УДК 01;03;04

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

А.А. АЛЕКСАНДРОВА, Ю.Н. АЛЕКСАНДРОВ

В работе обобщается метод интегральных уравнений решения краевых задачах линейной магнитной гидродинамики на случай диссипативных сред.

Ключевые слова: магнитогидродинамическое поле, диссипативная среда, разрывная функция.

ВВЕДЕНИЕ

Характер взаимодействия движущихся электропроводящих жидкостей и газов с магнитным полем определяется числом Рейнольдса $Rm = {Lu}/{\nu_m}$, где L и u – характерные длина и скорость, а $\nu_m = {c^2}/{4\pi\sigma^2}$ – коэффициент диффузии или магнитная вязкость. Наиболее ярко законы магнитной гидродинамики проявляются при $Rm >> 1$, т.е. в случае большой проводимости среды или ее больших размеров. Это условие выполняется для астрофизических объектов, а в лабораторных условиях – для горячей плазмы термоядерных устройств. Предельный случай $Rm \to \infty$, когда можно пренебречь диффузией магнитного поля и когда работает приближение идеальной магнитной гидродинамики, освещен достаточно хорошо в литературе. В этом случае влияние движения электропроводящей жидкости на магнитное поле допускает наглядную интерпретацию, указанную Альфвеном [1] и заключающуюся в том, что магнитные силовые линии как бы приклеены к частицам жидкости и увлекаются ими при движении. В реальных средах всегда присутствует вязкость, что приводит к новым эффектам и иной интерпретации магнитогидродинамических (МГД) явлений.

1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Магнитная гидродинамика изучает взаимодействие электромагнитного поля с жидким или газообразным проводником, рассматриваемым как сплошная среда, т.е. магнитная гидродинамика – это синтез таких наук, как электродинамика, гидродинамика и физика плазмы. Ее теоретический фундамент составляют классические уравнения электромагнитного поля и гидродинамические уравнения сплошной среды.

Один из методов решения краевых задач магнитной гидродинамики основывается на совместно написанных уравнениях Максвелла, движения и непрерывности в их дифференциальной форме. Специфика магнитной гидродинамики проявляется в том, что появляются дополнительные члены, отображающие влияние систем уравнений друг на друга. С одной стороны, при движении проводящей среды в магнитном поле возникают токи, которые должны быть учтены в уравнениях Максвелла, с другой стороны, воздействие магнитного поля на токи в среде приводит к дополнительной электромагнитной объемной силе, которую следует учесть в гидродинамике. В совокупности с граничными условиями задача приобретает сложный математический характер.

В дифракционных МГД задачах рассматриваются малые возмущения, проявляющиеся в результате взаимодействия электромагнитных и гидродинамических явлений при наличии магнитного поля. В этом случае так же, как и в электродинамике приходим к волновым процессам. Но в отличие от электродинамики эти процессы представляются суперпозицией волн различной физической природы (альфвеновские, магнитозвуковые ускоренные и замедленные и энтропийные волны). В определенных условиях каждый волновой процесс можно рассматривать как независимый. Однако при дифракции МГД волн на различных неоднородностях может происходить взаимная трансформация типов волн и краевая задача в простейших случаях становится достаточно сложной.

Существенное упрощение для определенного класса задач может быть достигнуто при использовании аппарата интегральных уравнений магнитной гидродинамики, полностью эквивалентных линеаризованным дифференциальным уравнениям магнитной гидродинамики, совместно с граничными условиями на границе с неоднородностью. Интегральная формулировка задачи более естественным образом включающая в себя начальные и граничные условия и обладающая значительно большей физической наглядностью, позволяет существенно упростить построение алгоритма решения краевых задач. Причем самосогласованность постановки состоит в том, что решение краевой МГД задачи рассматривается в лабораторной системе координат, в которой поверхность разрыва движется под действием падающего поля [3]

2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ

Если основные уравнения магнитной гидродинамики формулировать в интегральной форме, в которой непрерывность искомых функций (полей) по существу не подразумевается и которые обладают большей общностью для описания разрывных процессов, то построение кусочно-гладких решений для системы МГД дифференциальных уравнений приводит к теории обобщенных функций. При этом удовлетворение граничным и начальным условиям происходит, вообще говоря, автоматически. И один из характерных моментов вывода интегральных уравнений дифракции магнитной гидродинамики заключается во введении разрывных функций, описывающих среду как внутри, так и вне объекта дифракции.

В данной работе на основе этой идеи рассмотрен вывод интегральных уравнений магнитной гидродинамики в пространственно-временном представлении для МГД полей при общих предположениях относительно параметров МГД неоднородности. Под этими параметрами понимаются зависящие от времени форма объекта дифракции и свойства среды внутри этого объекта (неоднородности), которые в невозмущенном состоянии описываются параметрами: $\mathbf{B}_2$ – невозмущенное магнитное поле; V_{A2} – альфвеновская скорость; V_{S2} – звуковая скорость; ρ_2 – плотность; ν_m – магнитная вязкость; ζ,η – коэффициенты вязкости. Предполагается, что объект дифракции погружен в неограниченную однородную среду с соответствующими отличными от нуля параметрами $\mathbf{B}_1, V_{A1}$, V_{S1}, ρ_1, при этом $\nu_m = 0, \zeta = 0, \eta = 0$.

