
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ
ПОРОШКОВОЙ МАССЫ ПО РАЗМЕРАМ**

Рассматривается процесс измельчения твёрдых частиц в сепараторах. Исследуется способ распределения твёрдых частиц по размерам при помощи воздушно-центробежных сепараторов. Описывается процесс сепарации и определяются силы, действующие на мелкодисперсные частицы. Выводятся формулы для сил, действующих на частицы в зависимости от дисперсных характеристик рассматриваемых частиц. Определяются факторы, которые наиболее сильно влияют на точность процесса сепарации.

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим процесс распределения твёрдых мелкодисперсных частиц при помощи механических аппаратов. Измельчение крупных твёрдых частиц до частиц малых размеров обычно производится в целях ускорения процесса перемешивания порошковых масс. Так как на практике все материалы, применяемые в промышленных целях, обычно представлены в твёрдых крупнодисперсных состояниях, то измельчение является одним из основных способов их переработки. В работах [1-5] были рассмотрены различные способы измельчения твёрдых крупнодисперсных материалов. Данная статья является продолжением исследований, начатых в [1]. Далее механический способ измельчения будет рассмотрен как наиболее простой и экономичный из всех методов диспергирования.

Условия формирования порошковых масс зависят от физико-химических свойств исходного материала и дисперсных свойств частиц, физико-химических характеристик среды. Зачастую требуется получить мелкодисперсные порошковые смеси с заданными характеристиками (диаметр частиц, свойства поверхности и т.д.) при минимальных затратах энергии и времени. С этой целью изучается воздействие на различные виды материалов разных возмущений (механических, гидравлических, химических, энергетических [4,5]).

Технологический процесс измельчения твёрдых частиц в специальных аппаратах можно разделить на два этапа. Первый этап – измельчение частиц под действием возмущений, направленных из внешней среды на исходный материал. Второй этап – собственно формирование порошковой массы с заданными характеристиками. Задачей исследования процессов измельчения является, в частности, изучение физико-химических и поверхностных свойств материала (знание этих свойств необходимо для того, чтобы определить влияние воздействия частиц порошковой массы друг на друга). Знание физико-химических свойств поверхностей частиц в ряде случаев необходимо для определения условий, при которых они могут быть применены на практике.

Целью работы является: а) исследование процесса измельчения твёрдых частиц порошковой смеси в различных частях сепаратора; б) исследование сил, действующих на частицы в зависимости от их дисперсных характеристик; в) установление факторов, которые наиболее сильно влияют на процесс распределения частиц внутри сепаратора.

Задача работы состоит в построении математической модели процесса распределения мелкодисперсных частиц в воздушно-центробежных сепараторах.

2. Распределение частиц порошковой массы по их размерам

Принцип действия воздушно-центробежных сепараторов состоит в следующем: частицы исходного материала подвергаются одновременно действию двух сил – центробежной, которая создаётся вращением потока, и радиальной, создаваемой движением потока к центру сепарационной камеры. При рассмотрении стационарного случая можно прийти к выводу о равенстве двух указанных сил, которое определяется радиусом круговой траектории частиц порошковой массы заданных размеров. Если же частицы будут больших диаметров, чем расчётные, то они будут перемещаться по спирали к краям сепарационной камеры, а частицы с диаметрами меньше заданного – также по спирали к центру сепаратора.

Исследуем случай, когда выполняются условия:

1) Любую фиксированную частицу можно рассматривать как частицу сферической формы (или формы, которую можно привести к сферической при помощи использования определённого эквивалентного сфере ее размера и коэффициента формы) в контексте теории сепарации в центробежно-воздушных полях.

2) Предполагаем, что частицы порошковой массы не соприкасаются с движущимися деталями сепаратора, т.е. частица рассматривается как свободно подвешенная в потоке.

Рассмотрим основные силы, действующие на процесс.

Сила потока, который переносит частицу:

$$\varphi_{\text{str}} = \frac{1}{8} k \pi \theta d^2 \rho_{\text{cp}} v_r^2. \quad (1)$$

Центробежная сила, действующая на сферическую частицу диаметром d , равна:

$$\varphi_{\text{cent}} = \pi d^3 (\rho - \rho_{\text{cp}}) \frac{v_\tau}{6R}. \quad (2)$$

Здесь ρ и ρ_{cp} – соответственно плотность частицы и среды, в которой производится сепарация; R – радиус траектории; v_τ и v_r – тангенциальная и радиальная составляющие скорости потока на расстоянии R от центра; θ – безразмерный коэффициент, учитывающий отклонение формы частицы от сферической:

$$k = 24 \text{ Re} \quad \text{при} \quad 0 < \text{Re} < 1, \quad (3)$$

$$k = 13 \text{ Re}^{\frac{1}{3}} \quad \text{при} \quad 1 < \text{Re} < 10, \quad (4)$$

где параметр Re – число Рейнольдса.

Равенство сил φ_{cent} и φ_{str} определяет граничный размер частиц d_0 , находящихся на круговой траектории заданного радиуса.

