 1.$$

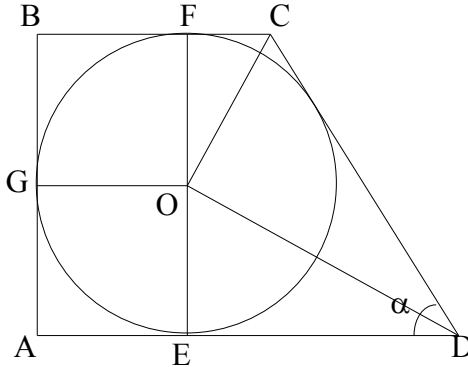
$$y' = 5x^4 - 60x^2 = 5x^2(x^2 - 12),$$

$$y' \leq 0 \quad x^2 - 12 < 0,$$

$$x \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}).$$

Ответ: $(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}).$

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция,
 $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADC = \alpha$.
 В трапецию вписана окружность,
 периметр трапеции P .

Найти: высоту трапеции H .
 Проведем диаметр FE вписанной
 окружности. Пусть радиус вписанной
 окружности R . Тогда
 $H = 2R$.

Выразим периметр трапеции
 через R . Так как в данную

трапецию можно вписать окружность, то сумма длин противоположных
 сторон $AB + CD = BC + AD$. Поэтому $AD + BC = \frac{P}{2}$. Найдем $AD = AE +$
 ED . Имеем $AE = R$. Из $\triangle EDO$

с учетом того, что $\angle EDO = \frac{\alpha}{2}$, имеем $DE = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Значит,

$$AD = R \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Аналогично, учитывая, что $\angle FOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, находим

$$BC = BF + FC = R \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Значит, $AD + BC = R \left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$

Отсюда

$$R \left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{P}{2},$$

из которого

$$R = \frac{P}{2\left(2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Упростим полученное выражение:

$$\begin{aligned} 2 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= 2 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= 2 + \frac{2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = 2 + \frac{2}{\sin \alpha} = 2\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) = \\ &= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)}{\sin \alpha} = \frac{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ: $H = \frac{P \sin \alpha}{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

Вариант № 41.

1. Решить уравнение $11 + 2x = \sqrt{22 - x}.$

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1.$$

3. Решить неравенство $\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}.$

4. Найти интервалы монотонного возрастания функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11.$$

5. Основания равнобокой трапеции соответственно равны a и b ($a > b$), угол при большем основании равен α . Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

Решения:

1. $11 + 2x = \sqrt{22 - x}.$

ОДЗ: $\begin{cases} 22 - x \geq 0 \\ 11 + 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 22 \\ x \geq -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{11}{2}; 22\right].$

$$121 + 44x + 4x^2 = 22 - x,$$

$$4x^2 + 45x + 99 = 0,$$

$$D = 2025 - 1584 = 441 = 21^2.$$

$$x = \frac{-45 \mp 21}{8}, \quad x_1 = -\frac{66}{8} = -\frac{33}{4}, \quad x_2 = -3.$$

$$x_1 \notin \text{ОДЗ}.$$

Проверка:

$$x = -3$$

$$11 - 6 = \sqrt{22 + 3},$$

$$5 = 5.$$

Ответ: $\{-3\}$.

$$2. \sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = \sin^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = -\frac{\cos(2\alpha + 4\beta) + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} =$$

$$= -\cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta.$$

Ответ: $-\cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta$.

$$3. \log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \mp 1 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1) \cup (1;3) \cup (3;\infty).$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ \frac{2x}{|x-3|} \geq \sqrt{x^2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3) \\ \frac{2x}{|x-3|} \leq \sqrt{x^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ \frac{2x}{|x-3|} \leq \sqrt{x^2} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ \frac{2x}{3-x} \geq x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3) \\ \frac{2x}{3-x} \leq x \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ \frac{2x}{x-3} \leq x \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ \frac{2}{3-x} \geq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3) \\ \frac{2}{3-x} \leq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ \frac{2}{x-3} \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ 2 \geq 3-x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3) \\ 2 \leq 3-x \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ 2 \leq x-3 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ x \geq 1 \end{array} \right. \quad \not\Rightarrow 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3) \\ x \leq 1 \end{array} \right. \quad \not\Rightarrow 0 \Leftrightarrow x \in [5; \infty) \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ x \geq 5. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ: $[5; \infty)$.

4. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$

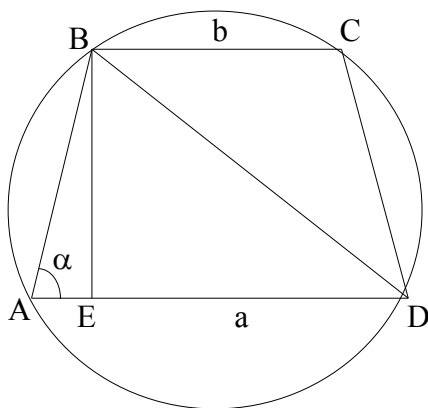
$$y' = 3x^2 - 10x + 3,$$

$$3x^2 - 10x + 3 > 0,$$

$$3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), (3; \infty)$.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$, $\angle BAD = \alpha$, $AD = a$, $BC = b$, около трапеции описана окружность.

Найти: R — радиус описанной окружности.

Проведем $BE \perp AD$. Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, совпадает с окружностью, описанной около $\triangle ABD$.

Искомый радиус можно найти по формуле $R = \frac{BD}{2 \sin \angle BAD}$. Из $\triangle$

ABE $BE = AE \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Поскольку $AE = \frac{a-b}{2}$, то $BE = \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Так

как $DE = \frac{a+b}{2}$, то из прямоугольного $\triangle BDE$:

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{(a+b)^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + a^2 + 2ab + b^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2ab(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2ab \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}.$

Вариант № 42.

1. Решить уравнение $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}.$

2. Решить неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}.$

3. Доказать, что $\cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}.$

4. Найти производную функции $y = \ln(x^2 - 4x).$

5. В треугольнике известны площадь S , сторона a и противолежащий угол α .
Найти сумму двух других сторон.

Решения:

$$\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{5} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}; \infty\right).$$

$$\sqrt{5x+7} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+3},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5x+7} &= \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+3} + 2\sqrt{(3x+4)(2x+3)}, \\ (3x+4)(2x+3) &= 0, \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = -\frac{3}{2} \notin \text{ОДЗ}.$$

Проверка: $x = -\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-\frac{20}{3} + 7} - \sqrt{-\frac{8}{3} + 3} &= \sqrt{-4 + 4}, \\ \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64},$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3,$$

$$6x + 10 - x^2 > 3,$$

$$x^2 - 6x - 7 < 0,$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -1.$$

Ответ: $x \in (-1; 7)$.

3. Доказать, что: $\cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}.$

$$\begin{aligned}&\cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33} = \\&= \frac{\sin \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
&= \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{16} \frac{\sin \frac{16\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{32} \frac{\sin \frac{32\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
&= \frac{1}{32} \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{33} \right)}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{32} \frac{\sin \frac{\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{32}.$$

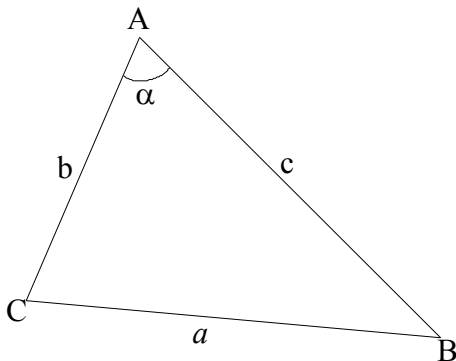
4. $y = \ln(x^2 - 4x)$.

$$y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x}.$$

5. Дано : ΔABC , $S_{ABCD} = S$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

Найти : $AB + AC$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$. Найдем произведение bc :



$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha, bc = \frac{2S}{\sin \alpha}.$$

Найдем сумму $b + c$. По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 + c^2 &= a^2 + 2bc \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Заменяем bc на $\frac{2S}{\sin \alpha}$:

$$b^2 + c^2 = a^2 + 4S \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 + 4S \cdot \operatorname{ctg} \alpha \\ 2bc = \frac{4S}{\sin \alpha}, \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 = a^2 + 4S \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{4S}{\sin \alpha},$$

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4S \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \frac{\cancel{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

получим $b + c = \sqrt{a^2 + 4S \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$

Ответ: $\sqrt{a^2 + 4S \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$

Вариант № 43.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.

3. Доказать, что $\frac{1}{32} = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$.

4. Найти производную функции $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

В треугольнике даны сторона a , противолежащий ей угол α и высота h , проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

Решения:

1. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; \infty).$$

$$\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+5} + 1,$$

$$2x-4 = x+5 + 2\sqrt{x+5} + 1,$$

$$x-10 = 2\sqrt{x+5},$$

$$x^2 - 20x + 100 = 4x + 20,$$

$$x^2 - 24x + 80 = 0,$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 4.$$

Проверка: $x_1 = 20$

$$\sqrt{36} - \sqrt{25} = 1,$$

$$6 - 5 = 1,$$

$$1 = 1.$$

$$x_2 = 4$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = 1,$$

$$2 - 3 = 1,$$

$$-1 \neq 1.$$

Ответ: $\{20\}$.

$$2. \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{32-2x},$$

$$x^2 + 2x > 32 - 2x,$$

$$x^2 + 4x - 32 > 0,$$

$$(x + 8)(x - 4) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (4; \infty)$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{1}{32} &= \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ &\cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \end{aligned}$$

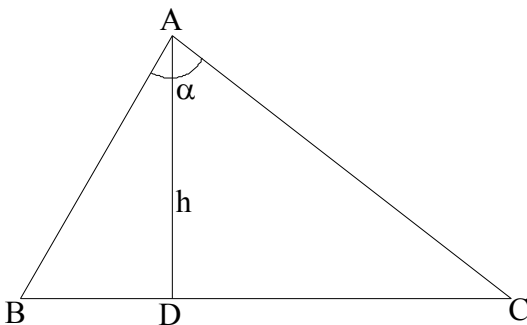
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \frac{1}{16} \frac{\sin \frac{32\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \frac{1}{32} \frac{\sin \frac{64\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \\
 &= \frac{1}{32} \frac{\sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{31} \right)}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \frac{1}{32} \frac{\sin \frac{2\pi}{31}}{\sin \frac{2\pi}{31}} = \frac{1}{32}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{32}.$$

4. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}.$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2(1-2 \ln x)}{x(1+x^2)^2}.$$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$,
 $\angle CAB = \alpha$, $AD \perp BC$,
 $AD = h$.

Найти: $AB + AC$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$. Из
 выражений $2S = ah$ и
 $2S = bc \cdot \sin \alpha$:

$$bc = \frac{ah}{\sin \alpha}.$$

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos \alpha$,

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos \alpha = a^2 + \frac{2ah \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Отсюда:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2ah \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2ah}{\sin \alpha}.$$

Значит:

$$b + c = \sqrt{\frac{a^2 \sin \alpha + 2ah \cdot \cos \alpha + 2ah}{\sin \alpha}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 \sin \alpha + 2ah \cdot \cos \alpha + 2ah}{\sin \alpha}}.$

Вариант № 44.

1. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = 2 - x$.

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x + \sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 3 \log_4 \frac{3}{x} \geq 3.$$

4. Найти интервалы монотонного возрастания функции

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5.$$

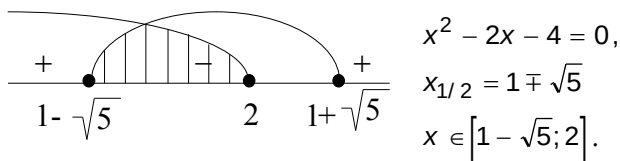
5. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

Решения:

1. $\sqrt{4 + 2x - x^2} = 2 - x$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \leq \begin{cases} (x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5})) \leq 0 \\ x \leq 2. \end{cases}$$



$$4 + 2x - x^2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$2x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x - 3) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3 \notin \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\{0\}$.

$$2. \quad \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= \frac{1 + \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \sin\frac{7\pi}{4} \cdot \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$3. \quad \sqrt{x^2 - 5x + 6} + x + \sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 3\log_4 \frac{3}{x} \geq 3.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 10x - 2x^2 - 12 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; 3\}.$$

Проверим, являются ли точки 2 и 3 решениями уравнения:

$$1) x = 2: 2 + 3 \log_4 \frac{3}{2} \geq 3, 3 \log_4 \frac{3}{2} \geq 1, \log_4 \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3},$$

$$\frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{4}, \frac{27}{8} \geq 4, 27 \geq 32 \text{ это не верно,}$$

$x = 2$ — не решение уравнения.

$$2) x = 3: 3 + \log_4 \frac{3}{3} \geq 3, 3 \geq 3 \text{ — верно.}$$

Ответ: $\{3\}$.

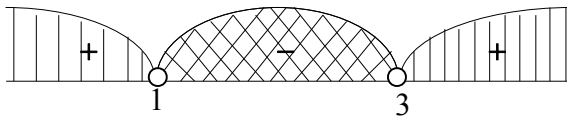
$$4. y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$$

$$y' = -3x^2 + 12x - 9.$$

$$-3x^2 + 12x - 9 > 0,$$

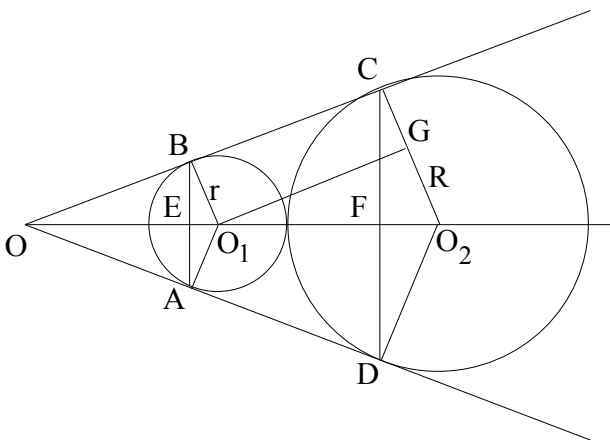
$$x^2 - 4x + 3 < 0,$$

$$(x-1)(x-3) < 0.$$



Ответ: $(1; 3)$.

5.



Дано: окружности $(O_1; r)$, $(O_2; R)$ касаются внешним образом; A, B, C, D — точки касания окружностей с общими касательными к окружностям.

Найти: S_{ABCD} .
Обозначим точку пересечения общих касательных BC и AD к окружностям

$(O_1; r)$, $(O_2; R)$ через O . Прямая O_1O_2 пересекается с общими касательными в точке O . Найдем отрезки AB и CD — основания трапеции $ABCD$ и ее высоту EF .

Предварительно найдем синус $\angle O_2O_1G$ ($O_1G \perp O_2C$). Пусть $\angle O_2O_1G = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle O_1O_2G$ ($\angle O_2GO_1 = 90^\circ$). В нем $O_1O_2 = R + r$,

$$O_2G = O_2C - O_1B = R - r. \text{ Поэтому } \sin \alpha = \frac{O_2G}{O_2O_1} = \frac{R - r}{R + r}.$$

Определим AB и CD . Из прямоугольных треугольников EBO_1 и FCO_2 , учитывая, что $\angle EBO_1 = \angle FCO_2 = \alpha$, имеем

$$BE = BO_1 \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha, CF = CO_2 \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha,$$

$$AB = 2BE = 2r \cdot \cos \alpha, CD = 2CF = 2R \cdot \cos \alpha. \text{ Определим высоту } EF.$$

Так как $EO_1 = BO_1 \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$, $FO_2 = CO_2 \cdot \sin \alpha = R \cdot \sin \alpha$, то $EF = R + r + EO_1 - FO_2 = R + r + r \sin \alpha - R \sin \alpha$.

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot EF = (r + R) \cos \alpha (R(1 - \sin \alpha) + r(1 + \sin \alpha)) =$$

$$= (r + R) \sqrt{1 - \frac{(R - r)^2}{(R + r)^2}} \left(R \left(1 - \frac{R - r}{R + r} \right) + r \left(1 + \frac{R - r}{R + r} \right) \right) =$$

$$= (r + R) \sqrt{\frac{4Rr}{(R + r)^2}} \left(\frac{2Rr}{R + r} + \frac{2Rr}{R + r} \right) = \frac{8(Rr)^{3/2}}{R + r}.$$

Ответ: $\frac{8(Rr)^{3/2}}{R + r}.$

Вариант № 45.

1. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17}{8}\pi - \alpha\right).$$

3. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \sqrt{8x - 2x^2 - 6} \leq 0.$$

4. Найти интервалы монотонного возрастания функции

$$y = 0,25x^4 + x^2 - 6.$$

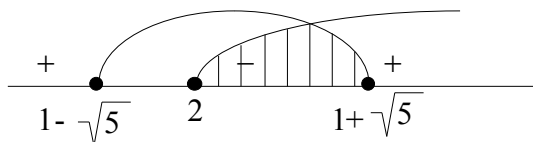
5. Около круга радиуса R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

Решения:

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \leq \begin{cases} \left(x - (1 - \sqrt{5})\right)\left(x - (1 + \sqrt{5})\right) \leq 0 \\ x \geq 2; \end{cases}$$



$$x^2 - 2x - 4 = 0,$$

$$x_{1/2} = 1 \mp \sqrt{5}.$$

$$x \in [2; 1 + \sqrt{5}].$$

$$4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4,$$

$$2x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x - 3) = 0,$$

$$x_1 = 0, \notin \text{ОДЗ}, x_2 = 3.$$

Проверка: $x_2 = 3$

$$\sqrt{4 + 6 - 9} = 3 - 2,$$

$$1 = 1.$$

Ответ: $\{3\}$.

$$2. \quad \sin^2\left(\frac{9}{8}\pi + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17}{8}\pi - \alpha\right)$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} = \sin(2\alpha - \pi) \sin \frac{13\pi}{4} =$$

$$= -\sin 2\alpha \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$.

$$3. \quad \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \sqrt{8x - 2x^2 - 6} \leq 0.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1) \geq 0 \\ (x-3)(x-1) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{3; 1\}$$

Проверим точки $x = 3$ и $x = 1$ — являются ли они решениями уравнения:

$$x = 3: \log_5 \frac{3}{5} \leq 0 \text{ — верно.}$$

$$x = 1: \log_5 \frac{1}{5} \leq 0 \text{ — верно.}$$

Ответ: $\{1; 3\}$.

$$4. y = 0,25x^4 + x^2 - 6.$$

$$y' = x^3 + 2x,$$

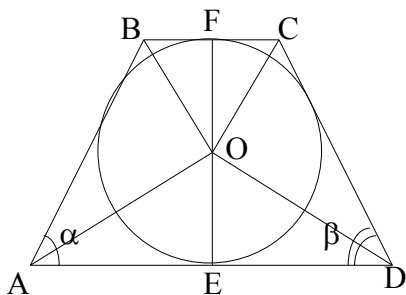
$$x^3 + 2x > 0,$$

$$x(x^2 + 2) > 0,$$

$$x > 0.$$

Ответ: $(0; \infty)$.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция,
 (O, R) — вписанная окружность,
 $\angle DAE = \alpha$, $\angle EDC = \beta$.

Найти: $S_{\text{тр.}}$

Пусть $FE \perp AD$, F, E — точки касания вписанной окружности с трапецией. Проведем AO, DO, OB, OC . Так как точка O лежит на биссектрисах углов DAB и EDC ,

$$\text{то } \angle OAE = \frac{\alpha}{2}, \angle EDO = \frac{\beta}{2}.$$

Так как BO и CO — биссектрисы соответственно углов ABC и BCD , то $\angle OBF = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle OCF = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$. Учитывая это, из

$\triangle AEO$ и $\triangle EDO$ получаем, что $AE = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $ED = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

Аналогично из $\triangle BOF$ и $\triangle CFO$:

$$BF = R \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad FC = R \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{AD + CB}{2} &= \frac{AE + ED + BF + FC}{2} = \frac{R}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= \frac{R}{2} \left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} \right) = R \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \\ &= R \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{2R \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \end{aligned}$$

Тогда $S_{\text{тр.}} = \frac{AD + CB}{2} \cdot FE$, $FE = 2R$,

$$S_{\text{тр.}} = \frac{4R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Ответ: $\frac{4R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$

Вариант № 46.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$.

2. Решить неравенство $4^{4(x+1)} \leq \sqrt[5]{16^{x+100}}$.

3. Доказать, что $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \frac{1}{4}$.

4. Найти производную функции $y = x \ln x$.

5. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q . Найти катеты треугольника.

Решения:

1. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; \infty).$$

$$\sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x+1},$$

$$2x+3 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x+1,$$

$$10\sqrt{x+1} = 23 - x,$$

$$100x + 100 = 529 - 46x + x^2,$$

$$x^2 - 146x + 429 = 0,$$

$$x_1 = 143, \quad x_2 = 3.$$

Проверка: $x_1 = 143$

$$\sqrt{286+3} + \sqrt{144} = 5,$$

$$17 + 12 = 5,$$

$$29 \neq 5;$$

$$x_2 = 3$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5,$$

$$5 = 5.$$

Ответ: $\{3\}$.

2.

$$4^{4(x+1)} \leq \sqrt[5]{16^{x+100}},$$

$$4^{4x+4} \leq 4^{\frac{2}{5}(x+100)},$$

$$20x + 20 \leq 2x + 200,$$

$$18x \leq 180,$$

$$x \leq 10.$$

Ответ: $(-\infty; 10]$.

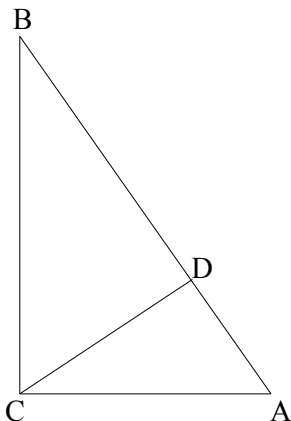
3. Доказать, что $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ &= \cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. $y = x \ln x$.

$$y' = \ln x + 1.$$

5._



Дано: $\triangle ABC$, $\angle BCA = 90^\circ$, $CD \perp AB$,
 $S_{\triangle CDB} = Q$, $S_{\triangle ADC} = q$.

Найти: AC , BC .

Пусть $AC = x$, $BC = y$, $y > x$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ADC и CDB ($\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$),

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$ ($\angle CAD = \angle BCD$).

Следовательно:

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CDB}}, \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{q}{Q}.$$

$$\text{Найдем } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle CDB},$$

$$\frac{1}{2} xy = Q + q.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} = \frac{q}{Q} \\ xy = 2(Q + q) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{q}{Q}} \\ xy = 2(Q + q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2\sqrt{\frac{q}{Q}}(Q + q) \\ y^2 = 2(Q + q)\sqrt{\frac{Q}{q}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{\frac{q}{Q}} \cdot \sqrt{2(Q + q)} \\ y = \sqrt{2(Q + q)} \cdot 4\sqrt{\frac{Q}{q}} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } AC = 4\sqrt{\frac{q}{Q}} \cdot \sqrt{2(Q + q)}, \quad BC = \sqrt{2(Q + q)} \cdot 4\sqrt{\frac{Q}{q}}.$$

Вариант № 47.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$.

2. Решить неравенство $\sqrt{9^{x(x-1)-5}} > \sqrt[4]{3}$.

3. Доказать, что $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$.

4. Найти производную функции $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.

5. Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная что произведение тангенсов половин этих углов равно $\frac{1}{6}$.

Решения:

1. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; \infty).$$

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1},$$

$$2x+3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x+1,$$

$$x+1 = 2\sqrt{x+1},$$

$$\begin{cases} x+1 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Проверка: $x_1 = -1$

$$\sqrt{-2+3} - \sqrt{-1+1} = 1,$$

$$1 = 1;$$

$$x_2 = 3$$

$$\sqrt{6+3} - \sqrt{3+1} = 1,$$

$$1 = 1.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

2. $\sqrt{9^{x(x-1)-5}} > \sqrt[4]{3},$

$$3^{x(x-1)-5} > 3^{\frac{1}{4}},$$

$$x^2 - x - 5 > \frac{1}{4},$$

$$4x^2 - 4x - 21 > 0,$$

$$x = \frac{2 \mp \sqrt{88}}{4}, x_1 = \frac{1 - \sqrt{22}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{22}}{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{22}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{22}}{2}; \infty\right).$

3. Доказать, что $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$.

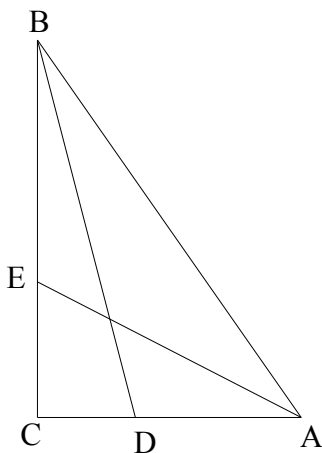
$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \sin 18^\circ &= \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 2 \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ = 2 \cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ = \\ &= 2 \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \frac{\frac{1}{2} \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{2} \frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{2} \frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

$$\sin 30^\circ = \sin 30^\circ.$$

4. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$

$$y' = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x}(1 - \ln x)}{(1 + \ln x)^2} = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}.$$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle BCA = 90^\circ$,

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{6}.$$

Найти: $\cos A$, $\cos B$.

Пусть AE и BD — биссектрисы углов B и A .
Обозначим $\angle ABC$ через α , тогда

$$\angle CAB = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\angle \frac{B}{2} = \frac{\alpha}{2}, \angle \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

По условию $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{6}$,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6},$$

$$6 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t \\ 6t^2 - 5t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t \\ t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \\ \cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{3}{5} \\ \cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}$.

Вариант № 48.

1. Решить уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$.
2. Решить неравенство $2^{x-6} \leq \sqrt[3]{1/32}$.
3. Доказать, что $8 \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} = 1$.
4. Найти производную функции $y = \sqrt{\ln x}$.
5. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними.

Решения:

1. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; \infty).$$

$$\sqrt{2x+6} = 7 - \sqrt{x+4},$$

$$2x+6 = 49 - 14\sqrt{x+4} + x+4,$$

$$x - 47 = -14\sqrt{x+4},$$

$$x^2 - 94x + 2209 = 196x + 784,$$

$$x^2 - 290x + 1425 = 0,$$

$$x_1 = 285, \quad x_2 = 5.$$

Проверка: $x_1 = 285$

$$\sqrt{289} + \sqrt{576} = 7,$$

$$17 + 24 = 7,$$

$$41 \neq 7,$$

$$x_2 = 5.$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7,$$

$$3 + 4 = 7,$$

$$7 = 7.$$

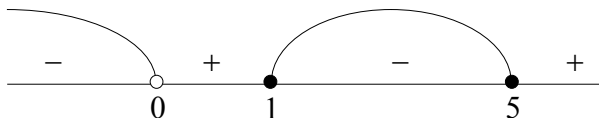
Ответ: $\{5\}$.

$$2. \quad 2^{x-6} \leq \sqrt[5]{1/32}$$

$$\text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$2^{x-6} \leq 2^{-\frac{5}{x}},$$

$$x - 6 \leq -\frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-5)}{x} \leq 0.$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 5]$.

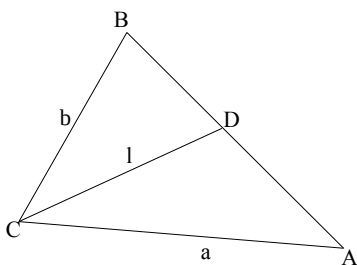
$$3. \text{ Доказать, что } 8 \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 8 \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} &= 8 \frac{\cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \\
 &= 4 \frac{\cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \\
 &= 2 \frac{\cos \frac{4\pi}{9} \cdot \sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right)}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = 1. \\
 1 &= 1.
 \end{aligned}$$

4. $y = \sqrt{\ln x}$.

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AC = a$, $BC = b$,
 CD — биссектриса, $CD = l$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Обозначим $\angle BCA$ через α ,

$$\angle BCD = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}.$$

Найдем $S_{\triangle ABC}$ по двум формулам:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} a \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$ab \sin \alpha = (a + b)l \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2ab \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = (a + b)l \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{l(a + b)}{ab} \sqrt{1 - \frac{l^2(a + b)^2}{4a^2b^2}} = \\ &= \frac{l(a + b)}{2a^2b^2} \sqrt{4a^2b^2 - l^2(a + b)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} = \frac{l(a + b)}{4ab} \sqrt{4a^2b^2 - l^2(a + b)^2}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{l(a + b)}{4ab} \sqrt{4a^2b^2 - l^2(a + b)^2}.$$

Вариант № 49.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$.

2. Решить неравенство $(0,3)^{2x^2 - 3x + 6} < 0,00243$.

3. Доказать, что $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$.

4. Найти производную функции $y = \ln^2 x$.

5. Найти угол треугольника, если известно, что биссектриса этого угла равна l , а стороны, образующие этот угол, равны a и b .

Решение:

1. $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}; \infty \right).$$

$$\sqrt{4x+1} = 4 - \sqrt{2x-3}$$

$$4x+1 = 16 - 8\sqrt{2x-3} + 2x-3$$

$$2x-12 = -8\sqrt{2x-3}$$

$$x-6 = -4\sqrt{2x-3}$$

$$x^2 - 12x + 36 = 32x - 48$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0$$

$$x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Проверка: $x_1 = 42$

$$\sqrt{81} + \sqrt{169} = 4$$

$$9 + 13 = 4$$

$$22 \neq 4$$

$$x_2 = 2$$

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{8+1} = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4 = 4.$$

Ответ: $\{2\}$.

2.

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$$

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < (0,3)^5$$

$$2x^2 - 3x + 6 > 5$$

$$2x^2 - 3x + 1 > 0$$

$$(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

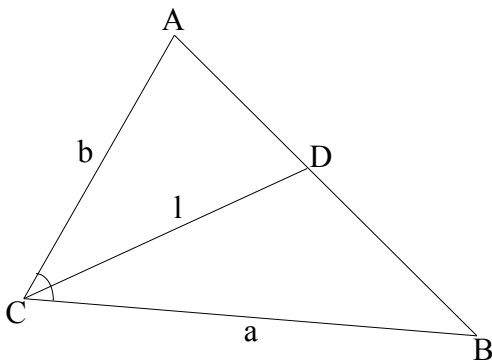
3. Доказать, что $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ &= \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \\&= \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\&= \frac{1}{8} \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16} \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16} \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16} \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16} .\end{aligned}$$
$$\frac{1}{16} = \frac{1}{16} .$$

4. $y = \ln^2 x$

$$y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln x .$$

5._



Дано: $\triangle ABC$, CD — биссектриса, $CD = l$, $AC = b$, $BC = a$.

Найти: $\angle ACB$.

Обозначим искомый $\angle ACB$ через α . Тогда

$$\angle ACD = \angle BCD = \frac{\alpha}{2} .$$

Для отыскания угла α найдем двумя способами выражения для площади $S_{\triangle ABC}$ и сравним эти выражения.

$$\text{Имеем: } S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha .$$

Учитывая, что $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB} + S_{\triangle ACD}$, получаем

$$S = \frac{1}{2} al \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} bl \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} al \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} bl \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$ab \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} (a + b),$$

$$2ab \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} (a + b),$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab},$$

$$\alpha = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$$

Ответ: $2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$.

Вариант № 50.

1. Решить неравенство $2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

4. Составить уравнение касательной к кривой $y = 2x^4 - x^3 + 1$ в точке $P(-1; 4)$.

5. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если сумма двух неравных высот этого треугольника равна l , а угол при вершине равен α .

Решения:

1. $2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; \infty)$.

$$\log_8(x-2)^2 > \log_8 8^{\frac{2}{3}} + \log_8(x-3)$$

$$\log_8(x-2)^2 > \log_8(4(x-3)).$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ (x-2)^2 > 4x-12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ x^2 - 8x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ (x-4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ x > 4, x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; \infty) \cup (3, 4). \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

ОДЗ: $x, y \in R$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = a \\ \sqrt[3]{y} = b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - ab + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ (a+b)^2 - 3ab = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = 1 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 1 \\ y = 27 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 27 \\ y = 1. \end{cases} \end{bmatrix}$$

Ответ: $\{(1; 27); (27; 1)\}$.

3. $2(1 - \sin x - \cos x) + \cancel{tgx} + \cancel{ctgx} = 0$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2(1 - \sin x - \cos x) + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$2(1 - \sin x - \cos x) + 2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = 0$$

$$1 - (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2 \sin x \cos x} = 0$$

$$1 - (\sin x + \cos x) + \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2 - 1} = 0$$

$$\sin x + \cos x = t, \quad |t| \leq \sqrt{2}$$

$$1 - t + \frac{1}{t^2 - 1} = 0$$

$$(1 - t)(t^2 - 1) + 1 = 0$$

$$t^2 - 1 - t^3 + t + 1 = 0$$

$$t^3 - t^2 - t = 0$$

$$t(t^2 - t - 1) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$$

$$t_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \sin x + \cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4. \quad y = 2x^4 - x^3 + 1, \quad P(-1; 4)$$

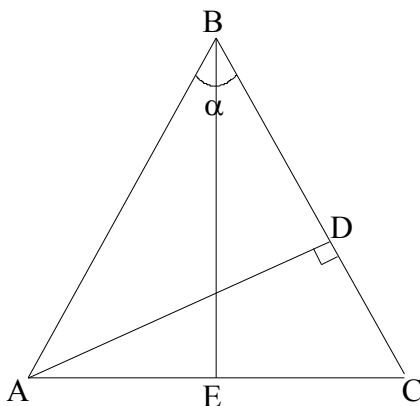
$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0), \quad x_0 = -1, \quad y(x_0) = 4$$

$$y' = 8x^3 - 3x^2, \quad y'(x_0) = -8 - 3 = -11$$

$$y = 4 - 11(x + 1) = -11x - 7.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad 11x + y + 7 = 0.$$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle CBA = \alpha$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ $BE + AD = l$.

Найти: $AB = BC$.

Пусть $AD = a$, $BE = b$, $AB = BC = x$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то

$$\angle EBA = \frac{1}{2} \angle CBA = \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle ABD$

($\angle ADB = 90^\circ$):

$$AD = a = AB \cdot \sin \alpha = x \sin \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle AEB$ ($\angle AEB = 90^\circ$):

$$BE = b = AB \cos \frac{\alpha}{2} = x \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

По условию $a + b = l = x \left(\sin \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$, откуда

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{\sin \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \\ &= \frac{l}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{l}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12} \right)}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{l}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12} \right)}.$

Вариант № 51.

1. Решить уравнение $\lg(x - 3) + \lg(x + 6) = \lg 2 + \lg 5$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos^2 \left(\frac{3}{8} \pi - \frac{\alpha}{4} \right) - \cos^2 \left(\frac{11}{8} \pi + \frac{\alpha}{4} \right).$$

3. Доказать, что если $4b + a = 1$, то выполняется неравенство

$$a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}.$$

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

5. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5 см.

Решения:

$$\lg(x - 3) + \lg(x + 6) = \lg 2 + \lg 5.$$

ОДЗ: $x \in (3; \infty)$

$$\lg((x-3)(x+6)) = \lg 10$$

$$(x-3)(x+6) = 10$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x_1 = -7, \quad x_2 = 4$$

$x_1 \notin \text{ОДЗ}$.

Проверка: $x = 4$

$$\lg 1 + \lg 10 = \lg 2 + \lg 5$$

$$\lg 10 = \lg 10$$

$$1 = 1.$$

Ответ: $\{4\}$.

2.

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11}{8}\pi + \frac{\alpha}{4}\right) &= \frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \sin \frac{7\pi}{4} \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \quad 4b + a = 1, \quad a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}.$$

Так как $4b + a = 1$, то $a^2 + 8ab + 16b^2 = 1$,

Учитывая, что $(2a - 2b)^2 \geq 0$, то есть $4a^2 - 8ab + 4b^2 \geq 0$, получаем, складывая неравенства:

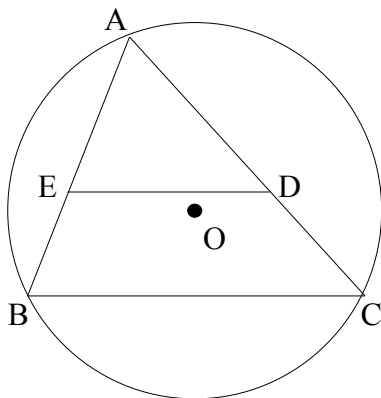
$$5a^2 + 20b^2 \geq 1,$$

$$a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}.$$

4. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

5.



Дано: окр. (O, R) , AB, AC — хорды, $AB = 9$ см, $AC = 17$ см, $BE = EA$, $AD = DC$, $ED = 5$ см.

Найти: R .

Соединим точки B и C , тогда окр. (O, R) описана около $\triangle ABC$, ED — средняя линия в $\triangle ABC$, $BC = 2ED = 10$ см. Найдем площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона:

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2},$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}.$$

$$p = \frac{9 + 17 + 10}{2} = 18, S_{\triangle ABC} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 8} = 9 \cdot 4 = 36.$$

$$\text{Тогда } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8} = 10\frac{5}{8} \text{ (см)}.$$

Ответ: $R = 10,625$ см.

Вариант № 52.

1. Решить уравнение $\lg(x - 4) + \lg(x + 3) = \lg(5x + 4)$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right).$$

3. Доказать, что при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, выполняется неравенство

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) \geq 8.$$

4. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

5. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей равно 4 см.

Решения:

$$\lg(x - 4) + \lg(x + 3) = \lg(5x + 4).$$

ОДЗ: $x \in (4; \infty)$

$$\lg((x - 4)(x + 3)) = \lg(5x + 4)$$

$$(x - 4)(x + 3) = 5x + 4$$

$$x^2 - x - 12 = 5x + 4$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -2 \notin \text{ОДЗ}.$$

Проверка: $x_1 = 8$

$$\lg 4 + \lg 11 = \lg 44$$

$$\lg 44 = \lg 44.$$

Ответ: $\{8\}$.

$$2. \quad \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right)}{2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos\left(\frac{17\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} = \sin(2\alpha - \pi) \cdot \sin \frac{13\pi}{4} = \\
 &= -\sin 2\alpha \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

3. $x > 0, y > 0, z > 0, \left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) \geq 8.$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) = \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) = \\
 &= 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + 1 = 2 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right).
 \end{aligned}$$

При любом $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Действительно, $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0.$$

Следовательно, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2, \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2, \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2.$

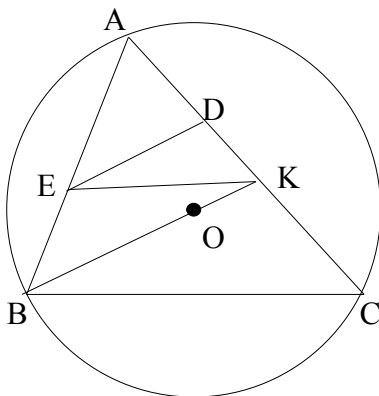
Поэтому $\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) \geq 8.$

Равенство в случае $x = y = z.$

4. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

$$y' = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}.$$

5.



Дано: окр. (O, R) , AB, AC — хорды,
 $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $BE = EA$,
 $ED \perp AC$, $ED = 4$ см.

Найти: R .

Проведем BC , а в $\triangle ABC$ проведем среднюю линию EK . В

прямоугольном $\triangle AED$ ($\angle EDA = 90^\circ$): $AE = \frac{AB}{2} = 5$ см, $ED = 4$ см.

По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AE^2 - ED^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ см.}$$

Поскольку

$AK = \frac{1}{2} AC = 6$ см, то $DK = 3$ см. Из равенства прямоугольных

треугольников $\triangle AED$ и $\triangle KED$ ($AD = DK$, ED — общая сторона) находим, что $EK = AE = 5$ см, $BC = 2EK = 10$ см.

Радиус R найдем по формуле $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}}$.

Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = BC$), $BK \perp AC$, $BK = 2ED = 8$ (см),

$$\text{то } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6,25 см.

Вариант № 53.

1. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right).$$

3. Решить уравнение $\log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

4. Вычислить $f'(3)$, если $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.

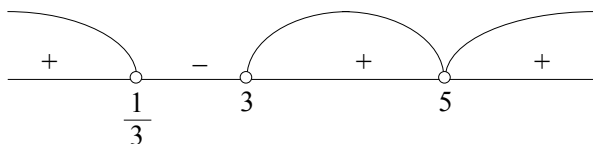
5. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение:

1. $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &\neq 0 \\ x &\in \mathbb{R} \setminus \{5\} \end{aligned}$$

$$\frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)}{(x - 5)^2} > 0$$



Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; 5) \cup (5; \infty)$.

2.
$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} =$$

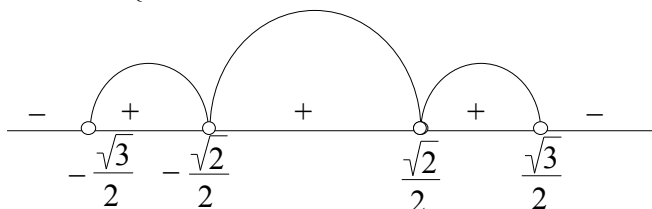
$$= \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} = -\sin \frac{5\pi}{2} \cdot \sin 4\alpha = -\sin 4\alpha.$$

Ответ: $-\sin 4\alpha$.

$$3. \log_{3-4x^2}(9-16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3-4x^2 > 0 \\ 3-4x^2 \neq 1 \\ 9-16x^4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x) > 0 \\ 4x^2 \neq 2 \\ (3-4x^2)(3+4x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x) > 0 \\ x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\log_{3-4x^2}((3-4x^2)(3+4x^2)) = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$1 + \log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 2 + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\log_{3-4x^2}(3+4x^2) = \log_{3-4x^2}(3-4x^2) + \log_{3-4x^2} 2$$

$$\log_{3-4x^2}(3+4x^2) = \log_{3-4x^2}(2(3-4x^2))$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 3 + 4x^2 = 6 - 8x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \mp \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Проверка:

$$x = \mp \frac{1}{2}$$

$$\log_2 8 = 2 + \frac{1}{\log_2 2}$$

$$3 = 3.$$

Ответ: $x = \mp \frac{1}{2}$.

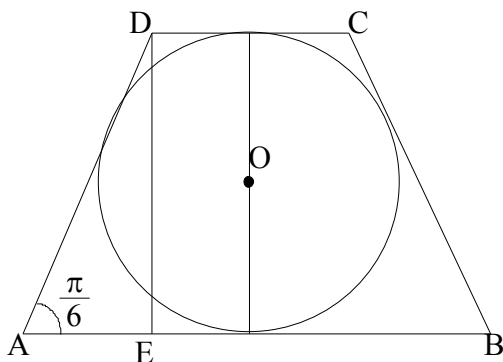
$$4. f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2}$$

$$f'(3) = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $S_{ABCD} = S$, $AD = BC$.