С учетом электропроводимости линеаризованное уравнение индукции имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{u},\mathbf{b}] + \nu_m \Delta \mathbf{b},\ \nu_m - const. \tag{1}$$

Здесь первый член справа описывает индукционный эффект движения магнитных силовых линий вместе со средой, а второй – диффузию магнитных силовых линий, способствующую выравниванию магнитного поля в различных точках пространства. (Отношение этих величин имеет порядок числа Рейнольдса Rm). В более общем случае учет диссипативных процессов определяется не только проводимостью σ, но и двумя коэффициентами вязкости ζ,η. При этом уравнение движения Эйлера заменяется уравнением Навье-Стокса

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -V_{S2}^2 \operatorname{graddiv} \mathbf{u} - \frac{1}{4\pi\rho_2}[\mathbf{B}_2, \operatorname{rot} \mathbf{b}] + \\ + \frac{\eta}{\rho_2}\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_2}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{gradiv} \mathbf{u}.\end{gathered} \tag{2}$$

С точки зрения волнового уравнения движения МГД среды уравнение (2) можно представить в виде

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_p,$$

где $\mathbf{F}_i$ – сила инерции; $\mathbf{F}_m$ – магнитная сила; $\mathbf{F}_j$ – сила вязкости; $\mathbf{F}_p$ – сила давления. Причем МГД эффекты будут наиболее существенными, когда в уравнении движения основной силой является магнитная сила $\mathbf{F}_m$.

Подчеркнем еще раз, что основным моментом при выводе интегральных уравнений является введение разрывных функций, описывающих единым образом среду внутри и вне неоднородности, именно это позволяет включить в уравнения условия для полевых функций на границах разрыва и в начальный момент времени. Поскольку на границе $S(t)$ неоднородности объема $V(t)$ параметры среды терпят разрыв, то введение разрывных функций удобно осуществить с помощью, так называемой характеристической функции, равной единице внутри области $V(t)$ и нулю вне области

$$\chi(\mathbf{r},\mathbf{t}) = \begin{cases} 1, \mathbf{r} \in (\mathbf{V}(t)) \\ 0, \mathbf{r} \notin (\mathbf{V}(t)) \end{cases}.$$

В этом случае удобно воспользоваться аппаратом обобщенных функций, для этого продолжим уравнения (1) и (2) на все рассматриваемое пространство следующим образом

$$\begin{gathered}V_{S1}^2 \operatorname{graddiv} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{rot}\frac{\partial b}{\partial t\,\mathbf{b}}, \frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1}\right] = \mathbf{F}, \\ \mathbf{F} = \chi\cdot\left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right)\operatorname{graddiv}\mathbf{u} + \\ +\chi\cdot\left[\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{4\pi\rho_2}\right] + \\ +\frac{\chi\eta}{\rho_2}\Delta\mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho_2}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{graddiv}\mathbf{u}; \\ \operatorname{rot}[\mathbf{u},\mathbf{B}_1] - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{Q} = \chi\cdot\operatorname{rot}[\mathbf{u},\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2] - \chi\cdot\nu_m\Delta\mathbf{b}.\end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что все классические дифференциальные операторы заменены на обобщенные по соответствующим правилам [2], например,

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}\varphi = (\operatorname{grad}\varphi) + \mathbf{n}\{\varphi\}_S \cdot \delta S(t); \\ \operatorname{div}\mathbf{a} = (\operatorname{dia}\mathbf{a}) + (\mathbf{n},\{\mathbf{a}\}_S)\cdot\delta S(t),\end{gathered}$$

где $(...)$ – обычная производная; $\delta S(t)$ – поверхностная дельта-функция; $\{\varphi\}_S$ – скачок величины φ на границе. (Аналогично записываются следующие дифференциальные операторы $\operatorname{rot}\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$).

Для упрощения изложения в данной работе рассматриваем приближение адиабатического «включения» на бесконечности. Это, с одной стороны, исключает учет эволюционного характера явления, который существенно связан именно с начальным моментом нестационарности и сопровождается переходными эффектами, исследование которых выходит за пределы данной статьи, а с другой, производная по времени $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ автоматически будет являться производной в обобщенном смысле слова.

После введения разрывных функций $\mathbf{F}, \mathbf{Q}$ и учитывая обобщенный смысл операций дифференцирования, уравнения (3) объединяются в одно обобщенное волновое уравнение магнитной гидродинамики

$$\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)\operatorname{graddiv}\mathbf{u}-\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-V_{A1}^2\mathbf{s}_1\left(\mathbf{s}_1,\operatorname{graddiv}\mathbf{u}\right)- \\ -V_{A1}^2\left[\mathbf{s}_1,\left(\mathbf{s}_1,\nabla\right)\operatorname{rot}\mathbf{u}\right]=\mathbf{W}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{W}=\mathbf{F}+\chi\left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1},\nu_m\operatorname{rot}\Delta\mathbf{b}-\operatorname{rotrot}\left[\mathbf{u},\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2\right]\right]+ \\ +\left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1},\left[\mathbf{n},\left\{\operatorname{rot}\left[\mathbf{u},\mathbf{B}_2\right]\right\}_S\delta S(t)+\left\{\nu_m\Delta\mathbf{b}\right\}\delta S(t)\right]\right].$$

В рассматриваемой МГД среде имеются поверхности разрыва полевых функций, поэтому на них должны выполняться следующие граничные условия: непрерывность массы $\{\rho u_n\}=0,$ импульса $\{\pi_{in}\}=0,$ потока энергии $\{W_n\}=0,$ тангенциальной составляющей электрического поля $\{\mathbf{E}_\tau\}=0$ и нормальной составляющей магнитного поля $\{\mathbf{B}_n\}=0.$