Для частиц минимальных размеров и небольших скоростей в соответствии с условием (3) имеем

$$d_0 = 4,24 \left(\frac{\rho}{\rho - \rho_{\text{cp}}} \theta \right)^{\frac{1}{2}} (R v_\tau)^{\frac{1}{2}} v_\tau^{-1}. \quad (5)$$

В случае частиц средних размеров и достаточно больших скоростей v_τ в соответствии с (4) имеем:

$$d_0 = 4,54 \left[\left(\frac{\rho}{\rho - \rho_{\text{cp}}} \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} \frac{R^{\frac{2}{3}} v_r}{v_\tau^{\frac{4}{3}}}, \quad (6)$$

$$v_r = \frac{V}{2\pi} R h, \quad v_\tau = v_{\tau 0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^\delta. \quad (7)$$

Здесь V – объемный расход воздуха; h – высота зоны разделения [6]; $v_{\tau 0}$ – тангенциальная составляющая у внешней границы зоны; R_0 – расстояние внутренней границы зоны до центра. В зависимости от способа формирования потока величина δ может изменяться в пределах $-1 \leq \delta \leq 1$.

При $\delta = 0$ и $h(R) = \text{const}$ для частиц наименьших размеров $v_\tau = \text{const}$ и d_0 не зависит от R . Следовательно, процесс сепарации обычно распределяет частицы только по одной из их характеристик, в зависимости от их дисперсности (т.е. по размеру в зависимости от величины диаметра). Круговые траектории движения частиц одинаковых размеров в пределах зоны сепарации являются устойчивыми, а значит частицы с достаточно близкими дисперсными характеристиками могут находиться в этой зоне достаточно долго. Данный случай является идеальным для работы сепаратора. Для такого процесса необходимым

условием является следующее утверждение: угловая скорость потока увеличивается пропорционально $\frac{1}{R}$ по мере приближения потока к центру. Любые частицы, размеры которых больше d_0 , попадая в рассматриваемую нами зону, будут по спиралям удаляться к краям сепарационной зоны, а частицы диаметров мельче d_0 – также по спиралям к центру.

Если $0 < \delta \leq 1$, то на круговых орбитах, приближающихся к центру, частицы с близкими дисперсными характеристиками будут больших размеров, а при $-1 \leq \delta < 0$ – меньших. Отсюда получаем следующее утверждение: при $\delta \neq 0$ в сепараторе существует несколько зон распределения частиц порошковой массы, а некоторую область можно определить при помощи формул (5) и (6).

Движение частиц (одинаковых по своим дисперсным характеристикам) по круговым траекториям при $\delta \neq 0$ является неустойчивым. Возмущения потока и случайные перемещения частиц будут переводить их на спиральные траектории и направлять в один из продуктов сепарации.

С помощью формул (5)–(7) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d_{O1}}{d_{O2}} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^\delta. \quad (8)$$

Здесь R_1 и R_2 – граничные радиусы области сепарации; d_{O1} и d_{O2} – равнозначные размеры частиц на внешней и внутренней границах зоны распределения. Частицы с размерами $d_{O1} < d < d_{O2}$ в зависимости от места их попадания в зону сепарации могут попасть как в крупнодисперсный порошок, так и в мелкодисперсную порошковую смесь. Поэтому в мелкодисперсную смесь будут входить все частицы мельче d_{O2} , а в крупнодисперсную – все частицы, дисперсные характеристики которых больше d_{O1} .

Доля частиц заданного размера, попадающих в определенную зону сепарации, равновесна (при условии, что попадание частицы в любую точку зоны пропорционально ширине этой зоны).

Из приведенных выше условий и на основании (8):

$$\frac{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = \frac{\left(\frac{R}{R_1} \right)^2 - 1}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1} = \frac{\left(\frac{d}{d_{O1}} \right)^\delta - 1}{\left(\frac{d_{O2}}{d_{O1}} \right)^\delta - 1}. \quad (9)$$

Состав мелкодисперсной части порошковой массы представляет собой:

$$J(d) = \int_0^{d_{O1}} F(d)dd + \int_{d_{O1}}^{d_{O2}} \frac{\left(\frac{d}{d_{O1}} \right)^\delta - 1}{\left(\frac{d_{O2}}{d_{O1}} \right)^\delta - 1} F(d)d(d). \quad (10)$$

На основании (9) и (10) можно вывести коэффициенты полезного действия сепаратора:

$$\eta_1 = \frac{J(d)}{\int_0^{d_{O2}} F(d)d(d)}, \quad (11)$$

$$\eta_2 = \frac{\int_0^{d_{O1}} F(d)d(d)}{J(d)}. \quad (11')$$

Если параметр δ заметно отличается от нуля, а отношение $\frac{R_2}{R_1}$ велико (порядка 2–5), то точность распределения частиц по их размерам и КПД классификации низкие (при условии, что на $[d_{O_1}, d_{O_2}]$ приходится значительная часть порошковой массы).

В общем случае точность процесса сепарации при фиксированных параметрах распределения определяется изменениями сил, которые действуют на частицы критических размеров. Можно сделать вывод, что точность распределения частиц зависит от следующего условия: *чем быстрее изменяются действующие на компоненты порошковой массы возмущения, тем точнее будет конечное их распределение*. Это свойство также определяет предпочтительное использование воздушно-центробежных сепараторов в сравнении с гравитационными при распределении малых частиц.