$\angle DAE = \frac{\pi}{6}$, O — центр

вписанной окружности.

Найти: $AD = BC$.

Проведем $DE \perp AB$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle DAE$ ($\angle AED = 90^\circ$). В $\triangle DAE$ катет DE лежит против угла в 30° , поэтому $AD = 2DE$. Поскольку в трапецию

$ABCD$ вписана окружность, то площадь трапеции $ABCD$ можно найти по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot DE = \frac{1}{2} AD^2$. Поэтому $\frac{1}{2} AD^2 = S$, $AD^2 = 2S$,

$$AD = \sqrt{2S}.$$

Ответ: $AD = BC = \sqrt{2S}$.

Вариант № 54.

1. Решить уравнение $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1.$$

3. Доказать, что при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, верно неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

4. Найти производную функции $y = \left(1 - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

5. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей.

Определить длину касательной.

Решения:

$$1. \log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3-x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$$

$$\log_2((3-x)(1-x)) = 3$$

$$(3-x)(1-x) = 8$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 5, x_2 = -1$$

$$x_1 \notin \text{ОДЗ.}$$

Проверка:

$$x = -1$$

$$\log_2 4 + \log_2 2 = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 = 3.$$

$$\text{Ответ: } \{-1\}.$$

$$2. \sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = \sin^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \\ &= \frac{\cos(2\alpha + 4\beta) + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = -\cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta. \end{aligned}$$

$$3. a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0.$$

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Учтем, что $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, тогда:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \Leftrightarrow \sqrt{ab + bc + ad + cd} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab + bc + ad + cd + 2\sqrt{ab \cdot cd} - 2\sqrt{ab \cdot cd}} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 + (\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

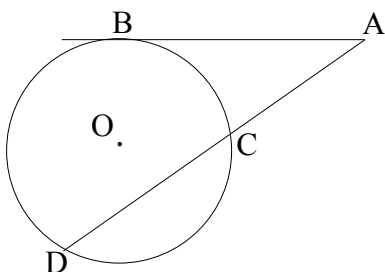
Так как все преобразования можно выполнить в обратном порядке, то исходное неравенство верно, потому что последнее неравенство верно.

Равенство имеет место при $bc = ad$.

$$4. \ y = \left(1 - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^4.$$

$$y' = 4 \left(1 - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4(1 - 2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}.$$

5.



Дано: окр. O , AB — касательная, AD — секущая, $AD = 12$ см, $AB = \frac{2}{3}CD$.

Найти: AB .

Пусть $AB = x$, тогда $CD = \frac{3}{2}x$,

$AC = 12 - \frac{3}{2}x$. По свойству

касательной и секущей, проведенных из одной точки к одной и той же окружности, $AB^2 = AD \cdot AC$.

$$x^2 = 12 \left(12 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$x^2 = 144 - 18x$$

$$x^2 + 18x - 144 = 0$$

$$x_1 = -24, \quad x_2 = 6$$

$$x_1 < 0.$$

Следовательно, $AB = 6$ см.

Ответ: 6 см.

Вариант № 55.

1. Решить уравнение

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-1) = 3\log_2 2 + \log_2(x-4).$$

2. Упростить выражение, приведя его к произведению

$$\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1.$$

3. Доказать, что при $a + b = 1$ справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

4. Найти производную функции $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}.$

5. Дана точка Р, удаленная на 7 см от центра окружности с радиусом 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые хорда делится точкой Р ?

Решения:

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-1) = 3\log_2 2 + \log_2(x-4)$$

ОДЗ: $x \in (4; \infty).$

$$\log_2((x-3)(x-1)) = \log_2(8(x-4))$$

$$x^2 - 4x + 3 = 8x - 32$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 7.$$

Проверка : $x_1 = 5$

$$\log_2 2 + \log_2 4 = 3\log_2 2 + \log_2 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$3 = 3$$

$$x_2 = 7$$

$$\log_2 4 + \log_2 6 = 3 \log_2 2 + \log_2 3$$

$$2 + 1 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3$$

$$3 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3.$$

Ответ: $\{5; 7\}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = \cos^2(\alpha + 2\beta) - \cos^2(\alpha - 2\beta) = \\ & = \frac{1 + \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \frac{\cos(2\alpha + 4\beta) - \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} = \\ & \quad -\sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta. \end{aligned}$$

$$3. \quad a + b = 1, \quad a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Так как $a + b = 1$, то $a^2 + 2ab + b^2 = 1$.

Очевидно, что $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.

Складывая эти неравенства, получим

$$2a^2 + 2b^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$.

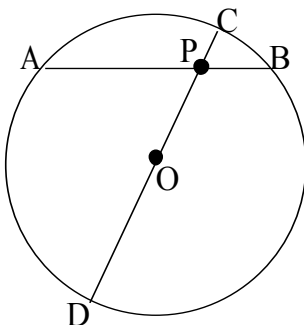
Очевидно: $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$.

Потому: $2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

$$4. \quad y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}.$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x}) - \frac{1}{\sqrt{2x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{2x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{(1 + \sqrt{2x})^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2}.$$

5.



Дано: окр. $(O; 11)$, $PO = 7$ см,

$AB = 18$ см, $P \in AB$.

Найти: AP , BP .

Пусть $AP > BP$, $PB = x$, тогда

$AP = 18 - x$.

Поскольку $OC = OD = 11$ см, а $OP = 7$ см, то $DP = 11 + 7 = 18$ см, $PC = 11 - 7 = 4$ см.

Учитывая, что $AP \cdot BP = PC \cdot DP$,

$$(18 - x) \cdot x = 18 \cdot 4$$

$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = 12.$$

Поскольку $AP > BP$, то $BP = 6$ см, $AP = 12$ см.

Ответ: 6 см, 12 см.

Вариант № 56.

1. Решить уравнение $(\lg x)/(\lg(x+1)) = -1$.

2. Упростить выражение, приведя его к произведению

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8} \cdot 15 - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right).$$

3. Доказать, что при $a > 0, b > 0, c > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

4. Найти производную функции $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})$.

5. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

Решения:

$$1. (\lg x)/(\lg(x+1)) = -1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \infty).$$

$$\lg x = -\lg(x+1)$$

$$\lg x + \lg(x+1) = 0$$

$$\lg(x(x+1)) = 0$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0, \quad x_1 \notin \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{\lg \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{\lg \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{\lg \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{\lg \frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{\lg \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{\lg \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2(\sqrt{5} - 1)}} = \frac{\lg \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{\lg \frac{4}{2(\sqrt{5} - 1)}} =$$

$$= \frac{\lg \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{\lg \frac{2}{\sqrt{5} - 1}} = -1, \quad -1 = -1.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{8} \cdot 15 - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) &= \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} - \\
 - \frac{1 + \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} &= - \frac{\cos\left(\frac{15\pi}{4} - 4\alpha\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = \\
 &= -\cos(4\pi - 4\alpha) \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

$$3. \ a > 0, b > 0, c > 0, \quad \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Учитывая, что при $x > 0, y > 0$ $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$$\left((\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\right), \text{ получаем:}$$

$$\frac{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b}} = c,$$

$$\frac{\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ab}{c}} = b,$$

$$\frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} \geq \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c}} = a.$$

Складывая эти неравенства, получаем

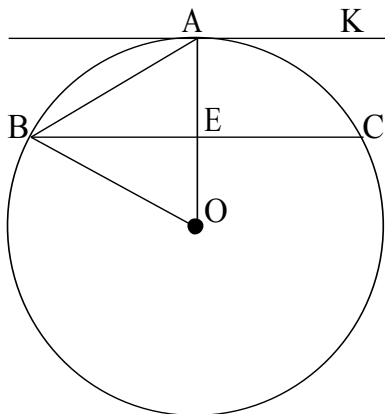
$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

При $a = b = c$ имеет место равенство.

$$4. \ y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x}).$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x}) + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(1 + \sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2}.$$

5.



Дано: окр. (O, R) , AB — хорда, $AB = 10$ см, BC — секущая, $BC = 12$ см, AK — касательная, $BC \parallel AK$.

Найти: R .

Пусть A — точка касания AK с окружностью. Проведем OA и BO . Поскольку OA — радиус, проведенный в точку касания, то $OA \perp AK$, $OA \perp BC$, поэтому

$$BE = \frac{BC}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Из $\triangle ABE$ ($\angle BEA = 90^\circ$) находим:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см)}. \text{ Тогда } EO = R - 8.$$

Из $\triangle BOE$ ($\angle OEB = 90^\circ$): $OB^2 = BE^2 + OE^2$,

$$R^2 = 36 + (R - 8)^2$$

$$R^2 = 36 + R^2 - 16R + 64$$

$$16R = 100$$

$$R = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6,25 см.

Вариант № 57.

1. Решить уравнение $\log_{10}(x - 2) - \frac{1}{2} \lg(3x - 6) = 1 - \lg 5$.

2. Упростить выражение, приведя его к произведению

$$\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right).$$

3. Доказать, что при любых действительных a и b , удовлетворяющих условию $a + b = 2$, справедливо неравенство $a^4 + b^4 \geq 2$.

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$.

5. Из точки А, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки А до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Решения:

1. $\lg(x - 2) - \frac{1}{2} \lg(3x - 6) = 1 - \lg 5$

ОДЗ: $x \in (2; \infty)$

$$2 \lg(x - 2) - \lg(3x - 6) = 2 - 2 \lg 5$$

$$\lg(x - 2)^2 + \lg 25 = \lg 100 + \lg(3x - 6)$$

$$25(x - 2)^2 = 100 \cdot 3 \cdot (x - 2)$$

$$(x - 2)^2 = 12 \cdot (x - 2)$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \notin \mathbb{A}\mathbb{C} \\ x = 14. \end{cases}$$

Проверка: $x = 14$

$$\lg 12 - \frac{1}{2} \lg 36 = 1 - \lg 5$$

$$\lg 12 - \lg 6 = \lg 10 - \lg 5$$

$$\lg 2 = \lg 2.$$

Ответ: $\{14\}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \\ & = \frac{1 - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4} - 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} = -\sin(2\pi - 4\alpha) \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$3. \ a + b = 2, \ a^4 + b^4 \geq 2$$

Пусть $a = 1 + \alpha$, $b = 1 - \alpha$, тогда

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (1 + \alpha)^4 + (1 - \alpha)^4 = (1 + \alpha^4 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha^3) + \\ &+ (1 + \alpha^4 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 2\alpha^2 - 4\alpha^3) = \\ &= 2 + 12\alpha^2 + 2\alpha^4 \geq 2. \end{aligned}$$

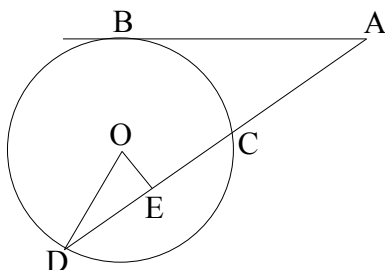
Равенство при $\alpha = 0$, т.е. при $a = b = 1$.

$$4. \ y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - \sqrt{x} + 1)$$

$$y = x^{\frac{7}{2}} - x + \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{7}{2}x^{5/2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5.



Дано: окр. (O, R) , AB — касательная,
 $AB = 6$ см, AD — секущая,
 $AD = 32$ см, $OE \perp DC$, $OE = 5$ см.

Найти: R .

Пусть $AC = x$, тогда $DC = 32 - x$.
 По свойству касательной и секущей,
 проведенных нами из одной точки к
 одной и той же окружности:

$$AB^2 = AD \cdot AC,$$

$$256 = 32 \cdot x, \quad x = 8, \quad DC = 24.$$

Поскольку $OE \perp DC$, то $DE = \frac{DC}{2} = 12$. Из прямоугольного
 $\triangle ODE$ ($\angle DEO = 90^\circ$) по теореме Пифагора:

$$R = OD = \sqrt{DE^2 + OE^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 13 см.

Вариант № 58.

1. Решить уравнение $\sqrt{4 + 2x - x^2} = 2 - x$.

2. Упростить выражение, приведя к произведению

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x + \sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 3 \log_4 \frac{3}{x} \geq 3.$$

4. Найти интервалы монотонного возрастания функции

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5.$$

5. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

Решения:

$$1. \sqrt{4 + 2x - x^2} = 2 - x$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - (1 - \sqrt{5}))(x - (1 + \sqrt{5})) \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{5}$$

$$x \in [1 - \sqrt{5}; 2]$$

$$4 + 2x - x^2 = 4 - 4x + x^2$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

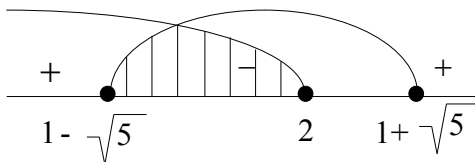
$$x_1 = 0, x_2 = 3 \notin \text{ОДЗ.}$$

Проверка: $x = 0$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2.$$

Ответ: $\{0\}$.



$$2. \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= \frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \sin \frac{7\pi}{4} \cdot \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$3. \sqrt{x^2 - 5x + 6} + x + \sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 3\log_4 \frac{3}{x} \geq 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 10x - 2x^2 - 12 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; 3\}.$$

Проверим, являются ли точки 2 и 3 решениями уравнения:

$$1) x = 2: 2 + 3\log_4 \frac{3}{2} \geq 3, 3\log_4 \frac{3}{2} \geq 1, \log_4 \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3},$$

$$\frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{4}, \frac{27}{8} \geq 4, 27 \geq 32 \quad \text{это не верно}$$

$x = 2$ — не решение неравенства.

$$2) x = 3: 3 + 3\log_4 \frac{3}{3} \geq 3, 3 \geq 3 \quad \text{верно.}$$

Ответ: $\{3\}$.

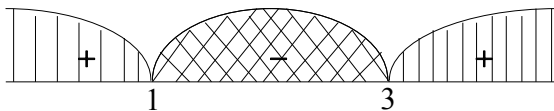
$$4. y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$$

$$y' = -3x^2 + 12x - 9$$

$$-3x^2 + 12x - 9 > 0$$

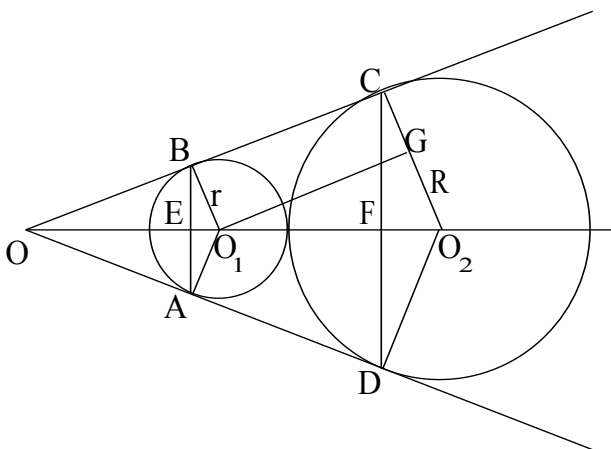
$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x-1)(x-3) < 0$$



Ответ: $(1; 3)$.

5.



Дано: окружности $(O_1; r)$, $(O_2; R)$, касаются внешним образом, A, B, C, D — точки касания окружностей с общими касательными.

Найти: S_{ABCD} .
Обозначим точку пересечения общих касательных BC и AD к окружностям $(O_1; r)$ и $(O_2; R)$

через O . Прямая O_1O_2 пересекается с общими касательными в точке O .

Найдем отрезки AB и CD — основания трапеции $ABCD$ и ее высоту EF .

Предварительно найдем синус $\angle O_2O_1G$ ($O_1G \perp O_2G$). Пусть

$\angle O_2O_1G = \alpha$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle O_1O_2G$ ($O_2GO_1 = 90^\circ$). В нем $O_1O_2 = R + r$, $O_2G = O_2C - O_1B = R - r$. Поэтому

$$\sin \alpha = \frac{O_2G}{O_2O_1} = \frac{R - r}{R + r}.$$

Определяем AB и CD . Из прямоугольных треугольников EBO_1 и FCO_2 ,

учитывая, что $\angle EBO_1 = \angle FCO_2 = \alpha$, имеем $BE = BO_1 \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha$, $CF = CO_2 \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha$, $AB = 2BE = 2r \cos \alpha$, $CD = 2CF = 2R \cos \alpha$. Определяем высоту EF . Так как $EO_1 = BO_1 \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$, $FO_2 = CO_2 \cdot \sin \alpha = R \cdot \sin \alpha$, то $EF = R + r + EO_1 - FO_2 = R + r + r \sin \alpha - R \sin \alpha$.

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot EF = (r + R) \cos \alpha (R(1 - \sin \alpha) + r(1 + \sin \alpha)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (r + R) \sqrt{1 - \frac{(R - r)^2}{(R + r)^2} \left(R \left(1 - \frac{R - r}{R + r} \right) + r \left(1 + \frac{R - r}{R + r} \right) \right)} = \\
 &= (r + R) \sqrt{\frac{4Rr}{(R + r)^2} \left(\frac{2Rr}{R + r} + \frac{2Rr}{R + r} \right)} = \frac{8(Rr)^{3/2}}{R + r}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8(Rr)^{3/2}}{R + r}.$

Вариант № 59.

1. Решить неравенство $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0.$

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right).$$

3. Решить уравнение $\log_{2-2x^2}(2 - x^2 - x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2 - 2x^2)}.$

4. Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$

5. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n . Определить площадь трапеции.

Решения:

1. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0.$

ОДЗ: $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; +5\}$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x - 5)(x + 1) < 0$$

$$x \in (-1; 5).$$

Ответ: $(-1; 5)$.

$$2. \quad \sin^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\beta - \pi)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha - 3\pi)}{2} =$$

$$= -\frac{\cos(2\beta - \pi) + \cos(2\alpha - 3\pi)}{2} = -\frac{\cos(\pi - 2\beta) + \cos(\pi - 2\alpha)}{2} =$$

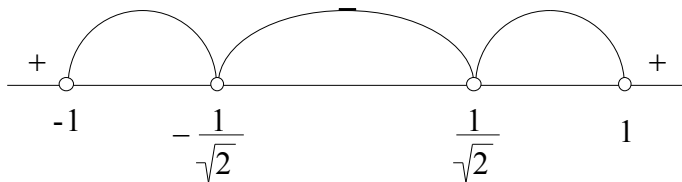
$$= \frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2} = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) .$$

$$3. \log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-2x^2 > 0 \\ 2-2x^2 \neq 1 \\ 2-x^2-x^4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ x^2 \neq \frac{1}{2} \\ x^4+x^2-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \neq \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (x^2+2)(x^2-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \neq \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$$x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right).$$

$$\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = \log_{2-2x^2}(2-2x^2)^2 - \log_{2-2x^2} \frac{4}{3}$$

$$\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = \log_{2-2x^2}\left(\frac{3}{4}(2-2x^2)^2\right)$$

$$\begin{cases} x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \\ 2-x^2-x^4 = \frac{3}{4}(2-2x^2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \\ 2-x^2-x^4 = 3(1-2x^2+x^4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \\ 4x^4-5x^2+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \\ \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \\ x = \mp \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Проверка: $x = \mp \frac{1}{2}$.

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{2}}$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{16}.$$

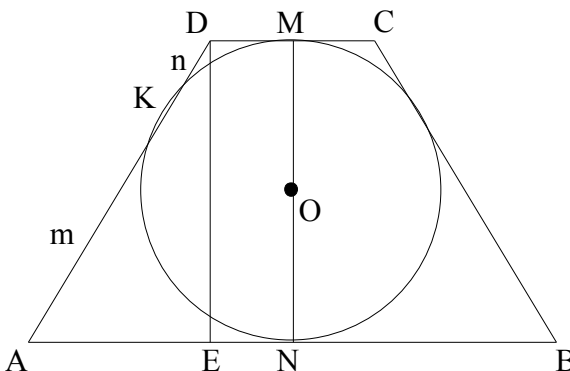
Ответ: $x = \mp \frac{1}{2}$.

$$4. f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

5.



Дано: $ABCD$ — трапеция,
 $AD = BC$,
 O — центр окружности,
 вписанной в трапецию,
 $AK = m$, $KD = n$.

Найти: площадь трапеции S_{ABCD} .
 Проведем $DE \perp AB$ и диаметр окружности $MN \perp AB$, $MN \parallel DE$. Тогда $EN = DM$. Так как две касательные,

проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны, то $KD = DM = n$, $AK = AN = m$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ADE$ ($\angle AED = 90^\circ$), в нем

$AE = AN - EN = m - n$, $AD = AK + KD = m + n$. По теореме Пифагора

$$AD^2 = AE^2 + DE^2, (m + n)^2 = (m - n)^2 + DE^2,$$

$$m^2 + 2mn + n^2 = m^2 - 2mn + n^2 + DE^2, DE^2 = 4mn, DE = 2\sqrt{mn}.$$

Поскольку в трапецию $ABCD$ вписана окружность, S_{ABCD} может быть найдена по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot DE = 2\sqrt{mn}(m + n)$.

Ответ: $2\sqrt{mn}(m + n)$.

Вариант № 60.

1. Решить неравенство $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$.

2. Решить систему уравнений $\sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1$,

$$\sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4.$$

3. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$.

4. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ в точке $P(0; 2)$.

5. Найти площадь равнобедренного треугольника, если в нем угол между основанием и боковой стороной равен α , радиус вписанной окружности равен r .

Решения:

$$1. \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (0; \infty)$$

$$\log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x < 6$$

$$\log_3 x < 3$$

$$0 < x < 27.$$

$$\text{Ответ: } (0, 27).$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} xy > 0 \\ 5x + y > 0 \\ 5x - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 5x > |y| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = t, t > 0 \\ t - \frac{2}{t} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = t, t > 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = t, t > 0 \\ \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{x}} = 2 \Leftrightarrow y = 4x$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ \sqrt{9x} + \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ 4\sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (1; 4).$$

3.

$$\left(\sin x + \sqrt{3} \cos x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$4\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$4\left(\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$4 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$4 \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = 5 + \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 5 + 1 - 2 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$2 + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 6 - 2 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$2 + 2 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 6 = 0$$

$$\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = t, \quad |t| \leq 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2 < -1, \quad t_2 = 1$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4. $y = x^3 - 3x^2 + 2, \quad P(0; 2)$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

$$x_0 = 0, \quad y(x_0) = 2.$$

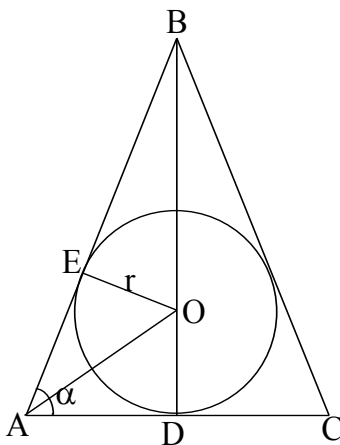
$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'(x_0) = 0$$

$$y = 2.$$

Ответ: $y = 2, \quad y - 2 = 0.$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$,
 $\angle BAC = \alpha$, окружность (O, r) вписана
 в $\triangle ABC$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Проведем $OE \perp AB$, $OE = r$, $BD \perp AC$, а
 также AO , AO — биссектриса $\angle BAC$,

поэтому $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного

$\triangle OAD$ ($\angle ADO = 90^\circ$, $OD = r$) находим

$$AD = OD \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle ABD$ ($\angle ADB = 90^\circ$):

$$BD = AD \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = AD \cdot BD = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = r^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ: $r^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Вариант № 61.

1. Решить неравенство $\log_2(2 - x) + \log_{1/2}(x - 1) > \log_{\sqrt{2}} 3$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} \sqrt{x} = 12 \\ xy = 64 \end{cases}.$$

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^4 2z = \cos^2 4z + 1$.

4. В каких точках касательная к графику функции $y = (x + 2)/(x - 2)$
 образует с осью OX угол 135° ?

5. Найти площадь правильного треугольника, вписанного в квадрат со стороной a , при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.

Решения:

$$1. \log_2(2-x) + \log_{1/2}(x-1) > \log_{\sqrt{2}} 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2)$$

$$\log_2(2-x) > \log_2 9 + \log_2(x-1)$$

$$\log_2(2-x) > \log_2(9(x-1))$$

$$\begin{cases} x \in (1; 2) \\ 2-x > 9x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; 2) \\ x < \frac{11}{10} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 1.1).$$

Ответ: $(1; 1.1)$.

$$2. \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12 \\ xy = 64 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xy}(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) = 12 \\ xy = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3 \\ \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x} = a, & a \geq 0 \\ \sqrt[6]{y} = b, & b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} \sqrt[6]{x} = 1 \\ \sqrt[6]{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 64 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} \sqrt[6]{x} = 2 \\ \sqrt[6]{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 64 \\ y = 1. \end{cases} \right.$$

Ответ: $\{(1; 64), (64; 1)\}$.

$$3. \operatorname{ctg}^4 2z = \cos^2 4z + 1.$$

$$\text{ОДЗ: } 2z \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z \neq \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^4 2z} - 1 = \cos^2 4z$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^4 2z}{\operatorname{tg}^4 2z} = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 2z}{1 + \operatorname{tg}^2 2z} \right)^2.$$

Проверим, является ли решением $2z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k,$
 $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{ctg}^4 \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) = \cos^2 (\pi + 2\pi k) + 1$$

$$0 \neq 2$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg}^2 2z)(1 + \operatorname{tg}^2 2z)}{\operatorname{tg}^4 2z} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 2z)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 2z)^2}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 2z = 0 \quad \operatorname{tg}^2 2z = 1, \quad \operatorname{tg} 2z = \mp 1, \quad 2z = \mp \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = \mp \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(1 + tg^2 2z)^3 = tg^4 2z \cdot (1 - tg^2 2z)$$

$$tg^2 2z = t, \quad t > 0$$

$$(1 + t)^3 = t^2(1 - t)$$

$$1 + 3t + 3t^2 + t^3 = t^2 - t^3$$

$$2t^3 + 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

нет решений $t > 0$.

Ответ: $z = \mp \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$4. \quad y = (x + 2)/(x - 2), \quad \alpha = 135^\circ.$$

$$y' = \frac{x - 2 - x - 2}{(x - 2)^2} = -\frac{4}{(x - 2)^2}$$

$$y' = tg 135^\circ, \quad y' = -1$$

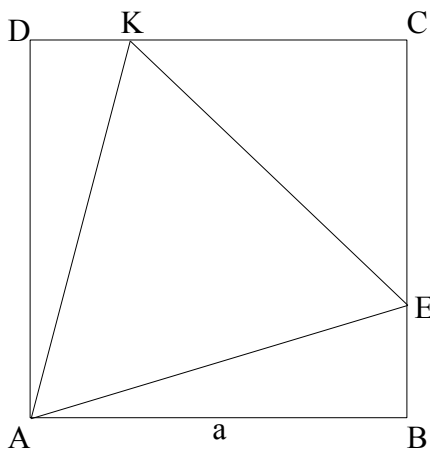
$$-\frac{4}{(x - 2)^2} = -1, \quad (x - 2)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0; -1); (4; 3)\}$.

5.



Дано: $ABCD$ — квадрат, $AB = a$, $\triangle AЕК$ — правильный.

Найти: $S_{\triangle AЕК}$.

Пусть $AE = x$, $KE = AE = x$. В прямоугольном $\triangle ABE$ ($\angle ABE = 90^\circ$, $AB = a$, $AE = x$) по теореме Пифагора: BE

$$= \sqrt{x^2 - a^2}. \text{ Тогда } CE = KC$$

$$= a - \sqrt{x^2 - a^2}. \text{ В}$$

прямоугольном равнобедренном $\triangle KEC$

$$(\angle ECK = 90^\circ): KE = \sqrt{2} \cdot CE,$$

$$x = \sqrt{2} \left(a - \sqrt{x^2 - a^2} \right),$$

$$x - a\sqrt{2} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}ax + 2a^2 = 2x^2 - 2a^2,$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}ax - 4a^2 = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2} \cdot a + \sqrt{6} \cdot a = a(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = a\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$x_2 = -\sqrt{2} \cdot a - \sqrt{6} \cdot a < 0.$$

Следовательно,

$$S = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = a^2(2\sqrt{3} - 3).$$

Ответ: $a^2(2\sqrt{3} - 3)$.

Вариант № 62.

1. Решить неравенство $\lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2)$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = uv + 13 \\ u + v = \sqrt{uv} + 3. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos^{-4} z = 64 \cos^2 2z$.

4. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой

$$y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3, \text{ проведенная в точке с абсциссой } x = 1.$$

5. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна m . Найти сторону треугольника.

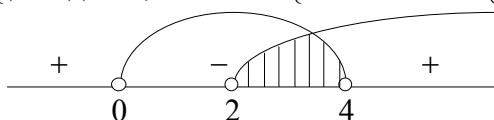
Решения:

1. $\lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2)$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \Leftrightarrow x \in (2; \infty) \\ x+2 > 0 \end{cases}$$

$$\lg((x-1)(x-2)) < \lg(x+2)$$

$$\begin{cases} x \in (2; \infty) \\ (x-1)(x-2) < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; \infty) \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; \infty) \\ x(x-4) < 0. \end{cases}$$



Ответ: (2; 4).

$$2. \begin{cases} u^2 + v^2 = u \cdot v + 13 \\ u + v = \sqrt{uv} + 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $uv \geq 0$

$$\begin{cases} (u+v)^2 - 3uv = 13 \\ u+v - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = a \\ \sqrt{uv} = b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 13 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ (b + 3)^2 - 3b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 2b^2 - 6b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b^2 - 3b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ a = 5 \\ b = 2. \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} u + v = 4 \\ \sqrt{uv} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v(4 - v) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 - 4v + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 + \sqrt{3} \\ v = 2 - \sqrt{3} \\ u = 2 - \sqrt{3} \\ v = 2 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} u + v = 5 \\ \sqrt{uv} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \\ u = 4 \\ v = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(1; 4), (4; 1), (2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})\}$.

$$3. \cos^{-4} z = 64 \cos^2 2z$$

$$\text{ОДЗ: } z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 z} \right)^2 = 64 \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} \right)^2$$

$$\left(1 + tg^2 z\right)^2 = 64 \left(\frac{1 - tg^2 z}{1 + tg^2 z}\right)^2$$

$$\begin{cases} 1 + tg^2 z = 8 \frac{1 - tg^2 z}{1 + tg^2 z} \\ 1 + tg^2 z = 8 \frac{tg^2 z - 1}{1 + tg^2 z} \end{cases}$$

$$a) \left(1 + tg^2 z\right)^2 = 8(1 - tg^2 z)$$

$$1 + 2tg^2 z + tg^4 z = 8 - 8tg^2 z$$

$$tg^4 z + 10tg^2 z - 7 = 0$$

$$tg^2 z = t, \quad t > 0$$

$$t^2 + 10t - 7 = 0$$

$$t = -5 \mp \sqrt{32} \quad t_1 = -5 - \sqrt{32} < 0$$

$$t_2 = 4\sqrt{2} - 5$$

$$tg^2 z = 4\sqrt{2} - 5 \quad tg z = \mp \sqrt{4\sqrt{2} - 5}$$

$$z = \mp \arctg \sqrt{4\sqrt{2} - 5} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$b) \left(1 + tg^2 z\right)^2 = 8tg^2 z - 8$$

$$1 + 2tg^2 z + tg^4 z - 8tg^2 z + 8 = 0$$

$$tg^4 z - 6tg^2 z + 9 = 0$$

$$tg^2 z = 3$$

$$tg z = \mp \sqrt{3}$$

$$z = \mp \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\mp \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \mp \arctg \sqrt{4\sqrt{2} - 5} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

$$4. \quad y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3, \quad x = 1.$$

$$y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$$

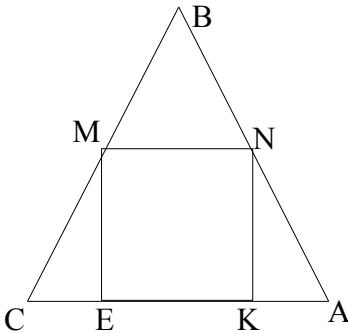
$$y'(1) = 3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 3.$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3.$

5.



Дано: $\triangle ABC$ — правильный, $MNKE$ — квадрат, $EK = m$.

Найти: $AC = AB = BC$.

Рассмотрим $\triangle MEC$: $\angle CEM = 90^\circ$,
 $\angle MCE = 60^\circ$, $ME = m$,

$$CE = m \cdot \operatorname{arctg} 60^\circ = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\triangle MCE = \triangle NAK$ ($ME = NK$,
 $\angle MCE = \angle NAK$, $\angle CEM = \angle NKA = 90^\circ$), то

$$KA = CE = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$AC = 2 \cdot CE + EK = \frac{2m}{\sqrt{3}} + m = \frac{m(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{m(2\sqrt{3} + 3)}{3}.$$

Ответ: $AC = AB = BC = \frac{m(2\sqrt{3} + 3)}{3}.$

Вариант № 63.

1. Решить неравенство $\lg(x - 2) + \lg(27 - x) < 2$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $4 \cos^2 2t - \operatorname{tg} 4t = \operatorname{ctg} 2t$.

4. Под каким углом к оси OX наклонена касательная, проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M_0(2; -4)$?

5. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти стороны треугольника.

Решения:

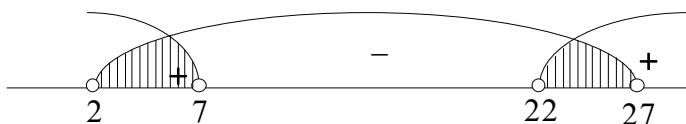
1. $\lg(x - 2) + \lg(27 - x) < 2$.

ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 27 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 27)$

$$\lg((x - 2)(27 - x)) < \lg 100$$

$$\begin{cases} x \in (2; 27) \\ (x - 2)(27 - x) < 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; 27) \\ x^2 - 29x + 154 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x + 154 = 0 \\ x_1 = 22, x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; 27) \\ (x - 7)(x - 22) > 0. \end{cases}$$



Ответ: $(2; 7) \cup (22; 27)$.

2. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\sqrt{y} = a, & a \geq 0 \\ y\sqrt{x} = b, & b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ (a + b)^2 - 2ab = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^{\frac{3}{2}} = 8 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x\sqrt{y} = 4 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^{\frac{3}{2}} = 8 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\{(1; 4); (4; 1)\}$.

$$3. \quad 4 \cos^2 2t - \operatorname{tg} 4t = \operatorname{ctg} 2t$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2t \neq \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z} \\ t \neq \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$4 \cos^2 2t = \operatorname{tg} 4t + \operatorname{ctg} 2t$$

$$4 \cos^2 2t = \frac{\sin 4t}{\cos 4t} + \frac{\cos 2t}{\sin 2t}$$

$$4 \cos^2 2t = \frac{\sin 4t \cdot \sin 2t + \cos 4t \cdot \cos 2t}{\cos 4t \cdot \sin 2t}$$

$$4 \cos^2 2t = \frac{\cos 2t}{\cos 4t \cdot \sin 2t}$$

$$\begin{cases} \cos 2t = 0 \\ 4 \cos 2t = \frac{1}{\cos 4t \cdot \sin 2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2t = 0 \\ 4 \sin 2t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1 \end{cases}$$

$$\cos 2t = 0 \quad 2t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \neq \frac{\pi}{2} m$$

$$2 + 4k \neq 1 + 2n$$

$$2 \sin 4t \cdot \cos 4t = 1$$

$$\sin 8t = 1$$

$$8t = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} l \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n \\ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} l \neq \frac{\pi}{2} m \end{array} \right|.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z} \right\}.$

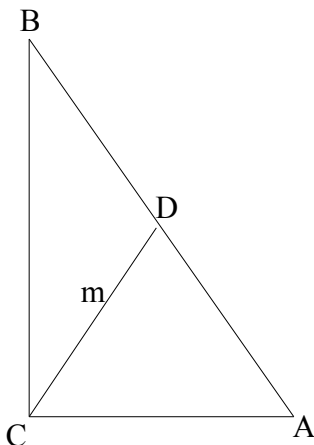
4. $y = x^3 - x^2 - 7x + 6, M_0(2; -4)$

$$y' = 3x^2 - 2x - 7, \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0), x_0 = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}.$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$,
 CD — медиана, $\angle BCD : \angle DCA = 1:2$.

Найти: AC , AB , BC .

Пусть $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle DCA = 2\alpha$,
 $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$. Поэтому $\angle BCD = 30^\circ$,
 $\angle DCA = 60^\circ$.

Поскольку CD — медиана $\triangle ABC$, то
 $CD = BD = AD = m$. Поэтому $AB = 2m$.

Рассмотрим $\triangle ADC$: $CD = AD$, $\angle DCA = 60^\circ$.

Поэтому $\triangle ADC$ правильный, $AC = m$.

Из прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle BCA = 90^\circ$) по
теореме Пифагора:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2,$$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}.$$

Ответ: $AC = m$, $AB = 2m$, $BC = m\sqrt{3}$.

Вариант 64.

1. Решить неравенство

$$\log_5((x+3)(x+5)) + \log_{0,2}(x+3) < 1,5 \log_{\sqrt{5}} 2.$$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy} \\ x + y = 5. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $tg^3 z + ctg^3 z - 8 \sin^{-3} 2z = 12$.

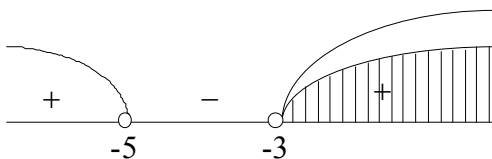
4. Под каким углом к оси OX наклонена касательная, проведенная к кривой
 $y = 2x^3 - x$ в точке ее пересечения с осью OY ?

5. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти отношение
радиуса окружности, вписанной в него, к высоте, которая проведена к
гипотенузе.

Решения:

$$1. \log_5((x+3)(x+5)) + \log_{0,2}(x+3) < 1,5 \log_{\sqrt{5}} 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} (x+3)(x+5) > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; \infty)$$



$$\begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ \log_5(x+3) + \log_5(x+5) - \log_5(x+3) < \frac{3}{2} \log_5 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ \log_5(x+5) < \log_5 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; 3).$$

Ответ: $(-3; 3)$.

$$2. \begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = a, a \geq 0 \\ \sqrt{y} = b, b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+b) = 3ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{3}{2}ab \\ (a+b)^2 - 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{3}{2}ab \\ \frac{9}{4}a^2b^2 - 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 9a^2b^2 - 8ab - 20 = 0 \\ \begin{cases} ab = t, t > 0 \\ 9t^2 - 8t - 20 = 0 \end{cases} \\ t = \frac{4 \mp 14}{9} \\ t_1 = 2, t_2 = -\frac{10}{9} < 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ a+b = \frac{3}{2}ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \right. \right. \\ \left. \left[\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases} \right. \right. \right.$$

Ответ: $\{(1; 4), (4; 1)\}$.

$$3. \quad \operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - 8 \sin^{-3} 2z = 12$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ z \neq \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 2z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z) \left(\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{ctg}^2 z - 1 \right) - \frac{8}{\sin^3 2z} = 12$$

$$(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z) \left((\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^2 - 3 \right) - \frac{8}{\sin^3 2z} = 12.$$

Учтем, что $tgz + ctgz = tgz + \frac{1}{tgz} = 2 \frac{1 + tg^2 z}{2tgz} = \frac{2}{\sin 2z}$

$$\frac{2}{\sin 2z} \left(\frac{4}{\sin^2 2z} - 3 \right) - \frac{8}{\sin^3 2z} = 12$$

$$\frac{1}{\sin 2z} = t, \quad |t| \geq 1$$

$$2t(4t^2 - 3) - 8t^3 = 12$$

$$8t^3 - 6t - 8t^3 = 12$$

$$t = -2$$

$$\frac{1}{\sin 2z} = -2$$

$$\sin 2z = -\frac{1}{2}$$

$$2z = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4. $y = 2x^3 - x, \quad x = 0$

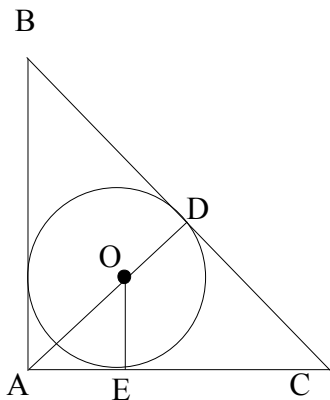
$$y' = 6x^2 - 1, \quad y'(0) = -1$$

$$tg\alpha = -1, \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}.$

5. Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Найти: $\frac{OD}{AD}.$



Обозначим через r радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$, $OD=r$. Пусть D — точка касания окружности (O ; r) с гипотенузой BC . Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то точка D является основанием перпендикуляра AD , проведенного к гипотенузе BC . Проведем $OE \perp AC$. В прямоугольном $\triangle OAE$: $\angle AEO = 90^\circ$; $\angle OAE = 45^\circ$, $OE = AE = r$, $AO = r\sqrt{2}$. Тогда высота $AD = AO + OD = r(\sqrt{2} + 1)$. Следовательно:

$$\frac{OD}{AD} = \frac{r}{r(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

Вариант № 65.

1. Решить неравенство $\log_{1/2}(x+1) \leq \log_2(2-x)$.
2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5\sqrt{xy} \\ x + y = 5. \end{cases}$$
3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1$.
4. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?
5. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, гипотенуза равна c . Определить площадь круга, вписанного в этот треугольник.

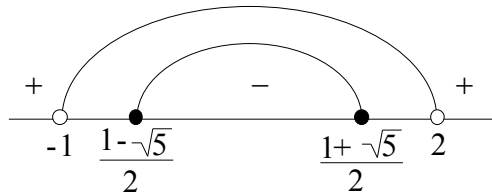
Решения:

$$1. \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_2(2-x)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$$

$$\log_2 \frac{1}{x+1} \leq \log_2(2-x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-1; 2) \\ \frac{1}{x+1} \leq 2-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-1; 2) \\ \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0. \end{array} \right.$$



Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

$$2. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5\sqrt{xy} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = a, & a \geq 0 \\ \sqrt{y} = b, & b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 0,5ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0,5ab \\ (a - b)^2 + 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0,5ab \\ \frac{1}{4}a^2b^2 + 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 + 8ab - 20 = 0 \\ ab = -10 < 0 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0,5ab \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = -1 < 0 \\ b = -2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (4; 1).

$$3. \quad \operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1$$

ОДЗ: $x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} - 1 = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right)^3.$$

Проверим, является ли решением $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{ctg}^4 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = \cos^3 \left(2 \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) + 1$$

$$\operatorname{ctg}^4 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos^3 \pi + 1$$

$$0 = -1 + 1$$

$$0 = 0.$$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ — решение.

