ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ

УДК 681.3

СИНТЕЗ СУПРЕМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

М.Ф. БОНДАРЕНКО, В.А. ТИМОФЕЕВ

Рассматривается задача управления линейным динамическим объектом в дискретной временной области. В качестве критерия управления используется максимальное абсолютное значение обобщенного выхода. Показано, что данная задача сводится к задаче линейного программирования. Получены уравнения супремальных регуляторов, обеспечивающих заданное качество управления.

The paper considers the problem of controlling a linear dynamic object in the discrete time domain. The maximum absolute value of generalized output is used as a control criterion. It is shown that the given problem is reduced to the problem of linear programming. The equations of supremal regulators providing the desired control quality are obtained.

Введение

В задачах компьютерной инженерии и управления достаточно часто возникает ситуация, когда замкнутая система управления, находящаяся под воздействием внешнего возмущающего сигнала ω (внешний, задающий сигнал помехи, сигналы от других объектов, вариации параметров окружающей среды и т. п.), должна поддерживать характеристики объекта управления v (выходной сигнал объекта, ошибка управления и т. п.) внутри некоторых априорно задаваемых границ так, что

$$|v(t,\omega)| \le \mathrm{E}, \forall \ t \in R, \qquad (1)$$

где t – непрерывное или дискретное время. В том случае, если нарушение неравенства (1) в принципе не допустимо, например ведет к катастрофическим последствиям, закон управления, обеспечивающий жесткое поддержание (1), называется критическим, а система управления, его реализующая, — критической [1, 2].

Поскольку любая реальная система подвержена влиянию множества контролируемых и неконтролируемых возмущений и помех, цель критической системы состоит в поддержании выходных сигналов объекта в заданных границах независимо от характера этих возмущений.

В данной работе предполагается, что исследуемые объекты контроля описываются в пространстве сигналов с помощью разностных стохастических уравнений авторегрессии – скользящего среднего с экзогенными задержанными входами

$$A\,y(k) = q^{-d} B\,u(k) + C\,\omega(k)\,, \qquad (2)$$

A, B и C — полиномы, имеющие вид

$$A = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n},$$
$$B = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m},$$
$$C = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_l q^{-l},$$

а $y(k)$, $u(k)$, $\omega(k)$ – выходной, входной и возмущающий сигналы соответственно в дискретный момент времени k; $d \ge 1$ — время чистого запаздывания в канале управления; q^{-1} — оператор сдвига назад; n, m и l — порядок полиномов A, B и C соответственно.

Модель (2), являющаяся весьма распространенным в современной теории управления, позволяет адекватно отразить свойства достаточно широкого класса реальных объектов управления.

При исследовании замкнутых критических систем обычно используются две основные формы их описания : в дискретном и непрерывном времени.

Ниже рассматривается описание замкнутой системы управления $S_D(P,\ C)$ (см. рисунок) в дискретной временной области.

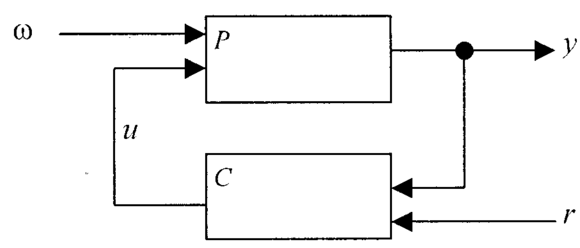

Рис. 1. Замкнутая система $S_D(P,\ C)$

Здесь введены следующие обозначения: r – внешний задающий сигнал, ω – возмущение, u – управляющий сигнал; y – выход объекта управления; $P: (u, \omega) \to y$ – описание объекта; $C: (r,\ y) \to u$ — описание закона управления. В дальнейшем внешние входы ω и r будем обозначать одним символом ω, а входные сигналы y и ошибку $e = r - y$ будем рассматривать как обобщенный выход системы ϑ.

В общем случае цель любой системы управления с обратной связью состоит в обеспечении требуемого поведения объекта путем соответствующей обработки входных и выходных сигналов, вычисления управляющих воздействий и их подачи на исполнительные органы. Главной проблемой при этом является проектирование собственно регулятора, с теоретической точки зрения представляющего собой формальный алгоритм, результат работы которого есть численное значение управляющего сигнала. Проблема синтеза распадается на две относительно независимые подзадачи, первой из которых является определение цели управления и его формального представления – критерия. Вторая подзадача состоит в нахождении формального описания регулятора, обеспечивающего требуемое значение этого критерия.