Выбрав, например, в качестве $z=0$ плоскость, касательную к поверхности разрыва, граничные условия можем, в частности, представить в развернутом виде, выпишем для примера некоторые из них:

$$\left\{\rho\left(u_z-u_S\right)\right\}_S=0,\ \left\langle B_z+b_z\right\rangle_S=0,$$

$$\left\{u_xB_z-\left(u_z-u_S\right)B_x\right\}_S=0 \text{ и т.д.}$$

Перечисленные граничные условия записаны в лабораторной системе отсчета, в которой поверхность разрыва, перпендикулярная оси Oz движется вдоль этой оси со скоростью u_S под действием возмущения, т.е. рассматривается задача в самосогласованной постановке [3].

Отметим, что уравнение (4) описывает поле во всем рассматриваемом пространстве, так как в нем уже учтены граничные условия на поверхности разрыва полевых функций, кроме того, в уравнении присутствуют поверхностные слагаемые.

Считая, что правая часть (4) ограничена по пространственным и временным переменным, общее решение этого уравнения можем записать в виде свертки

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\hat{G}*\mathbf{W}, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}_0$ общее решение соответствующего однородного уравнения; $\hat{G}$ – функция Грина, являющаяся фундаментальным решением уравнения (4), т.е. функция, удовлетворяющая следующему уравнению с δ-образной правой частью

$$\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)\operatorname{graddiv}\hat{G}-\frac{\partial^2\hat{G}}{\partial t^2}-V_{A1}^2\mathbf{s}_1\left(\mathbf{s}_1,\operatorname{graddiv}\hat{G}\right)- \\ -V_{A1}^2\left[\mathbf{s}_1\left(\mathbf{s}_1,\nabla\right)\operatorname{rot}\hat{G}\right]=\hat{\varepsilon}\delta\left(t-t'\right)\delta\left(\mathrm{r}-\mathrm{r}'\right),$$

здесь $\hat{\varepsilon}$ – аффинор.

Эта функция, найденная в [4], представлена в виде

$$\hat{G}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)=\hat{G}\cdot I\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right). \tag{6}$$

Здесь дифференциальный оператор $\hat{G}$ записан в базисе $\left\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right\rangle$, который непосредственно связан с невозмущенным магнитным полем, так как $\mathbf{e}_2=\mathbf{s}_1=\mathbf{B}_1/B_1$, что подчеркивает анизотропный характер задачи. Сам оператор представляет собой матрицу $\hat{G}=\left\|G_{ij}\right\|_{i,j=1,2,3}$, для краткости выпишем один из ее элементов:

$$G_{11}=\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+ \\ +V_{A1}^2V_{S1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right).$$

А интегральный оператор $I\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)$ имеет вид обратных преобразований Фурье-Лапласа:

$$\hat{\mathbf{I}}=\hat{\mathbf{I}}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)= \\ =\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty+i\sigma_0}^{\infty+i\sigma_0}e^{-q(t-t')}dq\iiint_\infty\frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\delta(q,\mathbf{p})\cdot\Delta(q,\mathbf{p})}\mathbf{dp},$$

здесь

$$\delta(q,\mathbf{p})=q^2-V_{A1}^2\left(\mathbf{p},\mathbf{s}_1\right)^2, \\ \Delta(q,\mathbf{p})=q^4-\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)q^2p^2+V_{S1}^2V_{A1}^2\left(\mathbf{p},\mathbf{s}_1\right)^2. \tag{7}$$

Величина $\mathbf{u}_0$ в (5) имеет смысл поля в среде в отсутствие неоднородности $V(t)$, т.е. в терминах дифракции это есть поле падающей волны.

Поскольку свертка является интегральной операцией, уравнение (5) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение относительно $\mathbf{u}$. Входящую в (5) магнитную индукцию $\mathbf{b}$ всегда можно выразить через $\mathbf{u}$ с помощью второго уравнения (3).

Хотя уравнение (5) и определено во всем пространстве определения поля $\mathbf{u}$, интегрирование в нем ограничено областью $V(t)$, задаваемой характеристической функцией $\chi(t,\mathbf{r})$. Следовательно, соотношение (5) представляет собой квадратурную формулу, позволяющую вычислить внешнее поле по предварительно найденному внутреннему. Таким образом, согласно основной идеи работы [4] задача дифракции разбивается на два этапа: нахождение внутреннего поля путем решения интегрального уравнения (5); вычисление внешнего поля по найденному внутреннему с помощью того же интегрального соотношения (5).

Построенное фундаментальное решение (6) позволяет записать интегро-дифференциальное уравнение (5) в замкнутой форме. Записывая явно свертку в виде интеграла и используя основное свойство свертки, позволяющее перенести дифференцирование со вторых множителей на функцию Грина, получаем уравнение относительно $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\left(V_{S1}^2-V_{S2}^2-\frac{3\zeta+\eta}{3\rho_2}\right)\hat{G}\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{I}+\\+V_{A1}^2\hat{G}\left(\mathbf{s}_1,\mathrm{rotrot}\left(\mathbf{s}_1-\frac{B_2}{B_1}\mathbf{s}_2,\mathbf{I}\right)\right)-\\-\frac{\hat{G}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1-\frac{B_1}{B_2}V_{A2}^2\mathbf{s}_2,\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{I}\right]+\\+\hat{G}\nu_m\frac{V_{A1}^2}{B_1}\left[\mathbf{s}_1,\mathrm{rot}\ \Delta\mathbf{I}\right]+\frac{\eta}{\rho_2}\hat{G}\Delta\mathbf{I}+\\+\frac{1}{4\pi\rho_1}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{(S(t))}\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times\\\times\left[\mathbf{B}_1,\left[\mathbf{n},\left(\left\{\mathrm{rot}\left[\mathbf{u},\mathbf{B}_2\right]\right\}_S+\left\{\nu_m\Delta\mathbf{b}\right\}_S\right)\right]\right]dS,\end{aligned}\qquad(8)$$