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^4 x} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^3}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^3}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \quad \operatorname{tg} x = \pm 1, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)^4 = \operatorname{tg}^4 x (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2$$

$$\left[(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 = \operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{tg}^2 x) \right]$$

$$\left[(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 = \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x - 1) \right]$$

$$a) \quad 1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x$$

$$2\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0 \quad D < 0$$

$$б) \quad 1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0 \quad D < 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \mp \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

$$4. \quad y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1, \quad y = 2x - 1$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

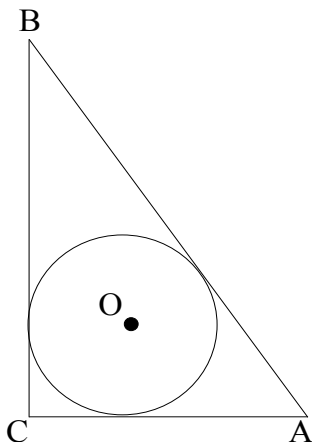
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3 \quad y(-1) = \frac{2}{3}; \quad y(3) = -2$$

$$A_1\left(-1; \frac{2}{3}\right), \quad A_2(3; -2).$$

Ответ: $\left\{\left(-1; \frac{2}{3}\right), (3; -2)\right\}.$

5.



Дано: $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ, P_{ABC} = 2p, AB = c,$
 O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Найти: S — площадь круга, вписанного в $\triangle ABC$.

Пусть r — радиус окружности

$(0; r)$, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда $S = \pi r^2$.

Радиус r найдем по формуле

$$\begin{aligned} r &= \frac{AC + BC - AB}{2} = \\ &= \frac{(AC + BC + AB) - 2AB}{2} = \\ &= \frac{2p - 2c}{2} = (p - c). \end{aligned}$$

Следовательно, $S = \pi(p - c)^2$.

Ответ: $\pi(p - c)^2$.

Вариант № 66.

1. Решить неравенство $\log_4((3x + 2) / x) \leq 0,5$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

4. На линии $y = (1 + x^2)^{-1}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

5. В ромб вписана окружность радиуса R. Найти площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

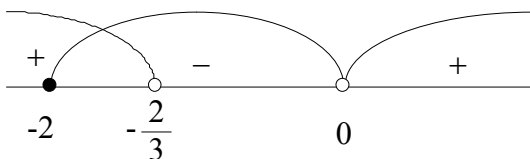
Решения:

1. $\log_4 \frac{3x + 2}{x} \leq 0,5$

ОДЗ: $\frac{3x + 2}{x} > 0$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; \infty)$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; \infty) \\ \frac{3x + 2}{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; \infty) \\ \frac{x + 2}{x} \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left[-2; -\frac{2}{3}\right)$.

$$2. \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ (2x+y+1) + (x+y) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = a, \quad a \geq 0 \\ \sqrt{x+y} = b, \quad b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ (a-b)^2+2ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ a=-1 < 0 \\ b=-2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$$

ОТВЕТ : (2; -1).

$$3. \sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \in R$$

$$\sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$(1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0$$

$$1 + \sin x = 0, \quad \sin x = -1, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x + \cos x - \frac{1}{2}((\sin x + \cos x)^2 - 1) = 0$$

$$2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 + 1 = 0$$

$$\sin x + \cos x = t, \quad |t| \leq \sqrt{2}$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}, \quad t_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{2} - 2}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{2} - 2}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

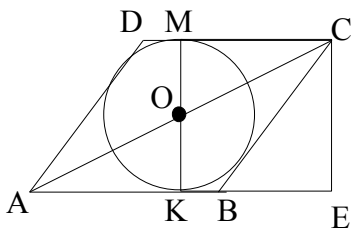
4. $y = \frac{1}{1 + x^2}$

$$y' = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} = 0$$

$$x = 0, y = 1.$$

Ответ: (0; 1).

5.



Дано: $ABCD$ — ромб, $(O; R)$ — окружность, вписанная в ромб $ABCD$, $AC = 4R$.

Найти: S — площадь ромба.

Проведем диаметр окружности $(O; R)$ перпендикулярно к AB , $MK \perp AB$.

Продолжим AB и проведем $CE \perp AB$. В $\triangle CAE$ OK — средняя линия, поэтому $CE = 2OK = 2R$. Пусть $AB = x$, тогда $CB = x$.

В прямоугольном $\triangle AEC$ ($\angle AEC = 90^\circ$):

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{16R^2 - 4R^2} = 2\sqrt{3}R \text{ поэтому } BE = AE - AB = 2\sqrt{3}R - x.$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle CBE$ ($\angle BEC = 90^\circ$), $CE = 2R$, $BE = 2\sqrt{3}R - x$, $BC = x$. По теореме Пифагора:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2, \quad x^2 = (2\sqrt{3}R - x)^2 + 4R^2,$$

$$x^2 = 12R^2 - 4\sqrt{3}Rx + x^2 + 4R^2,$$

$$4\sqrt{3}Rx = 16R^2,$$

$$x = \frac{4R}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $S = AB \cdot MK = \frac{8R^2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}R^2}{3}.$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}R^2}{3}.$

Вариант № 67.

1. Решить неравенство $\log_2 \left((x^2 - 4x + 2) / (x + 1) \right) \leq 1.$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3 \\ x + y = 17. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos 3z - \cos^3 z + \frac{3}{4} \sin 2z = 0.$

4. На кривой $y = x^2(x - 2)^2$ найти точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 24x - 1.$

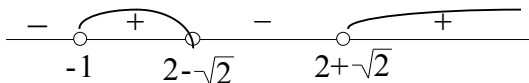
5. Дан ромб. Определить сторону ромба, зная, что его площадь равна S , а длины диагоналей относятся как $m:n.$

Решения:

1. $\log_2 \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} \leq 1$

$$\text{ОДЗ: } \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} > 0$$

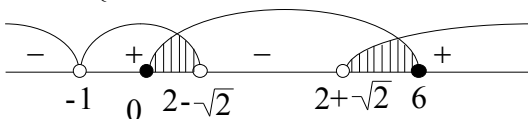
$$\frac{(x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2}))}{x + 1} > 0$$



$$x \in (-1; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty)$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty) \\ \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty) \\ \frac{x^2 - 6x}{x + 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty) \\ \frac{x(x - 6)}{x + 1} \leq 0. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } [0; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; 6].$$

$$2. \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} = a, a \geq 0 \\ \sqrt[4]{y} = b, b \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (9-2ab)^2 - 2a^2b^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a^2b^2 - 36ab + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2b^2 - 18ab + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \\
&\begin{cases} a+b=3 \\ ab=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ b^2 - 3b + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \quad \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2 \\ \sqrt[4]{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 1 \end{cases} \\
&\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 1 \\ \sqrt[4]{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 16 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $\{(1;16), (16;1)\}$.

$$3. \cos 3z - \cos^3 z + \frac{3}{4} \sin 2z = 0$$

ОДЗ: $z \in R$

$$\begin{aligned}
&\cos 3z = \cos(2z + z) = \cos 2z \cdot \cos z - \sin 2z \cdot \sin z = \\
&= (2 \cos^2 z - 1) \cos z - 2 \sin^2 z \cdot \cos z = 2 \cos^3 z - \cos z - 2(1 - \cos^2 z) \cos z = \\
&= 2 \cos^3 z - \cos z - 2 \cos z + 2 \cos^3 z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z. \\
&4 \cos^3 z - 3 \cos z - \cos^3 z + \frac{3}{4} \cdot 2 \sin z \cdot \cos z = 0 \\
&4 \cos^3 z - 3 \cos z - \cos^3 z + \frac{3}{2} \sin z \cdot \cos z = 0
\end{aligned}$$

$$3 \cos^3 z - 3 \cos z + \frac{3}{2} \cdot \sin z \cdot \cos z = 0$$

$$3 \cos z \left(\cos^2 z - 1 + \frac{\sin z}{2} \right) = 0$$

$$\cos z = 0, \quad z_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$-\sin^2 z + \frac{\sin z}{2} = 0$$

$$2 \sin^2 z - \sin z = 0$$

$$\sin z (2 \sin z - 1) = 0$$

$$\sin z = 0, \quad z_2 = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\sin z = \frac{1}{2}, \quad z_3 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

z_1 и z_2 можно объединить: $z = \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $z = \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad z = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$4. \quad y = x^2(x-2)^2, \quad y = 24x - 1$$

$$y' = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x)$$

$$4x(x-2)(x-1) = 24$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 6$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$$

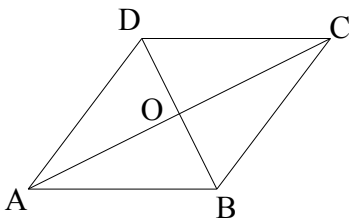
$$x^2(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 2) = 0$$

$$x = 3, \quad y = 9.$$

Ответ: (3; 9).

5.



Дано: $ABCD$ — ромб, $S_p = S$,
 $AC:BD = m:n$.

Найти: AD .

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Обозначим AO через mx , а DO — через nx . Так как площадь S_p может быть найдена по формуле

$$S_p = BD \cdot AO = 2AO \cdot DO = 2mx \cdot nx = 2mnx^2, \text{ то по условию}$$

$$2mnx^2 = S, \quad x = \sqrt{\frac{S}{2mn}}.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$ ($\angle DOA = 90^\circ$):

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2},$$

$$AO = mx = m\sqrt{\frac{S}{2mn}}, \quad OD = n\sqrt{\frac{S}{2mn}},$$

$$AD = \sqrt{\frac{S}{2mn}(m^2 + n^2)}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{S}{2mn}(m^2 + n^2)}.$

Вариант № 68.

1. Решить неравенство $\log_{1/2}(x^2 - 4x + 6) < -2$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2$.

4. В каких точках кривой $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x + 5$?

5. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равен величии радиуса R . Определить сторону ромба.

Решение:

$$1. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 6) < -2$$

ОДЗ: $x \in R$

$$x^2 - 4x + 6 > 4$$

$$x^2 - 4x + 2 > 0$$

$$(x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2})) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty).$

$$2. \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

ОДЗ: $y^2 - 5 \geq 0$

$$y \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; \infty)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5 \\ (x^2 + 5) + (y^2 - 5) = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} = a, a \geq \sqrt{5} \\ \sqrt{y^2 - 5} = b, b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ (a + b)^2 - 2ab = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 < \sqrt{5} \\ b = 3 \\ a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} = 3 \\ \sqrt{y^2 - 5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5 = 9 \\ y^2 - 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = -3 \\ x = -2 \\ y = 3 \\ x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ответ: $\{(2; 3), (2; -3), (-2; 3), (-2; -3)\}$.

3. $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2$

$$\begin{cases} \cos 6x = 1 \\ \sin \frac{5x}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{3}n = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}m$$

$$\frac{n}{3} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}m$$

$$n = \frac{3 + 12m}{5}$$

$$m = 5l + 1, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{3 + 12(5l + 1)}{5} = 3 + 12l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3}(3 + 12l), \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi(4l + 1), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi(4l + 1), \quad l \in \mathbb{Z}.$

$$4. \quad y = x^3 + x - 2, \quad y = 4x + 5$$

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$3x^2 + 1 = 4$$

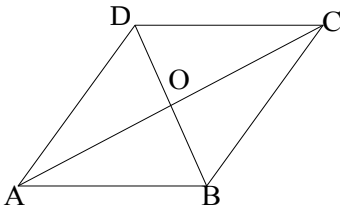
$$x^2 = 1$$

$$x_1 = -1, \quad y_1 = -4$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 0.$$

Ответ: $\{(-1; -4), (1; 0)\}.$

5.



Дано: $ABCD$ — ромб, $AB = BD$,
 R — радиус круга, $S_p = S_{кр}$, где
 S_p — площадь ромба,
 $S_{кр}$ — площадь круга.

Найти: AB .

Из условия следует, что острые углы

ромба равны $\frac{\pi}{3}$ ($\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ — равносторонние).

Обозначим AB через x , тогда $AB = BC = CD = AD = BD = x$. Площадь

S_p может быть найдена как $S_p = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2}$.

Площадь $S_{кр} = \pi R^2$. По условию

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{2} = \pi R^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} R = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}} R.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}}R$.

Вариант № 69.

1. Решить неравенство $\log_{1/3}((3x-1)(x+2)) < 1$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u} + v^{-1/2}\sqrt[3]{v} = 1,5 \\ u \cdot v = 64. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.

4. В каких точках касательная к графику функции

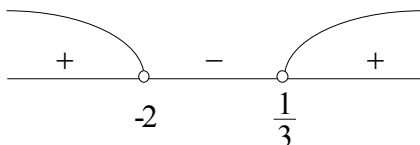
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8$ параллельна прямой $y = x$?

5. Вычислить площадь ромба, если его периметр равен $2p$, а длины диагоналей относятся как $m : n$.

Решения:

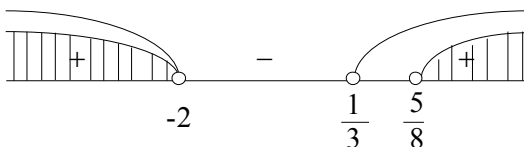
1. $\log_{1/3} \frac{3x-1}{x+2} < 1$

ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+2} > 0$



$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \\ \frac{3x-1}{x+2} > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \\ \frac{9x-3-x-2}{3(x+2)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \\ \frac{8x-5}{x+2} > 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; \infty\right)$.

$$2. \begin{cases} u^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{u} + v^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{v} = 1,5 \\ u \cdot v = 64 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{-\frac{1}{6}} + v^{-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} \\ u \cdot v = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = u^{-\frac{1}{6}} \\ b = v^{-\frac{1}{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{2} \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[6]{u}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt[6]{v}} = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[6]{u}} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt[6]{v}} = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 64 \\ u = 64 \\ v = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(1; 64), (64; 1)\}$.

$$3. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \cos 4x = 3$$

$$\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \cos 4x = 3$$

$$\frac{2}{\sin 2x} - (1 - 2 \sin^2 2x) = 3$$

$$\frac{2}{\sin 2x} - 1 + 2 \sin^2 2x = 3$$

$$\frac{1}{\sin 2x} + \sin^2 2x = 2$$

$$\sin 2x = t, \quad |t| \leq 1$$

$$\frac{1}{t} + t^2 = 2$$

$$t^3 - 2t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1, \quad t_3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$\sin 2x = 1, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad 2x = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^m \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^m \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8, \quad y = x$

$$f'(x) = x^2 - 3x - 9$$

$$x^2 - 3x - 9 = 1$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad y_1 = \frac{1}{3} \cdot 125 - \frac{3}{2} \cdot 25 - 45 + 8 = -\frac{197}{6}$$

$$x_2 = -2 \quad y_2 = -\frac{8}{3} - 6 + 18 + 8 = \frac{52}{3}.$$

ОТВЕТ: $\left\{ \left(5; -\frac{197}{6} \right), \left(-2; \frac{52}{3} \right) \right\}.$

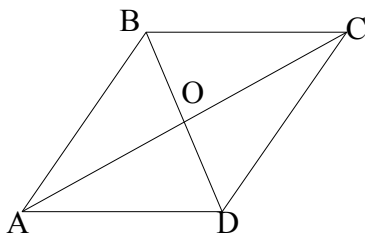
5. Дано: $ABCD$ — ромб, $P_{ABCD} = 2p$, $AC:BD = m:n$.

Найти: S — площадь ромба.

Обозначим через mx полудиагональ AO данного ромба $ABCD$. Тогда полудиагональ $BO = nx$.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90^\circ$) имеем по теореме Пифагора

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = m^2x^2 + n^2x^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 x = \frac{p}{2\sqrt{m^2 + n^2}}.$$



Площадь ромба S найдем по формуле

$$\begin{aligned} S &= 2AO \cdot BO = 2mnx^2 = \frac{2mn \cdot p^2}{4(m^2 + n^2)} = \\ &= \frac{mnp^2}{2(m^2 + n^2)}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{mnp^2}{2(m^2 + n^2)}.$

Вариант № 70.

1. Решить уравнение $(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6.$

2. Упростить выражение $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(6\alpha - \pi)}{\cos 2\alpha}.$

3. Решить неравенство $2\left(9^{0,25+2\log_9^2 x} - 1\right) \leq x^{\log_{\sqrt{3}} x}.$

4. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}.$

5. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении 2:1. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

Решения:

1. $(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

ОДЗ: $x^2 + 5x + 2 \geq 0$

$$\left(x + \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right) \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$$

$$x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2} = t, \quad t \geq 0$$

$$t^2 + 2 - 3t - 6 = 0$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = -1 < 0, \quad t_2 = 4$$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x_1 = -7, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: $\{-7; 2\}$.

$$2. \quad \frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(6\alpha - \pi)}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 6\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 6\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} = 2.$$

$$3. \quad 2\left(9^{0,25+2\log_9^2 x} - 1\right) \leq x^{\log_{\sqrt{3}} x}$$

ОДЗ: $x \in (0; \infty)$

$$2\left(\sqrt{3} \cdot 9^{2\log_9^2 x} - 1\right) \leq x^{\log_3 x^2}$$

$$2\left(\sqrt{3} \cdot 9^{\frac{1}{2}\log_3^2 x} - 1\right) \leq x^{2\log_3 x}$$

$$2\left(\sqrt{3} \cdot 3^{\log_3^2 x} - 1\right) \leq x^{2\log_3 x}$$

$$2\left(\sqrt{3} \cdot \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} - 1\right) \leq x^{2\log_3 x}$$

$$2\left(\sqrt{3} \cdot x^{\log_3 x} - 1\right) \leq x^{2\log_3 x}$$

$$x^{\log_3 x} = t, \quad t > 0$$

$$2\sqrt{3} \cdot t - 2 \leq t^2$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 2 \geq 0$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 3 - 2 = 1$$

$$t_1 = \sqrt{3} - 1, \quad t_2 = \sqrt{3} + 1$$

$$\begin{cases} t \leq \sqrt{3} - 1 \\ t \geq \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\log_3 x} \leq \sqrt{3} - 1 \\ x^{\log_3 x} \geq \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^2 x \leq \log_3(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow \emptyset, \quad \text{т.к. } \log_3(\sqrt{3} - 1) < 0 \\ \log_3^2 x \geq \log_3(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

$$|\log_3 x| \geq \sqrt{\log_3(\sqrt{3} + 1)}$$

$$\begin{cases} \log_3 x \geq \sqrt{\log_3(\sqrt{3} + 1)} \\ \log_3 x \leq -\sqrt{\log_3(\sqrt{3} + 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3^{\sqrt{\log_3(\sqrt{3}+1)}} \\ 0 < x \leq 3^{-\sqrt{\log_3(\sqrt{3}+1)}} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(0; 3^{-\sqrt{\log_3(\sqrt{3}+1)}}\right] \cup \left[3^{\sqrt{\log_3(\sqrt{3}+1)}}; \infty\right).$

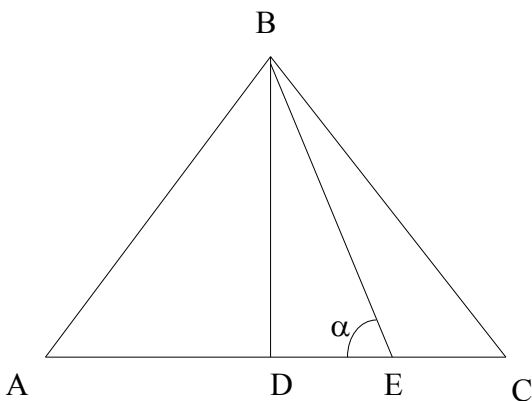
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}, \quad f'(1).$

$$f(x) = \left(x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}} \left(2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}.$

5._



Дано: $\triangle ABC$
равносторонний,
 $AE : EC = 2:1.$

Найти: $\angle ABE,$
 $\angle CBE.$
Проведем $BD \perp AC.$
Обозначим $\angle BED$ через α
и будем считать, что
 $AC = 1.$ Тогда

$$AD = CD = \frac{1}{2},$$

$$AE = \frac{2}{3}, CE = \frac{1}{3},$$

$$DE = DC - EC = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Из $\triangle BDE$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{DE}.$

Так как ΔABC равносторонний и $\begin{cases} AC = 1, \text{ то } BD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ поэтому} \\ tg \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{6} = 3\sqrt{3}. \end{cases}$ $\angle ABE = \pi - \frac{\pi}{3} - \arctg 3\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \arctg 3\sqrt{3}$.

$\angle CBE = \frac{\pi}{3} - \angle ABE = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} + \arctg 3\sqrt{3} = \arctg 3\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} - \arctg 3\sqrt{3}, \arctg 3\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

Вариант № 71.

1. Решить неравенство $\log_{\pi}(x + 27) - \log_{\pi}(16 - 2x) < \log_{\pi} x$.

2. Решить систему уравнений $\sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14,$

$$\sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3.$$

3. Решить уравнение $\frac{8 \sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}.$

4. Составить уравнение касательной к кривой $y = x - 1/x$ в точке $P(1; 0)$.

5. В равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной равной a вписана окружность. Найти радиус окружности.

Решения:

1. $\log_{\pi}(x + 27) - \log_{\pi}(16 - 2x) < \log_{\pi} x$

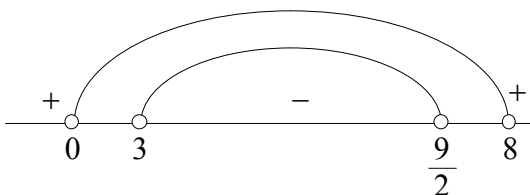
ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 8)$

$$\log_{\pi}(x + 27) < \log_{\pi} x + \log_{\pi}(16 - 2x)$$

$$\log_{\pi}(x + 27) < \log_{\pi}(x(16 - 2x))$$

$$\begin{cases} x \in (0; 8) \\ x + 27 < x(16 - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 8) \\ 2x^2 - 15x + 27 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x^2 - 15x + 27 = 0 \\ D = 225 - 216 = 9 \\ x = \frac{15 \mp 3}{4} \\ x_1 = \frac{9}{2}, x_2 = 3 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 8) \\ 2\left(x - \frac{9}{2}\right)(x - 3) < 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$.

$$2. \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14 \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-y}{3}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14 \\ \sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} = a, a \geq 0 \\ \sqrt{\frac{x-y}{3}} = b, b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} = 10 \\ \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 200 \\ x-y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 124 \\ y = 76. \end{cases}$$

Ответ: (124; 76).

$$3. \frac{8 \sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\frac{8}{4 \sin^2 x \cos^2 x} + 1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}$$

$$\frac{2 + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x (1 + \sin^2 x)} = -1 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{3}$$

$$\frac{2 + \sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x (1 + \sin^2 x)} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 x = t, \quad 0 < t \leq 1$$

$$\frac{2+t(1-t)}{t(1+t)} = \frac{3+t}{3t}$$

$$6+3t(1-t)=(3+t)(1+t)$$

$$6+3t-3t^2=t^2+4t+3$$

$$4t^2+t-3=0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{3}{4}.$$

$$t_1 < 0$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \mp \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad \mp \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \quad y = x - \frac{1}{x}, \quad P(1; 0)$$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

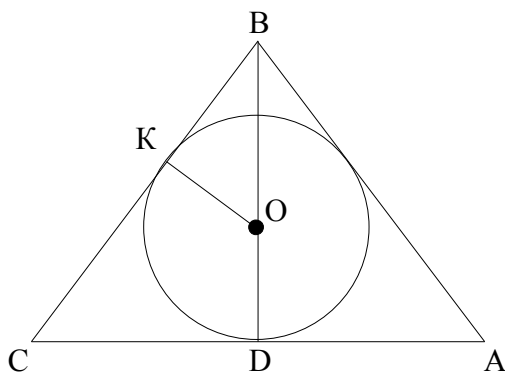
$$y(x_0) = 0, \quad x_0 = 1$$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2}, y'(x_0) = 2$$

$$y = 2(x - 1).$$

Ответ: $2x - y - 2 = 0$.

5.



Дано: $\triangle ABC$,
 $AB = BC = a$,
 $\angle ABC = 120^\circ$.
 O — центр вписанной окружности.

Найти: R — радиус вписанной окружности.
 Проведем $BD \perp AC$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle DBC$: $\angle CDB = 90^\circ$, $BC = a$,
 $\angle DBC = 60^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$. Так как катет BD лежит против угла в 30° , то

$$BD = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}. \text{ Пусть } K \text{ — точка касания вписанной окружности с}$$

боковой стороной BC . Соединим точки O и K , тогда $OK = OD = R$, $OK \perp BC$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle BKO$ ($BKO = 90^\circ$). В нем

$$OK = R, BO = BD - OD = \frac{a}{2} - R, KO = R = BO \cdot \sin \angle OBK,$$

$$R = \left(\frac{a}{2} - R \right) \cdot \sin 60^\circ = \left(\frac{a}{2} - R \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{4(2 + \sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2(2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{a(2\sqrt{3} - 3)}{2}.$$

Ответ: $\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{2}$.

Вариант № 72.

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{x}} = 1$.
2. Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2) - \operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\alpha/2)}$.
3. Решить неравенство $\frac{11}{16} + 16^{-0,5 + \log_4^2 x} \geq x^{\log_2 \sqrt{x}}$.
4. Найти $f'(2)$, если $f(x) = 5 \cdot (x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x-1}$.
5. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α .

Решения:

1. $\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{x}} = 1$

ОДЗ: $x \in [0; \infty)$

$$\sqrt{x} = t, \quad t \geq 0$$

$$\sqrt[3]{24+t} - \sqrt[3]{5+t} = 1$$

$$24+t-5-t-3\sqrt{(24+t)(5+t)}(\sqrt[3]{24+t}-\sqrt[3]{5+t})=1$$

$$19-3\sqrt{(24+t)(5+t)}=1$$

$$\sqrt[3]{(24+t)(5+t)}=6$$

$$(24+t)(5+t)=216$$

$$t^2+29t+120-216=0$$

$$t^2+29t-96=0$$

$$t_1=-32<0, \quad t_2=3$$

$$\sqrt{x}=3, \quad x=9.$$

Проверка: $x = 9 \sqrt[3]{24+3} - \sqrt[3]{5+3} = 1$

$$3 - 2 = 1$$

$$1 = 1.$$

Ответ: $\{9\}$.

$$2. \quad \frac{tg \frac{\alpha}{2} - ctg \frac{\alpha}{2}}{tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\cos \alpha.$$

$$3. \quad \frac{11}{16} + 16^{-0,5 + \log_4^2 x} \geq x^{\log_2 \sqrt{x}}$$

ОДЗ: $x \in (0; \infty)$

$$\frac{11}{16} + 16^{-\frac{1}{2}} \cdot (16^{\log_4 x})^{\log_4 x} \geq x^{\log_2 \sqrt{x}}$$

$$\frac{11}{16} + 16^{-\frac{1}{2}} (16^{\log_4 x})^{\log_4 x} \geq x^{\frac{1}{2} \log_2 x}$$

$$\frac{11}{16} + \frac{1}{4} \cdot x^{2 \log_4 x} \geq x^{\frac{1}{2} \log_2 x}$$

$$\frac{11}{16} + \frac{1}{4} \cdot x^{\log_2 x} \geq x^{\frac{1}{2} \log_2 x}$$

$$x^{\frac{1}{2} \log_2 x} = t, \quad t > 0$$

$$\frac{1}{4} t^2 - t + \frac{11}{16} \geq 0$$

$$4t^2 - 16t + 11 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 64 - 44 = 20$$

$$t_1 = \frac{8 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{4 + \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{4 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} t \geq \frac{4 + \sqrt{5}}{2} \\ t \leq \frac{4 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq \frac{4 + \sqrt{5}}{2} \\ x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \leq \frac{4 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2^2 x \geq \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \log_2^2 x \leq \log_2 \frac{4 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \left(\log_2 \frac{4 - \sqrt{5}}{2} < 0 \right)$$

$$\log_2^2 x \geq 2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}$$

$$|\log_2 x| \geq \sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\begin{cases} \log_2 x \geq \sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}} \\ \log_2 x \leq -\sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2^{\sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}}} \\ 0 < x \leq 2^{-\sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}}} \end{cases}$$

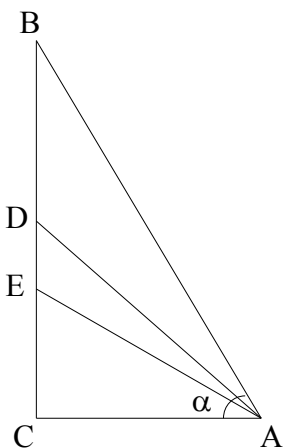
Ответ: $x \in \left(0; 2^{-\sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}}} \right] \cup \left[2^{\sqrt{2 \log_2 \frac{4 + \sqrt{5}}{2}}}; \infty \right)$.

4. $f(x) = 5(x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x-1}, \quad f'(2)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5(x+1)^2(x-1)^{\frac{1}{5}} \\
 f'(x) &= 5 \left(2(x+1)(x-1)^{\frac{1}{5}} + (x+1)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x-1)^{-\frac{4}{5}} \right) = \\
 &= 5(x+1) \left(2(x-1)^{\frac{1}{5}} + \frac{x+1}{5(x-1)^{\frac{4}{5}}} \right) = \\
 &= 5(x+1) \frac{10(x-1) + x+1}{5(x-1)^{\frac{4}{5}}} = \frac{(x+1)(11x-9)}{\sqrt[5]{(x-1)^4}}. \\
 f'(2) &= \frac{3 \cdot 13}{1} = 39.
 \end{aligned}$$

Ответ: 39.

5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$,
 AD — медиана, AE — биссектриса $\angle A$.

Найти: $\angle DAE$.

Поскольку AE — биссектриса $\angle A$,

то $\angle EAC = \frac{\alpha}{2}$. Искомый угол

$\angle DAE = \angle DAC - \frac{\alpha}{2}$. Найдем $\angle DAC$.

Найдем $\tan \angle DAC$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{BC}{AC}, \quad CD = \frac{1}{2} BC, \quad \tan \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \tan \alpha. \quad \angle DAC = \arctg\left(\frac{1}{2} \tan \alpha\right).
 \end{aligned}$$

Следовательно, $\angle DAE = \arctg\left(\frac{1}{2} \tan \alpha\right) - \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) - \frac{\alpha}{2}$.

Вариант № 73.

1. Решить уравнение $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$.
2. Упростить выражение $(1 - \cos(8\alpha - 3\pi)) / (\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha)$.
3. Решить неравенство $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$.
4. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2 - 2^{2x}}}$.
5. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен $\frac{3}{5}$.

Решения:

$$1. \sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ 5 - \sqrt[3]{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 125]$$

$$\sqrt[3]{x} = t, \quad t > 0$$

$$\sqrt{5 + t} + \sqrt{5 - t} = t$$

$$5 + t + 2\sqrt{25 - t^2} + 5 - t = t^2$$

$$2\sqrt{25 - t^2} = t^2 - 10$$

$$t^2 = z, \quad z > 0$$

$$2\sqrt{25 - z} = z - 10, \quad z \geq 10$$

$$100 - 4z = z^2 - 20z + 100$$

$$z^2 - 16z = 0$$

$$z_1 = 0 < 10$$

$$z_2 = 16$$

$$\begin{cases} t^2 = 16 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t > 0 \end{cases} \quad \sqrt[3]{x} = 4, \quad x = 64.$$

Ответ: $\{64\}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha} &= \frac{1 - \cos(\pi - 8\alpha)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha} = \frac{1 + \cos 8\alpha}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \\ &= \frac{(1 + \cos 8\alpha) \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos^2 4\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{-\cos 4\alpha} = -\cos 4\alpha \cdot \sin 4\alpha = -\frac{1}{2} \sin 8\alpha. \end{aligned}$$

$$3. \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} &> \frac{1}{\log_2(4x)} \\ \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} &> \frac{1}{2 + \log_2 x} \\ \log_2 x &= t \\ \frac{1}{t(1+t)} &> \frac{1}{2+t} \\ \frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{2+t} &> 0 \end{aligned}$$

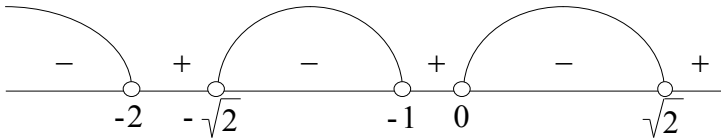
$$\frac{2+t-t(1+t)}{t(1+t)(2+t)} > 0$$

$$\frac{2+t-t-t^2}{t(1+t)(2+t)} > 0$$

$$\frac{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}{t(1+t)(2+t)} < 0$$

$$\begin{cases} t < -2 \\ -\sqrt{2} < t < -1 \\ 0 < t < \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x < -2 \\ -\sqrt{2} < \log_2 x < -1 \\ 0 < \log_2 x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2^{\sqrt{2}} \end{cases} \\ x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty).$$



Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2^{\sqrt{2}}).$

$$4. \quad f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}, \quad f'(0)$$

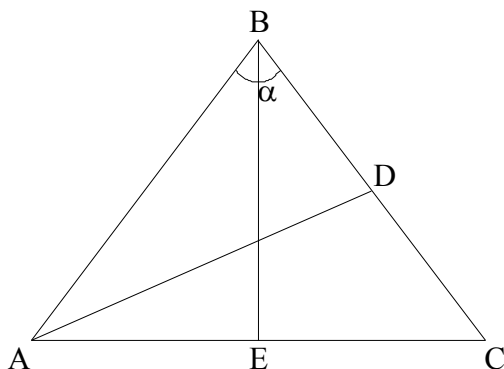
$$f(x) = 2^{2x} \left(2 - 2^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \ln 2 \cdot 2^{2x} (2 - 2^{2x})^{-\frac{1}{2}} + \ln 2 \cdot 2^{2x} \cdot (2 - 2^{2x})^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{2x} = \\
 &= \ln 2 \cdot 2^{2x} \left(\frac{2}{\sqrt{2 - 2^{2x}}} + \frac{2^{2x}}{(2 - 2^{2x})\sqrt{2 - 2^{2x}}} \right) = \ln 2 \cdot 2^{2x} \frac{4 - 2 \cdot 2^{2x} + 2^{2x}}{(2 - 2^{2x})\sqrt{2 - 2^{2x}}} = \\
 &= \ln 2 \cdot 2^{2x} \frac{4 - 2^{2x}}{(2 - 2^{2x})\sqrt{2 - 2^{2x}}}; \\
 f'(0) &= 3 \ln 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: $3 \ln 2$.

5. Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$, AD — медиана, $\sin \angle DAC = \frac{3}{5}$.

Найти: $\sin \angle ABC$.



Пусть $\angle DAC = \varphi$,

$\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$,

$\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi$,

$\angle ADB = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi \right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi$.

Из теоремы синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \frac{AB}{BD} = \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD}.$$

Т.к. $BD = \frac{1}{2} AB$, то $\frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD} = 2$,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi\right)} = 2.$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)} = 2, \quad 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right).$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\varphi - 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\varphi = \cos\frac{\alpha}{2} \cos\varphi + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\varphi.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} \cos\varphi = 3\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\varphi, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}ctg\varphi.$$

$$ctg\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{9}, \quad \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 + \frac{16}{81}} = \frac{8 \cdot 81}{9 \cdot 97} = \frac{72}{97}.$$

Ответ: $\frac{72}{97}$.

Вариант № 74.

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2$.
2. Упростить выражение $(1 + ctg2\alpha \cdot ctg\alpha) / (tg\alpha + ctg\alpha)$.
3. Решить неравенство $(\sqrt{3})^{2 + \log_{\sqrt{3}} x} - 1,5 \leq x^{\log_3 x^4}$.
4. Найти $f'(0)$, если $f(x) = 2^{x - 2x^2 - 1}$.
5. Найти угол треугольника, если известно, что биссектриса угла равна l , а стороны, образующие этот угол, равны a и b .

Решения:

1. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$

ОДЗ: $x \in [0; \infty)$

$$\sqrt{x} = t, \quad t \geq 0$$

$$\sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{1-t} = 2$$

$$1+t+1-t+3\sqrt[3]{1-t^2}(\sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{1-t}) = 8$$

$$2+6\sqrt[3]{1-t^2} = 8$$

$$\sqrt[3]{1-t^2} = 1$$

$$t = 0$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0.$$

Проверка:

$$x = 0$$

$$\sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1-0} = 2$$

$$2 = 2.$$

Ответ: $\{0\}$.

$$2. \quad \frac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}.$$

$$3. \quad (\sqrt{3})^{2 + \log_{\sqrt{3}}^2 x} - 1.5 \leq x^{\log_3 x^4}$$

ОДЗ: $x \in (0; \infty)$

$$3 \cdot \left((\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} x} \right)^{\log_{\sqrt{3}} x} - 1,5 \leq x^{\log_3 x^4}$$

$$3 \cdot x^{\log_{\sqrt{3}} x} - \frac{3}{2} \leq x^{4 \log_3 x}$$

$$3 \cdot x^{2 \log_3 x} - \frac{3}{2} \leq x^{4 \log_3 x}$$

$$x^{4 \log_3 x} - 3 \cdot x^{2 \log_3 x} + \frac{3}{2} \geq 0$$

$$x^{2 \log_3 x} = t, \quad t > 0$$

$$2t^2 - 6t + 3 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 6 = 3$$

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} t \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ t \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{2 \log_3 x} \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ x^{2 \log_3 x} \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_3^2 x \leq \log_3 \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{or} \quad \left(\log_3 \frac{3 - \sqrt{3}}{2} < 0 \right) \\ 2 \log_3^2 x \geq \log_3 \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\log_3^2 x \geq \frac{1}{2} \log_3 \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$|\log_3 x| \geq \sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3 + \sqrt{3}}{2}}$$

$$\begin{cases} \log_3 x \geq \sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}} \\ \log_3 x \leq -\sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}} \\ x \geq 3^{\sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}}} \\ 0 < x < 3^{-\sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}}} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(0; 3^{-\sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}}} \right] \cup \left[3^{\sqrt{\frac{1}{2} \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{2}}}; \infty \right)$.

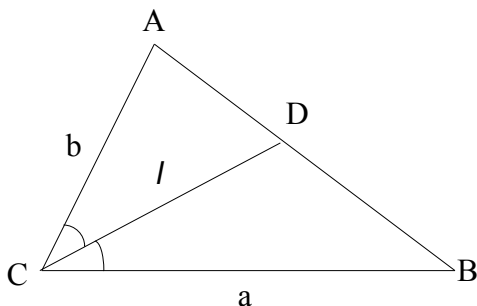
4. $f(x) = 2^{x-2x^2-1}$, $f'(0)$

$$f'(x) = 2^{x-2x^2-1} \cdot (1-4x) \cdot \ln 2, \quad f'(0) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\ln 2}{2}$.

5. Дано: $\triangle ABC$, CD — биссектриса, $CD = \ell$,
 $BC = a$, $AC = b$.

Найти: $\angle ACB$.



Обозначим искомый $\angle ACB$ через α .

Тогда $\angle ACD = \angle DCB = \frac{\alpha}{2}$.

Найдем двумя способами площадь $S_{\triangle ABC}$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \ell \cdot \sin \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} b \cdot \ell \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} ab \cdot \sin \alpha &= \ell \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (a + b), \\ 2ab \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} &= \ell \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (a + b) \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{\ell(a + b)}{2ab} \\ \frac{\alpha}{2} &= \arccos \frac{\ell(a + b)}{2ab}, \\ \alpha &= 2 \arccos \frac{\ell(a + b)}{2ab}. \end{aligned}$$

Ответ: $2 \arccos \frac{\ell(a + b)}{2ab}.$

Вариант № 75.

1. Решить неравенство $\log_{1/3} \left((4x^2 - 1) / x \right) \geq -1$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 2} = 7 \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $2tg3x - 3tg2x = tg^2 2x \cdot tg3x$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

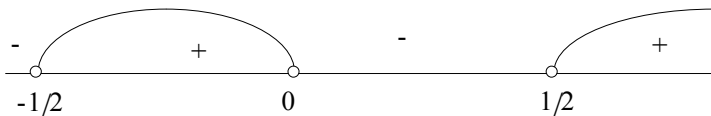
$$y = \frac{4}{3} \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)^2 \text{ в точке с абсциссой } x = 1.$$

5. Дан ромб. Сумма длин его диагоналей равна m , а его площадь равна S . Найти сторону ромба.

Решения:

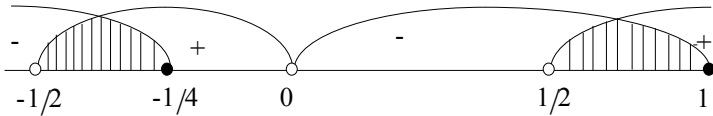
1. $\log_{3^{-1}} \frac{4x^2 - 1}{x} \geq -1$

ОДЗ: $\frac{4x^2 - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x} > 0$



$$x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \\ \frac{4x^2 - 1}{x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \\ \frac{4x^2 - 3x - 1}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \\ \frac{4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{x} \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$2. \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x+2y = 23 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x+y+2 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ (x+y) + (2x+y+2) = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+y} = a, \quad a \geq 0 \\ \sqrt{2x+y+2} = b, \quad b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ (a+b)^2 - 2ab = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 \\ \sqrt{2x+y+2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ x=-9 \\ y=25 \end{cases}$$

Ответ: $\{(5;4), (-9;25)\}$.

$$3. \quad 2tg3x - 3tg2x = tg^2 2x \cdot tg3x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2(tg3x - tg2x) = tg2x(1 + tg2x \cdot tg3x).$$

Рассмотрим

$$1 + tg2x \cdot tg3x = \frac{\cos 2x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot \sin 3x}{\cos 2x \cdot \cos 3x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \cdot \cos 3x} \neq 0, \text{ т.к.}$$

если $\cos x = 0$, то и $\cos 3x = 0$, что невозможно.

Разделим уравнение на $1 + tg2x \cdot tg3x \neq 0$:

$$2 \frac{tg3x - tg2x}{1 + tg2x \cdot tg3x} = tg2x,$$

$$2 \cdot tgx = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$tgx = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 = \frac{2}{1 - tg^2 x}, \quad tgx = 0.$$

Ответ: $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

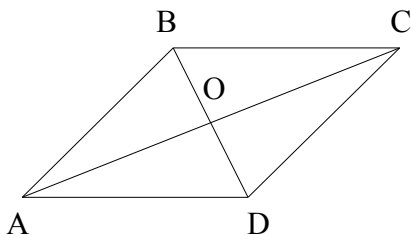
$$4. \quad y = \frac{4}{3} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2, \quad x_0 = 1$$

$$y' = \frac{4}{3} \cdot 2 \left(\frac{x-1}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{8(x-1)}{3(x+2)^3}$$

$$y'(1) = 0, \quad k = 0.$$

Ответ: 0.