Действительно, для гравитационной силы и противодействующей ей силы воздушного потока

$$\begin{aligned}\varphi_{vp} &= \frac{1}{6} \pi (\rho - \rho_{cp}) g d^3 - 3 \pi \mu d v_{\text{potoka}} = \\ &= \frac{1}{6} \pi (\rho - \rho_{cp}) g (d^3 - d_{\text{ravn}}^2),\end{aligned}\quad (12)$$

где μ – динамическая вязкость среды; v_{potoka} – скорость потока относительно частицы, а d_{ravn} – равновесное значение размера частиц для $\varphi = 0$:

$$d_{\text{ravn}}^2 = \frac{18 \mu v_{\text{potoka}}}{(\rho - \rho_{cp}) g}.$$

Величина производной и дифференциал d в точке $d = d_{\text{ravn}}$ равны

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_{vp}}{d(d)} &= \frac{1}{6} \pi (\rho - \rho_{cp}) g (3d^2 - d_{\text{ravn}}^2); \\ d(d)|_{d=d_{\text{ravn}}} &= \frac{3d\varphi}{\pi (\rho - \rho_{cp}) g d_{\text{ravn}}^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

Для центробежных полей

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{cent}} &= \frac{1}{6} \pi d^3 (\rho - \rho_{cp}) \omega^2 R - \frac{13}{8} \pi \rho_{cp} v^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{6} \pi (\rho - \rho_{cp}) \omega^2 R (d^3 - d_0^{\frac{3}{2}} d_0^{\frac{3}{2}}),\end{aligned}\quad (14)$$

где ω – угловая скорость вращения на расстоянии R от центра. Равновесное значение размера частиц на расстоянии R от центра вращения равно

$$d_{\text{ravn}} = \left(\frac{39 v_f^{\frac{3}{2}} \rho_{cp} v^{\frac{1}{2}}}{4 \omega^2 R (\rho - \rho_{cp})} \right).$$

Величина производной и дифференциал в точке $d = d_{\text{ravn}}$ для центробежных полей равны

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_{\text{cent}}}{d(d)} &= \frac{1}{6} \pi (\rho - \rho_{cp}) \omega^2 R (3d^2 - \frac{3}{2} d_{\text{ravn}}^{\frac{3}{2}} d^{\frac{1}{2}}); \\ d(d)|_{d=d_{\text{ravn}}} &= \frac{4d\varphi}{(\rho - \rho_{cp}) \omega^2 R d_{\text{ravn}}^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

Сравнивая формулы (13) и (15), можно видеть, что величина дифференциала dd при равных значениях $d\varphi$ в случае центробежных полей меньше, чем в случае гравитационного поля.

Из формул (13) и (15) следует, что с уменьшением граничного размера величина случайного отклонения размеров частиц по обе стороны границы их разделения увеличивается достаточно быстро. Следовательно, точность сепарации с ростом дисперсности резко падает, а экспериментальные трудности реализации процесса распределения возрастают.

На качестве сепарации сказывается также значение разности плотностей сепарируемых частиц и среды. Очевидно, качество сепарации тем лучше, чем плотность частиц выше и чем менее плотной является сепарационная среда.

3. Заключение

Научная новизна. Исследован процесс распределения твёрдых частиц порошковых смесей в воздушно-центробежных сепараторах. Рассмотрен процесс движения частиц в сепараторе с течением времени. Выведены формулы для сил, действующих на частицы в зависимости от их дисперсных характеристик. Установлены факторы, которые наиболее существенно влияют на процесс распределения частиц внутри сепаратора.

Практическая ценность такого метода обработки мелкодисперсных частиц состоит в том, что мы можем получить порошковую смесь с определённым распределением частиц по их размерам.

Результаты исследований могут быть применены для получения массивов частиц, используемых на производстве. Следует учитывать, что рассматривался идеальный случай движения частиц в сепараторе. Поэтому полученные результаты следует предварительно опробовать в лабораторных условиях.

Список литературы: 1. Вовк А.В., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Управление процессом формирования порошковых смесей // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 143. С. 50- 57. 2. Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Эволюция скачков и изломов импульсов при их распространении в информационном канале // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 142. С. 57- 63. 3. Коузов П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельчённых материалов. Л.: Химия, 1987. 264с. 4. Гора Н.Н., Вовк А.В. Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс обработки многокомпонентной смеси // Вестник НТУ ХПИ, тематический выпуск «Информатика и моделирование», В23, 2006. С. 19-28. 5. Вовк А.В. Процесс формирования порошковых масс в объёме активной смеси // Радиоэлектроника и информатика. 2007. С. 141-144. 6. Авдеев Н.Я. Расчёт гранулометрических характеристик полидисперсных систем. Ростов-на-Дону: Ростовское книжн. изд-во, 1966. 54 с.

Поступила в редколлегию 10.12.2009

Подгорбунский Никита Сергеевич, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61195, Харьков, ул. Метростроителей, 15, кв. 23, тел. 716-02-70.