здесь

$$\mathbf{I}=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_{(V(t'))}\mathbf{u}(\mathbf{r}',t')\cdot\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')d\mathbf{r}',$$

$\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности $S(t)$.

Очевидно, что уравнение (8) по своей структуре ничем не отличается от соответствующих интегральных уравнений магнитной гидродинамики [3], и поверхностные интегралы, появляющиеся в результате учета деформации границы, выражаются через составляющие внутреннего поля $\mathbf{u}^{in},\mathbf{b}^{in}$.

При этом уравнение (8) является нестационарным интегральным уравнением линейной магнитной гидродинамики, записанным в лабораторной системе координат. С помощью этого уравнения и решаются краевые задачи магнитной гидродинамики в самосогласованной постановке. Это понимается в том смысле, что в задачах о дифракции или обтекании МГД неоднородности происходит описываемое скоростью u_S возмущение поверхности, ограничивающей МГД неоднородность. Интегральная формулировка задачи позволяет найти это возмущение по следующему алгоритму.

На первом этапе согласно принципу погашения в магнитной гидродинамике [4] падающая волна $\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t)$ гасится в любой точке внутри неоднородности в результате интерференции создаваемого ею поля с полем диполей. При этом появляется новая волна (одна или более) с иной скоростью распространения (в общем случае и с иным направлением распространения), что позволяет найти полностью внутреннее поле. В этом случае основное уравнение распадается на группы, каждое из которых описывает волну, распространяющуюся со своей скоростью, что с математической точки зрения приводит к ряду тождеств, откуда и находятся все параметры внутреннего поля.

На втором этапе по уже найденному внутреннему полю находим рассеянное поле с помощью квадратурных формул (8), наконец, на третьем этапе выражаем поверхностную скорость.

Заметим, что при решении краевой задачи МГД волн в дифференциальной постановке граничные условия могут удовлетворяться либо волнами одной и той же моды, либо для их удовлетворения требуется привлечение нескольких мод (имеется в виду МГД волны: альфвеновские, магнитозвуковые ускоренные или замедленные, альфвеновсие волны сжатия и т.д.). При интегральной постановке этот непростой вопрос решается автоматически. Механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны индуцированных источников, приводящих к излучению новых (вторичных) волн, интерференция которых и дает требуемые моды колебаний. Определенные преимущества рассматриваемого подхода, который в ряде случаев оказывается мощнее подхода, в основе которого лежат дифференциальные уравнения, заключается в том, что метод интегральный уравнений имеет более глубокую физическую наглядность. Он связывает макроскопические явления в МГД среде с молекулярными явлениями, при условии, что молекулы, составляющие МГД неоднородности, ведут себя в поле падающей волны подобно диполям.

3. КРАЕВАЯ МГД ЗАДАЧА НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ ДИССИПАТИВНЫХ СРЕД

Рассмотрим на основе выработанного алгоритма модельную задачу взаимодействия МГД поля с плоской границей раздела, что даст возможность изучить в наиболее отчетливом виде некоторые характерные особенности распространения волн в диссипативных средах. Влияние диссипации проиллюстрируем, когда единственной ее причиной будет являться электрическое сопротивление, это тот случай, когда из диссипативных коэффициентов только магнитная вязкость ν_m отлична от нуля.

Итак, имеем пакет невозмущенных плоских МГД волн

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}_0^{(j)}\exp(-i\,\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}),\qquad(9)$$

входящих в среду, заполняющую полупространство $z>0$, параметры которой равны:

$$V_{A2},V_{S2},\nu_m,\mathbf{B}_2=\left\{B_{2x},B_{2y},B_{2z}\right\}.$$

В пакет (9) входят волны: альфвеновская ($j=1$), ускоренная ($j=2$) и замедленная ($j=3$) магнитозвуковые. В качестве пробного решения для прошедшего поля в полупространство $z>0$ выберем суперпозицию соответствующих волн

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right). \qquad (10)$$

Зависимость от времени рассматривается как $\exp(iwt)$.

В силу линейности исходных дифференциальных уравнений скорость движения поверхности раздела $\mathbf{u}_S$, по-видимому, будет также представлена в виде соответствующей суперпозиции волн

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{r})=\sum_{m=1}^{3}\left[\mathbf{u}_S^{(m)}\exp(-i\mathbf{k}_0^{(m)}\mathbf{r})+\tilde{\mathbf{u}}_S^{(m)}\exp(-i\mathbf{k}^{(m)}\mathbf{r})\right]. \qquad (11)$$

Подставив (10) в подынтегральные выражения уравнения (8), получим интегралы типа $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$, первый из которых равен

$$\mathbf{I}_1(\mathrm{r})=\iiint_{(V)}\mathbf{u}(\mathbf{r}')I(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}'=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^{(j)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-ik_x^{(j)}x-ik_y^{(j)}y+ip_z z\right]}{\left(p_z+k_z^{(j)}\right)\cdot\Delta^j\cdot\delta^j}dp_z,$$

где $\Delta(\omega,\mathbf{p}),\delta(\omega,\mathbf{p})$ определяются соотношениями (7).