5.



Дано: $ABCD$ — ромб, $AC + BD = m$,
 $S_p = S$.

Найти: $AD = DC = BC = AB$.

Пусть O — центр рассматриваемого ромба $ABCD$. Обозначим AO через x , а BO — через y .

Из прямоугольного $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90^\circ$) по теореме Пифагора

$$AB^2 = AO^2 + BO^2, \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Площадь ромба S_p найдем по формуле

$$S_p = AC \cdot BO = 2xy, \quad 2xy = S.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{m}{2} \\ 2xy = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = \frac{m^2}{4} \\ 2xy = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = \frac{m^2}{4} \\ 2xy = S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{m^2}{4} - S \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{m^2 - 4S}{4}}$$

$$AB = \frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}.$

Вариант № 76.

1. Решить неравенство $\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,25}(x + 15).$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3 \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\sin^{-1} 5x - \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

4. Составить уравнение касательной к кривой $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ в

точке $P(0; 0).$

5. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

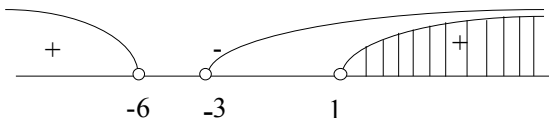
Решения:

$$1. \log_{0,5}(x+3) < \log_{0,25}(x+15).$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-3; \infty)$$

$$\log_{0,25}(x+3)^2 < \log_{0,25}(x+15)$$

$$\begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ (x+3)^2 > x+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \infty) \\ (x+6)(x-1) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $(1; \infty)$.

$$2. \begin{cases} \sqrt{2x-y+11} - \sqrt{3x+y-9} = 3 \\ \sqrt[4]{2x-y+11} + \sqrt[4]{3x+y-9} = 3. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x-y+11 \geq 0 \\ 3x+y-9 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2x-y+11} = a, & a \geq 0 \\ \sqrt[4]{3x+y-9} = b, & b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b) \cdot (a+b) = 3 \\ a+b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 1 \\ a+b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2x-y+11} = 2 \\ \sqrt[4]{3x+y-9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+11 = 16 \\ 3x+y-9 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = 5 \\ 3x+y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 1)$.

$$3. \sin^{-1} 5x - \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{1}{\sin 5x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin 5x} = \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin 5x} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$\sin 5x = \sin x$$

$$\sin 5x - \sin x = 0$$

$$2 \cos 3x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Проверка на принадлежность к ОДЗ:

$$x_1: \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m = \frac{\pi n}{5}; n = 5\ell; 2m = 6\ell - 1 \text{ — никогда.}$$

$$\{x_2\} \subset \{x_1\}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3} = \frac{\pi k}{2} \Leftrightarrow k = 2\ell + 1, \text{ а для } k = 2\ell \text{ оставшаяся часть } x_2 \notin \text{ОДЗ.}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}.$

4. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x \quad P(0,0).$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 0, y(x_0) = 0.$$

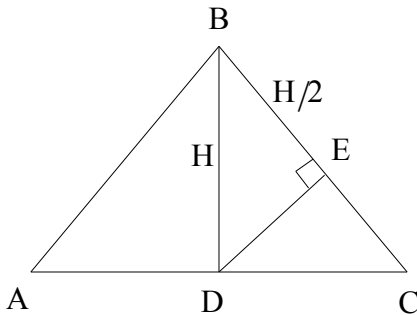
$$y' = -x^2 + 2x - 1$$

$$y'(x_0) = -1$$

$$y = -1 \cdot (x - 0) = -x.$$

Ответ: $y + x = 0$.

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$, $BD \perp AC$,

$$BD=H, DE \perp BC, BE = \frac{H}{2}.$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle BDE$,

$$(\angle DEB=90^\circ): BD=H, BE = \frac{H}{2}.$$

В этом треугольнике

$$\sin \angle BDE = \frac{BE}{BD} = \frac{H}{2H} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\angle BDE = 30^\circ$. Тогда $\angle EBD = 60^\circ$.

В прямоугольном $\triangle BDC$ ($\angle BDC = 90^\circ$) $DC = BD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = H \cdot \sqrt{3}$.

Поэтому: $S_{\triangle ABC} = BD \cdot DC = H^2 \sqrt{3}$.

Ответ: $H^2 \sqrt{3}$.

Вариант № 77.

1. Решить неравенство $\log_{0,3}(3x - 8) > \log_{0,3}(x^2 + 4)$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

3. Решить уравнение
$$\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3.$$

4. Составить уравнение касательной к кривой $y = (x - 4)^3(2x + 1)$ в точке $P(2; -40)$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC высота BD , опущенная на основание, равна h , радиус вписанного круга равен r . Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решения:

$$1. \log_{0,3}(3x - 8) > \log_{0,3}(x^2 + 4).$$

$$\text{ОДЗ: } 3x - 8 > 0$$

$$x \in \left(\frac{8}{3}; \infty\right).$$

$$\begin{cases} 3x - 8 < x^2 + 4 \\ x \in \left(\frac{8}{3}; \infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 12 > 0 \\ x \in \left(\frac{8}{3}; \infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{8}{3}; \infty\right).$$

$$2. \begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 2y + 1 \geq 0.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 1} = a, \quad a \geq 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 1} = a, \quad a \geq 0 \\ \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 2y = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; -2).$$

$$3. \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x \neq \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \pi \ell, \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} m, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} \ell, \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$$

$$2 \operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$$

$$2 \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right) + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$$

$$2 \frac{\sin^2 2x - \cos^2 2x}{\cos 2x \cdot \sin 2x} + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$$

$$-4 \frac{\cos 4x}{\sin 4x} + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$$

$$\operatorname{ctg}^3 4x - 4 \operatorname{ctg} 4x - 3 = 0$$

$$\operatorname{ctg} 4x = t$$

$$t^3 - 4t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t^2 - t - 3 = 0$$

$$t_{2,3} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2}.$$

$$\operatorname{ctg} 4x = -1, 4x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2}, x = \frac{1}{4} \operatorname{arccctg} \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \left\{ \frac{\pi}{16} (4n + 3), n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{4} \operatorname{arccctg} \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. $y = (x - 4)^3(2x + 1)$, $P(2, -40)$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

$$x_0 = 2, y(x_0) = -40.$$

$$y' = 3(x - 4)^2(2x + 1) + 2(x - 4)^3 = (x - 4)^2(3(2x + 1) + 2(x - 4)) =$$

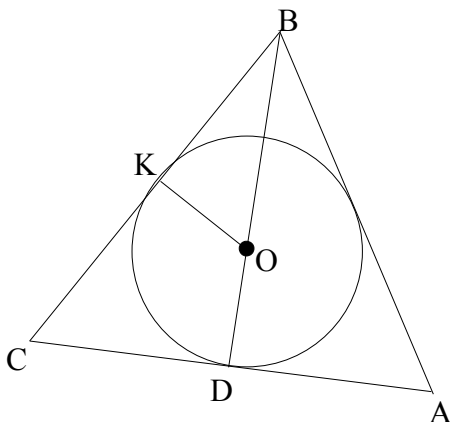
$$= (x - 4)^2(8x - 5)$$

$$y'(x_0) = (-2)^2(16 - 5) = 44$$

$$y = -40 + 44(x - 2) = 44x - 128.$$

Ответ: $44x - y - 128 = 0$.

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$, $BD \perp AC$,
 $BD=h$, $OD=r$, окружность $(O; r)$
 вписана в $\triangle ABC$.

Найти: R — радиус описанной
 около $\triangle ABC$ окружности.

Пусть точка K — точка касания
 окружности $(O; r)$ со стороной BC
 $\triangle ABC$.

В прямоугольном $\triangle KOB$
 $(\angle BKO=90^\circ)$:

$$\sin \angle OBK = \frac{KO}{OB},$$

$$OB = BD - OD = h - r,$$

$$\sin \angle OBK = \frac{r}{h - r}.$$

Пусть $BC=x$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle BCD$ ($\angle CDB=90^\circ$). В нем $BC=x$,
 $BD=h$, $\sin \angle DBC = \frac{r}{h - r}$.

$CD = BC \cdot \sin \angle DBC = x \cdot \frac{r}{h - r}$. По теореме Пифагора

$$CD^2 + BD^2 = BC^2, \quad x^2 \cdot \frac{r^2}{(h-r)^2} + h^2 = x^2, \quad x^2 \left(1 - \frac{r^2}{(h-r)^2} \right) = h^2,$$

$$x^2 \left(\frac{h^2 - 2hr}{(h-r)^2} \right) = h^2,$$

$$x^2 \frac{h-2r}{(h-r)^2} = h, \quad x^2 = \frac{h \cdot (h-r)^2}{h-2r}, \quad x = (h-r) \sqrt{\frac{h}{h-2r}}.$$

Тогда $CD = r \sqrt{\frac{h}{h-2r}}, \quad S_{\triangle ABC} = BD \cdot CD = hr \sqrt{\frac{h}{h-2r}}.$

Радиус R найдем по формуле

$$R = \frac{AC \cdot BC \cdot BA}{4S} = \frac{h \cdot (h-r)^2 \cdot 2r}{(h-2r) \cdot 4} \cdot \sqrt{\frac{h}{h-2r}} \cdot \frac{1}{hr} \sqrt{\frac{h-2r}{h}} = \frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$$

Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$

Вариант № 78.

1. Решить неравенство $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 1/\sqrt{x} + 1/\sqrt{y} = 4/3 \\ xy = 9. \end{cases}$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3.$

4. Составить уравнение касательной к кривой

$$y = (x-2)^2(x+1) \quad \text{в точке } P(1; 2).$$

5. Дан равнобедренный треугольник. Угол при основании равен $\alpha.$

Найти отношение площади треугольника к площади описанного около него круга.

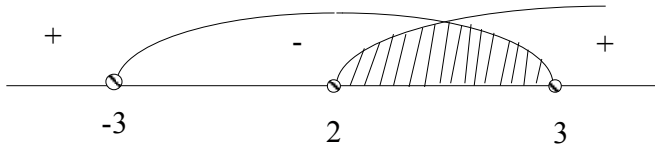
Решения:

1. $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5.$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; \infty).$

$$\log_{1,2}(x^2 - 4) < \log_{1,2} 5$$

$$\begin{cases} x \in (2; \infty) \\ x^2 - 4 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; \infty) \\ (x-3)(x+3) < 0. \end{cases}$$



ОТВЕТ: $x \in (2; 3)$.

$$2. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3} \\ xy = 9. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = a, a > 0 \\ \sqrt{y} = b, b > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3} \\ a^2 b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{ab} = \frac{4}{3} \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{(1; 9), (9; 1)\}$.

$$3. \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} - \cos 4x = 3$$

$$\frac{2}{\sin 2x} - \cos 4x = 3$$

$$2 - \sin 2x \cdot \cos 4x = 3 \sin 2x$$

$$2 - \sin 2x(1 - 2 \sin^2 2x) = 3 \sin 2x$$

$$\sin^3 2x - 2 \sin 2x + 1 = 0$$

$$\sin 2x = t, |t| \leq 1$$

$$t^3 - 2t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$\begin{cases} t = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} \\ |t| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 2x = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^m \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\text{ОТВЕТ:}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^m \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4. \quad y = (x - 2)^2(x + 1) \quad P(1; 2)$$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 1, y(x_0) = 2$$

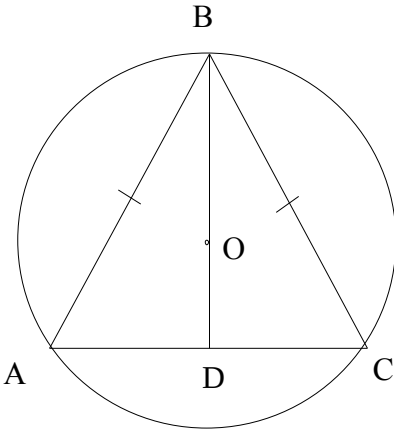
$$y' = 2(x - 2)(x + 1) + (x - 2)^2 = (x - 2)(2(x + 1) + (x - 2)) = (x - 2) \cdot 3x.$$

$$y'(x_0) = -3$$

$$y = 2 - 3(x - 1) = -3x + 5.$$

Ответ: $3x + y - 5 = 0$.

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$, $\angle BAC=\alpha$,
 O — центр окружности, описанной
около $\triangle ABC$.

Найти: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_K}$, где S_K — площадь

описанного круга. Обозначим через a
длину основания $\triangle ABC$. Пусть $BD \perp AC$,
 R — радиус окружности, описанной
около $\triangle ABC$. Тогда, учитывая, что
 $\angle ABC = \pi - 2\alpha$, по теореме синусов в
 $\triangle ABC$ находим

$$2R = \frac{AC}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

В прямоугольном $\triangle ABD$ ($\angle ADB = 90^\circ$):

$$AD = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}, \quad BD = AD \cdot \operatorname{tg} \angle BAD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$S_{\triangle ABC}$ и S_K найдем по формулам:

$$S_{\triangle ABC} = AD \cdot BD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$S_K = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_K} = \frac{\frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{\pi a^2}{4 \sin^2 2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{\pi} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \pi} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\pi}.$

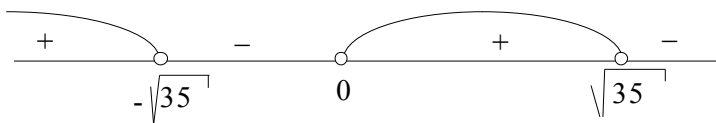
Вариант № 79.

1. Решить неравенство $\log_{0,25} \left((35 - x^2) / x \right) \geq -1 / 2.$
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$
3. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$
4. На кривой $y = x^3 - 3x + 2$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x.$
5. Найти площадь ромба, если его острый угол равен 30° , а площадь вписанного круга равна $Q.$

Решения:

$$1. \log_{0,25} \left((35 - x^2) / x \right) \geq -1 / 2$$

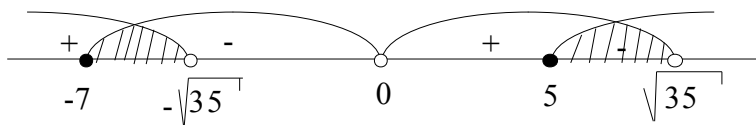
$$\text{ОДЗ: } \frac{35 - x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{35} - x)(\sqrt{35} + x)}{x} > 0$$



$$x \in (-\infty; -\sqrt{35}) \cup (0; \sqrt{35}).$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{35}) \cup (0; \sqrt{35}) \\ \frac{35 - x^2}{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{35}) \cup (0; \sqrt{35}) \\ \frac{x^2 + 2x - 35}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{35}) \cup (0; \sqrt{35}) \\ \frac{(x+7)(x-5)}{x} \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-7; -\sqrt{35}) \cup (5; \sqrt{35})$.

2.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

ОДЗ: $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ (x+2y) + (x-y+2) = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} = a \\ \sqrt[3]{x-y+2} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)^2-3ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ a=2 \\ b=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=1 \\ \sqrt[3]{x-y+2}=2 \\ \sqrt[3]{x+2y}=2 \\ \sqrt[3]{x-y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=6 \\ x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \\ x=2 \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right); (2; 3)\right\}.$

3. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

ОДЗ: $x \in R.$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \cos x \sin x + \cos^2 x) = 1$$

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1$$

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}(1 + \sin 2x - 1)\right) = 1$$

$$(\sin x + \cos x)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x)\right) = 1$$

$$(\sin x + \cos x)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2\right) = 1$$

$$(\sin x + \cos x)(3 - (\sin x + \cos x)^2) = 2.$$

Замена: $\sin x + \cos x = t, \quad |t| \leq \sqrt{2}$

$$t(3 - t^2) = 2$$

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_2 = 1, \quad t_3 = -2 < -\sqrt{2}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2k \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2k + 1 \quad x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

4. $y = x^3 - 3x + 2, \quad y = 3x$

$$y' = 3x^2 - 3$$

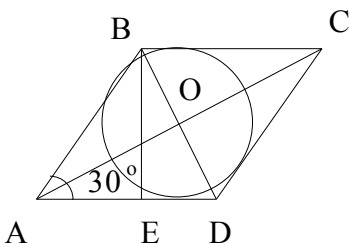
$$3x^2 - 3 = 3, \quad x^2 = 2$$

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad y_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{2}, \quad y_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $\left\{(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), (\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})\right\}.$

5.



Дано: $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 30^\circ$, $S_k = Q$ — площадь круга, вписанного в $ABCD$.

Найти: S — площадь $ABCD$.

Пусть $BE \perp AD$: BE — высота ромба.

Найдем r — радиус круга, вписанного в ромб $ABCD$. Так как $\pi r^2 = Q$, то

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}, \quad BE = 2r = 2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

прямоугольного $\triangle ABE$ ($\angle AEB = 90^\circ$, $\angle BAE = 30^\circ$): $AB = 2BE$ (катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы). $AB = 4\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$

Следовательно, $S = AB \cdot BE = 8\frac{Q}{\pi}.$

Ответ: $\frac{8Q}{\pi}.$

Вариант № 80.

1. Решить уравнение $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} = 2$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha.$$

3. Решить неравенство $\log_x(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$.

5. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 см. Найти площадь треугольника.

Решения:

1. $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$.

ОДЗ: $x \in [1; \infty)$.

$$2\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x+3}$$

$$4x - 4 = 4 - 4\sqrt{x+3} + x + 3$$

$$3x - 11 = -4\sqrt{x+3}$$

$$9x^2 - 66x + 121 = 16x + 48$$

$$9x^2 - 82x + 73 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 41^2 - 9 \cdot 73 = 1681 - 657 = 1024$$

$$x_1 = \frac{41 - 32}{9} = 1, \quad x_2 = \frac{41 + 32}{9} = \frac{73}{9}.$$

Проверка: $x_1 = 1 \quad \sqrt{4} = 2$

$$2 = 2$$

$$x_2 = \frac{73}{9};$$

$$2\sqrt{\frac{73}{9}-1} + \sqrt{\frac{73}{9}+3} = 2$$

$$2\sqrt{\frac{64}{9}} + \sqrt{\frac{100}{9}} = 2$$

$$\frac{2 \cdot 8}{3} + \frac{10}{3} \neq 2.$$

Ответ: $\{1\}$.

2.

$$\begin{aligned} & \cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha = \\ & (\cos 3\alpha + \cos 6\alpha) - (\cos 4\alpha + \cos 5\alpha) = \\ & = 2 \cos \frac{9\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} - 2 \cos \frac{9\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{9\alpha}{2} (\cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}) = \\ & = -4 \cdot \cos \frac{9\alpha}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \log_x(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

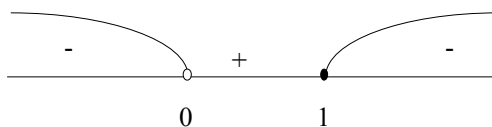
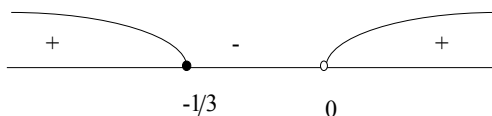
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x(2x^3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x 2 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{1 + 3 \log_2 x}{\log_2 x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x = t \\ \frac{1+3t}{t} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \log_2 x \leq -\frac{1}{3} \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (1; \infty)$$

$$\log_x 2 + 1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \log_x 2 = t \\ \sqrt{t+3} \geq t+1 \\ t \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -3 \\ t+1 < 0 \\ \begin{cases} t \geq -1 \\ t+3 \geq t^2+2t+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -3 \\ \begin{cases} t < -1 \\ t \geq -1 \end{cases} \\ t^2+t-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -3 \\ \begin{cases} t < -1 \\ t \geq -1 \end{cases} \\ (t+2)(t-1) \leq 0 \end{cases} \\
 & -3 \leq t \leq 1 \\
 & -3 \leq \log_x 2 \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (1; \infty) \\ \log_x 2 \geq -3 \\ \log_x 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (1; \infty) \\ \frac{1+3\log_2 x}{\log_2 x} \geq 0 \\ \frac{1-\log_2 x}{\log_2 x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = t \\ \frac{1+3t}{t} \geq 0 \\ \frac{1-t}{t} \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} t \leq -\frac{1}{3} \\ t \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x \leq -\frac{1}{3} \\ \log_2 x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \geq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ: $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup [2; \infty)$.

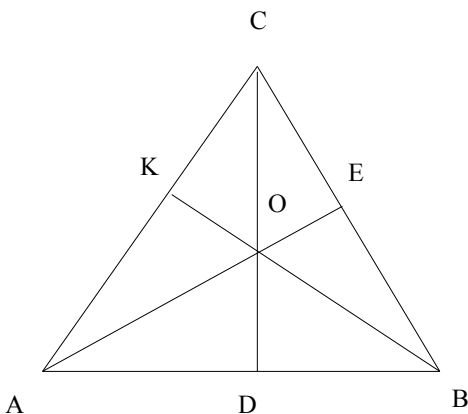
Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup [2; \infty)$.

4. $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1) = x^{\frac{7}{2}} - x + \sqrt{x}$

$$y' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 - 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $y' = \frac{7x^3 - 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}.$

5.



Дано:

$\triangle ABC$; AE, BK, CD – медианы,

$AE = BK = 5$ см, $CD = 6$ см.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Поскольку $KB = AE$, то

$\triangle ABC$ – равнобедренный.

$CD \perp AB, AD = BD$,

$$OD = \frac{1}{3}CD = 2 \text{ см},$$

$$AO = \frac{2}{3}AE = \frac{10}{3} \text{ см}.$$

Рассмотрим

$$\triangle AOD \left(\angle ADO = 90^\circ, OD = 2 \text{ см}, AO = \frac{10}{3} \text{ см} \right).$$

По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{100}{9} - 4} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} (\text{см}^2).$

$$S_{\triangle AOB} = AD \cdot OD = \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3} (\text{см}^2).$$

Поскольку у $\triangle AOB$ и $\triangle ACB$ одно основание, а высоты относятся

$$\frac{OD}{CD} = \frac{1}{3}, \text{ то } S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AOB} = 16 (\text{см}^2).$$

Ответ: 16 см^2 .

Вариант № 81.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha.$$

3. Решить неравенство $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

4. Найти производную функции $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)\left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x\right)$.

5. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон — 18 и 24 см. Найти площадь треугольника.

Решения:

1. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

ОДЗ: $x \in \left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$.

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$

$$3x + \cancel{1} = \cancel{1} + 2\sqrt{x+4} + x + 4$$

$$2x - 4 = 2\sqrt{x+4}$$

$$x - 2 = \sqrt{x+4}$$

$$x^2 - 4x \cancel{+4} = x \cancel{+4}$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5.$$

Проверка: $x_1 = 0 \quad 1 - 2 = 1$

$$-1 \neq 1$$

$$x_2 = 5 \quad \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$$

$$4 - 3 = 1$$

$$1 = 1.$$

Ответ: $\{5\}$.

$$2. \quad \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 6\alpha) + \sin 4\alpha =$$

$$2 \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin 4\alpha =$$

$$2 \sin 4\alpha \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 4\alpha \left(\cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$4 \sin 4\alpha \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$3. \quad \log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \\ \log_2 x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \\ \log_2 x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4. \end{cases}$$

$$x \in (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; \infty).$$

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{4 \log_2 x}{2(\log_2 x - 2)}$$

$$3 \left(\log_{\frac{x}{2}} 2 + \log_{\frac{x}{4}} 2 \right) < \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$$

$$3 \left(\frac{1}{\log_2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\log_2 \frac{x}{4}} \right) < \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$$

$$3 \frac{(\log_2 x - 2 + \log_2 x - 1)}{(\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2)} < \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$$

$$\frac{3(2 \log_2 x - 3)}{(\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2)} < \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$$

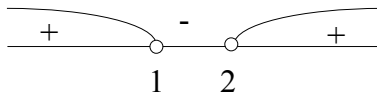
$$\begin{cases} \log_2 x = t \\ \frac{3(2t - 3)}{(t - 1)(t - 2)} - \frac{2t}{t - 2} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{3(2t - 3) - 2t(t - 1)}{(t - 1)(t - 2)} < 0$$

$$\frac{6t - 9 - 2t^2 + 2t}{(t - 1)(t - 2)} < 0$$

$$\frac{2t^2 - 8t + 9}{(t - 1)(t - 2)} > 0$$

$$(t - 1)(t - 2) > 0$$



$$\begin{cases} \log_2 x < 1 \\ \log_2 x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0; 2) \cup (4; \infty) \\ x \in (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; \infty) \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup (4; \infty)$.

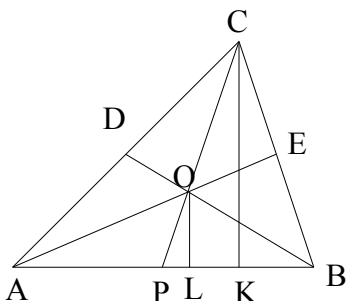
$$4. y = (\sqrt[3]{x} + 2x) \left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x \right) = \left(x^{\frac{1}{3}} + 2x \right) \left(1 + x^{\frac{2}{3}} + 3x \right) =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} + 2x + x + 2x^{\frac{5}{3}} + 6x^2 + 3x^{\frac{4}{3}} = 6x^2 + 2x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} + 3x + x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = 12x + \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ответ: $y' = 12x + \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 20$ см, AE, BD — медианы, $BD = 18$ см, $AE = 24$ см.



Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 1:2, то

$$OB = \frac{2}{3} BD = 12 \text{ см, а } AO = \frac{2}{3} AE = 16 \text{ см.}$$

Найдем $S_{\triangle AOB}$ по формуле Герона:

$$\frac{p}{2} = \frac{12 + 16 + 20}{2} = 24,$$

$$S_{\triangle AOB} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4} = 24 \cdot 4 = 96 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Проведем $OL \perp AB, CK \perp AB$, тогда

$$\triangle OPL \sim \triangle CPK, \text{ поэтому } \frac{OL}{CK} = \frac{OP}{CP} = \frac{1}{3}. \text{ У } \triangle AOB \text{ и } \triangle ABC \text{ основания}$$

одинаковы, а высота CK втрое больше высоты OL , поэтому

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot S_{\triangle AOB} = 3 \cdot 96 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 288 см^2 .

Вариант № 82.

1. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 3$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha.$$

3. Решить неравенство $\sqrt{\log_{1/2}^2 x + 4 \log_2 \sqrt{x}} \leq \sqrt{2} (4 - \log_{16} x^4)$.

4. Найти производную функции $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$.

5. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60° . Найти площадь треугольника.

Решения:

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 3$.

ОДЗ: $x \in \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2} &= 3 - \sqrt{x+3} \\ 3x-2 &= 9 - 6\sqrt{x+3} + x+3 \\ 2x-14 &= -6\sqrt{x+3} \\ x-7 &= -3\sqrt{x+3} \\ x^2-14x+49 &= 9x+27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2-23x+22 &= 0 \\ x_1 &= 1, x_2 = 22.\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \quad \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \\ x_2 &= 22 \quad \sqrt{25} + \sqrt{64} \neq 3.\end{aligned}$$

Ответ: {1}.

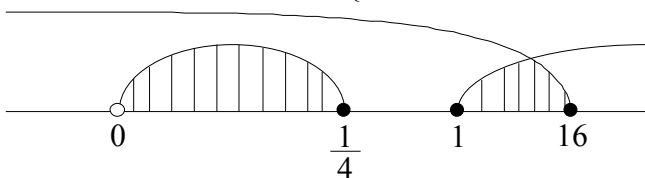
2.

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha &= (\sin 5\alpha + \sin 7\alpha) + (\sin 6\alpha + \sin 8\alpha) = \\ &= 2 \sin 6\alpha \cos \alpha + 2 \sin 7\alpha \cos \alpha = 2 \cos \alpha (\sin 6\alpha + \sin 7\alpha) = 4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{13\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

3. $\sqrt{\log_{1/2}^2 x + 4 \log_2 \sqrt{x}} \leq \sqrt{2} (4 - \log_{16} x^4)$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x + 4 \log_2 \sqrt{x} \geq 0 \\ 4 - \log_{16} x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 2 \log_2 x \geq 0 \\ 4 - \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x (\log_2 x + 2) \geq 0 \\ \log_2 x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \leq -2 \\ \log_2 x \geq 0 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 16 \\ 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 1 \end{cases}$$



$$x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 16].$$

$$\begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 16] \\ \sqrt{\log_2^2 x + 2 \log_2 x} \leq \sqrt{2(4 - \log_2 x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 16] \\ \log_2^2 x + 2 \log_2 x \leq 2(4 - \log_2 x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x = t \\ t^2 + 2t \leq 2(16 - 8t + t^2) \end{cases}$$

$$2t^2 - 16t + 32 - t^2 - 2t \geq 0$$

$$t^2 - 18t + 32 \geq 0$$

$$(t - 16)(t - 2) \geq 0$$



$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \log_2 x \leq 2 \\ \log_2 x \geq 16 \end{cases} \\ x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 16] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ x \geq 2^{16} \end{cases} \\ x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 16]. \end{cases}$$

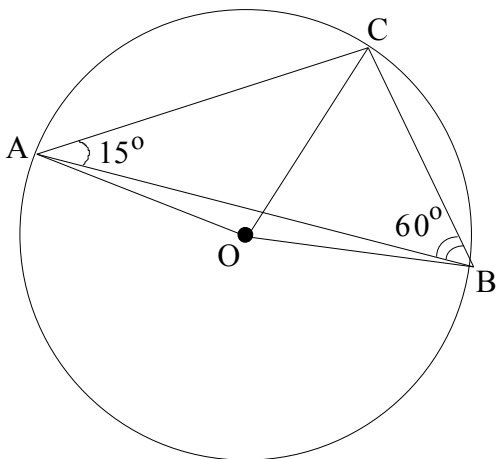
Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; 4].$

4. $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x}).$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x}) + \frac{1}{\sqrt{2x}}(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{3x}) + \\ &\quad + \frac{3}{2\sqrt{3x}}(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} + \sqrt{6x}) + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x} + \sqrt{3x} + \sqrt{3x}) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{2x}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} + \sqrt{6x} + \sqrt{2} + \sqrt{2x} + \sqrt{6x} + \sqrt{6x} + \sqrt{3} + \\ &\quad + \sqrt{3x} + \sqrt{6x} + \sqrt{6x}) = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{6x} + 3\sqrt{6x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{6x} + 3\sqrt{6x}}{2\sqrt{x}}.$

5.



Дано: окр. $(O; R)$, $\triangle ABC$ вписан в окр.

$(O; R)$ $\angle CAB = 15^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Найдем $S_{\triangle ABC}$
по формуле

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle BCA.$$

$$\angle BCA = 105^\circ.$$

По теореме синусов

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}, \quad 2R = \frac{BC}{\sin \angle CAB}.$$

$$AC = 2R \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3}, \quad BC = 2R \cdot \sin 15^\circ.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2\sqrt{3} \sin 15^\circ \cdot \sin 105^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\cos 90^\circ - \cos 120^\circ) = \\ &= \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}.$

Вариант № 83.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2.$

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/3} \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) < \log_3 \log_{1/5} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

4. Найти производную $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

5. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

Решения:

1. $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{x + 1} = 2.$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x + 6 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; \infty).$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 6} &= 2 + \sqrt{x + 1} \\ 2x + 6 &= 4 + 4\sqrt{x + 1} + x + 1 \\ x + 1 &= 4\sqrt{x + 1} \\ \begin{cases} \sqrt{x + 1} = 0 \\ \sqrt{x + 1} = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 15. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка: $x = -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{-2 + 6} - \sqrt{-1 + 1} &= 2 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-1; 15\}.$

2.

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha &= (\cos 5\alpha + \cos 9\alpha) + (\cos 8\alpha + \cos 12\alpha) = \\ &= 2 \cos 7\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 \cos 10\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha (\cos 7\alpha + \cos 10\alpha) = \\ &= 4 \cos 2\alpha \cdot \cos \frac{17}{2} \alpha \cdot \cos \frac{3}{2} \alpha. \end{aligned}$$

$$3. \log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) < \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \\ \log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x < 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 + 1 > 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \infty)$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (0; \infty).$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) < \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \right)^{-1}$$

$$\begin{cases} x \in (0; \infty) \\ \log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) > \frac{1}{\log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)} \end{cases},$$

$$\text{т.к. при } x \in (0; \infty) \log_5 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) > 0, \text{ то}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \log_5^2(\sqrt{x^2+1}+x) > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \log_5(\sqrt{x^2+1}+x) > 1 \\ \log_5(\sqrt{x^2+1}+x) < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1}+x > 5 \\ \sqrt{x^2+1}+x < \frac{1}{5} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1}+x > 5 \\ \sqrt{x^2+1}+x < \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1} > 5-x \\ \sqrt{x^2+1} < \frac{1}{5}-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1} > 5-x \\ x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1} < \frac{1}{5}-x \end{array} \right\}$$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1} > 5-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ x \in (0; \infty) \\ x^2+1 > 25-10x+x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ x \in (0; 5] \\ x > 2,4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (2,4; \infty).$$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2+1} < \frac{1}{5}-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{5} \\ x^2+1 < \frac{1}{25}-\frac{2}{5}x+x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{1}{5} \\ \frac{2x}{5} < -\frac{24}{25} \end{array} \right\}$$

ОТВЕТ: $x \in (2,4; \infty)$.

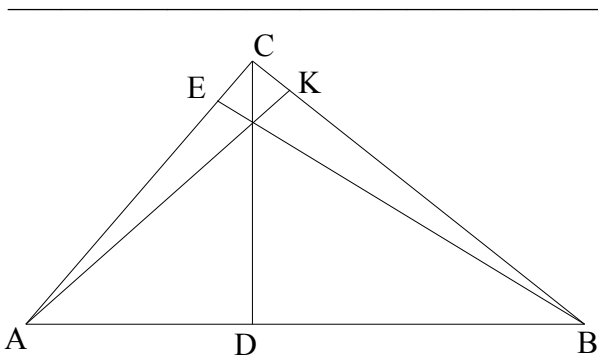
$$4. \quad y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x^2-4)(x^2-9) + 2x(x^2-1)(x^2-9) + 2x(x^2-1)(x^2-4) = \\ &= 2x(x^4-13x^2+36+x^4-10x^2+9+x^4-5x^2+4) = \\ &= 2x(3x^4-28x^2+49). \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 2x(3x^4 - 28x^2 + 49)$.

5. Дано: $\triangle ABC$, $AC=3$ см, $BC=6$ см, $AK \perp BC$, $BE \perp AC$,

$$\frac{AK + BE}{2} = CD.$$



Найти: AB.

Пусть $AB = x$, $AK = h_1$, $BE = h_2$, $CD = h_3$.

Тогда:
$$\begin{cases} \frac{h_1 + h_2}{2} = h_3 \\ h_1 \cdot 6 = h_2 \cdot 3 = h_3 \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{h_1 + h_2}{2} = h_3 \\ h_2 = 2h_1 \\ h_3 = \frac{6}{x} \cdot h_1 \end{cases}$$

$$h_1 + h_2 = 2h_3, \quad h_1 + 2h_1 = 2 \cdot \frac{6}{x} h_1,$$

$$3h_1 = 2 \cdot \frac{6h_1}{x},$$

$$x = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: $AB = 4$ см.

Вариант № 84.

1. Решить уравнение $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

2. Упростить выражение, преобразовав его в произведение

$$\sin 5\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x+3}{x-3}} 4 < 2 \left(\log_{1/2} (x-3) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{x+3} \right).$$

4. Найти производную функции $y = (\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$.

5. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащие этим углам, соответственно равны 12 и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

Решения:

1. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$

ОДЗ: $x \in [2; \infty)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-4} &= 1 + \sqrt{x+5} \\ 2x-4 &= 1 + 2\sqrt{x+5} + x+5 \\ x-10 &= 2\sqrt{x+5} \\ x^2 - 20x + 100 &= 4x + 20 \\ x^2 - 24x + 80 &= 0 \\ x &= 12 \pm 8 \\ x_1 &= 20, \quad x_2 = 4.\end{aligned}$$

Проверка: $x_1 = 20 \quad \sqrt{36} - \sqrt{25} = 1$

$$6 - 5 = 1$$

$$1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = 1$$

$$2 - 3 \neq 1.$$

Ответ: {20}.

2.

$$\begin{aligned}
 \sin 5\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha &= (\sin 5\alpha + \sin 8\alpha) - (\sin 6\alpha + \sin 7\alpha) = \\
 &= 2 \sin \frac{13}{2} \alpha \cdot \cos \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \frac{13}{2} \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \sin \frac{13}{2} \alpha \cdot \left(\cos \frac{3}{2} \alpha - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = -4 \sin \frac{13}{2} \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

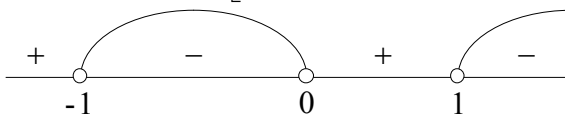
$$3. \log_{\frac{x+3}{x-3}} 4 < 2 \left(\log_{\frac{1}{2}} (x-3) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{x+3} \right)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > 0 \\ \frac{x+3}{x-3} \neq 1 \Leftrightarrow x \in (3; \infty) \\ x > 3 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}} < 2 \left(-\log_2 (x-3) - \frac{\frac{1}{2} \log_2 (x+3)}{\frac{1}{2} - 1} \right) &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}} < \log_2 \frac{x+3}{x-3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x+3}{x-3} = t \\ \frac{1}{t} < t \end{cases} \quad \frac{1-t^2}{t} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-t)(1+t)}{t} < 0.$$

$$\begin{cases} -1 < t < 0 \\ t > 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -1 < \log_2 \frac{x+3}{x-3} < 0 \\ \log_2 \frac{x+3}{x-3} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{x+3}{x-3} < 1 \\ \frac{x+3}{x-3} > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3; \infty) \\ \begin{cases} x+3 > \frac{1}{2}(x-3) \\ x+3 < x-3 \\ x+3 > 2(x-3) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ \begin{cases} 2x+6 > x-3 \\ 3 < -3 \\ x < 9. \end{cases} \end{cases} \quad \emptyset \Leftrightarrow x \in (3; 9)$$

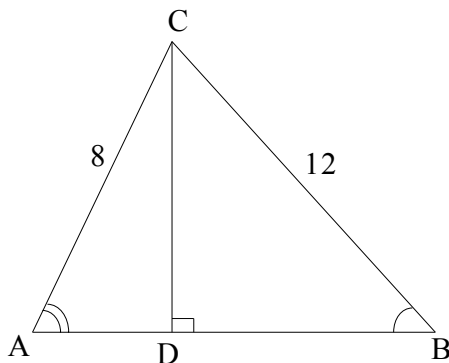
Ответ: (3; 9).

$$4. \quad y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) = 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{x}$$

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

Ответ: $y' = -\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 2\angle B$, $BC = 12$ см, $AC = 8$ см.

Найти: AB .

Пусть $CD \perp AB$, $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$.

По теореме синусов

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin \alpha}$$

$$3 \sin \alpha = 2 \sin 2\alpha,$$

$$3 \sin \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Так как $\sin \alpha \neq 0$, то $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, тогда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = \frac{1}{8}.$$

Из $\triangle DCB$ ($\angle CDB=90^\circ$, $\cos \angle CBD=\frac{3}{4}$):

$$BD = CB \cdot \cos \angle CBD = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9.$$

Из $\triangle CAD$ ($\angle CDA=90^\circ$, $AC=8$, $\cos \angle CAD=\frac{1}{8}$):

$$AD = AC \cdot \cos \angle CAD = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1.$$

$$AB = AD + DB = 10(\text{см}).$$

Ответ: 10 см.

Вариант № 85.

1. Решить уравнение $\sqrt{11x-2} + 3\sqrt{x} = 6$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha.$$

3. Решить неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24-x^2-2x}{14} \right) > 1$.

4. Найти производную функции $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$.

5. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними равна 12 см.

Решения:

1. $\sqrt{11x-2} + 3\sqrt{x} = 6$.

$$\text{ОДЗ: } x \in \left[\frac{2}{11}; \infty \right).$$

$$\begin{aligned}\sqrt{11x-2} &= 6-3\sqrt{x} \\ 11x-2 &= 36-36\sqrt{x}+9x \\ 2x+36\sqrt{x}-38 &= 0 \\ x+18\sqrt{x}-19 &= 0 \\ \sqrt{x} &= t, \quad t > 0 \\ t^2+18t-19 &= 0 \\ t_1 = -19 < 0, \quad t_2 = 1 \\ \sqrt{x} &= 1, \quad x = 1.\end{aligned}$$

Проверка: $x = 1$

$$\begin{aligned}\sqrt{9}+3\sqrt{1} &= 6 \\ 6 &= 6.\end{aligned}$$

Ответ: $\{1\}$.

