ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вороненко М.Д.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: mykyta.voronenko@nure.ua

The problem of mathematical modeling of many stationary processes leads to the need for finding on $[0, 1]$ positive solution of the boundary-value problem for equation $-u'' = f(u)$, where $f(u)$ is a nonnegative and continuous function for $u \geq 0$. When using two-sided iterative methods, two iterative sequences (upper and lower solutions) are constructed, which on both sides coincide with the exact solution of the problem, which allows at each step of the iterative process to have an a posteriori estimate of the error. The effectiveness of the developed method is demonstrated by the computational experiment for $f(u) = u^p$, $0 < p < 1$.

Точні розв'язки нелінійних крайових задач відомі лише у поодиноких випадках, тому актуальною є розробка чисельних методів розв'язання задач такого класу. Робота присвячена дослідженню можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійного звичайного диференціального рівняння $-u'' = u^p$, розглядуваного на відрізку $[0, 1]$ за мішаних крайових умов. Метод двобічних наближень є зручним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому двобічні наближення дозволяють отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку [1, 2].

Розглянемо при $0 < p < 1$ задачу

$$-u'' = u^p,\ x \in (0,1),\ u(0) = u'(1) = 0. \tag{1}$$

На конусі K_+ невід'ємних у $C[0,1]$ функцій крайова задача (1) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)u^p(s)ds, \tag{2}$$

де $G(x,s) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s, \\ s, & s \leq x \leq 1, \end{cases}$ – функція Гріна крайової задачі (1).

Розглянемо оператор T, що діє у $C[0,1]$ за правилом

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,s)u^p(s)ds.$$

Оператор T на конусі K_+ є цілком неперервним, додатнім, монотонним, угнутим та u_0-угнутим, де $u_0(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Це гарантує існування у K_+ єдиного додатного розв'язку u^* рівняння (2), який можна прийняти за узагальнений розв'язок крайової задачі (1).

Для монотонного оператора T умовами $Tv_0 \geq v_0$, $Tw_0 \leq w_0$ виділімо інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, де $v_0(x) = \alpha u_0(x)$, $w_0(x) = \beta u_0(x)$. Тоді для констант α і β $(0 \leq \alpha < \beta)$ отримаємо нерівності:

$$\alpha \leq \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)}{2^p \Gamma(2p+3)} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta \geq \left(2^{p+3} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p+2, p+1 \right) \right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Далі розглянемо схему послідовних наближень

$$v_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x,s) v_n^p(s) ds, \ \ w_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x,s) w_n^p(s) ds, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Послідовність $\{v_n(x)\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w_n(x)\}$ не зростає за конусом K_+. Тоді мають місце нерівності

$$v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0,$$

де u^* – точний розв'язок задачі (1).

Отже, побудовано дві ітераційні послідовності, що збігаються до точного розв'язку задачі (1) зверху і знизу відповідно. За наближений розв'язок крайової задачі (1) на n-й ітерації можна взяти функцію $u_n = \frac{v_n + w_n}{2}$. При цьому абсолютна похибка оцінюється нерівністю

$$\varepsilon_n = \left\| u_n - u^* \right\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} (w_n(x) - v_n(x)),$$

а відносна похибка –

$$\delta_n \approx \frac{\max\limits_{x \in [0,1]} (w_n(x) - v_n(x))}{\max\limits_{x \in [0,1]} (w_n(x) + v_n(x))} \cdot 100\%.$$

Наближені розв'язки знаходились з точністю $\varepsilon = 10^{-7}$. У таблиці наведена залежність оцінки відносної похибки наближеного розв'язку від p.

p	0,2	0,4	0,6	0,8
δ_n	$0{,}65 \cdot 10^{-5}$ %	$0{,}77 \cdot 10^{-5}$ %	$0{,}28 \cdot 10^{-4}$ %	$0{,}31 \cdot 10^{-3}$ %

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.