Для дальнейшего существенно, что тангенциальные составляющие волновых векторов $\mathbf{k}^{(j)}$ непрерывны, тогда

$$\begin{aligned}\Delta^{(j)}&=\omega^4-[\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)\omega^2-V_{A1}^2V_{S1}^2(-k_{0x}^{(j)}s_{1x}-\\&-k_{0y}^{j}s_{1y}+p_z s_{1z})^2]\left(-\left(k_{0x}^{(j)}\right)^2-\left(k_{0y}^{(j)}\right)^2+p_z^2\right);\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\delta^{(j)}=\omega^2-V_{A1}^2\left(-k_{0x}^{(j)}s_{1x}-k_{0y}^{(j)}s_{1y}+p_z s_{1z}\right)^2. \qquad (13)$$

Отсюда видно, что $\Delta^{(j)},\delta^{(j)}$ есть не что иное, как дисперсионные уравнения для магнитозвуковых (12) и альфвеновских (13) волн, если положить $p_z=-k_{0z}^{(j)}, j=2,3$ для (12) и $p_z=-k_{0z}^{(j)}, j=1$ для (13), т.е. $\Delta^{(j)}=0$ обращается в нуль при $p_z=-k_{0z}^{(2)};-k_{0z}^{(3)}$, а $\delta^{(j)}=0$ при $p_z=-k_{0z}^{(1)}$.

Таким образом, подынтегральная функция $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$ имеет простые полюса при

$p_z=-k_z^{(j)}, j=\overline{1,3};$ а также при $p_z=-k_{0z}^{(j)}, j=\overline{1,3}$, лежащие в верхней полуплоскости комплексной плоскости p_z. Тогда согласно теореме о вычетах интеграл равен:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{r})=\sum_m \mathbf{Res}f\left(p_{zm}\right),$$

где $f\left(p_z\right)$ – подынтегральная функция $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$. Найдя вычеты, в результате получим

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^{(j)}\left(\frac{\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right)}{\Delta\left(\mathbf{k}^{(j)}\right)\delta\left(\mathbf{k}^{(j)}\right)}+\frac{\exp\left(-i\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}\right)}{\left(k_z^{(j)}-k_{0z}^{(j)}\right)\cdot\mathbf{\Omega}^{(j)}}\right),$$

где

$$\mathbf{\Omega}^{(1)}=2\omega V_{A1}s_{1z}\cdot\Delta\left(\mathbf{k}_0^{(1)}\right);$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}^{(j)}&=2\delta\left(\mathbf{k}_0^{(j)}\right)\{\left(V_{A1}^2+V_{S1}^2\right)\omega^2k_{0z}^{(j)}+\\&+V_{A1}^2V_{S1}^2\left(k_{0z}^{(j)}-s_{1z}\left(\mathbf{k}_0^{(j)},\mathbf{s}_1\right)\right)\},\ j=2,3.\end{aligned}$$

Интегралы типа $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$ запишем в виде

$$\mathrm{I}_2(\mathrm{r})=\int_{(\infty)}\mathbf{u}(\mathbf{r}')I(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta S(t)d\mathbf{r}'.$$

Используя очевидное свойство обобщенной поверхностной функции δS, называемой простым слоем на поверхности S с плотностью μ, а именно

$$(\mu\cdot\delta S,\varphi)=\int_{(S)}\mu(x)\varphi(x)dS;$$

$$\mu\cdot\delta S=0,\ x\notin(S),$$

получим

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r})=\int_{(S)}\mathbf{u}(\rho')I(\rho-\rho')dS=$$

$$=i\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^{(j)}\frac{\exp\left(-i\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}\right)}{\mathbf{\Omega}^{(j)}}.$$

Следовательно, интегральные слагаемые $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$ представляют собой набор шести волн, имеющих различные зависимости от координат

$$\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right),\ \exp\left(-i\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}\right),_{j=\overline{1,3}}.$$

Подставив $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$ в исходное интегральное уравнение, получим тождество, справедливое для всех внутренних точек области

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right)&=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}_0^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}\right)+\\&+\sum_{j=1}^{3}\hat{\mathbf{A}}_j\,\mathbf{u}^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right)+\\&+\sum_{j=1}^{3}\hat{\mathbf{C}}_j\,\mathbf{u}_0^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}_0^{(j)}\mathbf{r}\right),\mathbf{r}\in\mathbf{V},\end{aligned} \qquad (14)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_j,\hat{\mathbf{C}}_j$ – результат действия дифференциальных операторов в исходном интегральном уравнении на соответствующую экспоненту.

Следует заметить, что для прозрачности изложения интегралы $\mathbf{I}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{I}_2(\mathbf{r})$ были вычислены при условии $k_{0x}^{(1)}\neq k_{0x}^{(2)}\neq k_{0x}^{(3)},k_{0x}^{(1)}\neq k_{0x}^{(2)}\neq k_{0x}^{(3)}$, которое преднамеренно исключает трансформацию одного типа МГД волны в волну другого типа, что представляет интерес для самостоятельного исследования. Это явление, описанное в [5] в случае недиссипативных сред, происходит в точках совпадения фазовых скоростей двух или более волн.