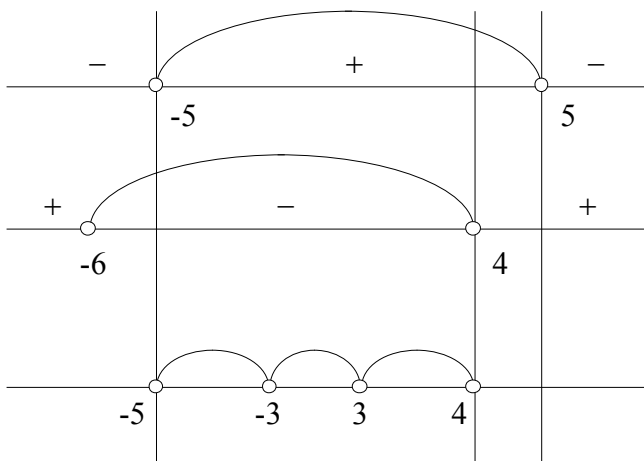
$$2. \cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha = (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) + \sin 4\alpha =$$

$$= 2 \sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin 4\alpha \left(\sin 2\alpha + \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \sin 4\alpha \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right).$$

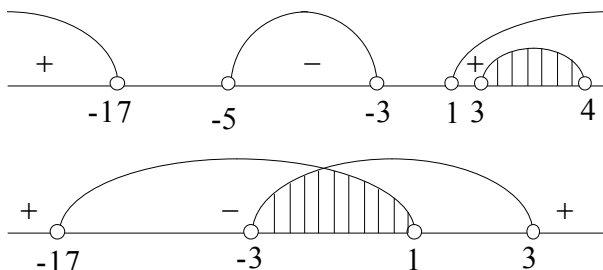
$$3. \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-x^2-2x}{14} > 1$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ \frac{25-x^2}{16} \neq 1 \\ 24-x^2-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-x)(5+x) > 0 \\ x \neq \mp 3 \\ x^2+2x-24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-x)(5+x) > 0 \\ x \neq \mp 3 \\ (x+6)(x-4) < 0 \end{cases}$$



ОДЗ: $x \in (-5; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4)$.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} & x \in (-5; -3) \cup (3; 4) \\ & \frac{24 - x^2 - 2x}{14} < \frac{25 - x^2}{16} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-5; -3) \cup (3; 4) \\ & 384 - 16x^2 - 32x < 350 - 14x^2 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \\
 & \left[\begin{aligned} & x \in (-3; 3) \\ & \frac{24 - x^2 - 2x}{14} > \frac{25 - x^2}{16} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-3; 3) \\ & 384 - 16x^2 - 32x > 350 - 14x^2 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-5; -3) \cup (3; 4) \\ & 2x^2 + 32x - 34 > 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-5; -3) \cup (3; 4) \\ & x^2 + 16x - 17 > 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-5; -3) \cup (3; 4) \\ & (x + 17)(x - 1) > 0 \end{aligned} \right] \\
 & \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-3; 3) \\ & 2x^2 + 32x - 34 < 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-3; 3) \\ & x^2 + 16x - 17 < 0 \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x \in (-3; 3) \\ & (x + 17)(x - 1) < 0. \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$



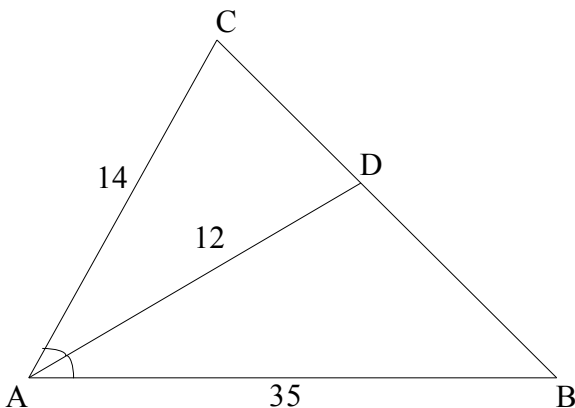
Ответ: $x \in (-3; 1) \cup (3; 4)$.

$$4. \quad y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}},$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{2x}) - \frac{1}{\sqrt{2x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{2x})^2} = \frac{(1 + \sqrt{2x}) - \sqrt{2}(1 + \sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{2x} - \sqrt{2} - \sqrt{2x}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2}.$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AC=14$ см,
 $BA=35$ см, AD —
 биссектриса, $AD=12$
 см.

Найти: S_{ABC} .

Пусть $\angle DAB=\alpha$, тогда
 $\angle CAD=\alpha$, $\angle CAB=2\alpha$.

$$S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin \angle DAB =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 35 \cdot \sin \alpha = 6 \cdot 35 \cdot \sin \alpha =$$

$$= 210 \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 84 \sin \alpha$$

$$S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \cdot \sin 2\alpha = 7 \cdot 35 \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= 245 \sin 2\alpha$$

$$S_{\triangle CAB} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle CAD}$$

$$245 \cdot \sin 2\alpha = 210 \sin \alpha + 84 \sin \alpha$$

$$35 \sin 2\alpha = 30 \sin \alpha + 12 \sin \alpha$$

$$70 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 42 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$S_{\triangle ABC} = 245 \cdot \frac{24}{25} = \frac{49 \cdot 24}{5} = 235,2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: $235,2 \text{ м}^2$.

Вариант № 86.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x+1} + \sqrt{12-3x} = 5$.

2. Упростить выражение, преобразовав его в произведение

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha.$$

3. Решить неравенство $(\log_{|x+6|} 2) \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1$.

4. Найти производную функции $y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

5. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен $2p$, а площадь — m^2 .

Решения:

1. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{12-3x} = 5$.

ОДЗ: $x \in \left[-\frac{1}{3}; 4\right]$.

$$\sqrt{12-3x} = 5 - \sqrt{3x+1}$$

$$12-3x = 25 - 10\sqrt{3x+1} + 3x+1$$

$$10\sqrt{3x+1} = 14 + 6x$$

$$5\sqrt{3x+1} = 7 + 3x$$

$$25(3x+1) = 49 + 42x + 9x^2$$

$$9x^2 - 33x + 24 = 0$$

$$3x^2 - 11x + 8 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{8}{3}.$$

Проверка:

$$x_1 = 1$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5.$$

$$x_2 = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5.$$

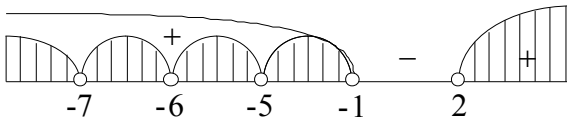
Ответ: $\{1; 5\}$.

$$2. \quad \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot (\cos \alpha - \cos 3\alpha) = 4 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha.$$

$$3. \quad \log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2 (x^2 - x - 2) \geq 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} |x+6| > 0 \\ |x+6| \neq 1 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -6 \\ x \neq -5 \\ x \neq -7 \\ (x-2)(x+1) > 0 \end{cases}$$



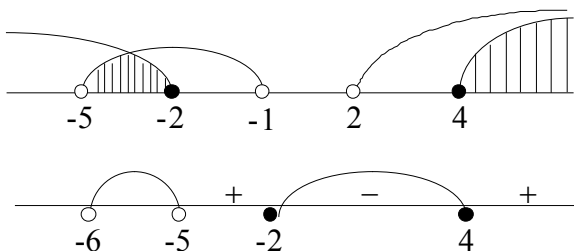
$$x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -6) \cup (-6; -5) \cup (-5; -1) \cup (2; \infty).$$

$$\frac{\log_2 (x^2 - x - 2)}{\log_2 |x+6|} \geq 1$$

$$\log_{|x+6|} (x^2 - x - 2) \geq 1.$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -7) \cup (-5; -1) \cup (2; \infty) \\ x^2 - x - 2 \geq |x + 6| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -7) \\ x^2 - x - 2 \geq -x - 6 \\ x \in (-5; -1) \cup (2; \infty) \\ x^2 - x - 2 \geq x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-7; -6) \\ x^2 - x - 2 \leq -x - 6 \\ x \in (-6; -5) \\ x^2 - x - 2 \leq x + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -7) \\ x^2 + 4 \geq 0 \\ x \in (-5; -1) \cup (2; \infty) \\ x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ x \in (-7; -6) \\ x^2 + 4 \leq 0 \\ x \in (-6; -5) \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -7) \\ x \in (-5; -1) \cup (2; \infty) \\ (x - 4)(x + 2) \geq 0 \\ x \in (-6; -5) \\ (x - 4)(x + 2) \leq 0 \end{cases}$$



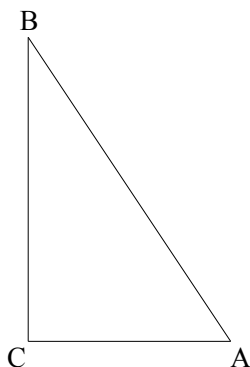
Ответ: $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; -2] \cup [4; \infty)$.

$$y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)} = 3(1-x^2)^{-1}(1-2x^3)^{-1} = 3(1-x^2-2x^3+2x^5)^{-1}$$

$$y' = -3(1-x^2-2x^3+2x^5)^{-2}(-2x-6x^2+10x^4) = \frac{6(x+3x^2-5x^4)}{(1-x^2-2x^3+2x^5)^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{6(x+3x^2-5x^4)}{(1-x^2-2x^3+2x^5)^2}.$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $P_\Delta = 2p$, $S_\Delta = m^2$.

Найти: AB , BC , AC .

Пусть $AC = x$, $BC = y$, тогда

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Имеем
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p \\ \frac{xy}{2} = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2p - \sqrt{x^2 + y^2} \\ xy = 2m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4p^2 - 4p\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \\ xy = 2m^2 \end{cases}$$

$$4m^2 = 4p^2 - 4p\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
 p\sqrt{x^2 + y^2} &= p^2 - m^2 \\
 \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{p^2 - m^2}{p}, \quad AB = \frac{p^2 - m^2}{p} \\
 \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^2} \\ 2xy = 4m^2 \end{cases} \\
 \begin{cases} (x+y)^2 = \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^2} + 4m^2 = \frac{p^4 - 2p^2m^2 + m^4 + 4m^2p^2}{p^2} = \frac{(p^2 + m^2)^2}{p^2} \\ (x-y)^2 = \frac{(p^2 - m^2)^2 - 4m^2p^2}{p^2} = \frac{(p^2 + m^2)^2 - 8m^2p^2}{p^2} \end{cases} \\
 \begin{cases} x+y = \frac{p^2 + m^2}{p} \\ x-y = \frac{\sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8m^2p^2}}{p} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{p^2 + m^2 + \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8m^2p^2}}{2p} \\ y = \frac{p^2 + m^2 - \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8m^2p^2}}{2p} \end{cases} \\
 \text{Ответ: } \frac{p^2 + m^2}{p}, \quad \frac{p^2 + m^2 + \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p}, \\
 \frac{p^2 + m^2 - \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p}.
 \end{aligned}$$

Вариант № 87.

1. Решить уравнение $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$.
2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha.$$

3. Решить неравенство $\log_{3x/(x^2+1)}(x^2 - 2,5x + 1) \geq 0$.

4. Найти производную функции $y = 0,8\sqrt[4]{x} - \frac{x^3}{0,3} + \frac{1}{5x^2}$.

5. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

Решения:

1. $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$.

ОДЗ: $x \in [0; \infty)$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3x+2} &= 2 + \sqrt{6x} \\ 4(3x+2) &= 4 + 4\sqrt{6x} + 6x \\ 6x+4 &= 4\sqrt{6x} \\ 3x+2 &= 2\sqrt{6x} \\ 9x^2+12x+4 &= 24x \\ 9x^2-12x+4 &= 0 \\ x_1 = x_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$x = \frac{2}{3}$$

$$2\sqrt{4} - \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} 4 - 2 &= 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

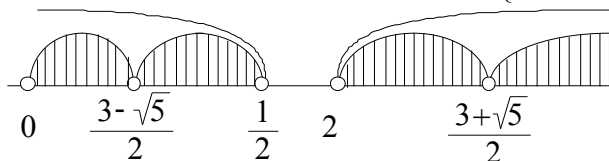
Ответ: $\left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

2. $\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha = (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) - \sin 4\alpha =$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \left(\sin 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= 2 \sin 4\alpha \left(\sin 2\alpha - \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \sin 4\alpha \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

$$3. \log_{\frac{3x}{x^2+1}} (x^2 - 2,5x + 1) \geq 0$$

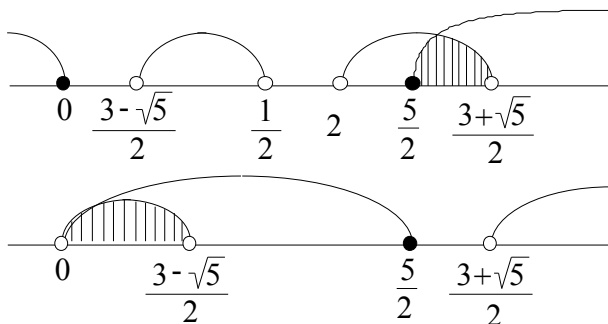
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{3x}{x^2+1} > 0 \\ \frac{3x}{x^2+1} \neq 1 \\ x^2 - 2,5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0 \\ (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \\ (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0. \end{cases}$$



$$x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ x^2 - 2,5x + 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ x\left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right) \\ x^2 - 2,5x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right) \\ x\left(x - \frac{5}{2}\right) \leq 0. \end{cases}$$

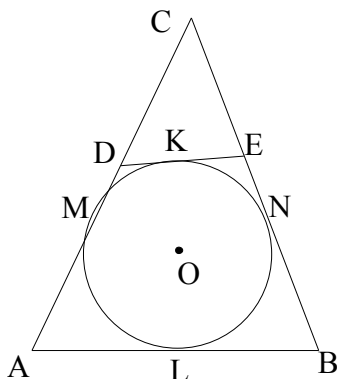


Ответ: $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. $y = 0,8x^{\frac{1}{4}} - \frac{x^3}{0,3} + \frac{1}{5}x^{-2}$

$$y' = 0,8 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} - \frac{3x^2}{0,3} - \frac{2}{5}x^{-3} = \frac{0,2}{\sqrt[4]{x^3}} - 10x^2 - \frac{2}{5x^3}.$$

5.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=6$ см, $AC=10$ см, $BC=12$ см. Окр. O вписана в $\triangle ABC$,
 DE — касательная к окружности.

Найти: P_{CDE} — периметр $\triangle CDE$.

Так как две касательные, проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны, то

$$\begin{aligned}
 P_{CDE} &= CD + CE + DE = CD + CE + (DK + KE) = CD + CE + (DM + EN) = \\
 &= CM + CN = (AC - AM) + (CB - BN) = AC + BC - (AM + BN) = \\
 &= AC + BC - (AL + LB) = AC + BC - AB = 10 + 12 - 6 = 16 \text{ (см)}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 16 см.

Вариант № 88.

1. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

2. Упростить выражение, преобразовав в произведение

$$1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

3. Решить неравенство $\log_{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{x} > 1$.

4. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{x-2}{\sin^2 x}$.

5. В равнобедренном треугольнике отношение радиусов описанного и вписанного кругов равно двум. Найти угол при основании треугольника.

Решения:

1. $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

$$3x^2 - 2x + 8 = t, t > 0$$

$$\sqrt{t+7} + \sqrt{t} = 7$$

$$\sqrt{t+7} = 7 - \sqrt{t}$$

$$t + 7 = 49 - 14\sqrt{t} + t$$

$$14\sqrt{t} = 42$$

$$t = 9$$

$$3x^2 - 2x + 8 = 9$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Проверка: $x_1 = 1$

$$\sqrt{3-2+15} + \sqrt{3-2+8} = 7$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$$

$$4+3=7$$

$$7=7$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 15} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 8} = 7$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$$

$$4+3=7$$

$$7=7.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}.$

$$2. \quad 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 1 + \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} =$$

$$= 1 + \sin \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{4} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \left(\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \right) = 4 \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$3. \quad \log_{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{x} > 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ \sqrt{4-x^2} \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)(2+x) > 0 \\ x^2 \neq 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \sqrt{3}) \\ \frac{1}{x} > \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \sqrt{3}) \\ 1 > x\sqrt{4-x^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \sqrt{3}) \\ 1 > x^2(4-x^2) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (\sqrt{3}; 2) \\ \frac{1}{x} < \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (\sqrt{3}; 2) \\ 1 < x(\sqrt{4-x^2}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (\sqrt{3}; 2) \\ 1 < x^2(4-x^2) \end{array} \right\},$$

$$\begin{array}{l} x^2(4-x^2) < 1 \\ x^4 - 4x^2 + 1 > 0 \\ x^2 = t, \quad t > 0 \\ \begin{cases} t^2 - 4t + 1 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} t = 2 \pm \sqrt{3} \\ |x| > \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ |x| < \sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{array} \quad \begin{array}{l} x \in (0; \sqrt{3}) \\ \begin{cases} x > \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ x < \sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{cases} \\ x \in (0; \sqrt{2 - \sqrt{3}}). \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2(4-x^2) > 1 \\ x^2 = t, \quad t > 0 \\ t^2 - 4t + 1 < 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \begin{cases} t > 2 - \sqrt{3} \\ t < 2 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} |x| > \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ |x| < \sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{cases} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x \in (\sqrt{3}; 2) \\ \begin{cases} x > \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ x < \sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{cases} \\ x \in (\sqrt{3}; \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \end{array} \right|.$$

Ответ: $x \in (0; \sqrt{2 - \sqrt{3}}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{2 + \sqrt{3}}).$

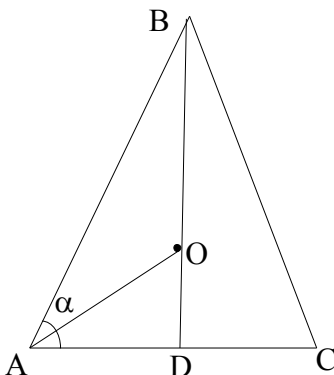
4. $f(x) = \frac{x-2}{\sin^2 x}, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x \cdot (x-2)}{\sin^4 x} = \frac{\sin x - 2(x-2) \cos x}{\sin^3 x}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

5.



Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\frac{R}{r} = 2$,

где r, R — радиусы вписанного и описанного кругов.

Найти: $\angle BAC$.

Обозначим $\angle BAC$ через α . Пусть $BD \perp AC$, BD — медиана, высота и биссектриса.

Проведем OA , где O — центр вписанной окружности, OA — биссектриса $\angle BAC$,

$$\angle OAD = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AOD: OD = r = AD \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$, по следствию из теоремы синусов найдем:

$$2R = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}, \quad R = \frac{AC}{2 \sin 2\alpha}.$$

Учитывая, что $2r = R$, получим

$$AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{2 \sin 2\alpha}$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Сделаем замену: } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t, \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1.$$

$$4t \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$8t^2(1-t^2) = (1+t^2)^2$$

$$9t^4 - 6t^2 + 1 = 0$$

$$t^2 = z, \quad z > 0$$

$$9z^2 - 6z + 1 = 0$$

$$(3z - 1)^2 = 0$$

$$z = \frac{1}{3}.$$

$$t^2 = \frac{1}{3}, \quad t > 0 \quad \left(\frac{\alpha}{2} < 90^\circ \right)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}.$

Вариант № 89.

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = 4.$

2. Упростить выражение $1 - 1 / \left(1 - \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right).$

3. Решить неравенство $\log_3^{-1}(x+1) < \left(2 \log_9 \sqrt{x^2 + 6x + 9} \right)^{-1}.$

4. Найти $f'(0)$, если $f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x.$

5. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m:n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

Решения:

1. $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x+1}} = 4$

ОДЗ: $x \in [-1; \infty).$

$$\sqrt{x+1} = t, \quad t > 0$$

$$\sqrt[3]{9-t} + \sqrt[3]{7+t} = 4$$

$$9-t+7+t+3\sqrt[3]{(9-t)(7+t)}(\sqrt[3]{9-t} + \sqrt[3]{7+t}) = 64$$

$$16 + 12\sqrt[3]{(9-t)(7+t)} = 64$$

$$\sqrt[3]{(9-t)(7+t)} = 4$$

$$\begin{aligned}
 (9-t)(7+t) &= 64 \\
 -t^2 + 2t + 63 - 64 &= 0 \\
 t^2 - 2t + 1 &= 0 \\
 t_{1,2} &= 1 \\
 \sqrt{x+1} &= 1, \quad x = 0.
 \end{aligned}$$

Проверка: $\sqrt[3]{9-1} + \sqrt[3]{7+1} = 4$

$$2+2=4$$

$$4=4.$$

Ответ: $\{0\}$.

$$\begin{aligned}
 2.1 - \frac{1}{1 - \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} &= 1 - \frac{1}{1 - \cos^{-1}\alpha} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\cos\alpha}} = 1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - 1} = \\
 &= \frac{\cos\alpha - 1 - \cos\alpha}{\cos\alpha - 1} = \frac{1}{1 - \cos\alpha} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{1}{\log_3(x+1)} &< \frac{1}{2\log_9\sqrt{x^2+6x+9}} \\
 \text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ x^2+6x+9 > 0 \\ x^2+6x+9 \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ (x+3)^2 > 0 \\ x^2+6x+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \\ x \neq -2 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; \infty) \\
 \frac{1}{\log_3(x+1)} &< \frac{1}{\log_3|x+3|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \\ \log_3|x+3| > \log_3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0) \\ |x+3| > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x+3 > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (0; \infty) \\ \log_3|x+3| < \log_3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \infty) \\ |x+3| < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \infty) \\ x+3 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1; 0).$$

Ответ: $(-1; 0)$.

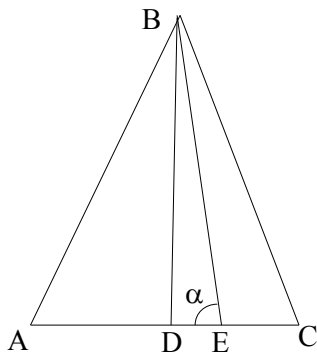
4. $f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x$, $f'(0)$

$$f'(x) = (2x - 1) \cos^2 x - (x^2 - x) 2 \cos x \cdot \sin x = (2x - 1) \cos^2 x - (x^2 - x) \sin 2x.$$

$$f'(0) = -1.$$

Ответ: $f'(0) = -1$.

5.



Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний, BE делит AC в отношении $m:n$.

Найти: $\angle BEC$.

Обозначим $\angle BED$ через α . Будем считать,

что $AC=1$. Пусть $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$.

$$AD = CD = \frac{1}{2}, \quad AE = \frac{m}{m+n},$$

$$CE = \frac{n}{m+n},$$

$$DE = \frac{m}{m+n} - \frac{1}{2} = \frac{m-n}{2(m+n)}, \quad BD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{m-n}{2(m+n)} = \frac{\sqrt{3}(m+n)}{m-n},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(m+n)}{m-n},$$

$$\angle BEC = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(m+n)}{m-n}.$$

Ответ: $\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(m+n)}{m-n}.$

3 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ОЛИМПИАДЕ (С РЕШЕНИЯМИ)

Вариант № 1.

1. Найти трехзначное число, квадрат которого равен пятой степени суммы чисел, обозначающих его цифры.

2. Решить уравнение $4 \cos^2 x - 4 \cos^3 3x \cos x + \cos^2 3x = 0$.

3. Решить неравенство $(x^2 - 5x + 3) \lg\left(1 - \frac{x}{3}\right) \geq \lg\left(\frac{3}{3-x}\right)$.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 4 \\ 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 3. \end{cases}$$

5. В равнобедренной трапеции основание AD равно диагонали AC . Известно, что $\angle CAD = \angle CDM$, где M — середина BC . Найти углы трапеции.

Решения:

1. Пусть x, y, z — цифры искомого числа, тогда его можно представить в виде $100x + 10y + z$. По условию задачи выполняется условие

$$(100x + 10y + z)^2 = (x + y + z)^5.$$

Отметим, что т.к. x, y, z цифры трехзначного числа, то они удовлетворяют неравенствам

$$1 \leq x \leq 9;$$

$$0 \leq y \leq 9;$$

$$0 \leq z \leq 9.$$

Тогда $1 \leq x + y + z \leq 27$.

Из условия задачи следует, что

$$100x + 10y + z = (x + y + z)^2 \sqrt{x + y + z},$$

т.е. сумма цифр является квадратом целого числа. Тогда их сумма — одно из чисел 1, 4, 9, 16, 25. Проверкой убеждаемся, что если $x + y + z = 4$, то

$$(x + y + z)^2 \sqrt{x + y + z} = 32, \text{ т.е. не является трехзначным числом; если}$$

$$x + y + z = 9, \text{ то } (x + y + z)^2 \sqrt{x + y + z} = 243, \text{ что удовлетворяет}$$

$$\text{условию задачи; если } x + y + z = 16, \text{ то } (x + y + z)^2 \sqrt{x + y + z} = 1024,$$

не является трехзначным числом.

При увеличении суммы пятая степень будет увеличиваться. Следовательно, возможен лишь один вариант 243.

Ответ: искомое число 243.

2. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно $\cos x$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{2 \cos^3 3x \pm \sqrt{4 \cos^4 3x - 4 \cos^2 3x}}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^3 3x \pm \sqrt{\cos^2 3x (\cos^2 3x - 1)} \right). \end{aligned}$$

Для того чтобы оно имело решение, дискриминант этого уравнения должен

быть неотрицательным: $\cos^2 3x (\cos^2 3x - 1) \geq 0$, т.к. $\cos^2 3x \geq 0$, то

$$\cos^2 3x - 1 \geq 0, \text{ т.е. } \cos^2 3x \geq 1. \text{ Но в силу ограниченности функции}$$

$$|\cos x| \leq 1. \text{ Возможно лишь } \cos^2 3x = 1, \text{ тогда } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ т.е. исходное}$$

уравнение свелось к простейшему тригонометрическому: $\cos x = \frac{1}{2}$, корни

которого $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Проверкой убеждаемся, что при этих значениях $\cos^2 3x = 1$ и уравнение обращается в тождество.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

3. Прежде всего необходимо заметить, что

$$1 - \frac{x}{3} = \frac{3-x}{3} = \left(\frac{3}{3-x} \right)^{-1},$$

при $x \neq 3$.

Следовательно, исходное неравенство можно преобразовать к виду

$$\left(x^2 - 5x + 3 \right) \lg \left(\frac{3-x}{3} \right) \geq - \lg \left(\frac{3-x}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 4 \right) \lg \left(\frac{3-x}{3} \right) \geq 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(x^2 - 5x + 4 \right) \lg \left(\frac{3-x}{3} \right).$

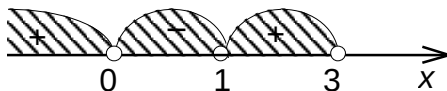
Область определения этой функции находим из условия $3-x > 0$, т.е.

$D(f) = (-\infty; 3)$. Необходимо найти, где $f(x) > 0$. Удобно использовать для решения этого уравнения метод интервалов. Для этого находим точки, в которых функция, непрерывная в области определения, обращается в нуль.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 4 \right) \lg \left(\frac{3-x}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ \lg \left(\frac{3-x}{3} \right) = 0, \end{cases}$$

получим: $\begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Таким образом, область определения функции $f(x)$ разбивается на три интервала: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$. В силу свойств непрерывных функций на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Подставив значения переменной из каждого промежутка, получим:



$$x = -1; \quad f(-1) = 10 \lg \frac{4}{3} > 0;$$

$$x = \frac{1}{2}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \lg \frac{5}{6} < 0;$$

$$x = 2; \quad f(2) = -2 \lg \frac{1}{3} > 0.$$

Учитывая, что неравенство нестрогое, получаем: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 3)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 3)$.

4. Умножив первое уравнение на (-3) , а второе на 4 и сложив их, получим однородное уравнение $6x^2 - xy - 5y^2 = 0$, т.к. $y = 0$ не является

решением системы $\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = 4 \\ 3x^2 = 3 \end{array} \right., \quad \emptyset$ можно разделить обе части уравнения

на y^2 , не боясь потерять решение: $6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 5 = 0$.

Сделаем замену $t = \frac{x}{y}$, приходим к квадратному уравнению

$$6t^2 - t - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{5}{6} \end{array} \right. \text{ Следовательно, исходная система равносильна}$$

совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 3xy - y^2 = 4 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 3xy - y^2 = 4 \\ \frac{x}{y} = -\frac{5}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решая по отдельности каждую из систем, получим

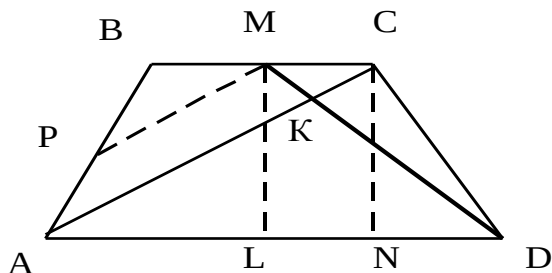
$$1. \begin{cases} x = y \\ 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -\frac{5}{6}y \\ \frac{50}{36}y^2 - \frac{5}{2}y^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{6}y \\ -\frac{76}{36}y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

Ответ: (1; 1) и (-1; -1).

5. Дано: $ABCD$ — трапеция;
 $AB = CD$; $AD = AC$; $BM = MC$; $\angle CAD = \angle CDM$.

Найти: $\angle BAD$ и $\angle ABC$.



Решение: Пусть $\angle CAD = \varphi$. Тогда т.к. $\triangle ACD$ — равнобедренный ($AC = AD$), то $\angle ADC = \angle ACD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

Проведем $MP \parallel AC$, тогда MP — средняя линия $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\Rightarrow \angle PMD = \angle AKD = \\ &= 180^\circ - \varphi - \left(90^\circ - \frac{3}{2}\varphi\right) = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

$\angle PAD = \angle CDA = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, (т.к. трапеция равнобедренная).

Следовательно, $\angle PMD + \angle PAD = 180^\circ$. Значит, точки P, A, M, D лежат на одной окружности.

Тогда $\angle AMD = \angle APD = 90^\circ$. Откуда получаем, что AMD – равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота

$$CN = ML = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AC. \text{ Тогда } \sin \varphi = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \varphi = 30^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle BAD = \angle CDA = 75^\circ; \angle ABC = \angle BCD = 105^\circ.$$

Ответ: $\angle BAD = \angle CDA = 75^\circ; \angle ABC = \angle BCD = 105^\circ$.

Вариант № 2.

1. Доказать, что $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Решить уравнение $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$.

3. Решить систему
$$\begin{cases} 3x^2 + 3xy - 22y^2 = 0 \\ x^2 + x + y^2 - 2y = 2xy + 1. \end{cases}$$

4. Найти все пары чисел (x, y) , которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}.$$

5. Доказать, что в треугольнике со сторонами 3, 8, 10 наибольший угол в три раза больше среднего.

Решения:

1. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) \sin 70^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 60^\circ) \cos 70^\circ} = \\ &= \frac{\left(\cos 40^\circ - \frac{1}{2}\right) \sin 70^\circ}{\left(\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right) \cos 70^\circ} = \frac{2 \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{2 \cos 40^\circ \cos 70^\circ + \cos 70^\circ} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 110^\circ + \sin 30^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 110^\circ + \cos 30^\circ + \cos 70^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

при доказательстве использованы формулы приведения:

$$\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ;$$

$$\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ.$$

2. Область допустимых значений этого уравнения находится из условия существования логарифмической функции: ОДЗ $x > 0$.

Поскольку $\log_2 x = \log_2 x$, то

$$(\log_2 x) \log_2 5 = (\log_2 5) \log_2 x,$$

из свойств логарифма следует:

$$\log_2(5^{\log_2 x}) = \log_2(x^{\log_2 5})$$

и получаем, что

$$5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}.$$

Следовательно, уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} 5^{\log_2 x} + 2 \cdot 5^{\log_2 x} &= 15 \Leftrightarrow 3 \cdot 5^{\log_2 x} = 15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5^{\log_2 x} &= 5 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ действительно является корнем уравнения:

$$5^{\log_2 2} + 2 \cdot 2^{\log_2 5} = 5 + 2 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: $x = 2$.

3. ОДЗ: $x, y \in R$. Рассмотрим первое уравнение системы, которое является однородным:

$$3x^2 + 5xy - 22y^2 = 0.$$

Так как $y = 0$ не является решением системы (в этом легко убеждаемся подстановкой $y = 0$ в оба уравнения), то не боясь потерять решения, т.е. переходя к равносильному уравнению, можно обе части этого уравнения разделить на y^2 :

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) - 22 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем $t_1 = 2$; $t_2 = -\frac{11}{3}$. Используя свойства систем, имеем теперь совокупность двух систем

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^2 + x + y^2 - 2y = 2x + 1; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{11}{3}, \\ x^2 + x + y^2 - 2y = 2x + 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Решаем эти системы отдельно. Для системы (3.1) получаем

$$\begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + 2y + y^2 - 2y = 4y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 - 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Для системы (3.2):

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{3}y \\ \frac{121}{9}y^2 - \frac{11}{3}y + y^2 - 2y = -\frac{22}{3}y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}y \\ 130y^2 + 15y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}y \\ y_{1,2} = \frac{-15 \pm 3\sqrt{545}}{260} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{55 - 11\sqrt{545}}{260} \\ y = \frac{-15 + 3\sqrt{545}}{260} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{55 + 11\sqrt{545}}{260} \\ y = \frac{-15 - 3\sqrt{545}}{260} \end{cases} \end{cases}.$$

Так как все преобразования, производимые над системой, приводили к равносильным уравнениям, то проверку в силу иррациональности второй пары решений можно не делать.

Ответ:

$$(2, 1); \left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right); \left(\frac{55 - 11\sqrt{545}}{260}; \frac{-15 + 3\sqrt{545}}{260}\right); \\ \left(\frac{55 + 11\sqrt{545}}{260}; \frac{-15 - 3\sqrt{545}}{260}\right).$$

4. ОДЗ: $x, y \in \mathbb{R}$. Используя формулы тригонометрии, после последовательных преобразований получим:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2},$$

$$4 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 1 = 0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно $\cos \frac{x+y}{2}$:

$$\cos \frac{x+y}{2} = \frac{2 \cos \frac{x-y}{2} \pm \sqrt{4 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 4}}{4}.$$

Это уравнение будет иметь корни, если $4 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 4 \geq 0$, т.е.

$\cos^2 \frac{x-y}{2} \geq 1$. Но в силу ограниченности функции косинус это возможно

лишь в случае, когда $\cos^2 \frac{x-y}{2} = 1$. Таким образом, исходное уравнение

равносильно совокупности двух тригонометрических систем:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1 \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Решая эти системы отдельно, для системы (3.3) получим:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2\pi k \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(k+m) \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(m-k) \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Для системы (3.4):

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1 \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi l \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

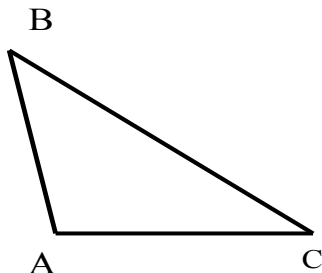
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi \left(1 \pm \frac{2}{3} \right) + 2\pi(l+n) \\ y = \pi \left(-1 \pm \frac{2}{3} \right) + 2\pi(n-l) \end{cases} \quad l, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(k+m) \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(m-k) \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \pi \left(1 \pm \frac{2}{3} \right) + 2\pi(l+n) \\ y = \pi \left(-1 \pm \frac{2}{3} \right) + 2\pi(n-l) \end{cases} \quad l, n \in \mathbb{Z}.$$

5. Дано: $\triangle ABC$; $AB = 3$; $AC = 8$; $BC = 10$. Доказать: $\angle A = 3\angle B$.



Доказательство: прежде всего необходимо отметить, что данный треугольник тупоугольный, т.к. $BC^2 > AB^2 + AC^2$ ($10^2 > 8^2 + 3^2$). Зная стороны треугольника, по формуле Герона находим его площадь:

$$S_{ABC} = \frac{15\sqrt{7}}{4}. \text{ Но т.к.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{5\sqrt{7}}{16};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Используя формулу для синуса тройного угла

$$\sin 3B = 3\sin B - 4\sin^3 B,$$

находим $\sin 3B = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. Таким образом, $\sin 3B = \sin A$. Отсюда следует:

либо $A = 3B$, либо $A + 3B = \pi$, но $A + B + C = \pi$ (сумма углов

треугольника), тогда $C = 2B$, чего не может быть, т.к. $\angle C < \angle B$. Следовательно, $\angle A = 3\angle B$, что и требовалось доказать.

Вариант № 3.

1. Разность $\sqrt{12\sqrt{5} - 29} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$ является целым числом. Найти это целое число.

2. Решить уравнение $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{40}{9}$.

3. Найти все значения параметра b , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2b-1}{2b+5} \end{cases}$$

имеет решение.

4. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношения площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеции.

5. Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

Решения:

1. Обозначим искомое число через x . Так как $(12\sqrt{5})^2 = 720$ и $29^2 = 841$, то $29 > 12\sqrt{5}$ и, следовательно,

$$x = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$\begin{aligned} x^2 &= 29 - 12\sqrt{5} - 2\sqrt{29^2 - (12\sqrt{5})^2} + 12\sqrt{5} + 29 = \\ &= 58 - 2\sqrt{841 - 720} = 58 - 22 = 36. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что x есть одно из чисел: 6 или -6 . Так как очевидно, что $\sqrt{12\sqrt{5} + 29} > \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$, то искомое число x меньше нуля.

Следовательно, $x = -6$.

Ответ: $\sqrt{12\sqrt{5} - 29} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} = -6$.

2. ОДЗ: $x \neq -1$. Выделим в левой части уравнения полный квадрат:

$$x^2 - 2\frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{2x^2}{x+1} = \frac{40}{9} \Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} = \frac{40}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} = \frac{40}{9}.$$

Обозначим $t = \frac{x^2}{x+1}$, получаем: $t^2 + 2t - \frac{40}{9} = 0$. Корни этого уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{10}{3} \\ t_2 = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x+1} = -\frac{10}{3} \\ \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 10x + 10 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 = 0, \text{ где } x \neq -1. \end{cases}$$

Очевидно, что первое уравнение совокупности не имеет корней, а корнями второго являются: $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$. Проверкой убеждаемся в правильности полученных решений уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

3. Пусть b_0 есть то значение параметра b , при котором система имеет решение, и пусть (x_0, y_0) — ее решение. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{cases} -5x_0^2 + 4x_0y_0 - 2y_0^2 \leq -3 \\ 7x_0^2 + 4x_0y_0 + 2y_0^2 \leq \frac{2b_0 - 1}{2b_0 + 5} = 1 - \frac{6}{2b_0 + 5} \end{cases}.$$

Умножим второе неравенство системы на 3 и прибавим к первому. Получим, что справедливы неравенства

$$16x_0^2 + 16x_0y_0 + 4y_0^2 \leq -\frac{18}{2b_0 + 5}, \text{ или}$$

$$(4x_0 + 2y_0)^2 \leq -\frac{18}{2b_0 + 5}.$$

Так как в левой части получен полный квадрат, отсюда вытекает, что

$$-\frac{18}{2b_0 + 5} \geq 0, \text{ т.е. } 2b_0 + 5 < 0 \text{ или } b_0 < -\frac{5}{2}. \text{ Итак, все искомые значения}$$

параметра лежат в области $b_0 < -\frac{5}{2}$.

Докажем, что для каждого $b < -\frac{5}{2}$ система имеет решение. Поскольку при

$b < -\frac{5}{2}$ выполнено неравенство

$$\frac{2b - 1}{2b + 5} = 1 - \frac{6}{2b + 5} > 1,$$

то достаточно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решение. Каждое решение этой системы будет также и решением данной системы неравенств. Для решения системы уравнений умножим второе из них на -3 и прибавим к первому. Получим $(4x + 2y)^2 = 0$ или

$y = -2x$. Подставив $y = -2x$ вместо y в любое из уравнений системы, получим $7x^2 = 1$ или $x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{7}}$. Но тогда

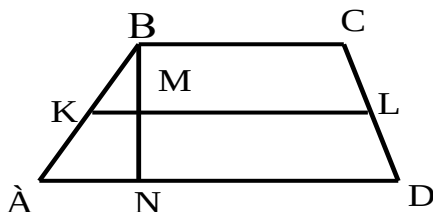
$y_1 = -\frac{2}{\sqrt{7}}$; $y_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Проверкой убеждаемся, что обе пары чисел

$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}; -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ будут решениями системы уравнений, а

значит, и данной системы неравенств (при $b < -\frac{5}{2}$).

Ответ: $b \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

4.



Дано: $ABCD$ — трапеция;

$CD = 6$; $AB = 10$; KL —

средняя линия. $\frac{S_{BCLK}}{S_{AKLD}} = \frac{5}{11}$.

Найти: AD и BC .

Решение: обозначим $BC = x$; $AD = y$. Так как в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $x + y = BC + AD = AB + CD = 16$. Поскольку KL — средняя линия трапеции, то

$KL = \frac{1}{2}(BC + AD) = 8$. Если BN — высота трапеции, то из теоремы о

пропорциональных отрезках, отсекаемых параллельными прямыми, следует, что высоты трапеций $BCLK$ и $ADLK$ равны между собой:

$BM = MN = h$. Для площадей этих трапеций имеем

$$S_{BCLK} = \frac{BC + KL}{2}h = \frac{(x + 8)}{2}h; \quad S_{AKLD} = \frac{AD + KL}{2}h = \frac{(y + 8)}{2}h.$$

По условию $\frac{S_{BCLK}}{S_{AKLD}} = \frac{5}{11}$, т.е. $\frac{x + 8}{y + 8} = \frac{5}{11}$. После упрощений получаем

уравнение $11x - 5y = -48$.

Система уравнений
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 11x - 5y = -48 \end{cases}$$

имеет единственное решение: $x = 2$; $y = 14$.

Ответ: $BC = 2$; $AD = 14$.

5. Преобразуем уравнение

$$1 - 5 \sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 0,$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0.$$

Заменяя $\sin x = t$, получаем

$$2t^2 + 5t - 3 = 0,$$

корни которого $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -3$. Отсюда:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -3 \end{cases}.$$

Второе уравнение, очевидно, не имеет корней. Решение первого удобно записать в виде объединения

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Проверим выполнение условия $\cos \geq 0$. Для x_1 имеем

$$\cos x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0;$$

для x_2 :

$$\cos x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Следовательно, условию удовлетворяет x_1 .

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант № 4.

1. Найти корни уравнения $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$,

удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

2. Решить неравенство $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$.

3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x; y)$?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Доказать, что эти высоты являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

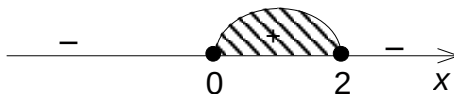
5. Найдите уравнение прямой, касающейся графиков двух функций

$$y = \sqrt{4x - x^2} \text{ и } y = 1 + \sqrt{-5 - 6x - x^2}.$$

Решения:

1. Найдём решение неравенства $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$; ОДЗ: $x \neq 0$;

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0.$$



Следовательно, $x \in (0; 2)$.

Корни уравнения находим, используя формулы преобразования произведения в сумму. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 14x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 13x \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 13x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{13}, k, m \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi m \end{cases}$$

$$\text{или } x = \frac{\pi k}{13}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из полученного бесконечного множества решений необходимо по условию задачи выбрать такие, что $x \in (0; 2)$, т.е. требуется определить, при каких значениях $k \in \mathbb{Z}$: $\pi k \in (0; 26)$. Это будет выполняться при $k = 1, 2, \dots, 8$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{13}, \quad k = \overline{1, 8}$.

2. Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство

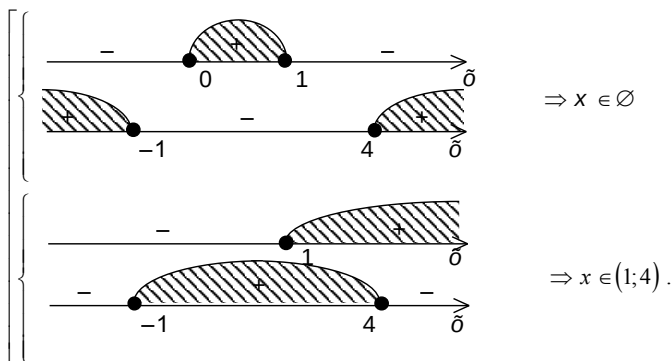
$$\frac{\log_5 \sqrt{3x+4}}{\log_5 x} > 1 \Leftrightarrow \log_x \sqrt{3x+4} > 1 \Leftrightarrow \log_x (3x+4) > 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_x (3x+4) > \log_x x^2.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x + 4 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ 3x + 4 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}.$$

Дальнейшее решение удобно проводить графически:



Ответ: $x \in (1; 4)$.

3. В силу симметрии уравнений системы очевидно, что если система имеет решение $x = m$, $y = n$, то она имеет также решение $x = n$; $y = m$. Следовательно, должно иметь место равенство $m = n$ или $x = y$. Приходим к уравнению

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = x;$$

$$x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - 3 = 0,$$

которое должно иметь единственное решение. Это возможно лишь в случае, когда $D = 0$:

$$\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - (a^2 - 3) = 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2.$$

При $a = -2$, система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = y \\ y^2 + 3y + 1 = x; \end{cases}$$

вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(x - y)(x + y + 4) = 0.$$

Возникают два случая:

1) $x = y$, тогда $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$, т.е. $x = y = -1$.

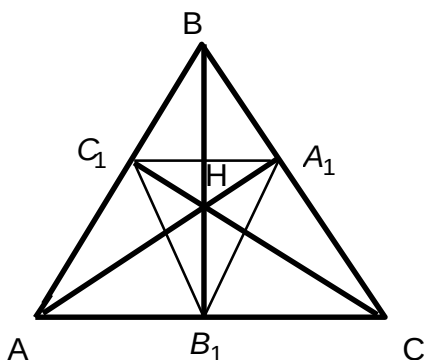
2) $x + y + 4 = 0$, $y = -x - 4$. Подставив в первое уравнение вместо y , получим уравнение

$$x^2 + 4x + 5 = 0,$$

которое не имеет решений.

Ответ: $a = -2$.

4.



Дано: $\triangle ABC$ — остроугольный.
 $AA_1 \perp BC$; $BB_1 \perp AC$; $CC_1 \perp AB$.

Доказать: $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$;
 $\angle C_1B_1B = \angle BB_1A_1$;
 $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$.

Доказательство:
 пусть H — точка пересечения
 высот треугольника ABC .
 Рассмотрим четырехугольник
 CA_1HB_1 . Так как

$AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, то $\angle HB_1C + \angle HA_1C = 180^\circ$, следовательно, вокруг CA_1HB_1 можно описать окружность, диаметром которой является CH .
 Следовательно,

$$\angle A_1B_1H = \angle A_1CH = \angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B.$$

Точно так же на одной окружности лежат точки H , A , B_1 , C_1 и

$$\angle HB_1C_1 = 90^\circ - \angle B.$$

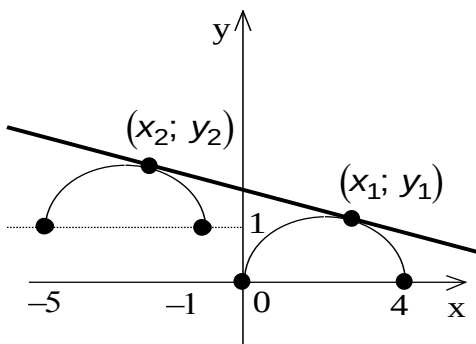
Таким образом: $\angle A_1B_1H = \angle C_1B_1H$.

Аналогично доказательство для других углов.

5. Функция $y = \sqrt{4x - x^2}$ определена при $x \in [0; 4]$,

а $y = 1 + \sqrt{-5 - 6x - x^2}$ при $x \in [-5; -1]$.

Графики этих функций имеют вид



Общая касательная к обоим графикам задается уравнением $y = kx + b$. Она касается графика функции $y = \sqrt{4x - x^2}$ в точке $(x_1; y_1)$, а графика второй функции — в точке $(x_2; y_2)$. Тогда выполняются равенства:

$$\sqrt{4x_1 - x_1^2} = kx_1 + b, \quad (3.5)$$

$$1 + \sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2} = kx_2 + b. \quad (3.6)$$

Поскольку угловой коэффициент касательной k равен значению производной функции в точке касания, то после дифференцирования функций получаем следующее:

$$k = \frac{2 - x_1}{\sqrt{4x_1 - x_1^2}} = \frac{-3 - x_2}{\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}}; \quad (3.7)$$

из последнего соотношения, после преобразований, следует:

$$4x_1 - x_1^2 = -5 - 6x_2 - x_2^2. \quad (3.8)$$

Из соотношения (3.7), с учетом (3.8), получаем

$$2 - x_1 = -3 - x_2, \text{ т.е. } x_1 - x_2 = 5.$$

Вычитая из (3.5) (3.6), учитывая (3.8), получим

$$k(x_1 - x_2) = -1, \text{ т.е. } k = -\frac{1}{5}.$$

Подставив $k = -\frac{1}{5}$ в (3.7), имеем

$$\frac{2 - x_1}{\sqrt{4x_1 - x_1^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Решив это иррациональное уравнение, с учетом того, что $2 - x_1 < 0$ ($x_1 > 2$), находим

$$x_1 = \frac{26 + \sqrt{26}}{13}.$$

Тогда $b = \sqrt{4x_1 - x_1^2} - kx_1 = \frac{2}{5}(1 + \sqrt{26})$. Следовательно, уравнение общей касательной имеет вид

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}(1 + \sqrt{26}).$$

Вариант № 5.

1. Выяснить, какое из чисел больше e^π или π^e .
2. Решить неравенство $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.
3. Две окружности касаются внешне в точке A . Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

4. Найти решения системы уравнений

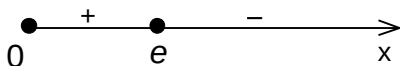
$$\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos 2y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

5. При каких значениях a уравнение $x|x - 2a| - 3a + 2 = 0$ имеет один корень.

Решения:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, заданную на положительной полуоси ($x > 0$), и исследуем ее на экстремум. Для этого находим производную этой функции: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Так как $x > 0$, то критическими будут точки, в которых $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Знак $f'(x)$



Поскольку происходит изменение знака производной с плюса на минус, то точка $x = e$ является точкой максимума. А так как максимум единственный, то функция в этой

точке принимает наибольшее значение. Следовательно, выполняется неравенство

$$f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e \ln \pi < \pi \ln e \Leftrightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi.$$

Потенцируя это неравенство, получаем $\pi^e < e^\pi$.

Ответ: $\pi^e < e^\pi$.

2. Так как $-|x-2| \leq 0$, то $2^{-|x-2|} \leq 1$. Выделим полный квадрат у аргумента логарифмической функции $4x - x^2 - 2 = 2 - (x-2)^2 \leq 2$.

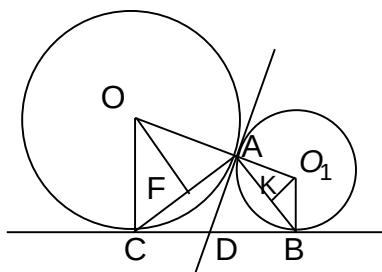
Тогда $\log_2(2 - (x-2)^2) \leq \log_2 2 = 1$.

Поскольку каждый из двух сомножителей неравенства не превосходит единицу, то решение неравенства возможно лишь при выполнении условий:

$$\begin{cases} 2^{-|x-2|} = 1 \\ \log_2(4x - x^2 - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2 - (x-2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

3.



Дано: AD — общая касательная, BC — общая внешняя касательная.

$OC \perp BC$; $O_1B \perp BC$; $AC = 8$; $AB = 6$.

Найти: OC и O_1B .

Решение: т.к. BC — общая внешняя касательная, а AD — общая касательная к данным окружностям в точке A , то

$AD = CD = BD$ (свойства касательных, проведенных к окружности из одной точки).

Пусть $\angle CAD = \angle DCA = \alpha \Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - 2\alpha$;

$$\angle BAD = \angle DBA = \beta \Rightarrow \angle ADB = 180^\circ - 2\beta,$$

т.к. $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$ — равнобедренные. Но $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$, т.е. $180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. $\angle CAB = \alpha + \beta = 90^\circ$.
 Таким образом, $\triangle ABC$ — прямоугольный, следовательно, $BC = 10$.
 Проведем $OF \perp AC$ и $O_1K \perp AB$. Тогда $\angle COF = \angle ACB$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Следовательно, треугольники ABC и OCF подобны. Из этого следует:

$$\frac{OC}{BC} = \frac{CF}{AB},$$

$$\text{откуда } OC = \frac{BC \cdot CF}{AB} = \frac{10 \cdot 4}{6} = \frac{20}{3}.$$

Аналогично из подобия треугольников ABC и O_1KB находим радиус

$$O_1B \cdot O_1B = \frac{15}{4}.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad OC = \frac{20}{3}; \quad O_1B = \frac{15}{4}.$$

4. Находим ОДЗ системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \\ y \neq \frac{\pi}{4} + \pi m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно в силу симметрии уравнений, входящих в систему, что если $x = a$ и $y = b$ является решением системы, то $x = b$ и $y = a$ также является решением системы, т.е. $x = y + \pi l$ с точностью до периода. Тогда любое из уравнений принимает вид

$$\cos 2x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.9)$$

Используя формулы тригонометрии, получим:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Вводя новую переменную $t = \operatorname{tg} x$, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+t}{1-t} \quad (t \neq 1)$$

$$(1-t)(1-t^2) = (1+t)(1+t^2);$$

$$(1+t)(1-t)^2 = (1+t)(1+t^2) \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = -1.$$

Таким образом:
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z \end{cases}.$$

Здесь необходимо сделать важное замечание. Используя формулу тангенс суммы, сузили ОДЗ, а следовательно, могла произойти потеря корней.

Функция $\operatorname{tg} x$ неопределена при $x = \frac{\pi}{2} + \pi p$ ($\cos x = 0$). Подставив в

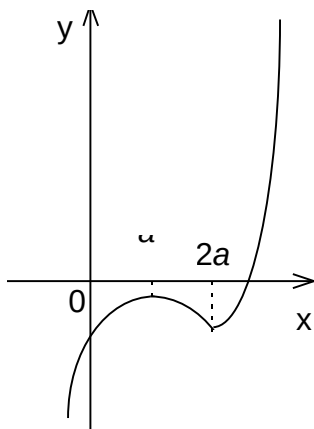
уравнение (3.9) это значение $x = \frac{\pi}{2} + \pi p$, убеждаемся в истинности корня.

Таким образом, система имеет три серии решений.

Ответ:

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} x = \pi n \\ y = \pi k \end{cases} & n, k \in Z \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi m \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi l \end{cases} & m, l \in Z \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi p \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi q \end{cases} & p, q \in Z \end{cases}.$$

5. Рассмотрим функцию $y = x|x - 2a| - 3a + 2$. Учитывая определение модуля, функцию можно представить в виде



$$y = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 3a + 2, & \text{если } x < 2a \\ x^2 - 2ax - 3a + 2, & \text{если } x \geq 2a. \end{cases}$$

Ее график состоит из частей парабол.

Если $a \geq 0$, то функция

$y = x|x - 2a| - 3a + 2$ возрастает при

$x < a$ и $x > 2a$ и убывает на отрезке

$[a; 2a]$. При $a < 0$ эта функция возрастает

на участках $x > a$ и $x < 2a$ и убывает на отрезке $[2a; a]$.

Из этого следует, что для того чтобы уравнение $x|x - 2a| - 3a + 2 = 0$ имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $y(a)$ и $y(2a)$ были одного знака (т.е. $y(a)$ и $y(2a)$ одновременно или выше или ниже оси x).

Таким образом: $y(a)y(2a) > 0$ и получаем для параметра a неравенство

$$(a|a| - 3a + 2)(-3a + 2) > 0.$$

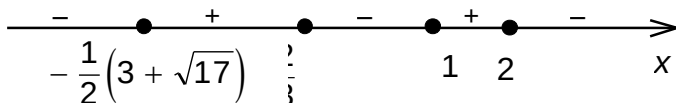
Это неравенство удобно решать методом интервалов. Для этого требуется найти корни уравнений

$$\begin{cases} a|a| - 3a + 2 = 0 \\ 2 - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3},$$

при $a \geq 0$ $a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1; a_2 = 2,$

при $a < 0$ $-a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})$ (второй корень положителен).

Расставим эти точки на числовой прямой:



Легко видеть, что в каждой из этих точек левая часть неравенства меняет свой знак. При $a > 2$ первый множитель положителен, второй отрицателен. При переходе через отмеченные точки знак меняется.

Ответ: $-\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) < a < \frac{2}{3}$ и $1 < a < 2$.

Вариант № 6.

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. Решить уравнение $3x^2 + 5\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 48 + 5x$.

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_7(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{18}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

4. Найти все x и y , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0.$$

5. Вычислить объем пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник с углом α при вершине, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом 2α , если радиус описанной около пирамиды сферы равен R .

Решения:

1. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Пусть эти числа $n, n + 1, n + 2$. При $n = 1$ сумма кубов равна

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36, \text{ т.е. предположение выполняется.}$$

Покажем, что из того, что предположение верно при $n = k$, т.е.

$$k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 \text{ делится на } 9, \text{ следует справедливость}$$

предположения при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 &= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\ &= (k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Выражение в первых скобках кратно 9 по предположению индукции, второе слагаемое имеет сомножитель 9, т.е. также кратно 9. Следовательно, вся сумма кратна 9, т.е. предположение индукции выполняется, что доказывает

справедливость утверждения: сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. Найдем область допустимых значений уравнения. Она определяется условием:

$$3x^2 - 5x - 12 \geq 0.$$

Решив это неравенство, получим ОДЗ: $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Преобразуем уравнение:

$$3x^2 - 5x - 12 + 5\sqrt{3x^2 - 5x - 12} - 36 = 0.$$

Введем новую переменную $y = \sqrt{3x^2 - 5x - 12}$, она должна удовлетворять условию $y \geq 0$. Относительно этой переменной получаем квадратное уравнение

$$y^2 + 5y - 36 = 0.$$

Корни этого уравнения $y_1 = 4$; $y_2 = -9$. Наложенному условию удовлетворяет $y_1 = 4$. Тогда

$$\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 28 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{3}; x_2 = 4.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = -\frac{7}{3}; x_2 = 4$.

3. Находим область допустимых значений этого неравенства

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 11 > 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup (2 + \sqrt{15}; +\infty).$$

Перейдем к общему основанию логарифмов

$$\frac{2 \log_7(x^2 - 4x - 11) - \frac{3}{\log_7 18} \cdot \log_7(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \frac{3}{\log_7 18}\right) \frac{\log_7(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

Так как

$$2 - \frac{3}{\log_7 18} = \frac{2 \log_7 18 - 3}{\log_7 18} = \frac{\log_7 18^2 - 3 \log_7 7}{\log_7 18} = \frac{\log_7 324 - \log_7 343}{\log_7 18},$$

то $2 - \frac{3}{\log_7 18} < 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно

$$\frac{\log_7(x^2 - 4x - 11)}{2 - 5x - 3x^2} \leq 0 \text{ или } \frac{\log_7(x^2 - 4x - 11)}{3x^2 + 5x - 2} \geq 0.$$

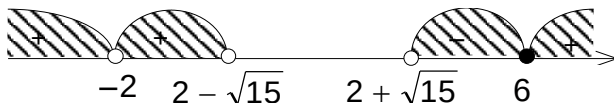
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\log_7(x^2 - 4x - 11)}{3x^2 + 5x - 2}$. Область определения

этой функции совпадает с ОДЗ неравенства. Требуется определить, где $f(x) \geq 0$. Находим точки, в которых $f(x) = 0$, т.е.

$$\log_7(x^2 - 4x - 11) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 6 \end{cases},$$

точка $x_1 \notin D(f)$, т.к. знаменатель в этом случае обращается в нуль.

Дальнейшее решение удобно проводить графически:



Область определения $D(f)$ функции разбилась на четыре интервала, на которых функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

$$f(-4) = \frac{\log_7 21}{26} > 0, \quad f(7) = \frac{\log_7 10}{180} > 0.$$

При переходе через $x = 6$ функция изменяет свой знак, т.к. числитель становится положительным ($x^2 - 4x - 11 < 1$). В точке $x = -2$ перемены знака не происходит, т.к. в этой точке в нуль обращаются и числитель, и знаменатель.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2 - \sqrt{15}) \cup [6; +\infty).$

4. ОДЗ: $x, y \in R$. Выделим в левой части полный квадрат:

$$x^2 + 2x \sin xy + \sin^2 xy + 1 - \sin^2 xy = 0 \Leftrightarrow (x + \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0.$$

Поскольку сумма квадратов равна нулю, то это возможно только если

$$\begin{cases} x + \sin xy = 0 \\ \cos xy = 0. \end{cases}$$

Так как $\cos xy = 0$, то $\sin xy = 1$ либо $\sin xy = -1$.

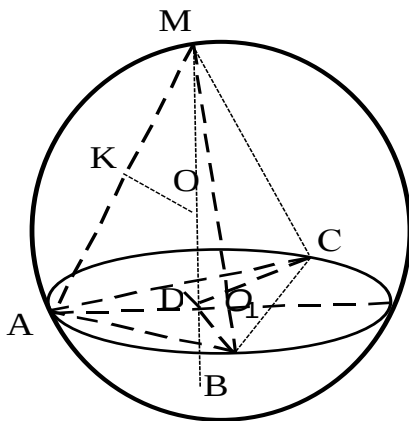
$$\text{Если } \sin xy = 1, \text{ то } \begin{cases} x = -1 \\ \cos y = 0 \\ \sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad k, m \in Z.$$

$$\text{Если } \sin xy = -1, \text{ то } \begin{cases} x = 1 \\ \cos y = 0 \\ \sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi l \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad l, n \in Z.$$

$$\text{Решая эти системы, получим: } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad n \in Z. \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

5.



Дано: $ABCM$ — пирамида;
 $AB = AC$; $\angle BAC = \alpha$;
 $\angle MAO_1 = 2\alpha$; $OM = R$.

Найти: V_{ABCM} .

Решение: боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию. Поэтому высота пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности. Эта окружность — сечение сферы плоскостью основания пирамиды. Отсюда следует, что центр сферы (точка O) лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении.

Проведем $OK \perp MA$. Рассмотрим треугольник MKO : в нем

$$\angle KMO = \frac{\pi}{2} - 2\alpha; \quad MO = R; \quad MK = \frac{1}{2} MA;$$

$$MK = MO \cos \angle KMO = R \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = R \sin 2\alpha; \quad MA = 2R \sin 2\alpha.$$

Теперь рассмотрим треугольник AMO_1 (O_1 — центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды).

Пусть $MO_1 = H$:

$$\begin{aligned} MO_1 &= AM \sin \angle MAO_1 = AM \sin 2\alpha = 2R \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = \\ &= 2R \sin^2 2\alpha \Rightarrow H = 2R \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Пусть $AO_1 = r$:

$$AO_1 = AM \cos \angle MAO_1 = 2R \sin 2\alpha \cos 2\alpha = R \sin 4\alpha \Rightarrow r = R \sin 4\alpha.$$

Проведем $O_1D \perp AC$. Тогда

$$AD = AO_1 \cos \angle DAO_1 = r \cos \frac{\alpha}{2} = R \sin 4\alpha \cos \frac{\alpha}{2}. \quad AC = 2R \sin 4\alpha \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \left(2R \sin 4\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \sin \alpha.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin^2 4\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cdot 2R \sin^2 2\alpha.$$

Ответ: $V = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 4\alpha \sin^2 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

Вариант № 7.

1. Решить уравнение $5 \sin x - \cos x = 5$.
2. Решить уравнение $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2} - 3 \log_2 11 = 0$.
3. Дан $\triangle ABC$, $AB = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \varphi$. Найти BC .
4. Сколько одинаковых членов находится в двух арифметических прогрессиях $\div 5, 8, 11, \dots$ и $\div 3, 7, 11, \dots$, в каждой из которых по 100 членов.
5. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат; точка M принадлежит стороне CD , точка K принадлежит стороне BC , AK — биссектриса $\angle BAM$. Доказать, что $AM = BK + DM$.

Решения:

1. $5 \sin x - \cos x = 5$.

$$\frac{5}{\sqrt{26}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{26}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Пусть $\frac{5}{\sqrt{26}} = \cos \alpha$, $\frac{1}{\sqrt{26}} = \sin \alpha$, тогда

$$\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin(x - \alpha) = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$x - \alpha = (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}} + (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{ \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}} + (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

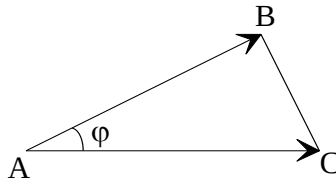
2. $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{7x}{2} = 3 \log_2 11.$

Так как левая часть уравнения не превосходит 3, а правая больше 3, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

3. Рассмотрим векторы

$$\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}.$$



Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{AC} - \vec{AB} \Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\vec{BC}|^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} - 2 \vec{AC} \cdot \vec{AB} \Rightarrow |\vec{BC}|^2 = \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2 |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos \varphi \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Ответ: $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$

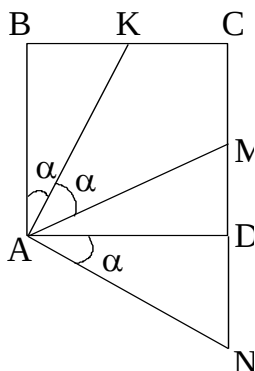
4. Пусть некоторые члены первой арифметической прогрессии a_n соответственно равны членам второй прогрессии b_m , т.е.

$$5 + 3(n - 1) = 3 + 4(m - 1), \text{ отсюда } n = m - 1 + \frac{m}{3}. \text{ Так как числа } m \text{ и } n$$

принимают только целые положительные значения, то должно быть:
 $m = 3k$, $n = 4k - 1$, где k — целое положительное число. Таким образом, у данных арифметических прогрессий совпадают 3-й и 3-й члены ($k = 1$), 7-й и 6-й члены ($k = 2$), ..., 99-й и 75-й члены ($k = 25$). При $k = 26$ имеем $n = 103 > 100$. По условию в каждой прогрессии ровно 100 членов, следовательно, одинаковых членов в них будет 25.

Ответ: 25.

5.



На стороне AD вне квадрата построим $\triangle ADN$, равный $\triangle ABK$. Тогда

$$DN = BK, BK + DM = MN.$$

Пусть $\angle BAK = \alpha$, тогда $\angle MAD = 90^\circ - 2\alpha$.

$$\angle MAN = (90^\circ - 2\alpha) + \alpha = 90^\circ - \alpha;$$

$$\angle ANM = 90^\circ - \alpha. \text{ И так,}$$

$$\angle MAN = \angle ANM; \Rightarrow AM = MN \Rightarrow AM = BK + DM.$$

Вариант № 8.

1. Решить уравнение $\cos^2 x \sin x + \sin^2 x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

2. Доказать, что

$$\log_{2310} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_7 x} + \frac{1}{\log_{11} x}}.$$

3. Доказать неравенство $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$, $abc \neq 0$.

4. Решить систему
$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 = \frac{\sqrt{4x - 3}}{\sqrt{8x - 7}} \\ x^2 - 8x = -y^2 - 7. \end{cases}$$

5. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Они делят его площадь на 6 частей, три из которых суть треугольники с площадями S_1 , S_2 , S_3 . Найти площадь данного треугольника.

Решения:

$$1. \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} . \quad \emptyset$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$= \frac{1}{\log_x 2310} = \log_{2310} x, x > 0, x \neq 1.$$

3. Учтем, при $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0, \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2 \geq 0, \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2} \geq 0 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{2}{ac} + \frac{1}{c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} \geq \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{b^2} - \frac{2}{bc} + \frac{1}{c^2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc},$$

что и требовалось доказать.

$$4. \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 = \frac{\sqrt{4x - 3}}{\sqrt{8x - 7}} \\ x^2 - 8x = -y^2 - 7. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > \frac{7}{8} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$2. \quad \frac{1}{\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_7 x} + \frac{1}{\log_{11} x}} =$$

$$= \frac{1}{\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 + \log_x 7 + \log_x 11} =$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x - 7 \\ \frac{2}{\sqrt{8x - 7}} - 1 = \frac{\sqrt{4x - 3}}{\sqrt{8x - 7}}. \end{cases}$$

$$2 - \sqrt{8x - 7} = \sqrt{4x - 3},$$

$$2 - \sqrt{4x - 3} = \sqrt{8x - 7},$$

$$4 - 4\sqrt{4x - 3} + 4x - 3 = 8x - 7,$$

$$8 - 4x = 4\sqrt{4x - 3},$$

$$2 - x = \sqrt{4x - 3},$$

$$4 - 4x + x^2 = 4x - 3,$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

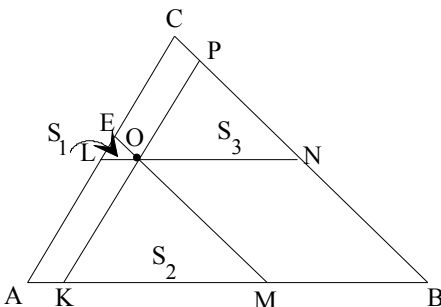
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 7,$$

$$\begin{cases} y^2 = -x^2 + 8x - 7 \\ x = 1 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = 7 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

Прodelав проверку, видим, что $(7; 0)$ не является решением системы.

Ответ: $(1; 0)$.

5.



Дано: $\triangle ABC$,
т. $O \in \triangle ABC$, $KP \parallel AC$,
 $EM \parallel BC$, $LN \parallel AB$,
 $S_{\triangle LEO} = S_1$, $S_{\triangle KOM} = S_2$,
 $S_{\triangle OPN} = S_3$.

Найти:
 S — площадь $\triangle ABC$.
Обозначим сторону BC через a ,

EO — через a_1 , OM — через a_2 и PN — через a_3 ,

$\triangle ABC \sim \triangle ELO \sim \triangle KOM \sim \triangle OPN$.

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2, \quad \frac{S_3}{S} = \left(\frac{a_3}{a}\right)^2,$$

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a} = \sqrt{\frac{S_1}{S}} \\ \frac{a_2}{a} = \sqrt{\frac{S_2}{S}} \\ \frac{a_3}{a} = \sqrt{\frac{S_3}{S}} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a} = \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}.$$

Так как $a_1 + a_2 + a_3 = a$, то $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1$,

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}, \quad S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Вариант № 9.

1. Доказать тождество

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5}; \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5}; \quad \frac{zx}{z+x} = \frac{36}{13}.$$

3. Решить уравнение $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

5. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления K соединена с вершиной D . Выяснить, какую часть диагонали AC отсекает пересекающая ее прямая KD .

Решения:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \times \\
 & \times (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = \\
 & = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x - 3\sin^4 x - 3\cos^4 x + 1 = \\
 & = -(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + 1 = \\
 & = -(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 1 = -1 + 1 = 0; \quad 0 = 0.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13}. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y+z \neq 0 \\ x+z \neq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{12} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{18} \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36}. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \\ \frac{1}{z} = c . \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a + b = \frac{5}{12} \\ b + c = \frac{5}{18} \\ a + c = \frac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{5}{12} \\ a - c = \frac{5}{36} \\ a + c = \frac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{5}{12} \\ a - c = \frac{5}{36} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{6} \\ c = \frac{1}{9} . \end{cases}$$

Следовательно, $x = 4$, $y = 6$, $z = 9$.

Ответ: (4; 6; 9).

3. $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$.

$$\frac{\log_4(x + 12)}{\log_2 x} = 1,$$

$$\log_4(x + 12) = \log_4 x^2,$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3 \notin \hat{A}\hat{C}.$$

Ответ: $\{4\}$.

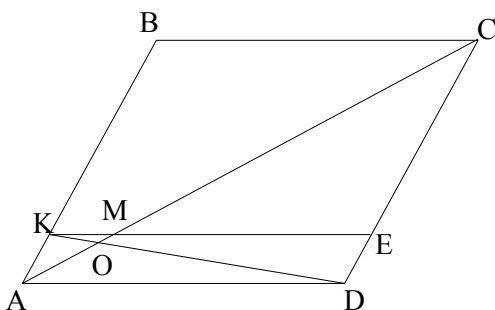
$$4. \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 . \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \in R. \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} = 2 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{6x+1} = 2 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ответ: (0; 0).

5.



Дано: $ABCD$ —
параллелограмм, $AK = \frac{1}{n} AB$.

Найти: $\frac{AO}{AC}$.

Проведем $KE \parallel AD$;

$M = AC \cap KE$.

$\triangle KOM \sim \triangle AOD$

(эти треугольники имеют

равные соответственные углы), поэтому

$$\frac{AD}{KM} = \frac{AO}{OM} = \frac{AO}{AM - AO} = \frac{AO}{\frac{1}{n} AC - AO}, \quad \frac{AD}{KM} = n. \text{ Имеем}$$

$$\frac{AO}{\frac{1}{n} AC - AO} = n, \quad AO = AC - AO \cdot n, \quad AO \cdot (n+1) = AC, \quad \frac{AO}{AC} = \frac{1}{n+1}.$$

Ответ: $\frac{AO}{AC} = \frac{1}{n+1}$.

Вариант № 10.

1. Пусть $\cos \theta + \cos \varphi = a$, $\sin \theta + \sin \varphi = b$. Вычислить $\cos(\theta + \varphi)$ и $\sin(\theta + \varphi)$.

2. Упростить выражение $\frac{6(1 - \log_{mn} m)(1 - \log_{nm} n)}{\log_{mn} n \cdot \log_{mn} m}$.

3. Найти площадь $\triangle ABC$, если $A(1; 3)$, $B(-1; -2)$, $C(-3; 1)$.

4. Доказать неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$.

5. Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Решения:

1. Из условия $2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2} = a$, $2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2} = b$.

Отсюда $tg \frac{\theta + \varphi}{2} = \frac{b}{a}$.

Учтем, что $\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$, $\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$.

Тогда $\cos(\theta + \varphi) = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $\sin(\theta + \varphi) = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

Ответ: $\cos(\theta + \varphi) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $\sin(\theta + \varphi) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

2. Учитывая, что $m > 0$, $m \neq 1$, $n > 0$, $n \neq 1$, $nm \neq 1$, найдем, что

$$\begin{aligned} & \frac{6(1 - \log_{mn} m)(1 - \log_{mn} n)}{\log_{mn} n \cdot \log_{mn} m} = \\ & = \frac{6(\log_{mn} mn - \log_{mn} m)(\log_{mn} mn - \log_{mn} n)}{\log_{mn} n \cdot \log_{mn} m} = \frac{6 \log_{mn} n \cdot \log_{mn} m}{\log_{mn} n \cdot \log_{mn} m} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

3. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \right| \cdot \left| \vec{AC} \right| \sin A$.

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \{-2; -5\}, \quad \vec{AC} = \{-4; -2\}; \\ \left| \vec{AB} \right| &= \sqrt{29}, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{20}, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18; \\ \cos A &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left| \vec{AB} \right| \cdot \left| \vec{AC} \right|} = \frac{18}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{20}} = \frac{9}{\sqrt{145}}, \\ \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{8}{\sqrt{145}}, \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{8}{\sqrt{145}} = 8.\end{aligned}$$

Ответ: 8.

4. Учтем, что $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, $n \in N$. Тогда, так как

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\text{то: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

что и требовалось доказать.

5. Учтем, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2. \text{ Тогда}$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 9,$$

поэтому $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$, что и требовалось доказать.

Вариант № 11.

1. Доказать, что $16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1$.

2. Найти чему равно $2 \lg \frac{a+b}{3} - \lg(10ab)$, если $a^2 + b^2 = 7ab$.

3. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

4. Чему равно $ab + cd$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + db = 0$.

5. Доказать, что при $\alpha = \frac{2\pi}{17}$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos 8\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Решения:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 16 \cos 80^\circ \cos 60^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \\ & = 8 \cos 80^\circ \cos 60^\circ \cos 40^\circ \cdot \frac{2 \cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ & = 4 \cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 60^\circ \cdot \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ & = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 2 \lg \frac{a+b}{3} - \lg(10ab) = \lg \left(\frac{a+b}{3} \right)^2 - \lg 10 - \lg(ab) = \\ & = \lg \frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} - 1 - \lg(ab) = \lg \frac{7ab + 2ab}{9} - 1 - \lg ab = \\ & = \lg ab - 1 - \lg ab = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

$$3. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28.$$

Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$, $7m - 28 = 0$, $m = 4$.

Ответ: 4.

4. Можно считать, что $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$, где α и β — некоторые углы; при этом равенство $ac + bd = 0$ принимает вид

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Теперь } ab + cd &= \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\beta \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

5. Так как $2 \sin \alpha \cdot \cos k\alpha = \sin(k+1)\alpha - \sin(k-1)\alpha$, то

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos 8\alpha = \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha} (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \dots + 2 \sin \alpha \cdot \cos 8\alpha) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha} (\sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin 4\alpha - \sin 2\alpha + \dots + \sin 9\alpha - \sin 7\alpha) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha} (-\sin \alpha + \sin 8\alpha + \sin 9\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot 2 \sin \frac{17}{2} \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

При $\alpha = \frac{2\pi}{17}$ $\sin \frac{17}{2} \alpha = \sin \pi = 0$, поэтому

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos 8\alpha = -\frac{1}{2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Вариант № 12.

1. Решить уравнение $\cos x + \cos \frac{x}{2} - 3 \log_3 5 + \cos \frac{3x}{2} = 0$.

2. Решить уравнение $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$.

3. У вертикальной стены стоит стержень длиной l . Нижний конец стержня перемещается по полу со скоростью V_x в направлении, перпендикулярном стене. Найдите закон изменения во времени координаты $y(t)$ — точки соприкосновения верхнего конца стержня и стены.

4. Доказать, что $\operatorname{tg} 70^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

5. Доказать, что произведение четырех следующих друг за другом натуральных чисел не может быть квадратом натурального числа.

Решения:

1. Запишем данное уравнение в виде

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 3 \log_3 5.$$

Левая часть уравнения не превосходит 3, а правая больше 3, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$.

$$2. \log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 \frac{x}{8} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 16 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 16) \cup (16; +\infty).$$

$$\log_2 x - 2 = \frac{15}{\log_2 x - 4},$$

$$\log_2 x = t,$$

$$t - 2 = \frac{15}{t - 4},$$

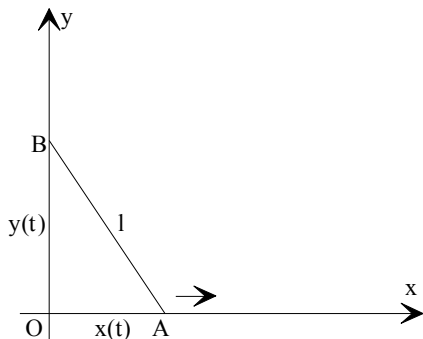
$$t^2 - 6t - 7 = 0,$$

$$t_1 = 7, \quad t_2 = -1.$$

$$\begin{cases} \log_2 x = 7 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 128 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; 128 \right\}.$$

3. Выберем систему координат так, что ось OY направлена вдоль стены перпендикулярно к полу, а ось OX расположена на полу перпендикулярно к стене. Пусть координаты верхнего конца стержня $(0, y(t))$, а нижнего — $(x(t), 0)$. Из прямоугольного $\triangle OAB$:



$$x^2(t) + y^2(t) = l^2,$$

$$y(t) = \sqrt{l^2 - x^2(t)},$$

$$x(t) = v_x \cdot t,$$

$$y(t) = \sqrt{l^2 - v_x^2 t^2}.$$

Ответ: $y(t) = \sqrt{l^2 - v_x^2 t^2}$.

$$\begin{aligned}
 4. \operatorname{tg} 70^{\circ} 30' &= \frac{1 - \cos 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos 30^{\circ}}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos 30^{\circ}}{2}}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \\
 &= \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3}} = \\
 &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{12} + 2} - 2 - \sqrt{3} = \\
 &= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5. Пусть $n \in N$, тогда

$$\begin{aligned}
 n(n+1)(n+2)(n+3) &= n(n+2) \cdot (n+1)(n+3) = \\
 &= (n+1-1)(n+1+1) \cdot (n+2-1)(n+2+1) = ((n+1)^2 - 1)((n+2)^2 - 1) = \\
 &= (n+1)^2(n+2)^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + 1 = \\
 &= ((n+1)(n+2))^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + 1 = \\
 &= ((n+1)(n+2))^2 - 2(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 - 1 = \\
 &= ((n+1)(n+2))^2 - 2(n+1)(n+2) + 1 - 1 = ((n+1)(n+2) - 1)^2 - 1 = m^2 - 1,
 \end{aligned}$$

где $m \in N$.

Таким образом, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ на единицу меньше квадрата числа и не может быть самим квадратом.

Вариант № 13.

1. В правильной прямой прямоугольной призме заданы $S_{\text{б.п.}}$ и $S_{\text{п.п.}}$ (площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности). Найти высоту призмы.

2. Найти чему равно $\frac{2\lg(2a+3b) - 2\lg 5}{2(\lg a + \lg b)}$, если $13ab = 4a^2 + 9b^2$.

3. Решить неравенство $|x^2 - 2x| > 3$.

4. Пусть x и y — некоторые натуральные числа. Доказать, что если число $2x+3y$ делится без остатка на 17, то и число $9x+5y$ делится тоже, и наоборот.

5. Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C = 1,$$

если $A+B+C=\pi$.

Решения:

1. Пусть сторона основания призмы равна a , а высота h , тогда

$$\begin{cases} S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}} = 4ah \\ S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} = 4ah + 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{4a} \\ 2a^2 = S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} - S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{4a} \\ a = \sqrt{\frac{S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} - S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{4\sqrt{\frac{S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} - S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{2}}} = \frac{S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{2\sqrt{2(S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} - S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}})}}.$$

Ответ: $h = \frac{S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}}}{2\sqrt{2(S_{\hat{i}\hat{i}\hat{e}\hat{f}} - S_{\hat{a}\hat{h}\hat{e}})}}.$

2. Пусть $\frac{2\lg(2a+3b) - 2\lg 5}{2(\lg a + \lg b)} = N$, тогда при условии $13ab = 4a^2 + 9b^2$

получим

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{2\lg(2a+3b) - 2\lg 5}{2(\lg a + \lg b)} = \frac{\lg(2a+3b)^2 - \lg 5^2}{2\lg(ab)} = \\
 &= \frac{\lg(4a^2 + 12ab + 9b^2) - \lg 25}{2\lg(ab)} = \frac{\lg(13ab + 12ab) - \lg 25}{2\lg(ab)} = \\
 &= \frac{\lg(25ab) - \lg 25}{2\lg(ab)} = \frac{\lg(ab)}{2\lg(ab)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$$3. \left| x^2 - 2x \right| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 3 \\ x^2 - 2x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \\ (x-1)^2 + 2 < 0 \quad \emptyset. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, предположим, что при каких-то $x, y \in \mathbb{N}$ число a делится на 17, то есть $a = 2x + 3y = 17n$, тогда $y = \frac{1}{3}(17n - 2x)$ и $b = 9x + 5y = 9x + \frac{5}{3}(17n - 2x) = \frac{1}{3}(17x + 5 \cdot 17n) = \frac{17}{3}(x + 5n)$. Так как дробь $\frac{17}{3}$ несократима, а b — натуральное, то $\frac{1}{3}(x + 5n) = m \in \mathbb{N}$, то есть $b = 17 \cdot m$ — делится на 17. Теперь предположим, что при $x, y \in \mathbb{N}$ число b делится на 17, то есть $b = 9x + 5y = 17n$, тогда $y = \frac{1}{5}(17n - 9x)$ и

$$a = 2x + 3y = 2x + \frac{3}{5}(17n - 9x) = \frac{1}{5}(3 \cdot 17n - 17x) = \frac{17}{5}(3n - x);$$

так как дробь $\frac{17}{5}$ несократима, а $a \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{5}(3n - x) = m \in \mathbb{N}$, то есть

$a = 17 \cdot m$ — делится на 17. Таким образом $((2x + 3y) \text{ делится на } 17) \Leftrightarrow ((9x + 5y) \text{ делится на } 17)$. Например, при $x = 4, y = 3$ имеем $a = 8 + 9 = 17$, $b = 36 + 15 = 51 = 3 \cdot 17$ — оба делятся на 17.

5. Представим левую часть в виде

$$ctgA \cdot ctgB + (ctgA + ctgB)ctgC.$$

Поскольку $ctgA + ctgB = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}$, а $C = \pi - (A+B)$, то
 есть $ctgC = -ctg(A+B)$, и данное выражение

$$\begin{aligned} & ctgA \cdot ctgB - \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} \cdot \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = ctgA \cdot ctgB - \frac{\cos(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} = \\ & = ctgA \cdot ctgB - \frac{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B} = \\ & = ctgA \cdot ctgB - \frac{\cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} + \frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B} = ctgA \cdot ctgB - ctgA \cdot ctgB + 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $ctgA \cdot ctgB + ctgA \cdot ctgC + ctgB \cdot ctgC = 1$, если
 $A+B+C = \pi$.

Вариант № 14.

1. Определить численное значение выражения $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$.
2. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.
3. Решить уравнение $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.
4. Доказать, что $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.
5. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между некоторыми двумя из них не больше $180^\circ/n$.

Решения:

$$1. \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

Пусть $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = x$. Возводя в квадрат это равенство, получим уравнение $2 + x = x^2$, корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Так как $x > 0$, то решение $x = 2$.

Ответ: 2.

2. Обозначим цифру десятков искомого числа через a , цифру единиц — через b . Тогда по условию:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 10a + b + 36 = 10b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Ответ: 48.

3. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5.$$

Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \\ 3t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \\ t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; 1\}$.

4. Умножим и разделим левую часть равенства на $2 \sin \frac{\pi}{7}$:

$$\frac{2 \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) + \sin \frac{5\pi}{7} + \sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + \sin \pi}{2 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \pi}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

5. Возьмем на плоскости произвольную точку и проведем через нее прямые, параллельные данным. Они разделяют плоскость на $2n$ углов, в сумме дающих 360° . Поэтому один из этих углов не больше $180^\circ/n$.

Вариант № 15.

1. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x = 2$.