Постановка задачи

Рассмотрим синтез дискретных критических алгоритмов в пространствах входов $D(m,\delta)$ или $D(N,m_0,\delta_0)$ по критерию

$$J_E(c)=\sup\{|\vartheta(k,\varpi,c)|:k\in N,\varpi\in E\}, \qquad (3)$$

связанному с максимальным абсолютным значением обобщенного выхода ϑ для всех входных сигналов ϖ в пространстве E для всех моментов k интервала управления N. При этом, как и ранее, входное пространство $D(m,\delta)$ будем определять как множество всех возможных последовательностей ω таких, что

$$\begin{cases}\sup\left\{\sum_{i=k}^{k+m}|\Delta\omega(i)|:k\in N\right\}\le\delta,\\ |\omega(k)|<\infty,\forall k\in N,\end{cases} \qquad (4)$$

где $\delta\in(0,\infty)$, $m\in N^+$, $\Delta\omega(k)=\omega(k)-\omega(k-1)$, а комплексное пространство $D(N,m_0,\delta_0)$ — как множество последовательностей (ω) таких, что

$$\omega=\sum_{j=1}^{N}\omega^{(j)}, \qquad (5)$$

где

$$(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots,\omega^{(N)})\in D(m_{01},\delta_{01})D(m_{02},\delta_{02})\times \times D(m_{0N},\delta_{0N}).$$

В общем случае алгоритмы управления, связанные с критерием (3), получили название супремальных [2], хотя общего подхода к синтезу подобных процедур не было. Частным случаем супремальных систем управления являются супремальные регуляторы, в которых отсутствует внешний задающий сигнал.

Рассмотрим синтез $S_D(P,C)$, в котором отсутствует внешний задающий сигнал r, т. е. проблема сводится к стабилизации выходного сигнала объекта в окрестности нуля. В этом случае обобщенный выход ϑ заменяется сигналом y, а критерий оптимизации (3) приобретает вид

$$J_{DR}(C)=\sup\{|y(k,\omega,C)|:k\in N,\omega\in D\}, \qquad (6)$$

где символом D обозначается входное пространство $D(m,\delta)$ или $D(N,m_0,\delta_0)$.

Задача синтеза состоит в нахождении закона регулирования $C:y\to u$, минимизирующего целевую функцию J_{DR}.

Синтез супремального регулятора

Для упрощения выкладок положим $C(q)=1$ в ARMAX — модели объекта, включенного в систему $S_D(P,C)$, т. е.

$$A(q)y(k)=q^{-d}B(q)u(k)+\omega(k), \qquad (7)$$

где полином $A(q)\in R[q,n]$ с $a_0=1$, $B(q)\in R[q,m]$, время чистого запаздывания $d\in N^+$; y, u и ω — выходной, управляющий и возмущающий сигнал соответственно.

Преобразуем описание объекта (7) к форме d – шагового упредителя, для чего умножим обе части (7) на $\Delta F(q)q^d$

$$\Delta A(q)F(q)y(k+d)= =\Delta F(q)B(q)u(k)+\Delta F(q)\omega(k+d). \qquad (8)$$

Учитывая справедливость тождества [3]

$$\Delta A(q)F(q)+q^{-d}E(q)=1, \qquad (9)$$

в котором полиномы $F(q)\in R[q,d-1]$ с $f_0=1$ и $E(q)\in R[q,n]$ единственны, получаем

$$\begin{cases}y(k+d)=\xi(k)+\Delta F(q)\omega(k+d),\\ \xi(k)=E(q)y(k)+\Delta F(q)B(q)u(k).\end{cases} \qquad (10)$$

Из соотношений (10) следует, что $y(k+d)$ содержит два члена: один из них определяется известными прошлыми управляющими воздействиями и измеряемыми выходами, а другой зависит только от неизмеряемых возмущений. Поскольку полином $F(q)$ имеет порядок $d-1$, то в описание упредителя все возмущения входят с временами, большими, чем k, что в принципе не позволяет получить по данным измерений оценки члена $\Delta F(q)\omega(k+d)$.

Далее вернемся к входному пространству $D=D(m,\delta)$ и рассмотрим процедуру синтеза регулятора для случая $0\le m<d-1$.