При рассмотрении тождества (14) вступает в силу принцип погашения в магнитной гидродинамике [6], который обусловлен физикой явления и является дальнейшим обобщением теоремы Озеена-Эвальда. Согласно этому принципу механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны индуцированных источников. Эти источники приводят к излучению новых (вторичных) волн, интерференция которых и дает требуемые моды колебаний. Математически вторичные волны описываются в интегральном уравнении интегральными слагаемыми справа. Именно здесь и проявляются определенные преимущества интегрального подхода перед методом, в основе которого лежат дифференциальные уравнения. Это связано в первую очередь с тем, что в интегральном методе непосредственно переплетаются макроскопические явления с молекулярными, при этом молекулы, составляющие МГД-неоднородности, ведут себя в поле падающей волны подобно диполям.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Итак, поле МГД диполей (интегральные слагаемые в уравнении поля) представляется в виде суммы двух групп слагаемых, одни из которых удовлетворяют уравнению поля во внешней среде, т.е. имеют характер падающего поля $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$, тогда как другие удовлетворяют уравнениям поля внутренней среды. Таким образом, падающая волна в точности гасится в любой точке внутри среды в результате интерференции создаваемого ею поля с полем диполей, при этом появляется новая волна с иной скоростью распространения $\mathbf{k}^{(j)}$. Отсюда следует, что члены тождества (13), изменяющиеся по закону $\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right)$, образуют равенства

$$\mathbf{u}^{(j)}\exp\left(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}\right)=\hat{\mathbf{A}}_j\,\mathbf{u}^{(j)}\exp(-i\mathbf{k}^{(j)}\mathbf{r}),\ j=\overline{1,3}$$

и взаимно сокращаются, если $\mathbf{k}^{(j)}$ удовлетворяют дисперсионным уравнениям для альфвеновских (15) и магнитозвуковых (16) волн

$$\omega^2-(k^{(1)})^2\left[V_{A1}^2\left(\mathbf{s}_2,\mathbf{n}^{(1)}\right)^2+i\omega\nu_m\right]=0,\quad \mathbf{n}^{(1)}=\mathbf{k}^{(1)}\big/k^{(1)}; \tag{15}$$

$$\omega^4-\omega^2\left(k^{(j)}\right)^2\left(V_{A2}^2+V_{S2}^2\right)+V_{A2}^2V_{S2}^2\left(k^{(j)}\right)^2\left(\mathbf{k}^{(j)},\mathbf{s}_2\right)^2+ +i\omega\nu_m\left(k^{(j)}\right)^2\left(\left(k^{(j)}\right)^2V_{S2}^2-\omega^2\right)=0,\ j=2,3. \tag{16}$$

Падающее же поле гасится полем вторичных волн, отсюда имеем уравнения для нахождения амплитуд прошедшего поля

$$\mathbf{u}_0^{(j)}(\mathbf{r})+\hat{\mathbf{C}}^j\,\mathbf{u}^{(j)}\exp(-i\mathbf{k}_0^{(j)},\mathbf{r})=0.$$

Направления распространения преломленных волн находим из условия трансляционной симметрии относительно осей *Ox, Oy*

$$k_{0x}^{(j)}=k_x^{(j)},\quad k_{0y}^{(j)}=k_y^{(j)},\quad j=\overline{1,3},$$

откуда закон преломления для альфвеновских волн имеет вид

$$V_{A1}^2\left[s_{1x}+s_{1y}tg\varphi_1^A+s_{1z}\frac{ctg\theta_1^A}{cos\varphi_1^A}\right]^2= =V_{A2}^2\left[s_{2x}+s_{2y}tg\varphi_2^A+s_{2z}\frac{ctg\theta_2^A}{cos\varphi_2^A}\right]^2+\frac{i\omega\nu_m}{\cos^2\varphi_2^A\sin^2\theta_2^A};$$

$$V_{A1}^2\left[s_{1y}+s_{1x}ctg\varphi_1^A+s_{1z}\frac{ctg\theta_1^A}{sin\varphi_1^A}\right]^2= =V_{A2}^2\left[s_{2y}+s_{2x}ctg\varphi_2^A+s_{2z}\frac{ctg\theta_2^A}{sin\varphi_2^A}\right]^2+\frac{i\omega\nu_m}{\sin^2\varphi_2^A\sin^2\theta_2^A};$$

где φ_1^A,θ_1^A — сферические углы волнового вектора падающей альфвеновской волны, φ_2^A,θ_2^A — аналогичные углы преломленной волны.

Закон преломления для магнитозвуковых волн имеет соответствующий вид

$$Q_1^{\pm}\cos\varphi_1^{\pm}\sin\theta_1^{\pm}=Q_2^{\pm}\cos\varphi_2^{\pm}\sin\theta_2^{\pm}, \tag{17}$$

$$Q_1^{\pm}\sin\varphi_1^{\pm}\sin\theta_1^{\pm}=Q_2^{\pm}\sin\varphi_2^{\pm}\sin\theta_2^{\pm},$$

где

$$Q_j^{\pm}=\frac{\mathbf{\Omega}_j\pm\sqrt{\mathbf{\Omega}_j^2-4\left(V_{Aj}^2V_{Sj}^2\left(\mathbf{n}_j\mathbf{s}_j\right)^2+i\omega\nu_mV_{Sj}^2\right)}}{V_{Aj}^2V_{Sj}^2\left(\mathbf{n}_j\mathbf{s}_j\right)^2+i\omega\nu_mV_{Sj}^2},$$

$$\mathbf{\Omega}_j=V_{Aj}^2+V_{Sj}^2+i\omega\nu_m, \tag{18}$$

$$\left(\mathbf{n}_j\mathbf{s}_j\right)=(s_{jx}\cos\varphi_j^{\pm}+s_{jy}\sin\varphi_j^{\pm})\sin\theta_j^{\pm}+s_{jz}\cos\theta_j^{\pm},\quad j=1,2;$$

здесь $\varphi_1^{\pm},\theta_1^{\pm}$ — сферические углы падения для магнитозвуковых ускоренной (+) и замедленной (-) волн и аналогично углы преломления $\varphi_2^{\pm},\theta_2^{\pm}$ для этих волн.