2. Доказать, что если числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

3. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 4$, вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

4. Найти все значения параметра q , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (q+1)x + 8y = 4q \\ qx + (q+3)y = 3q-1 \end{cases} \text{ имеет бесконечно много решений.}$$

5. Докажите, что для всех $x \in (1, \infty)$ выполняется неравенство

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}.$$

Решения:

1. $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x = 2$.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^2 x.$$

Так как $\cos^3 x \leq \cos^2 x$, $\sin^3 x \leq \sin^2 x$, то

$$\sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \text{ С другой стороны } 2 - \sin^2 x \geq 1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ 2 - \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ \sin x = 1 \\ \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos^3 x = 2 \\ \sin x = 1 \\ \cos^3 x = 0 \end{cases} \varnothing$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. По условию числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то есть $a + c = 2b$. Необходимо доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

Если разность прогрессии $d = 0$, то $a = b = c$, и указанное соотношение выполняется. Поэтому будем считать, что $d \neq 0$. Освобождаясь от иррациональности в знаменателях, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{c - b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d}, \\ \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} &= 2 \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{c - a} = 2 \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2d} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Так как $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, то $\left(\vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}\right) = 180^\circ$, $\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = 0^\circ$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ = 3,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 180^\circ = 1 \cdot 4 \cdot (-1) = -4,$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 180^\circ = 12 \cdot (-1) = -12,$$

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -13.$$

Ответ: -13.

$$4. E \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8}(4q - (q+1)x) \\ qx + (q+3)\frac{1}{8}(4q - (q+1)x) = 3q - 1 \Leftrightarrow F, \end{cases}$$

где $F \Leftrightarrow x\left(q - \frac{1}{8}(q+1)(q+3)\right) = 3q - 1 - \frac{1}{2}q(q+3)$. Система E имеет бесконечно много решений, если

$$\begin{cases} q - \frac{1}{8}(q^2 + 4q + 3) = 0 \\ 3q - 1 - \frac{1}{2}q(q+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - 4q + 3 = 0 \\ q^2 - 3q + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow q = 1$$

Ответ: $\{1\}$.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$, ее производная

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ на множестве $(1; \infty)$ существует и на этом множестве

$f'(x) > 0$, то есть функция $f(x)$ возрастает, кроме того $f(1) = 0$,

следовательно, на $(1; \infty)$ $f(x) > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 = \frac{2x\sqrt{x} - 3x + 1}{x}.$$

Пусть $\varphi(x) = 2x\sqrt{x} - 3x + 1$. Разложим $\varphi(x)$ на множители.

Обозначим $\sqrt{x} = t$, тогда

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3t^2 + 1 &= 2t^3 - 2t^2 - t^2 + 1 = 2t^2(t-1) - (t^2 - 1) = \\ &= (t-1)(2t^2 - t - 1) = 2(t-1)(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right) = 2(t-1)^2\left(t + \frac{1}{2}\right) = (t-1)^2(2t+1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 (2\sqrt{x} + 1)$, $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 (2\sqrt{x} + 1)}{x}$.

При $x \in (1; \infty)$ $f(x) > 0$, поэтому $2\sqrt{x} > +\frac{1}{x} - 3 > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, что и требовалось доказать.

Вариант № 16.

1. Решить уравнение $\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$.

2. Решить неравенство $|4x - 1| \geq |2x + 3|$.

3. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

4. Найти все значения параметра p , при которых система уравнений

$$\begin{cases} p^2 x + (2 - p)y = 4 + p^3 \\ px + (2p - 1)y = p^5 - 2 \end{cases} \text{ не имеет ни одного решения.}$$

5. Доказать, что при любых положительных x, y, z

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Решения:

1. $\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 4x \neq \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-\cos 2x}{\sin x \cdot \cos x} + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3,$$

$$-4\operatorname{ctg}4x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3,$$

$$\operatorname{ctg}4x = y, \quad y^3 - 4y - 3 = 0,$$

$$(y+1)(y^2 - y - 3) = 0,$$

$$y_1 = -1, \quad y_{2,3} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2},$$

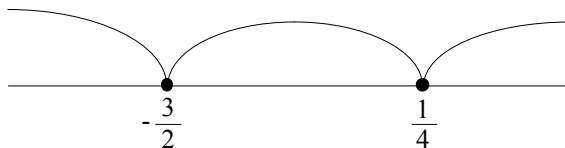
$$\begin{cases} \operatorname{ctg}4x = -1 \\ \operatorname{ctg}4x = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 4x = \operatorname{arccctg} \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{4} \operatorname{arccctg} \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi}{4}m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n; \frac{1}{4} \operatorname{arccctg} \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} + \frac{\pi}{4}m \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$

2. $|4x - 1| \geq |2x + 3|.$



$$\begin{array}{ccccc}
 4x-1: & - & & - & + \\
 2x+3: & - & & + & +
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \\ 1-4x \geq -2x-3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \\ 2x-4 \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \\ x \leq 2 \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \\ 1-4x \geq 2x+3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \\ 6x+2 \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right] \end{array} \right] \Leftrightarrow \\
 & \left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{4}; \infty\right) \\ 4x-1 \geq 2x+3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{4}; \infty\right) \\ 2x-4 \geq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{4}; \infty\right) \\ x \geq 2 \end{array} \right] \\
 & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [2; \infty).
 \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [2; \infty).$

3. $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}), |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}.$

$$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 10\vec{a}^2 + 6\vec{b} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 13.$$

Ответ: 13.

4. Найти все значения параметра p , при которых система уравнений

$$E \Leftrightarrow \begin{cases} p^2x + (2-p)y = 4 + p^3 \\ px + (2p-1)y = p^5 - 2 \end{cases} \text{ не имеет ни одного решения.}$$

Пусть $p = 0$, тогда $\begin{cases} p = 0 \\ E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ 2y = 4 \\ -y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ y = 2 \end{cases}$ — имеется бесконечно

много решений.

Пусть теперь $p \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \neq 0 \\ E \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p^2x + (2-p)y = 4 + p^3 \\ p^2x + p(2p-1)y = p(p^5-2) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p^2x + (2-p)y = 4 + p^3 \\ y(p(2p-1) - 2 + p) = p(p^5-2) - 4 - p^3. \end{cases} \end{aligned}$$

Система E не имеет решений, если

$$\begin{cases} p(2p-1) - 2 + p = 0 \\ p(p^5-2) - 4 - p^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2 - 2 = 0 \\ p^6 - p^3 - 2p - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \pm 1 \\ p^6 - p^3 - 2p - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 1.$$

Ответ: $p = 1$.

$$5. \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Учтем, что $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, $\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$, $\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$; складывая эти неравенства, получим

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

При условии, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, разделим это неравенство на abc :

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Сделаем в этом неравенстве замену: $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, получим неравенство, которое требуется доказать.

Вариант № 17.

1. Доказать, что при $x > 0$ и натуральном n выполняется неравенство

$$1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}.$$

2. Построить треугольник по стороне a , опущенной на нее высоте h и сумме двух других сторон S .

3. Вычислить (без таблиц и калькулятора) $\arctg \frac{1}{7} + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Найти все решения уравнения $(1 + tg^2 x) \sin x - tg^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $tg x < 0$.

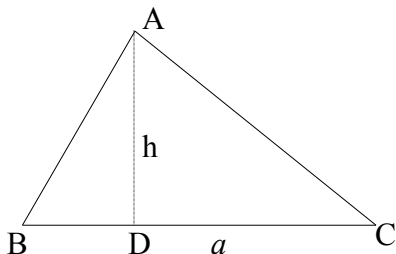
5. Решить неравенство $\log_3 \frac{2^x - 5}{27} \cdot \log_{1/3} (2^x - 5) < 2$.

Решения:

1. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + C_n^2 \frac{x^2}{n^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n}$, т.к. $x > 0$, то

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $BC = a$, $AD = h$, $BD = \frac{a}{2} + x$, $\frac{a}{2} - x = DC$. Тогда



$$\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} = S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} = S^2 - 2ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{S \sqrt{S^2 - a^2 - 4h^2}}{2 \sqrt{S^2 - a^2}}.$$

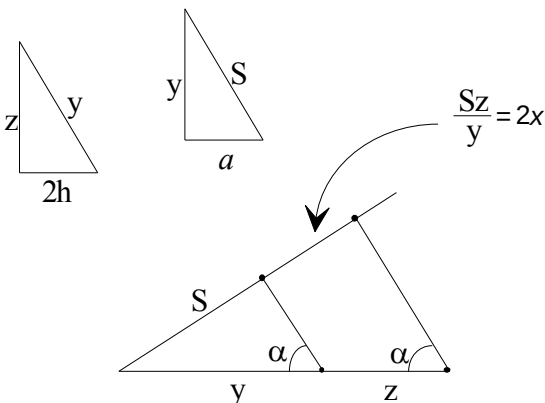
1. Строим

$$y = \sqrt{S^2 - a^2}.$$

$$2. z = \sqrt{y^2 - 4h^2}.$$

$$3. x = \frac{Sz}{2y}.$$

Далее легко строятся точки B, C, A .



$$3. \arctg \frac{1}{7} + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = \alpha + \beta,$$

$$\alpha = \arctg \frac{1}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7},$$

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \\ \beta \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right| \Rightarrow \alpha + \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{9}{10} - \frac{1}{10}} = \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{28}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\arctg \frac{1}{7} + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}.$

$$4. (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0, \operatorname{tg} x < 0.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \sin x = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow, \quad 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x_3 > 0, \operatorname{tg} x_2 < 0.$$

$$\underline{\text{ОТВЕТ:}} \quad x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \log_3 \frac{2^x - 5}{27} \cdot \log_{1/3} (2^x - 5) < 2.$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (\log_2 5; \infty).$$

$$- [\log_3 (2^x - 5) - 3] \log_3 (2^x - 5) < 2,$$

$$t = \log_3 (2^x - 5) \Rightarrow -t(t - 3) < 2, \quad t^2 - 3t + 2 > 0.$$

$$\begin{cases} \log_3 (2^x - 5) > 2 \\ \log_3 (2^x - 5) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 14 \\ 2^x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_2 14 \\ x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (\log_2 5; 3) \cup (\log_2 14; +\infty)$.

Вариант № 18.

1. Доказать, что не существует целых чисел x и y таких, которые бы удовлетворяли уравнению $x^2 + 1998 = y^2$.
2. Построить равнобедренный треугольник, если известны основание, угол при вершине и медиана, проведенная к боковой стороне.
3. Вычислить (без калькулятора и таблиц) $\arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{5}$.
4. Найти все решения уравнения $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.
5. Решить неравенство $\log_2 x^2 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$.

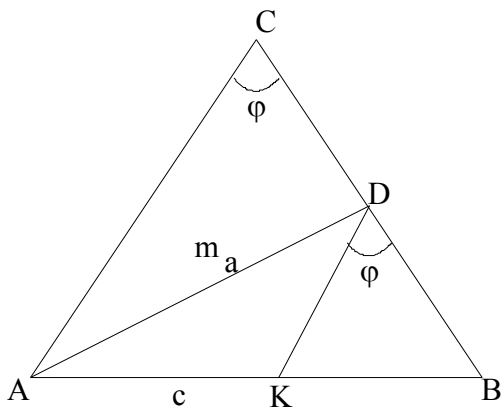
Решения:

1. Запишем данное уравнение в виде $(y-x)(y+x) = 1998$.

Рассмотрим случаи:

- а) одно из чисел x и y четное, другое нечетное. Тогда $(y-x)(y+x)$ число нечетное, и поэтому данное уравнение решений при $x, y \in \mathbb{Z}$ не имеет;
- б) оба числа x и y или четны или нечетны. Тогда $(y-x)(y+x)$ делится на 4, а 1998 на 4 не делится без остатка. Следовательно, в этом случае данное уравнение не имеет решений при $x, y \in \mathbb{Z}$.

2.



Пусть у искомого ΔABC известны: $AB = c$, $AD = m_a$, $\angle BCA = \varphi$. Если K — середина AB , D — середина BC , то $\angle BDK = \angle BCA$.

Последовательность построения ΔABC такова:
а) строится точка K — середина AB ;
б) строится точка D как точка пересечения геометрического

места точек, из которых отрезок KB виден под углом φ и геометрического места точек, удаленных от точки A на расстояние m_a ;

в) строится точка C ($C \in BD$, $BD = CD$).

3. Пусть $\alpha = \arctg \frac{2}{3}$, тогда $tg \alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$; $\beta = \arctg \frac{1}{5}$, $tg \beta = \frac{1}{5}$,

$$\beta \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{15}} = 1.$$

Следовательно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

4. $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1$, $\sin x \geq 0$.

$$2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos x = 1,$$

$$4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \quad \emptyset \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\sin x_1 \geq 0, \sin x_2 \leq 0.$$

Ответ: $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$5. \log_2 x^2 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2.$$

ОДЗ: $x \in (1; \infty).$

$$2 \log_2 x + 2 \log_2(x-1) < 2,$$

$$\log_2(x(x-1)) < 1,$$

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Ответ: $x \in (1; 2).$

Вариант № 19.

1. Найти все натуральные числа x, y, z , для которых $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ есть целое число.

2. Построить треугольник, если известны один из его углов α , выходящая из этого угла высота h и периметр $2p$.

3. Вычислить (без таблиц и калькулятора) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arcctg} \frac{4}{5}$.

4. Найти все решения уравнения $4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

5. Решить неравенство $\frac{1 + \log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$.

Решения:

$$1. N = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

а) Если $x = y = z \Rightarrow N = \frac{3}{x}$ будет целым, если $x = 1$ или

$$x = 3 \Rightarrow (1, 1, 1); (3; 3; 3).$$

б) Пусть $x \leq y \leq z, x \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 3 \Rightarrow N = 1 \text{ или } N = 2.$$

При $N = 1: \frac{3}{x} > 1 \Rightarrow x < 3$. Если $x = 1$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ — невозможно;

$$x = 2: \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ при } y = z = 4 \Rightarrow (2, 4, 4),$$

$$y < z \Rightarrow \frac{2}{y} > \frac{1}{2} \Rightarrow y < 4, \text{ но } y \neq 2, \text{ т.к. тогда } \frac{1}{z} = 0,$$

$$y = 3 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow (2, 3, 6).$$

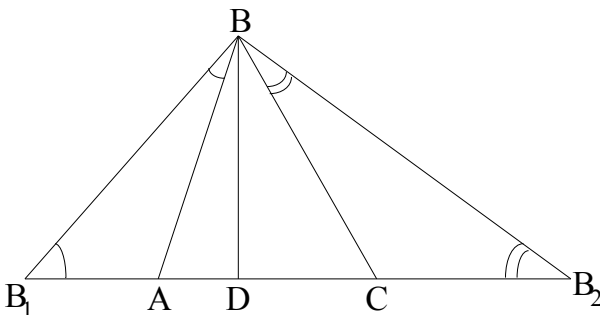
$$N = 2: x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \text{ если } y = z \Rightarrow y = z = 2 \Rightarrow (1, 2, 2),$$

$$\text{при } y < z, \frac{2}{y} > 1 \Rightarrow y < 2, y \neq 1, \text{ т.к. } \frac{1}{z} = 0.$$

$$x = 2: \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \text{ — не имеет натуральных решений при } y = z.$$

Если $2 \leq y < z$, то $\frac{2}{y} > \frac{3}{2} \Rightarrow y < \frac{4}{3}$, что противоречит $y \geq 2$.

Ответ : $(1, 1, 1); (3, 3, 3); (2, 4, 4); (2, 3, 6); (1, 2, 2)$.



Дано: $\angle ABC = \alpha$,
 $BD = h$,
 $AB + BC + AC = 2p$.

Отложим на продолжении AC $AB_1 = AB$, $CB_2 = CB \Rightarrow B_1B_2 = 2p$.

$$\angle B_1BA = \angle BB_1A = \frac{1}{2} \angle BAC; \quad \angle CBB_2 = \frac{1}{2} \angle BCA.$$

Значит
$$\angle B_1BB_2 = \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle BAC) + \angle ABC =$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) + \angle ABC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, строим отрезок $B_1B_2 = 2p$, затем точку B ,
 расстояние от B до B_1B_2 равно h , $\angle B_1BB_2 = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Построив $\angle B_1BB_2$, т. A и C находим как пересечение серединных
 перпендикуляров соответственно к B_1B и B_2B с прямой B_1B_2 .

3. $\text{arcctg} \frac{1}{9} + \text{arcctg} \frac{4}{5}$.

$$\alpha = \text{arcctg} \frac{1}{9} \Rightarrow \text{ctg} \alpha = \frac{1}{9}; \quad \text{tg} \alpha = 9, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\beta = \text{arcctg} \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg} \beta = \frac{5}{4}; \quad \beta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} = \frac{9 + \frac{5}{4}}{1 - \frac{45}{4}} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{4} \pi.$$

Ответ: $\operatorname{arccctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arccctg} \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \pi$.

4. $4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$.

$$4 - 5 \cos x - 2 + 2 \cos^2 x = 0,$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 2 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad \begin{matrix} \sin x_1 > 0 \\ \sin x_2 < 0 \end{matrix}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. $\frac{1 + \log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$.

ОДЗ: $x \in (3, \infty)$;

$$\frac{1}{\log_{x+1} 3} + \frac{\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3),$$

$$\log_3(x+1) + \log_3(x-3) < \log_3(2x-3),$$

$$x^2 - 2x - 3 < 2x - 3,$$

$$x^2 - 4x < 0,$$

$$x \in (3; 4).$$

Ответ: $x \in (3; 4)$.

Вариант № 20.

1. Пусть p и q — простые числа, причем $q^3 - 1$ делится на p , а $(p-1)$ делится на q . Доказать, что $p = 1 + q + q^2$.

2. Дан угол и точка вне его. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник заданного периметра.

3. Вычислить (без таблиц и калькулятора) $\operatorname{arccctg} \frac{1}{7} + 2\operatorname{arccctg} \frac{1}{3}$.

4. Найти все решения уравнения $8\sin x + 5 = 2\cos 2x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

5. Решить неравенство $\log_{1/2} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$.

Решения:

1. $p, q \neq 1$. Так как $(p-1)$ делится на q , то $p = lq + 1$ ($l \geq 1$);

$q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1)$ делится на p . Но $(q-1)$ не может делиться на

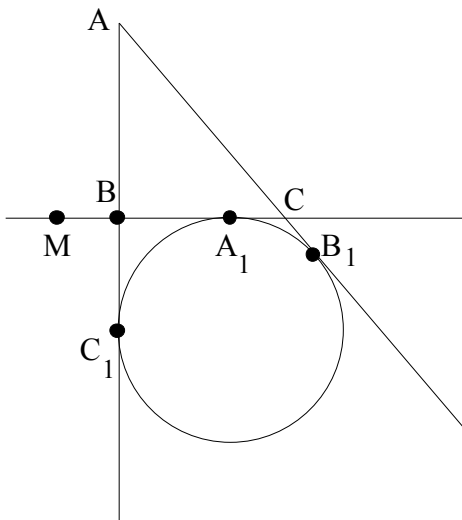
p , иначе возникает противоречие: $q > q+1, \Rightarrow q^2 + q + 1 = mp, m \in \mathbb{N}$,
 $q^2 + q - m(p-1) = m-1$.

Каждое слагаемое в левой части делится на q .

$$\begin{aligned} m-1 = kq &\Rightarrow m = kq + 1 \Rightarrow q^2 + q + 1 = \underbrace{(kq+1)}_m \underbrace{(mq+1)}_p \Rightarrow \\ &\Rightarrow (kl-1)q^2 + (l+k-1)q = 0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow p = q^2 + q + 1. \end{aligned}$$

2. Пусть $\triangle ABC$ искомым, $2p$ — его периметр, M — данная точка, B_1 и C_1 — точки касания окружности с AB и AC . Тогда

$$AB_1 = AC_1 = \frac{1}{2}(AB_1 + AC_1) = \frac{1}{2}(AC + CB_1 + AB + BC_1) =$$



$$= \frac{1}{2}(AC + CA_1 + AB + BA_1) =$$

$$\frac{1}{2}(AC + CB + BA) = p,$$

p — полупериметр $\triangle ABC$.
Находим т. B_1 и C_1 , строим окружность, из точки M проводим к ней касательную.

$$3. \arctg \frac{1}{7} + 2\arctg \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arctg \frac{1}{7} \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{7}, \operatorname{tg} \alpha = 7, \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\beta = 2\arctg \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 3, \frac{\beta}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \beta = \left(\frac{2}{3}\pi; \pi \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right). \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{6}{1 - 9} = -\frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{21}{4}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5}{4}\pi.$$

Ответ: $\arctg \frac{1}{7} + 2\arctg \frac{1}{3} = \frac{5}{4}\pi.$

$$4. 8\sin x + 5 = 2\cos 2x, \cos x \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
 8 \sin x + 5 &= 2(1 - 2 \sin^2 x), \\
 4 \sin^2 x + 8 \sin x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\
 \cos x_1 &\geq 0; \quad \cos x_2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$5. \log_{1/2} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \log_3 \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \log_3 \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 1 \\ \frac{x+1}{x-1} \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} > 0 \\ \frac{(2-x)2}{x-1} \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [2; +\infty).$$

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.

Вариант № 21.

1. Найти все пары простых чисел p и q , удовлетворяющих равенству

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

2. Построить треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, выходящими из одной вершины.

3. Вычислить (без таблиц и калькулятора) $\sin\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

4. Найти все решения уравнения $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$,

удовлетворяющие неравенству $\cos x < -\frac{1}{2}$.

5. Решить неравенство $(\log_{1/2} x)^2 - \log_{1/2} x^2 > (\log_{1/2} 3)^2 - 1$.

Решения:

1. $p^2 - 2q^2 = 1 \Rightarrow p > 2$.

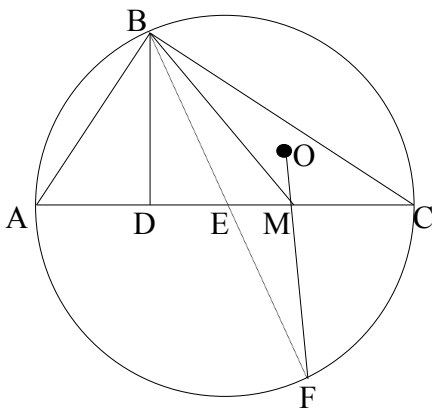
$$\frac{(p-1)(p+1)}{2} = q^2; \text{ так как } p > 2, \text{ то } p \text{ — нечетное, } (p-1)(p+1)$$

делится на 8, $\frac{(p-1)(p+1)}{2}$ — делится на 4, q^2 — делится на 4,

следовательно q — четное. Поскольку q — простое, то $q = 2$, поэтому $p = 3$.

Ответ: $p = 3, q = 2$.

2.



BD — высота $= h$

BE — биссектриса $= l$

BM — медиана $= m$.

Продолжим BE до пересечения с описанной около $\triangle ABC$ окружностью. Пусть F — середина дуги AC , $FM \perp AC$ и проходит через центр O описанной окружности. Проводим прямую AC , в произвольной точке D на AC восстанавливаем перпендикуляр, на котором откладываем $BD = h$, определяем

точку E ($BE = l$), получаем точку F . Точка O — центр описанной окружности — находится на пересечении MF и серединного перпендикуляра к BF , после чего находим точки A и C .

3. $\sin\left(\frac{1}{2} \arccotg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

$$\alpha = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right),$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}; 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ но}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \left(\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \right) \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

4. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x, \cos x < -\frac{1}{2}.$

$$\sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x).$$

$$\sin^2 2x = 2 \sin x \cos 2x \cdot 2 \sin 2x \cos x \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x_2 = \pi + 2\pi k \\ x_3 = 2\pi k \end{cases} \begin{cases} \cos x_1 = 0 \\ \cos x_2 = -1 \\ \cos x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m\right) = \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi m\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{7}{6}\pi + 2\pi m\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} < -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi k; x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi m; x_3 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, k, m, n \in Z.$

$$5. \left(\log_{1/2} x\right)^2 - \log_{1/2} x^2 > \left(\log_{1/2} 3\right)^2 - 1.$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (0; \infty).$$

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x > \log_2^2 3 - 1; \quad \log_2 x = t,$$

$$t^2 + 2t + 1 - \log_2^2 3 > 0, \quad \log_2 3 > 0,$$

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 1 + \log_2^2 3} = -1 \pm \log_2 3,$$

$$\begin{cases} t > \log_2 \frac{3}{2} \\ t < -\log_2 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x > \log_2 \frac{3}{2} \\ \log_2 x < -\log_2 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right) \\ x \in \left(0; \frac{1}{6}\right). \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Вариант 22.

$$1. \text{ Решить неравенство } 2^{\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2}} > 1.$$

$$2. \text{ Решить уравнение } \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{32}.$$

$$3. \text{ Решить неравенство } \left| \frac{2x - 1}{x^2 - 3} \right| \geq 3.$$

4. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk .

5. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0; -2)$ до

$$\text{точек } (x; y) \text{ таких, что } y = \frac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2, \quad x > 0.$$

Решения:

$$1. 2^{\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2}} > 1.$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; \infty).$$

$$\begin{cases} x \in (0; \infty) \\ \log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \infty) \\ \log_{0,4} x (\log_{0,4} x - 1) > 0. \end{cases}$$

Пусть $\log_{0,4} x = t$, $t \cdot (t - 1) > 0$, следовательно:

$$\begin{cases} t < 0 \\ t > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{0,4} x < 0 \\ \log_{0,4} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \infty) \\ x > 1 \\ x < 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 0,4) \cup (1; \infty).$$

Ответ: $(0; 0,4) \cup (1; \infty)$.

$$2. \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{32}.$$

Заметим, что $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ не является решением данного уравнения.

Умножим данное уравнение на $\sin x$:

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{32} \cdot \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{16} \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{8} \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{4} \sin x \Leftrightarrow \sin 16x \cdot \cos 16x = -\frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow$$

$$\sin 32x = -\sin x \Leftrightarrow 2 \sin \frac{33x}{2} \cdot \cos \frac{31x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{33x}{2} = 0 \\ \cos \frac{31x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{33x}{2} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{31x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi m}{33}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{31} + \frac{2\pi k}{31}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{2\pi m}{33}; \frac{\pi}{31} + \frac{2\pi k}{31} \middle| m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \left| \frac{2x-1}{x^2-3} \right| \geq 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x^2-3} \geq 3 \\ \frac{2x-1}{x^2-3} \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x^2-3} - 3 \geq 0 \\ \frac{2x-1}{x^2-3} + 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x^2-2x-8}{x^2-3} \leq 0 \\ \frac{3x^2+2x-10}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} \leq 0 \\ \frac{\left(x+\frac{1+\sqrt{31}}{3}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{31}}{3}\right)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} (x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 0 \\ x=2, x=-\frac{4}{3}, x \neq \pm\sqrt{3} \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \left(x+\frac{1+\sqrt{31}}{3}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{31}}{3}\right)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 0 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}, x \neq \mp\sqrt{3}. \end{aligned} \right. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right] \cup (\sqrt{3}; 2], x \in \left[\frac{-1-\sqrt{31}}{3}; -\sqrt{3}\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{31}}{3}; \sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\left[\frac{-1-\sqrt{31}}{3}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{31}}{3}; \sqrt{3}\right) \cup (\sqrt{3}; 2].$

4. Предположим, что сумма длин хорд не меньше πk , и докажем, что тогда найдется диаметр, пересекающий, по крайней мере, $k+1$ хорду. Так как длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды, то сумма длин

дуг, стягиваемых данными хордами, больше πk . Если мы к этим дугам добавим еще и дуги, симметричные им относительно центра окружности, то сумма длин всех рассматриваемых дуг будет больше $2\pi k$. Поэтому найдется точка, которую покрывает, по крайней мере, $k + 1$ хорду на этих дугах. Диаметр, проведенный через эту точку, пересекает, по крайней мере, $k + 1$ хорду.

5. Квадрат расстояния от точки М с координатами $(0; -2)$ до точки А с координатами $(x; y)$ таков: $AM^2 = (x - 0)^2 + (y + 2)^2$. Так как по условию координаты точки А связаны равенством $y = \frac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2$, то

$$AM^2 = x^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{3}x^3} \right)^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6}.$$

Следовательно, квадрат искомой величины равен наименьшему значению функции $f(x) = x^2 + \frac{256}{3x^6}$ на множестве $(0; +\infty)$.

Функция $f(x)$ в каждой точке этого множества имеет производную

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{256}{3x^6} \right)' = 2x - 512x^{-7} = \frac{2(x^8 - 2^8)}{x^7}.$$

На промежутке $0 < x < 2$ $f'(x) < 0$, а на промежутке $2 < x < +\infty$ $f'(x) > 0$. Значит, функция $f(x)$ убывает на промежутке $(0; 2)$ и возрастает на промежутке $(2; +\infty)$, $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$. Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ на множестве $(0; \infty)$

$$f(2) = 5\frac{1}{3}, \text{ а искомое наименьшее расстояние } \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Вариант № 23.

1. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$.

2. Решить уравнение $\cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$.

3. Доказать, что при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $ab \neq 1$

$$\log_a b \cdot \log_{ab} b = \log_a b - \log_{ab} b.$$

4. Доказать, что число $19^{97} + 97^{19}$ делится на 4 без остатка.

5. Доказать, что $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ является целым числом при любом четном n .

Решения:

1. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2 - x^4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt[4]{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \cup (0; \sqrt[4]{2}].$$

$$\begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ \sqrt{2-x^4} > x \\ x \in (0; \sqrt[4]{2}] \\ \sqrt{2-x^4} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ x \in (0; \sqrt[4]{2}] \\ x^4 + x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ x \in (0; \sqrt[4]{2}] \\ (x^2 + 2)(x^2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ x \in (0; \sqrt[4]{2}] \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ x \in (0; \sqrt[4]{2}] \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \\ x \in (1; \sqrt[4]{2}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt[4]{2}; 0) \cup (1; \sqrt[4]{2}].$$

Ответ: $[-\sqrt[4]{2}; 0) \cup (1; \sqrt[4]{2}].$

$$2. \cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = -\cos x - \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x + \cos x = 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \pi + 2\pi k, \quad \mp \frac{\pi}{3} + 2\pi m \mid k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Обозначим $A = \log_a b \cdot \log_{ab} b$, $B = \log_a b - \log_{ab} b$. Учитывая, что

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad ab \neq 1, \quad \text{получим: } A = \frac{\log_a b}{\log_b ab} = \frac{\log_a b}{\log_b a + 1};$$

$$B = \log_a b - \frac{1}{\log_b ab} =$$

$$= \log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1} = \frac{\log_a b \cdot \log_b a + \log_a b - 1}{\log_b a + 1} = \frac{\log_a b}{\log_b a + 1}.$$

Таким образом, $A = B$, что и требовалось доказать.

4. Представим данное число в виде

$$19 \cdot 19^{96} + 97 \cdot 97^{18} = 19(19^2)^{48} + 97(97^2)^9.$$

Поскольку $19^2 = 1 \pmod{4}$, $(19^2)^{48} = 1 \pmod{4}$, $97^2 = 1 \pmod{4}$, $(97^2)^9 = 1 \pmod{4}$, а $19 + 97 = 116$ делится на 4 без остатка, то число $19^{97} + 97^{19}$ делится на 4 без остатка.

5. Подставим $n = 2k$:

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что $k(k+1)(2k+1)$ делится на 6. Так как одно из последовательных целых чисел k или $k+1$ четное, то делимость на 2 очевидна. Если k или $k+1$ делятся на 3, то доказательство закончено, если ни k , ни $k+1$ не делятся на 3, то $k = 3m+1$, а $k+1 = 3m+2$. Тогда $2k+1 = 2(3m+1)+1 = 6m+3$, то есть $2k+1$ делится на 3, что и требовалось доказать.

Вариант № 24.

1. Решить неравенство $\log_{4/3}(\sqrt{x+3} - x) > 0$.
2. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 1} + 2 < |x - 2|$.
3. Решить уравнение $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.
4. Доказать, что если $\cos(\theta - \alpha) = a$, $\sin(\theta - \beta) = b$, то

$$a^2 - 2ab \cdot \sin(\alpha - \beta) + b^2 = \cos^2(\alpha - \beta).$$

5. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая, по крайней мере, 4 из этих окружностей.

Решения:

$$1. \log_{4/3}(\sqrt{x+3} - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -1 \\ x > -1 \\ x+3 > 1+2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; -1] \\ x > -1 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; -1] \\ x > -1 \\ (x+2)(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 1].$$

Ответ: $[-3; 1]$.

2.

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ \sqrt{x^2-1}+2 < 2-x \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ \sqrt{x^2-1} < -x \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -x > 0 \\ x^2 > x^2-1 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1}+2 < x-2 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x^2-1} < x-4 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 4 \\ x^2 \geq 1 \\ x^2-1 < (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 4 \\ 8x < 17 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1]$.

$$\begin{aligned}
3. \quad 4^x - 3^{x-0,5} &= 3^{x+0,5} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^x = \\
&= \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{1}{2} \left(2^x\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 4^x = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 3^x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Вариант № 25.

1. Дано, что $a \neq 1$, $b > 0$, $a > 0$, $c + b > 0$, $c - b > 0$,

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Доказать, что a, b, c — стороны прямоугольного треугольника.

2. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, найти

длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

4. Доказать тождество $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

5. Доказать, что для всех натуральных чисел $n > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

Решения:

1. Преобразуем данное равенство с учетом условий $a \neq 1$, $b > 0$, $a > 0$, $c + b > 0$, $c - b > 0$ к виду

$$\frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = \frac{2}{\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)},$$

откуда

$$\log_a(c-b) + \log_a(c+b) = 2,$$

$$\log_a(c^2 - b^2) = 2,$$

$$c^2 - b^2 = a^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{при } a > 0, b > 0, \begin{cases} c-b > 0 \\ c+b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{n} > b \\ c > -b \end{cases} \Rightarrow c > 0.$$

$$2. \sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (4,5; +\infty). \\ \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 4,5 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4,5; +\infty).$

$$3. \text{ Учитывая, что } \left| \vec{a} \right| = 3, \left| \vec{b} \right| = 4, \alpha = \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{\pi}{3}, \text{ найдем}$$

$$\begin{aligned} \vec{c}^2 = \left| \vec{c} \right|^2 &= \left(3\vec{a} + 2\vec{b} \right)^2 = 9\left| \vec{a} \right|^2 + 12\left| \vec{a} \right|\left| \vec{b} \right| \cos \frac{\pi}{3} + 4\left| \vec{b} \right|^2 = \\ &= 9 \cdot 9 + 12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 16 = 217. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } \left| \vec{c} \right| = \sqrt{217}.$$

Ответ: $\sqrt{217}.$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \operatorname{tg} 5^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 55^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 65^{\circ} &= \frac{\sin 5^{\circ} \cdot \sin 55^{\circ} \cdot \sin 65^{\circ}}{\cos 5^{\circ} \cdot \cos 55^{\circ} \cdot \cos 65^{\circ}} = \frac{\sin 5^{\circ} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10^{\circ} - \cos 120^{\circ})}{\cos 5^{\circ} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10^{\circ} + \cos 120^{\circ})} = \\
 &= \frac{\sin 5^{\circ} \cdot \left(\cos 10^{\circ} + \frac{1}{2} \right)}{\cos 5^{\circ} \cdot \left(\cos 10^{\circ} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{\sin 5^{\circ} \cdot \cos 10^{\circ} + \frac{1}{2} \sin 5^{\circ}}{\cos 5^{\circ} \cdot \cos 10^{\circ} - \frac{1}{2} \cos 5^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2} (-\sin 5^{\circ} + \sin 15^{\circ}) + \frac{1}{2} \sin 5^{\circ}}{\frac{1}{2} (\cos 5^{\circ} + \cos 15^{\circ}) - \frac{1}{2} \cos 5^{\circ}} = \\
 &= \operatorname{tg} 15^{\circ} = \frac{1 - \cos 30^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}, \text{ что и требовалось доказать.}
 \end{aligned}$$

5. Обозначим левую часть неравенства как U_n ; при $n = 2$ имеем: $n^2 = 4$,

$$U_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6 + 4 + 3}{12} = \frac{13}{12} > 1$$

Оценим разность

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} - U_n &= \\
 &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n^2} = \\
 &= \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

где число слагаемых со знаком плюс равно

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Заменяя в этих слагаемых знаменатели на $(n+1)^2$, т.е. на большее, получим

$$U_{n+1} - U_n > \frac{2n+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n - 1}{(n+1)^2 \cdot n};$$

$n^2 - n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5})$ поэтому $n^2 - n - 1 > 0$ при

$n > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$; поскольку $2 > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, то $n^2 - n - 1 > 0$ при $n \geq 2$.

Таким образом, $U_{n+1} - U_n > 0$ при $n \geq 2$, т.е. U_n монотонно растет с ростом n . Следовательно, $U_n > 1$ для всех $n \geq 2$.

Вариант № 26.

1. Найти чему равно $\log_{ab} b$, если $\log_{ab} a = 24$.

2. Решить уравнение $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$.

3. Решить неравенство $\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$.

4. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

5. При каких значениях p уравнение $\sqrt{p} \cdot \cos x - 2 \sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2 - p}$ имеет решения?

Решения:

$$\begin{aligned}
 1. \log_{ab} b &= \frac{1}{\log_b ab} = \frac{1}{\log_b a + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a b} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a b + 1 - 1} + 1} = \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\log_a b + \log_a a - 1} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a(ab) - 1} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\log_{ab} a} - 1} + 1} = \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{24} - 1} + 1} = -23.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\log_{ab} b = -23$.

$$2. \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 1 + \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x} - \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x} = 0,$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x (\cos x - 1) = 0, \end{cases}$$

так как получаемая система несовместна, то данное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

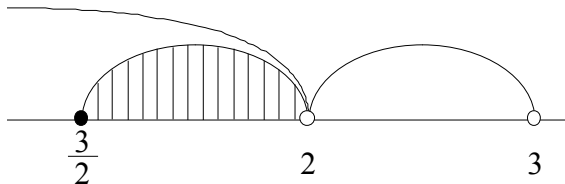
$$3. \frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2.$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \\ \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \\ \frac{1}{x-2} + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \\ \frac{2x-3}{x-2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3; \infty) \\ \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ \frac{1}{x-2} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; \infty) \\ \frac{4-2x}{x-2} \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 2 \right)$.

4. Допустим, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Тогда $\sqrt{3} - \sqrt{2} = md$, $\sqrt{5} - \sqrt{2} = nd$, где d — разность прогрессии, m и n — целые числа. Имеем

$$n(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = m(\sqrt{5} - \sqrt{2}), (m - n)\sqrt{2} = m\sqrt{5} - n\sqrt{3}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$2 \cdot (m - n)^2 = 5m^2 - 2mn\sqrt{15} + 3n^2.$$

Следовательно:

$$\sqrt{15} = \frac{5m^2 + 3n^2 - 2(m - n)^2}{2mn}.$$

Последнее равенство невозможно, так как $\sqrt{15}$ — иррациональное число.

5. Преобразуем уравнение при условии $\begin{cases} p \geq 0 \\ 2 - p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [0; 2]$:

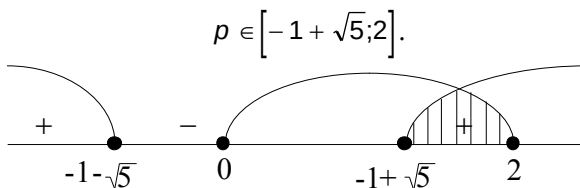
$$\sqrt{p} \cos x - 2 \sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2 - p} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p + 4}} \cos x - \frac{2}{\sqrt{p + 4}} \sin x =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - p}}{\sqrt{p + 4}}. \text{ Пусть } \sqrt{\frac{p}{p + 4}} = \cos \varphi, \frac{2}{\sqrt{p + 4}} = \sin \varphi, \text{ тогда}$$

$$\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - p}}{\sqrt{p + 4}} \Leftrightarrow \cos(\varphi + x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - p}}{\sqrt{p + 4}}.$$

Уравнение имеет решение, если $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - p}}{\sqrt{p + 4}} \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-p}}{\sqrt{p+4}} \leq 1 \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} + \sqrt{2-p} \leq \sqrt{p+4} \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\sqrt{2(2-p)} + 2 - p \leq p + 4 \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{2(2-p)} \leq 2p \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2(2-p)} \leq p \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 - 2p \leq p^2 \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p^2 + 2p - 4 \geq 0 \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (p - (-1 - \sqrt{5}))(p - (-1 + \sqrt{5})) \geq 0 \\ 0 \leq p \leq 2 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



Ответ: $p \in [-1 + \sqrt{5}; 2].$

4 ВАРИАНТЫ БИЛЕТОВ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант № 1.

1. Решить уравнение $\lg(x + 1,5) = -\lg x$.
2. Решить неравенство $\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0$.
3. Доказать тождество $\operatorname{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}$.
4. Найти производную функции $y = \sin(x^3 - 2x)$.
5. Площадь ромба равна 600 см^2 , а длина вписанной в него окружности равна 24π см. Вычислить длины диагоналей ромба.

Ответы: 1. $\{1/2\}$; 2. $(-1/2; 2)$; 4. $(3x^2 - 2) \cos(x^3 - 2x)$; 5. 30 и 40 см.

Вариант № 2.

1. Решить уравнение $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

2. Решить неравенство $3^{|x|+2} < 27$.

3. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ на промежутке $[-2; 3/4]$.

4. Решить уравнение $\log_3^2 x + \log_{1/3} x - 6 = 0$.

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 132, а сумма квадратов длин его сторон равна 6050. Найти длины сторон треугольника.

Ответы: 1. $\{\frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}\}$; 2. $(-1; 1)$; 3. Наибольшее значение

$$f(x) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\frac{1}{32}; \quad 4. \{1/9; 27\}; \quad 5. \{33; 44; 55\}.$$

Вариант № 3.

1. Решить уравнение $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

2. Решить неравенство

$$\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1.$$

3. При каких x функция $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$ достигает

наименьшего значения? Найти это значение.

4. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции

$$y = 4^x - 6 \cdot 2^x + x \ln 16 - 1.$$

5. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной пирамиды, равен R . Плоский угол при вершине пирамиды равен β . Определить объем пирамиды.

Ответы: 1. $\{-1/2\}$; 2. $(2;5)$; 3. $\{\pi/4 + \pi/2 n | n \in \mathbb{Z}\}$; 4. y возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, y убывает при $x \in (0;1)$, $y_{\max}(0) = -6$,
 $y_{\min}(1) = 4 \ln 2 - 9$; 5. $\frac{R^3 \sqrt{3}}{4 \sin \beta/2} \sqrt{\cos(\beta/2 + 30^\circ) \cos(\beta/2 - 30^\circ)}$.

Вариант № 4.