Положим $|\Delta\omega(i)|=\gamma_i\delta$ для $i\in N$, где $\gamma_i\ge 0$. Тогда для $\omega\in D(m,\delta)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=k}^{k+m}\gamma_i\le 1\ \forall k\in N.$$

Из (10) получаем далее очевидные соотношения

$$|y(k+d)|\le|\xi(k)|+\psi(\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\ldots,\gamma_{k+d})\delta, \qquad (11)$$

где

$$\psi(\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\ldots,\gamma_{k+d})=\sum_{i=1}^{d-1}|f_i|\gamma_{k+d-i},$$

откуда следует, что проблема синтеза может быть сведена к нахождению вектора $(\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\ldots,\gamma_{k+d})$, максимизирующего функцию ψ или, что то же самое, целевую линейную функцию

$$\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{k+d-i}$$

при наличии ограничений

$$\gamma_{k+i}\geq 0,\ i=1,2,\ldots,d,$$

и

$$\sum_{i=j}^{j+m}\gamma_i\leq 1, j=k+1,k+2,\ldots,k+d-m.$$

Как видно, задача синтеза сводится к стандартной задаче линейного программирования, которая может быть решена за конечное число шагов с помощью симплекс-метода. В результате решения будет получен оптимальный вектор $(\gamma_{k+1}^0,\gamma_{k+2}^0,\ldots,\gamma_{k+d}^0)$, приводящий к значению целевой функции

$$\max\{\psi(\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\ldots,\gamma_{k+d})\}=\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{k+d-i}^0.$$

Несложно видеть, что для всех $k\in N$ постановка задачи линейного программирования не меняется, поэтому оптимальные решения $(\gamma_1^0,\gamma_2^0,\ldots,\gamma_d^0)$ для всех моментов времени k одинаковы.

Обозначим эти решения в виде $(\gamma_1^0,\gamma_2^0,\ldots,\gamma_d^0)$, откуда

$$\max\{\psi(\gamma_{k+1},\gamma_{k+2},\ldots,\gamma_{k+d}):k\in N\}= \\ =\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0.$$

Тогда (11) можем переписать в виде

$$|y(k+d)|\leq|\xi(k)|+\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0\delta, \tag{12}$$

приводящем к оценке качества регулирования

$$J_{DR}(C)\leq\sup\{|\xi(k)|:k\in N\}+\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0\delta.$$

Специальным случаем возмущения для данной ситуации является $\omega^*\in D(m,\delta)$, определяемое соотношением

$$\omega^*(k)=\begin{cases}0 \text{ при\_} k\leq 0,\\ \omega^*(k-1)+\delta\gamma_k^0 sign(f_{d-k}) \text{ при } 0<k\leq d,\\ \omega^*(k-1) \text{ при\_} k>d.\end{cases}$$

Рассматривая далее регулятор C_R в виде

$$\Delta F(q)B(q)u(k)=-E(q)y(k), \tag{13}$$

можно видеть, что $\xi(k)=0$, а

$$y(d,\omega^*,C_R)=\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0\delta, \tag{14}$$

после чего, используя (12) и (18), можно сделать вывод, что значение критерия $J_{DR}(C)$ не может быть меньше, чем $y(d,\omega^*,C_R)$.

Таким образом, любой регулятор, обеспечивающий значение целевой функции

$$J_{DR}(C_R)=\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0\delta$$

и значение выходного сигнала

$$y(k,\omega,C_R)=\Delta F(q)\omega(k)$$

является супремальным.

Для входного пространства $D=D(N,m_0,\delta_0)$ и возмущений $\omega\in D(N,m_0,\delta_0)$ регулятор (12) также является супремальным. Это можно показать, вводя функцию

$$Q_R(k)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0, 0\leq k<d-1,\\ \|F(q)\|_{A\infty}, k\geq d-1,\end{cases}$$

после чего, проводя аналогичные предыдущему преобразования, получаем

$$J_{DR}(C_R)=\sum_{i=1}^{N}Q_R(m_{0i})\delta_{0i},$$

$$y(k,\omega,C_R)=F(q)\sum_{i=1}^{N}\Delta\omega^{(i)}(k),$$

где полином $F(q)$ определяется соотношением (9).

Таким образом, введенный супремальный регулятор обеспечивает качество управления

$$J_{DR}(C_R)=\begin{cases}Q_R(m)\delta, D=D(m,\delta),\\ \sum_{i=1}^{N}Q_R(m_{0i})\delta_{0i}, D=D(N,m_0,\delta_0).\end{cases}$$

Пример синтеза супремального регулятора. Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$y(k)+0,7y(k-1)=0,5u(k-3)+\omega(k),$$

где сигнал возмущения $\omega(k)\in D(1;0,1)$.