Закон преломления (17) по общему виду напоминает известный закон Снеллиуса, однако $Q_j^{\pm}$ зависят не только от величин, характеризующих среды, но и от углов падения и преломления.

Рассмотрим влияние магнитной вязкости на распространение МГД волн. Из дисперсионного уравнения (15) получим волновое число для альфвеновской волны

$$k_A=\omega\Big/\sqrt{V_{A2}^2\left(\mathbf{n}_2,\mathbf{s}_2\right)^2+i\omega\nu_m},\quad \mathbf{n}_2=\mathbf{k}_A/k_A. \tag{19}$$

Рассмотрим случай малой вязкости, т.е. когда выполняется условие $\omega\nu_m<<V_{A2}^2\left(\mathbf{n}_2,\mathbf{s}_2\right)$. Разлагая

выражение (19) в ряд по степеням ν_m и ограничиваясь линейными членами, имеем

$$k_A = \frac{\omega}{V_{A2}(\mathbf{n}_2, \mathbf{s}_2)} - \frac{i\omega^2\nu_m}{2V_{A2}^2(\mathbf{n}_2, \mathbf{s}_2)^3}.$$

При этом длина затухания волны $\delta = 1/\mathrm{Im}\,k_A$ будет равна $\delta = 2V_{A2}^2(\mathbf{n}_2, \mathbf{s}_2)/\omega^2\nu_m$. Если же магнитное поле отсутствует, длина затухания примет вид $\delta = c/(2\pi\sigma\omega)^{1/2}$, т.е. равняется глубине проникновения при скин-эффекте.

Для магнитозвуковых волн волновое число имеет вид $k^{\pm} = \omega Q^{\pm}/\sqrt{2}$, где $Q^{\pm}$ определяется соотношением (18). Скорость распространения $V^{\pm} = \omega/\mathrm{Re}\,k^{\pm}$ так же, как для альфвеновских волн явно зависит от частоты.

Рассмотрим для магнитозвуковых волн случай вырождения, когда волна распространяется вдоль магнитного силового поля $\mathbf{n}_2\mathbf{s}_2 = 1$. С учетом малости ν_m получим, что при $V_{A2} > V_{S2}$ замедленная магнитозвуковая волна превращается в звуковую, т.е. становится такой же, как и в отсутствие магнитного поля. Ускоренная же волна имеет волновое число

$$k^{+} = \frac{\omega}{V_{A2}}\left(1 - \frac{i\omega\nu_m}{2V_{A2}^2}\right),$$

При этом скорость ускоренной магнитозвуковой волны

$$V^{+} = V_{A2}\sqrt{2} \Big/ \sqrt{1 + \sqrt{1 + \omega^2\nu_m^2 V_{A2}^{-4}}}$$

при повышении частоты уменьшается, и глубина проникновения, равная $\delta = \dfrac{2V_{A2}^3}{\omega^2\nu_m}$, также уменьшается, т.е. поглощение волны с ростом частоты возрастает. Если же $V_{A2} < V_{S2}$, то все происходит с точностью до наоборот.

В отсутствие магнитного поля при наличии диссипации волновое число имеет вид

$$k^2 = \omega\frac{V_{S2}^2 + i\omega\nu_m - \sqrt{V_{S2}^4 - \omega^2\nu_m^2 - 2i\omega\nu_m V_{S2}^2}}{2i\nu_m V_{S2}^2},$$

однако при малых ν_m волна вырождается в обычную звуковую волну.

Итак, рассмотренное явление зависимости от частоты скорости распространения как альфвеновской, так и магнитозвуковых волн, а также их поглощение, свидетельствует о наличии дисперсии, т.е. о наличии дисперсионных сред. Иначе говоря, сигнал, передаваемый в этой среде, будет искажаться, поскольку отдельные гармоники, на которые можно разложить сигнал, будут распространяться с отличной друг от друга скоростью и поглощаться по-разному. Импульс в такой среде будет «расплываться», т.е. терять свои первоначальные очертания.

Следует заметить, что в общем случае затухание МГД волн зависит не только от параметров среды, но и от направления ее распространения по отношению к невозмущенному магнитному полю, что характерно именно для магнитной гидродинамики.

В заключение рассмотрим функцию распространения альфвеновской преломленной волны (для краткости записи запишем двумерную задачу)

$$f_A(y,z) = \exp\left[-i\left(y\tilde{\beta}_{Ay} + z\tilde{\beta}_{Az}\right)\right],$$

здесь коэффициент распространения вдоль оси Oz: $\tilde{\beta}_{Az} = k_{A2}\cos\theta_{A2}$ и коэффициент распределения амплитуд в фазовой плоскости $z = const$: $\tilde{\beta}_{Ay} = k_{A2}\sin\theta_{A2}$. В данном случае k_{A2}, определяемое соотношением (19), является комплексной величиной и представляет собой комплексный коэффициент распространения во второй среде.