1. Вычислить $\sin^2(5/8 \pi) + \cos^2(7/8 \pi)$.
2. Решить уравнение $\ln(8 - x) = \ln(1 + \sqrt{x + 5})$.
3. Решить неравенство $\frac{15}{4 + 3x - x^2} > 1$.
4. Решить уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$.
5. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α и стороной a . Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найти объем пирамиды.

Ответы: 1. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; 2. $\{4\}$; 3. $(-1; 4)$; 4. $\{3\}$; 5. $\frac{1}{6} a^3 \sqrt{3} \sin^2 \alpha$.

Вариант № 5.

1. Решить уравнение $\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x$.
2. Решить неравенство $(0,3)^{\log_{1/3} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} \geq 1$.
3. Найти отношение высоты к радиусу основания цилиндра, который при заданном объеме V имеет наименьшую полную поверхность.
4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$$
5. Доказать, что точки $A(1;-1;1)$, $B(1;3;1)$, $C(4;3;1)$, $D(4;-1;1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей и координаты точки их пересечения.

Ответы: 1. $\{\pi/6 + 2/3 \pi n; 2\pi k | n, k \in \mathbb{Z}\}$; 2. $[-1/2; 2]$; 3. $\{2\}$; 4. $\{(3;2)\}$; 5. $d=5$; $O(2,5;1;0)$.

Вариант № 6.

1. Решить уравнение $\cos 2x = 5 \sin x + 3$.

2. Решить неравенство $\frac{\log_{1/3}(x+2)}{x} > 0$.

3. Найти промежутки, на которых функция $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 - 1$ убывает.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 67, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

5. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12 см. Найти сумму катетов треугольника.

Ответы: 1. $\{(-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; 2. $(-1; 0)$; 3. Функция убывает на $(-\infty; -3)$ и $(0; 2)$; 4. $(7; 2), (2; 7)$; 5. 23 см.

Вариант № 7.

1. Решить уравнение $2 \cos^2 x + \sin 2x = 0$.

2. Найти область определения функции $f(x) = \lg(4 + 8x - 5x^2)$.

3. Найти промежутки возрастания функции $f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 8$.

4. Решить уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$.

5. Площадь боковой поверхности конуса равна S . Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Определить объем конуса.

Ответы: 1. $\{\pi/2 + \pi n; -\pi/4 + \pi k \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$; 2. $(-0,4; 2)$; 3. Функция возрастает на промежутках $(-\sqrt{2}/2; 0)$ и $(\sqrt{2}/2; \infty)$; 4. $\{2\}$; 5. $\frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$.

Вариант № 8.

1. Доказать тождество $2 \cos(\alpha + 45^\circ) \cos(45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$.

2. Решить уравнение $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/5}(x^2 - 5x + 7)}$.

4. Исследовать функцию и построить ее график $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ xy = 16 \end{cases}$$

Ответы: 2. $\{2\}$; 3. $[2;3]$; 4. $\max f(x) = f(0) = 0$; $\min f(x) = f(2) = -4/3$;
5. $\{(-8,-2); (-2,-8); (2,8); (8,2)\}$.

Вариант № 9.

1. Решить неравенство $x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.
2. Решить уравнение $\log_3(9^x + 9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2 \cdot 3^x)$.

3. Преобразовать в произведение

$$1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi).$$

4. Найти y' , если $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$.
5. Дан треугольник. Длины двух его сторон равны a и b , угол между ними равен α . Найти длину высоты, проведенной к третьей стороне.

Вариант № 10.

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$.
2. Решить уравнение $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$.
3. Преобразовать в произведение

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - 1.$$

4. Найти y' , если $y = \sqrt{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x + 2}$.
5. Дан равнобедренный треугольник. В нем основание равно a , угол при основании α . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

Вариант № 11.

1. Решить неравенство $\sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$.
2. Решить уравнение

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x) \cdot \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

3. Преобразовать в произведение

$$2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - 1.$$

4. Найти y' , если $y = \left(1 - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

5. Квадрат вписан в окружность. Его сторона равна a . Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

Вариант № 12.

1. Решить неравенство $2x - 3 < \sqrt{-2 - 3x - x^2}$.

2. Решить уравнение $\log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{8}}$.

3. Преобразовать в произведение

$$1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - 4\alpha\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right).$$

4. Найти y' , если $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$.

5. Дан равнобедренный треугольник с площадью S . Угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α . Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

Вариант № 13.

1. Решить неравенство $x + 4 < \sqrt{-x^2 - 8x - 12}$.

2. Решить уравнение $2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}$.

3. Преобразовать в произведение

$$1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 3\alpha\right).$$

4. Найти y' , если $y = (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{2x})$.

5. В треугольнике даны сторона a , противолежащий ей угол α , высота h , проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

Вариант № 14.

1. Решить неравенство $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2$.

3. Преобразовать в произведение $\sin 6\alpha - 2\sqrt{3} \cdot \cos^2 3\alpha + \sqrt{3}$.

4. Найти y' , если $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$.

5. Дан прямоугольный треугольник с периметром $2p$, площадью m^2 . Определить стороны этого прямоугольного треугольника.

Вариант № 15.

1. Решить неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

2. Решить уравнение $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2x = 0$.

3. Преобразовать в произведение $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha$.

4. Найти $f'(3)$, если $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.

5. Периметр ромба равен 2 м, а длины его диагоналей относятся как 3:4. Найти площадь ромба.

Вариант № 16.

1. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0$.

2. Решить уравнение $4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x^2 + 2} = 0$.

3. Преобразовать в произведение $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha$.

4. Найти $f'(x)$, если $f(x) = x - \frac{2}{x^2}$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

Вариант № 17.

1. Решить неравенство $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

2. Решить уравнение $\frac{10x^{2\lg 2x}}{x^3} = \frac{x^{3\lg x}}{10}$.

3. Преобразовать в произведение

$$\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha.$$

4. Найти $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x$.

5. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2 , а длина высоты равна 2 см.

Вариант № 18.

1. Решить неравенство $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

2. Решить уравнение $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$.

3. Преобразовать в произведение $\sin 5\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha$.

4. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

5. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к ее гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2.

Вариант № 19.

1. Решить неравенство $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0$.

3. Преобразовать в произведение

$$\cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha.$$

4. Найти $f'(2)$, если $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

5. Найти площадь квадрата, вписанную в правильный треугольник со стороной a .

5 ВАРИАНТЫ БИЛЕТОВ ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 1.

1. Решить уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

2. Решить неравенство $\sin(2x - 1) > -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Построить график функции $y = |x - 1| + |x - 2| + x$.

Вариант № 2.

1. Решить уравнение $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$.

2. Решить неравенство $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$.

3. Построить график функции $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$.

Вариант № 3.

1. Решить уравнение $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$.

2. Решить неравенство $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1$.

3. Построить график функции $y = -2^{-|x|}$.

Вариант № 4.

1. Решить уравнение $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$.

2. Решить неравенство $\operatorname{tg}(3x - 2) < -\sqrt{3}$.

3. Построить график функции $y = 2^{|1-x|}$.

Вариант № 5.

1. Решить уравнение $\log_{1/3} x - 3\sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0$.
2. Решить неравенство $\cos\left(x/2 + 1/4\right) < -\sqrt{2}/2$.
3. Построить график функции $y = x \cdot |x| - 4x - 5$.

Вариант № 6.

1. Решить уравнение $2\log_4(4 - x) = 4 - \log_2(-2 - x)$.
2. Решить неравенство $\operatorname{ctg}\left(x - \pi/4\right) \geq 1$.
3. Построить график функции $y = \log_x \sqrt{x}$.

Вариант № 7.

1. Решить уравнение $2\sin x \cdot \cos x - 3\sin 2x = 0$.
2. Решить неравенство $\frac{x^2 - 5x + 6}{|x| + 7} < 0$.
3. Найти критические точки функции $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

Вариант № 8.

1. Решить уравнение $\sin x/2 \cdot \cos \pi/3 - \cos x/2 \cdot \sin \pi/3 = 1/4$.
2. Решить неравенство $\frac{|x + 2| - x}{x} < 2$.
3. Найти критические точки функции $y = x + \ln(1 - 4x)$.

Вариант № 9.

1. Решить уравнение $\sin \sqrt{x} = -1$.
2. Решить неравенство $\frac{1}{|x| - 3} < \frac{1}{2}$.
3. Найти критические точки функции $y = e^{x^2 - 4x + 3}$.

Вариант № 10.

1. Решить уравнение $\cos x^2 = 1$.
2. Решить неравенство $\frac{|x - 1|}{x + 2} < 1$.

3. Найти критические точки функции $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2x-1}}$.

Вариант № 11.

1. Решить уравнение $\cos(1,5\pi + x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi) \cdot \cos x$.

2. Решить неравенство $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.

3. Найти критические точки функции $y = (5-x) \cdot 2^{-x}$.

Вариант № 12.

1. Решить уравнение $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4 \operatorname{tg} x$.

2. Решить неравенство $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| > 2$.

3. Найти критические точки функции $y = 2x^2 - \ln x$.

Вариант № 13.

1. Решить уравнение $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

2. Решить неравенство $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0$.

3. Найти y' , если $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Вариант № 14.

1. Решить уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2-3x}{x} \geq -1$.

3. Найти y' , если $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Вариант № 15.

1. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$.

2. Решить неравенство $\log_3 \frac{1-2x}{x} \leq 0$.

3. Найти y' , если $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Вариант № 16.

1. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -\frac{1}{2}$.
2. Решить неравенство $\log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$.
3. Найти y' , если $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$.

Вариант № 17.

1. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -\frac{1}{2}$.
2. Решить неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1$.
3. Найти y' , если $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x}$.

Вариант № 18.

1. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Решить неравенство $^x\sqrt[1]{3} > 9$.
3. Найти y' , если $y = \operatorname{tg} \sin x$.

Вариант № 19.

1. Решить неравенство $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$.
2. Решить уравнение $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$.
3. Найти y' , если $y = (x^3 + 1) \cos 2x$.

Вариант № 20.

1. Решить неравенство $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Решить уравнение $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$.
3. Найти y' , если $y = (x + 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

Вариант № 21.

1. Решить неравенство $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$.
2. Решить уравнение $4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$.

3. Найти y' , если $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}$.

Вариант № 22.

1. Решить неравенство $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$.

2. Решить уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

3. Найти y' , если $y = \lg \frac{10-x}{x+2}$.

Вариант № 23.

1. Решить неравенство $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}$.

2. Решить уравнение $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

3. Найти y' , если $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$.

Вариант № 24.

1. Решить неравенство $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Решить уравнение $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

3. Найти y' , если $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot (x^4 - 1)$.

Вариант № 25.

1. Решить неравенство $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) < \sqrt{3}$.

2. Решить уравнение $4^x - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$.

3. Найти y' , если $y = \sqrt[5]{2x^2 - 1}(x^3 + 2)$.

Вариант № 26.

1. Доказать, что при $p > 0$ и $q > 0$ $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$.

2. Решить уравнение $\log_2 3 \cdot \log_2 4 \cdot \dots \cdot \log_x(x+1) = 10$, $x \in N$.

3. Построить график $y = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

Вариант № 27.

1. Доказать, что для любых x и $y \in R$ верно:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0.$$

2. Решить уравнение $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

3. Построить график $y = \log_3 \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$.

Вариант № 28.

1. Доказать, что при $a \neq 2$ верно неравенство

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}.$$

2. Решить уравнение $\log_{2-2x^2}(2 - x^2 - x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2 - 2x^2)}$.

3. Построить график $y = \left| \log_2 \frac{x-4}{x^2-16} \right|$.

Вариант № 29.

1. Доказать, что для $a \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.

2. Решить уравнение $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$.

3. Построить график $y = \frac{x \sin 2|x|}{|x|}$.

Вариант № 30.

1. Доказать, что если m, n, p — длины сторон треугольника, то

$$m^2 + n^2 + p^2 < 2(mn + mp + np).$$

2. Решить уравнение $\sqrt{\log_2(2x^2)} \cdot \log_4(16x) = \log_4 x^3$.

3. Построить график $y = \left| |x|^2 - 7|x| + 6 \right|$.

Вариант № 31.

1. Доказать, что если $4b + a = 1$, то: $a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}$.

2. Решить уравнение $\frac{2}{\sqrt{3} \log_2 \sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} = 0$.

3. Построить график $y = 0,5 \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$.

Вариант № 32.

1. Доказать неравенство $\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{ab \cdot cd}$.

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$.

3. Построить график $y = x^2 - 7|x| + 6$.

Вариант № 33.

1. Доказать неравенство $\left(1 + \frac{y}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{z}\right) \geq 8$, если $x > 0$, $y > 0$,

$z > 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

3. Построить график $y = x^{\log_x 2}$.

Вариант № 34.

1. Доказать, что $\frac{a^2 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3$, если $a > 0$, $b > 0$.

2. Решить уравнение $\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x^2)}$.

3. Построить график $y = 2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$.

Вариант № 35.

1. Доказать, что $\sqrt[n]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[n]{2 - \sqrt{3}} > 2$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Решить уравнение

$$\lg^2(4 - x) + \lg(4 - x) \cdot \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

3. Построить график $y = \frac{(x-1)(x^2-4)}{|x-1|}$.

Вариант № 36.

1. Доказать неравенство $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$, $x \in R$, $y \in R$,

$x \neq 0$, $y \neq 0$.

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$.

3. Построить график $y = 2^{\log_2 x}$.

Вариант № 37.

1. Доказать, что при $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $d \in R$ имеет место неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4ab \cdot cd$.

2. Решить уравнение $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2$.

3. Построить график $y = |x - 2|(x + 2)$.

Вариант № 38.

1. Доказать, что при $a + b = 1$ справедливо неравенство $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

2. Решить уравнение $2 \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$.

3. Построить график $y = |\operatorname{tg} x|$.

Вариант № 39.

1. Доказать неравенство $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

2. Решить уравнение $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{(9x^2)} x^2 = 2$.

3. Построить график $y = \sqrt{10^{\lg 2x}}$.

Вариант № 40.

1. Доказать, что если $x - 1 > 0$, то $5(x - 1) < x^5 - 5x^4(x - 1)$.

2. Решить уравнение $\log_x 3 + \log_3 x^3 + 8 \log_{(9x^2)} x^2 = 2$.

3. Построить график $y = \log_2 \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Вариант № 41.

1. При условии $a + b + c = 1$ доказать:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

2. Решить уравнение $\log_2(2x^2) \cdot \log_2(16x) = \frac{9}{2} \log_2^2 x$.

3. Построить график $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

Вариант № 42.

1. Доказать, что если $a + b = 2$, то $a^4 + b^4 \geq 2$.

2. Решить уравнение $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg^2 x = 6$.

3. Построить график $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$.

Вариант № 43.

1. Доказать, что если $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 11x + 30) < 0$, то $\sin 2x > 0$.

2. Решить уравнение $\log_1^2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.

3. Построить график $y = \frac{2-x}{|x+1|} (x^2 - x - 2)$.

Вариант № 44.

1. Доказать, что при $m \geq 0$, $n \geq 0$ справедливо

$$mn(m+n) \leq m^3 + n^3.$$

2. Решить уравнение $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2$.

3. Построить график $y = \frac{x-1}{|x-3|} (x^2 - 9)$.

Вариант № 45.

1. Доказать, что при $x + y \geq 0$ верно неравенство

$$x^5 + y^5 - x^4 y - xy^4 \geq 0.$$

$$2. \text{ Решить уравнение } \log_2 3 + 2 \log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}.$$

$$3. \text{ Построить график } y = 5^{\frac{1}{3} \log_5 (x-1)}.$$

Вариант № 46.

$$1. \text{ Имеет ли уравнение } (2x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0 \text{ действительные корни?}$$

$$2. \text{ Решить неравенство } 0,5 \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} < 0,5.$$

$$3. \text{ Найти } f'(1), \text{ если } f(x) = x \cdot \sqrt[3]{3x^2 + 1}.$$

Вариант № 47.

$$1. \text{ Не решая уравнение } x^2 - 3x - 10 = 0, \text{ найти сумму кубов корней.}$$

$$2. \text{ Решить неравенство } 0 < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \leq 1.$$

$$3. \text{ Найти } f'(1), \text{ если } f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

Вариант № 48.

$$1. \text{ Решить графически уравнение } |x - 1| + 2x - 5 = 0.$$

$$2. \text{ Решить неравенство } -\frac{1}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$3. \text{ Найти } f'(0), \text{ если } f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x.$$

Вариант № 49.

$$1. \text{ Сколько корней имеет уравнение } x^2 = \sin 3x?$$

$$2. \text{ Решить неравенство } |x^2 - 5x| < 6.$$

$$3. \text{ Найти } f'(2), \text{ если } f(x) = 5(x + 1)^2 \cdot \sqrt{x - 1}.$$

Вариант № 50.

$$1. \text{ Найти целые корни уравнения } x^3 - |x - 1| = 1.$$

$$2. \text{ Решить неравенство } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) < \frac{1}{2}.$$

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2 - 2^{2x}}}$.

Вариант № 51.

1. При каком значении p сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + px + 35 = 0 \text{ равна } 74?$$

2. Решить неравенство $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$.

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \sin^2 x^2$.

Вариант № 52.

1. Имеет ли уравнение $x^3 + 2x - 3 = 0$ отрицательные корни? Почему?

2. Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2 - 5x + 8)} \leq 2,5$.

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$.

Вариант № 53.

1. Имеет ли уравнение $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} = 2$ действительные корни?

Почему?

2. Решить неравенство $\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100 - \log_{0,3}9} < 1$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

Вариант № 54.

1. Имеет ли действительные корни уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}$? Почему?

2. Решить неравенство $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$.

Вариант № 55.

1. Доказать, что $x = 1$ — единственный корень уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$.

2. Решить неравенство $0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

3. Найти $f'(2)$, если $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$.

Вариант № 56.

1. Не преобразуя уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 17$, показать, что оно не имеет корней.

2. Решить неравенство $0,3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$.

3. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{1}{2} \sin x \cdot \operatorname{tg} 2x$.

Вариант № 57.

1. Показать, что уравнение $\sin x + \sin 2x = 2$ не имеет корней.

2. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 16x + 21}{\log_{0,3}(x^2 + 4)} < 0$.

3. Найти $f'(\sqrt{2})$, если $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$.

Вариант № 58.

1. Показать, что уравнение $\sqrt{9-x^2} - \log_3(|x| - 3) = 0$ не имеет корней.

2. Решить неравенство $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) < \frac{1}{2}$.

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \lg \frac{10-x}{x+2}$.

Вариант № 59.

1. Решить уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

2. Решить неравенство $-1 \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$.

3. Найти $f'(2)$, если $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

Вариант № 60.

1. Не находя x и y в отдельности, вычислить $x^3y + xy^3$, если $x - y = 4, xy = 3$.

2. Решить неравенство $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Вариант № 61.

1. Вычислить $\log_{\frac{1}{2}} 28$, если $\log_7 2 = a$.

2. Решить неравенство $-1 \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) < \sqrt{3}$.

3. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \sin^3 \frac{x}{2}$.

Вариант № 62.

1. Вычислить $x = 0,8 \cdot \left(1 + 9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

2. Решить неравенство $-\sqrt{3} \leq \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Вариант № 63.

1. Найти $\lg^2 \sqrt{x}$, если $\log_x 100 = a$.

2. Решить неравенство $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Вариант № 64.

1. Вычислить $\lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 4^\circ + \lg \operatorname{ctg} 2^\circ + \lg \operatorname{ctg} 4^\circ$.

2. Решить неравенство $\frac{\log_5(x^2 + 3)}{4x^2 - 16x} < 0$.

3. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Вариант № 65.

1. Вычислить $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \dots \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

2. Решить неравенство $2^{\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4} \frac{5x}{2}} > 1$.

3. Найти $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x$.

Вариант № 66.

1. Вычислить $3^{\frac{1}{\log_2 9}} + \sqrt{\log_2 16}$.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\sqrt{3}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt[3]{x}}$.

Вариант № 67.

1. Вычислить $\log_2 64 - \frac{1}{\log_8 2}$.

2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x}}$.

Вариант № 68.

1. Вычислить $\sin 450^\circ + \cos 420^\circ$.

2. Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{2}{x} - 2\sqrt{x}$.

Вариант № 69.

1. Вычислить $\sin 780^\circ + \sin 390^\circ$.

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2x^3$.

Вариант № 70.

1. Вычислить $tg225^\circ \cdot \sin 390^\circ \cdot \cos 415^\circ$.

2. Решить уравнение $tg\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = 2 - \frac{2}{x^3} + 3x^4$.

Вариант № 71.

1. Вычислить $ctg225^\circ \cdot \cos 720^\circ \cdot \sin 450^\circ$.

2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{1}{2}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Вариант № 72.

1. Вычислить $tg415^\circ + \cos 780^\circ$.

2. Решить уравнение $ctg\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sqrt{3}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3$.

Вариант № 73.

1. Вычислить $\sin(-270^\circ) \cdot \cos 415^\circ$.

2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -\frac{1}{2}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = 3x - \frac{3}{x^2}$.

Вариант № 74.

1. Вычислить $\cos(-780^\circ) \cdot \sin(-415^\circ)$.

2. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$.

Вариант № 75.

1. Вычислить $\sin(-450^\circ) \cdot \cos(-720^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-225^\circ)$.

2. Решить уравнение $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Вариант № 76.

1. Упростить $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot x\sqrt{y\sqrt{y}}}{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[4]{y}}$.

2. Решить уравнение $\log_5 x + \log_x 5 = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

Вариант № 77.

1. Упростить $\frac{\sqrt[4]{x\sqrt{x}} \cdot y\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y}}$.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$.

Вариант № 78.

1. Упростить $\frac{\sqrt{x\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y\sqrt{x}}}{\sqrt{xy}}$.

2. Решить уравнение $2^x + 2^{-x} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$.

Вариант № 79.

1. Упростить $\frac{\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{y\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{xy}}$.

2. Решить уравнение $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Вариант № 80.

1. Упростить $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x\sqrt{y}}$.

2. Решить уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt[5]{x^4} - 2\sqrt{x}$.

Вариант № 81.

1. Упростить $\sqrt[3]{x^3\sqrt{y^2}} \cdot \sqrt[3]{y\sqrt[3]{x^2}}$.

2. Решить уравнение $2^{\sqrt{x}} + 2^{-\sqrt{x}} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$.

Вариант № 82.

1. Упростить $\left(\sqrt{a^3\sqrt{a^2b}}\right)^4$.

2. Решить уравнение $3^{2x} + \frac{1}{3^{2x}} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$.

Вариант № 83.

1. Сократить дробь $\frac{\left(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}}\right)^2}{a^{\frac{2}{m}} - a^{\frac{2}{n}}}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{\frac{x^2 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{x^2 + 2}} = 2$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.

Вариант № 84.

1. Сократить дробь $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

2. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 0$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.

Вариант № 85.

1. Сократить дробь $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab} + b}$.

2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

3. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.

**6 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ
ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ**

**Задание 1.1
Решить неравенства**

1. $\frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 1} \leq 2$

2. $\frac{1 - 2x - 3x^2}{3x - x^2 - 5} > 0$

3. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} < 1$

4. $\frac{x^2 - 9}{3x - x^2 - 24} < 0$

5. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0$

$$6. \frac{x^2 - 8x + 7}{4x^2 - 4x + 1} < 0$$

$$7. \frac{x^2 - 36}{x^2 - 9x + 18} < 0$$

$$8. \frac{x^2 - 6x + 9}{5 - 4x - x^2} \geq 0$$

$$9. \frac{3x - 5}{x^2 + 4x - 5} > \frac{1}{2}$$

$$10. \frac{2x + 3}{x^2 + x - 12} \leq \frac{1}{2}$$

Задание 1.2
Решить неравенства

$$1. \sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$$

$$2. \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$$

$$3. x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$$

$$4. 2x + 3 < \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

$$5. \sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$$

$$6. \sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$$

$$7. 2x + 3 < \sqrt{-2 - 3x - x^2}$$

$$8. x + 4 < \sqrt{-x^2 - 8x - 12}$$

$$9. \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$$

$$10. \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

Задание 1.3
Решить уравнения

$$1. x \cdot \sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^2 + 15} = 2$$

$$2. \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$$

3. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$
4. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$
5. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$
6. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$
7. $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$
8. $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$
9. $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x} + 3} = 2$
10. $\frac{3}{\sqrt{x+1} + 1} + 2\sqrt{x+1} = 5$

Задание 1.4
Решить уравнения

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$
2. $\frac{1}{1 - \sqrt{1-x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$
3. $\frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}$
4. $\frac{2 - \sqrt{x}}{2 - x} = \sqrt{\frac{2}{2-x}}$
5. $1 + \sqrt{1+x}\sqrt{x^2 - 24} = x$
6. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$
7. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$
8. $\sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x-2}}$
9. $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$
10. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$

Задание 1.5
Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6} \\ xy = 5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = -\frac{5}{2} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x^2 - xy = 28 \\ y^2 - xy = -12 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 63 \\ xy = 4 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy \\ y(x + y) = 10 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x^2 - 5xy = 16 \\ 2xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Задание 1.6
Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20 \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2} \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ xy = 27 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$$

Задание 2.1

Решить уравнения

1. $\lg 5 + \lg(x + 10) - 1 = \lg(21x - 20) - \lg(2x - 1)$
2. $2\log_4(4 - x) = 4 - \log_2(-2 - x)$

3. $\lg(5 - x) + \frac{1}{3} \lg(35 - x^3) = 0$
4. $\log_2 182 - 2 \log_2 \sqrt{5 - x} = \log_2(11 - x) + 1$
5. $\log_5(x - 2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3 - 2) + \log_{0,2}(x - 2) = 4$
6. $\frac{\lg(2x - 19) - \lg(3x - 20)}{\lg x} = -1$
7. $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) = 1$
8. $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2}$
9. $\log_5((x + 3)(x + 5)) + \log_{0,2}(x + 3) = 1,5 \log_{\sqrt{5}} 2$
10. $\log_2 x^2 + \log_2(x - 1)^2 = 2$

Задание 2.2
Решить уравнения

1. $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x + 1) = 3$
2. $2 \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x + 1} - 1)$
3. $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2$
4. $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0$
5. $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{(9x^2)} x^2 = 2$
6. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$
7. $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$
8. $\log_{x+3}\left(3 - \sqrt{1 - 2x + x^2}\right) = \frac{1}{2}$
9. $\log_{x+1}(x - 0,5) = \log_{x-0,5}(x + 1)$
10. $\lg^4(x - 1)^2 + \lg^2(x - 1)^3 = 25$

Задание 2.3

Решить уравнения

1. $2^{\log_5 x^2} - 2^{1+\log_5 x} + 2^{\log_5 x-1} - 1 = 0$
2. $7^x \left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$
3. $4^{2\log_8(2x-2)} \cdot 0,25^{\log_8(2x-3)} = \sqrt[3]{16}$
4. $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$
5. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$
6. $17 \cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}} - 8 = 2 \cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$
7. $3 \cdot 4^{\log_x 2} - 46 \cdot 2^{\log_x 2-1} = 8$
8. $2^{\log_5 x^2} - 2^{1+\log_5 x} + 2^{\log_5 x-1} - 1 = 0$
9. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$
10. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$

Задание 2.4

Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5 \\ \frac{3(x+y)}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = 8 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48 \\ 2\log_5(2y-x-12) - \log_5(y-x) = \log_5(x+y) \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 1 \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2^{y-2x} = 6,25 \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x} \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0,5^{y-3} \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2,5 \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$$

Задание 2.5

Решить неравенства

1. $\log_{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1 - 4 \log_{\frac{1}{2}}^2 x} < 1$
2. $\log_5(x-3) + \frac{1}{2} \log_5 3 \leq \frac{1}{2} \log_5(x^2 + 6x + 7)$
3. $\log_{\frac{1}{7}}((x+2)(4-x)) + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}}(4-x) > -2 \log_{49} 2$
4. $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \geq -2 \log_{\frac{1}{16}} 2 + \log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 3x + 8)$
5. $\log_{\frac{1}{4}} x^2 + \frac{1}{\log_{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)} \geq \log_{\frac{1}{2}} 2$
6. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{\log_{x^2-x} 8}$
7. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} \leq 0$

$$8. \log_{0,5} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \leq 0$$

$$9. \log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 6) \geq 0$$

$$10. \log_3 (\log_2 (2 - \log_4 x) - 1) < \log_3 3$$

Задание 2.6 Решить неравенства

$$1. 2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} - 0,01 \cdot (10^{x-1})^3 < 0$$

$$2. (0,25)^{2-\sqrt{5x+1}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}} \leq 0$$

$$3. 5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} > 0$$

$$4. 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} - 6 \cdot 4^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} \leq 0$$

$$5. 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} > 3$$

$$6. (\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} > 3 \cdot (0,125)^{-0,(6)-0,(3) \log_2 7}$$

$$7. \frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$$

$$8. 7^{x-\frac{x^2}{8}} < 7^{1-x} \cdot (\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6$$

$$9. \frac{24}{1-25^{-x}} \leq \frac{1}{5^{-x}-6}$$

$$10. 0,5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$$

Задание 3.1 Решить уравнения

$$1. \sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$$

$$2. \cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$$

$$3. \cos 2x + \cos 6x + 2 \sin^2 x = 1$$

$$4. \cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$$

$$5. \sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$$

6. $\sin^2(2 + 3x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos^2(2 - 5x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right)$
7. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right)$
9. $\sin \frac{7}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5}{2}x + \sin 2x \cdot \cos 7x = 0$
10. $\cos(x + 1) \cdot \sin[2(x + 1)] = \cos[3(x + 1)] \cdot \sin[4(x + 1)]$

Задание 3.2.
Решить уравнения

1. $2tg^4 3x - 3tg^2 3x + 1 = 0$
2. $ctgx - tgx + 2\left(\frac{1}{tgx + 1} + \frac{1}{tgx - 1}\right) = 4$
3. $\frac{ctg 2x}{ctgx} + \frac{ctgx}{ctg 2x} + 2 = 0$
4. $tg^4 x + ctg^4 x + tg^2 x + ctg^2 x = 4$
5. $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$
6. $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0$
7. $2 \sin 2x + 3tgx = 5$
8. $ctg^4 x = \cos^3 2x + 1$
9. $2 \sin x \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos x - 5 \cos^2 x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$
10. $3 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{x}{2}\right) + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} =$
 $= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos \frac{x}{2}$

Задание 3.3
Решить неравенства

1. $\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} - 2\operatorname{tg}2x - 4\operatorname{tg}4x > 8\sqrt{3}$
2. $4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x$
3. $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$
4. $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x < 1$
5. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3\operatorname{tgx}$
6. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$
7. $2\cos x \cdot (\cos x - \sqrt{8} \cdot \operatorname{tgx}) < 5$
8. $2 + \operatorname{tg}2x + \operatorname{ctg}2x < 0$
9. $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg}2x > 1$
10. $\sqrt{3} \cdot \cos^{-2} x < 4\operatorname{tgx}$

Задание 3.4
Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases} \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \operatorname{tgx} - \operatorname{tgy} = 2 \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x - y = \frac{13\pi}{2} \\ 3\cos^2 x - 12\cos y + 4 = 0 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{11}{16} \\ \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \sin(x - y) = 3 \sin x \cdot \cos y - 1 \\ \sin(x + y) = -2 \cos x \cdot \sin y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y \\ \cos x = \sin 2y \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2 \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -1,8 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

Задание 3.5

Доказать тождество

$$1. \frac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2 \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$2. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}{1 - \sin(3\alpha - \pi)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)$$

$$3. 1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right) \cdot \cos 4\alpha = 0$$

$$4. \frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$5. \frac{1 + \operatorname{ctg}\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$$

6. $\cos 4\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$
7. $\operatorname{tg} 4\alpha + \cos^{-1} 4\alpha = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$
8. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \cdot \operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha$
9. $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^{-1}\alpha$
10. $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$

Задание 4.1

- A1. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α . Найти радиус круга, описанного около трапеции.
- A2. В ромб вписана окружность радиуса R . Найти площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.
- A3. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.
- A4. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить радиус этого круга, если угол при основании трапеции равен 30° .
- A5. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n . Определить площадь трапеции.
- A6. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.
- A7. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 см.
- A8. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.
- A9. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2 . Найти площадь описанного круга.
- A10. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной равной 17 см. Найти основания трапеции.

- V1. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее на два треугольника с площадями Q и q . Найти катеты.
- V2. Основание равнобедренного треугольника равно a , угол при вершине равен α . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.
- V3. Найти отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании трапеции равны α и β .
- V4. Найти площадь правильного треугольника, вписанного в квадрат со стороной a , при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.
- V5. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина его высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания — 15 см.
- V6. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой 16 и 44 см, а непараллельные 17 и 25 см.
- V7. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD=24$ см, $BC=8$ см и диагоналей $AC=13$ см, $BD=5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.
- V8. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата отрезками прямых. Определить площадь внутреннего треугольника.
- V9. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $AD = 12$ см, $BC = 8$ см, на луче BC взята такая точка M , что AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти CM .
- V10. Площадь равнобедренного треугольника равна S , а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α . Найти основание.

Задание 4.2

- A1. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b , и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45° . Найти объем пирамиды.
- A2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.
- A3. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

- A4. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90° , а площадь основания равна S .
- A5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a . Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α . Найти объем призмы.
- A6. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α . Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ . Найти объем и боковую поверхность пирамиды.
- A7. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равные и составляет с прилежащими сторонами основания углы α и β . Найти объем пирамиды.
- A8. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α . Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β . Найти полную поверхность пирамиды.
- A9. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания a и середину ее высоты, наклонена к основанию под углом α .
- A10. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр равный p . Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α .
- B1. Высота конуса составляет с образующей угол α . Через вершину конуса проведена плоскость под углом $\beta \left(\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ к плоскости основания. Найти площадь сечения, если высота конуса равна h .
- B2. В усеченный конус вписан шар, объем которого в два раза меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.
- B3. Образующая конуса равна ℓ и составляет с высотой угол α . Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.
- B4. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен ℓ и составляет с плоскостью основания угол α . Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат.
- B5. Две вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на

- окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол α . Найти боковую поверхность цилиндра.
- B6. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади конуса равно k . Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k .
- B7. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c , его острый угол равен α . Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.
- B8. В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен R , угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α . Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.
- B9. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь основания в четыре раза больше площади другого основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.
- B10. Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к боковой поверхности.

Задание 4.3

- Даны векторы $\vec{a}(2; -3; 5)$, $\vec{b}(-1; 1; -3)$ и $\vec{c}(3; 7; 1)$. Найти координаты вектора $\vec{p}(x; y; z)$, если $\vec{p} \cdot \vec{a} = 12$; $\vec{p} \cdot \vec{b} = -6$; $\vec{p} \perp \vec{c}$ ($\vec{p} \cdot \vec{c} = 0$).
- Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат на одной плоскости и создают попарно друг с другом углы φ . Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 2$; $|\vec{c}| = 1$.
- Даны координаты вершин четырехугольника:
 $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 3; 1)$; $C(-1; 7; 3)$; $D(-1; 6; 5)$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.
- В треугольнике ABC дано: $\vec{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный и вычислить его площадь.
- Даны единичные векторы $\vec{m}, \vec{n}$ и $\vec{p}$ такие, что $\vec{m} \perp \vec{n}$, $\vec{n} \perp \vec{p}$ и $\vec{m}\vec{p} = 60^\circ$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$ и $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$.

6. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 56$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$.
7. Дан вектор $\vec{a}(1; -2; 5)$. Найти координаты вектора $\vec{b}$, размещенного на плоскости xOy и перпендикулярного к вектору $\vec{a}$, если $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.
8. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные в направлении координатных осей и $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти координаты углов вектора $\vec{a}$ с векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
9. Даны два вектора: $\vec{a}(x; 1; -1)$ и $\vec{b}(1; 0; 1)$. При каком значении x выполняется равенство $(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2$?
10. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, направленные в направлении координатных осей и $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\alpha\vec{k}, \vec{b} = \alpha^2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. При каких значениях α векторы перпендикулярны друг к другу?

Задание 5.1

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1}$; $f'(x) - ?$; $f'(1) - ?$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{1}{x+1}$; $f'(x) - ?$; $f'(1) - ?$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1}$; $f'(x) - ?$; $f'(0) - ?$
- $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - ?$
- $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$; $f'(x) - ?$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - ?$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2) - ?$
- $f(x) = 5(x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x-1}$; $f'(2) - ?$

$$8. \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} 2x; \quad f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = ?$$

$$9. \quad f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad f'(0) = ?$$

$$10. \quad f(x) = (x^2 - x) \cdot \cos^2 x; \quad f'(0) = ?$$

Задание 5.2

Составить уравнение касательной к графику функции в точке

$$1. \quad y = \frac{x^3 + 1}{3}; x = 1$$

$$2. \quad y = x \cdot (x - 4)^3; x = 1$$

$$3. \quad y = \frac{x - 4}{x - 2}; x = 1$$

$$4. \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x; x = 0$$

$$5. \quad y = x^3 + x^2 + x + 1; x = 1$$

$$6. \quad y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1; x = 1$$

$$7. \quad y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4; x = 1$$

$$8. \quad y = 2x^3 - x; x = 1$$

$$9. \quad y = x^3 - x^2 - 7x + 6; M_0(2; -4)$$

$$10. \quad y = x^2 \cdot e^{-x}; x_0 = 1$$

Задание 5.3

1. $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$. Доказать: $f(x)$ — убывает на всей области определения.

2. $f(x) = x + \sin x$. Доказать: $f(x)$ — возрастает в каждой точке оси OX .

3. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$. Доказать: $f(x)$ — возрастает на всей области

определения.

4. $y = \frac{x+5}{x-3}$. Доказать: y — убывает во всех интервалах области

определения.

5. $y = x^3 + 4x$. Доказать: y — возрастает на всей числовой прямой.

6. $f(x) = \cos x - 2x + q$. Доказать: $f(x)$ — убывает на всей числовой прямой.

7. $y = 2x + \sin x$. Доказать: y — возрастает на всей числовой прямой.

8. $y = x + \frac{1}{1+x}$. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

9. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

10. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

Задание 5.4

1. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = \frac{\ln x + 2}{x}$.

3. Найти точки экстремума функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

4. Найти точки экстремума функции $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

5. Найти точки экстремума функции $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

6. Найти экстремумы и указать промежутки возрастания и убывания функции $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

7. Найти экстремумы и указать промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

8. Найти экстремумы и указать промежутки возрастания и убывания функции $y = e^{-x} \cdot \sin x$.

9. Найти экстремумы и указать промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \ln(1 - 2x)$.

10. Найти экстремумы и указать промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{(x - 2) \cdot (x + 3)}{(x - 5)^2}$.

Задание 5.5

1. $f(x) = 0,5 \cdot \cos 2x + \sin x; \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

2. $f(x) = x + \cos^2 x; \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

3. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}; [-3; 3]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

4. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}; [2\sqrt{5}; 8]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

5. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin x; [0; \pi]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

6. $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}; [1; 6]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

7. $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}; [-5; -1]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

8. $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2; [-1; 1]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

9. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1; [-2; 1]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

10. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2; [-2; 2]$. Найти $f_{\min}$ и $f_{\max}$.

Анализ ошибок и трудностей, возникающих при сдаче вступительного экзамена по математике

В качестве основного затруднения можно назвать недостаток времени.

Имея незначительный опыт в решении задач, поступающие не успевают в отведенное время проанализировать и дать ответ на все предложенные вопросы. Поэтому при подготовке к экзамену следует обратить внимание на умение правильно распределять время, затрачиваемое на решение того или иного типа задач и на оформление работы. При решении задач необходимо быть предельно собранным, математически аккуратным и точным в вычислениях.

Следует помнить о самоконтроле, формы которого могут быть различными. Например, при решении квадратного уравнения, определив корни по основной формуле, проверить, удовлетворяют ли они теореме Виета; при решении неравенств проверить, удовлетворяют ли исходному неравенству отдельно взятые значения из найденной области решений и т.д.

Процесс решения любой задачи требует внимательного анализа, чтобы преобразования, используемые при решениях уравнений и неравенств, не привели к потере корней или получению посторонних корней.

Например, деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную величину, приводит к потере корня или решения. Пример: в простейшем неравенстве типа $\frac{1}{x-1} < 2$ умножение обеих частей на $x-1$ приводит к неправильному решению.

Возведение обеих частей уравнения или неравенства в четную степень приводит к появлению посторонних решений. В этих случаях необходима обязательная проверка решений.

Такие ситуации чаще всего встречаются при решении тригонометрических, логарифмических, иррациональных уравнений и неравенств. При решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств абитуриенты забывают о свойствах монотонности показательной и логарифмической функции, что и приводит к неправильным решениям.

Многие абитуриенты не могут использовать метод интервалов в решении неравенств как рациональных так и иррациональных. Например, при решении неравенства типа $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 - x} \leq 0$ переходят к рассмотрению двух систем неравенств, что нерационально и приводит к увеличению затрат времени на решение.

В решении уравнений и неравенств и их систем полезно использовать замену переменных, что существенно упрощает техническую часть решения.

Характерные трудности и ошибки в задачах с использованием производной функции состоят в дифференцировании сложной функции и в составлении самой функции в смысловых задачах на отыскание экстремальных значений.

При решении тригонометрических уравнений, тождеств, неравенств плохое знание основных тригонометрических формул и неумелое использование приводит к большой затрате времени. Для рационального решения таких задач в первую очередь необходимо осмыслить тип тригонометрического уравнения (неравенства) и выбрать правильный прием решения. При решении геометрических задач к ошибкам приводит неаккуратно выполненный чертеж, невнимательное прочтение условия задачи.

Целесообразно сначала ознакомиться с содержанием всего варианта. Выбрать задачу, тип и решение которой Вам понятны, решить ее до конца и переписать начисто, а затем приступить к решению следующей. Если задача вызвала затруднение в ходе решения, оставьте ее на некоторое время и возьмитесь за другую, а затем вернитесь к ней. Такая система позволит Вам рационально использовать предоставленное время.

Желаем Вам удачи.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Быков М.М., Дикарев В.А., Коба В.А., Мельников А.Ф., Шкляр Л.И.: Справ. пособие по математике для поступающих в вузы. — К., 1993.
2. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. — М.: Наука, 1987.
3. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. — М.: Наука, 1987.
4. Гусев В.А., Мордович А.Г.. Математика. — М.: Просвещение, 1990.
5. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. — М.: Наука, 1982.
6. Сборник конкурсных задач для поступающих во ВТУЗ / Под ред. М.И. Сканави. — М.: Высш. шк., 1988.
7. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. — М.: Наука, 1983.
8. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. — К.: Наук. думка, 1976.