Используя тождество (9), получаем значения полиномов

$$\begin{cases}F(q)=1+0,3q^{-1}+0,79q^{-1},\\ E(q)=0,447+0,553q^{-1},\end{cases}$$

а соотношение (13) приводит к супремальному регулятору

$$u(k)=-0,894y(k)-1,106y(k-1)+0,7u(k-1)- \\ -0,49u(k-2)+0,79u(k-3).$$

Для этого случая линейная целевая функция ψ, подлежащая минимизации, может быть записана в форме $\gamma_1+0,3\gamma_2+0,79\gamma_3$ при ограничениях в форме $\gamma_i\geq 0, i=1,2,3; \gamma_1+\gamma_2\leq 1$ и $\gamma_2+\gamma_3\leq 1$. Оптимальным решением в данном случае является вектор $(\gamma_1^0,\gamma_2^0,\gamma_3^0)=(1,0,1)$, приводящий к значению критерия

$$J_{DR}(C_R)=(1+0,79)\cdot 0,1=0,179.$$

В частном случае $m=0$ легче видеть, что вектор оптимальных решений $(\gamma_1^0,\gamma_2^0,...,\gamma_d^0)$ есть $(1,1,...,1)$, а целевое решение принимает форму

$$\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\gamma_{d-i}^0$$

при ограничениях

$$0\le\gamma_i\le 1, i=1,2,...,d\ .$$

Очевидно, что оптимальное значение критерия для $m=0$ есть

$$J_{DR}(C_R)=\sum_{i=0}^{d-1}|f_i|\delta\ .$$

В рассматриваемом выше примере, если возмущение $\omega\in D(0;0,1)$, то

$$J_{DR}(C_R)=(1+0,3+0,79)\cdot 0,1=0,209\ .$$

Более сложная ситуация возникает в случае $m\ge d-1$. Из (10) следует, что

$$|y(k+d)|\le|\xi(k)|+|f_0||\Delta\omega(k+d)|+|f_1||\Delta\omega(k+d-1)|+...$$
$$+|f_{d-1}||\Delta\omega(k+1)|\le|\xi(k)|+\|F(q)\|_{A\infty}\sum_{i=k+1}^{k+d}|\Delta\omega(i)|,$$

или

$$y(k+d)\le|\xi(k)|+\|F(q)\|_{A\infty}\delta\ .$$

С учетом (6) это неравенство приводит к оценке качества управления

$$J_{DR}(C)\le\sup\{|\xi(k)|:k\in N\}+\|F(q)\|_{A\infty}\delta\ .$$

Для возмущений $\omega^*\in D(m,\delta)$ вида

$$\Delta\omega^*(k)=\begin{cases}\delta sign(f_M), если\_k=M,\\ 0, если\_k\ne M,\end{cases}$$

где f_M — наибольшее из значений $\{f_0,f_1,...,f_{d-1}\}$, регулятор (13) приводит к $\xi(k)=0$ и оценке

$$y(d,\omega^*,C_R)=\delta|f_M|=\|F(q)\|_{A\infty}\delta\ ,$$

т. е. также является супремальным.

Таким образом, можно утверждать, что супремальный регулятор C_R инвариантен к параметрам m и δ пространства входов $D(m,\delta)$.

Выводы

Предложенный метод синтеза супремальных регуляторов характеризуется простотой численной реализации, сводящейся к решению стандартной задачи линейного программирования, и позволяет получать законы управления динамическими стохастическими объектами, робастные к широкому классу возмущений и помех.

Литература: 1. *Zakian V.* Critical systems and tolerable input / /Int. J. Control. 1989. — 49. N4. — p.1285–1289. 2. *Whidborne J.F., Liu G.P.* Critical Control Systems. — N.Y.: John Wiley & Sons inc. 1993. — 187 p. 3. *Clarke D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S.* Generalized predictive control. — Part 1. the basic algorithm // Automatica, 1987. vol. 22. — N2. — p. 137–148.

Поступила в редколлегию 09.04.2003 г.

Бондаренко Михаил Федорович, доктор техн. наук, профессор, ректор, зав. кафедрой ПО ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Тимофеев Владимир Александрович, канд. техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник кафедры ЭВМ Харьковского национального университета радиоэлектроники. Тел. р. 702-13-50.