Согласно трансляционной симметрии тангенциальные составляющие фазы в обеих средах – величины действительные, т.е.

$$\tilde{\beta}_{Ay} = k_{A1}\sin\theta_{A1} = k_{A2}\sin\theta_{A2}.$$

Очевидно, что $\sin\theta_{A2}$ – комплексная величина, сопряженная с k_{A2}, отсюда угол θ_{A2} – комплексный (не имеющий геометрического смысла).

Так как составляющая фазовой скорости в направлении оси Oz: $k_{A2}\cos\theta_{A2}$ – комплексное число; положим $k_{A2}\cos\theta_{A2} = \beta_{Az} - i\alpha_{Az}$. Тогда функция распределения примет вид

$$f_A(y,z) = \exp(-\alpha_{Az}z)\exp\left[-i\left(y\beta_{Ay} + z\beta_{Az}\right)\right].$$

Итак, волна затухает лишь в направлении *Oz*. Поверхности одинаковой фазы будут плоскостями $z = const$, параллельными плоскости раздела. Поверхности одинаковых фаз определяются уравнением $\beta_{Ay}y + \beta_{Az}z = const$ и не совпадают с поверхностями одинаковых амплитуд.

Уравнение поверхности одинаковых фаз нетрудно записать исходя из геометрических соображений $y\sin\tilde{\theta}_A + z\cos\tilde{\theta}_A = const$, здесь $\tilde{\theta}_A$ – уже фактический угол преломления, причем плоскости постоянной действительной фазы являются плоскостями, нормали которых образуют угол $\tilde{\theta}_A$ с нормалью к поверхности границы. Естественно приходим к неоднородной волне, у которой поверхность постоянной амплитуды и поверхность постоянной фазы не совпадают друг с другом. Очевидно,

$$\frac{\beta_{Ay}}{\beta_{Az}} = \mathrm{tg}\,\tilde{\theta}_A = \frac{k_{A1}\sin\theta_{A1}}{\mathrm{Re}\sqrt{k_{A2}^2 - k_{A1}^2\sin^2\theta_{A1}}}$$

и

$$\beta_{Az} = \omega\sqrt{\frac{1}{V_{A2}^2(\mathbf{n}_2, \mathbf{s}_2)^2 + i\omega\nu_m} - \frac{\sin^2\theta_{A1}}{V_{A1}^2(\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1)^2}}.$$

Изучение результатов исследования легко обобщить на случай трехмерной задачи.

Таким образом, изучение проникновения волн во вторую среду позволяет получить информацию о параметрах среды, а наблюдение отраженных волн – о механизме поглощения.

ВЫВОДЫ

Следует подчеркнуть значение интегральных уравнений при исследовании различного рода МГД полей и сред. Основанием для их составления послужили соответствующие общие физические законы, а достоинства этих уравнений в их физической наглядности, в общности при описании разрывных функций, в возможности представления решения краевой задачи в замкнутой аналитической форме. Перечисленные положительные моменты в использовании интегральных уравнений и дали возможность применить их для создания математической модели описания диссипативной модели МГД среды.

Литература.

[1] А*львен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. – М., Мир, 1967. – 260 с.

[2] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., Наука, 1967 . – 437 с.

[3] *Александрова А.А.* Интегральные уравнения магнитной гидродинамики в лабораторной системе координат // Журнал технической физики, т.65 (1995), в.11, с. 20-28.

[4] *Aleksandrova A.A., Aleksandrov Y.N.* The fundamental solution to equations of linear magnetic hydrodynamics in a moving medium // *Technical physics,* vol.46 (2001), N 7, p.783-788.

[5] *Александрова А.А.* Трехмерная задача отражения и преломления МГД волн на плоской границе раздела // Магнитная гидродинамика. Латв.АН, (1993), № 2, с.21-28.

[6] *Александрова А.А.* Интегральные уравнения в задачах дифракции МГД-волн в плазменных средах // Зарубежная радиоэлектроника. (1999), № 3, с.25-41.

Поступила в редколлегию 21.04.2010

Александрова Алевтина Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшей математики» Харьковского университета воздушных сил. Области научных интересов: магнитная гидродинамика и радиофизика.

Александров Юрий Николаевич, кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры «Биомедицинских электронных устройств и систем» Харьковского национального университета радиоэлектроники. Области научных интересов: радиофизика и магнитная гидродинамика.

УДК 01;03;04

Магнітогідродинамічне поле в дисипативному середовищі / А.О. Олександрова, Ю.М. Олександров // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2010. Том 9. № 2. – С. 246-253.

У роботі узагальнюється метод інтегральних рівнянь рішення граничних задач лінійної магнітної гідродинаміки на випадок дисипативних середовищ.

Ключові слова: магнітогідродинамічне поле, дисипативне середовище, розривна функція.

Бібліогр.: 06 найм.

UDC 01;03;04

Magnetohydrodynamic field in a dissipation medium / A.O. Oleksandrova, Yu.M. Oleksandrov // Applied Radio Electronics: Sci. Mag. – 2010. Vol. 9. № 2. – P. 246-253.

The work generalizes the method of integral equations of solving the boundary problems of magnetohydrodynamics in the case of dissipation media.

Key words: magnetohydrodynamic field, dissipation medium, discontinuous function.

Ref.: 06 items.