Про Побудову Послідовних Наближень для Однієї Задачі про Вибір Моделі Міграції в Популяційній Генетиці

Юлія Границя
студент
Кафедра Прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
yulia.hranytsia@nure.ua

Світлана Колосова
професор
Кафедра Прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
lanakol@ukr.net

Владислав Юхименко
студент
Кафедра Прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
vladyslav.yukhymenko@nure.ua

On the Construction of the Method of Successive Approximation as Applied to the Solution of the Problem in Selection Migration Model in Population Genetics

Yuliya Granica
student
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
yulia.hranytsia@nure.ua

Svitlana Kolosova
professor
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
lanakol@ukr.net

Vlad Uhimenko
student
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
vladyslav.yukhymenko@nure.ua

***Анотація*—У роботі розглядаються питання про існування, єдиність та можливість побудови послідовних наближень до розв'язку однієї задачі про вибір моделі міграції популяції у генетиці, математичною моделлю якої є крайова задача Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння. Дослідження цієї задачі проводиться методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Отримано умови, яким повинні задовольняти параметри, що входять у постановку задачі, щоб можна було побудувати послідовні наближення до додатного розв'язку.**

***Abstract*—The paper deals with the question of the existence, uniqueness and the possibility of constructing successive approximations to the solution of one problem on the choice of population migration model in genetics, the mathematical model of which is the Dirichlet boundary value problem for a nonlinear elliptic equation. The research of this problem is carried out by methods of the theory of nonlinear operator equations in semi-ordered space. Conditions are obtained that must satisfy the parameters included in the statement of the problem so that it is possible to construct a successive approximations to a positive solution.**

Ключові слова—додатний розв'язок, крайова задача, функція Гріна, двобічні наближення, інваріантний конусний відрізок, угнутий оператор.

Keywords—positive solution, boundary value problem, Green's function, two-sided approximations, invariant cone segment, concave operator.

I. Вступ

На сьогодні у сучасній науці спостерігається велика зацікавленість до процесів, що мають місце у нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів найчастіше є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Точні розв'язки таких задач відомі лише у поодиноких випадках. Крім того, доволі складною є проблема вирішення питання про існування та єдиність розв'язку. Дослідження розглядуваної задачі будемо проводити методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Крім того, метою дослідження є отримати умови, яким повинні задовольняти параметри, що входять у постановку задачі, щоб можна було довести існування єдиного додатного розв'язку та побудувати послідовні наближення до нього.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У скінченній області $\Omega \subset R^N$ розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u = \lambda\left(1+u\right)^q \ \forall x \in \Omega,\ u > 0, u\big|_{0\Omega} = 0, \qquad (1)$$

тут $N \geq 2$, $\lambda > 0$. Параметр q може бути як додатним, так і від'ємним. Багато фізичних задач, зокрема, задача вибору моделі міграції популяції у генетиці, приводить до задачі (1) [1, 2].

Математичною моделлю задачі (1) є задача Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння з двома параметрами. Задача (1) є частковим випадком більш загальної задачі:

$$\begin{aligned} &-\Delta u = f\left(\lambda, x, u\right) \forall x \in \Omega \subset R^N, \\ &u > 0, u\big|_{0\Omega}, \lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Вважаємо, що $f\left(\lambda, x, u\right) \geq 0$ в $\bar{\Omega}$. Відомо [3–5], що у класі неперервних у Ω функцій задача (2) еквівалентна операторному рівнянню:

$$u\left(x\right) = \int_\Omega G\left(x,s\right) f\left(\lambda, s, u\left(s\right)\right) ds, \qquad (3)$$

$G\left(x,s\right)$ – функція Гріна оператора Δ задачі Діріхле у області Ω, $x = \left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$, $s = \left(s_1, ..., s_N\right)$. Дослідження питань, що пов'язані з додатними розв'язками задачі (1), отже, й еквівалентного їй операторного рівняння (3), будемо проводити методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Наведемо деякі основні означення та висновки цієї теорії [3–5].

Нехай E – дійсний банахів простір. Замкнута опукла множина $K \subset E$ називається конусом, якщо з $u \in K, u \neq 0$, випливає $au \in K$ $\left(a \geq 0\right)$ та $-u \notin K$. За допомогою конусу K у E вводиться напівупорядкованість за правилом: $u < v$, якщо $v - u \in K$, u, $v \in E$.

Конус K називається нормальним, якщо існує таке число $N\left(K\right)$, що з $0 \leq u \leq v$ випливає $\|u\| \leq N\left(K\right)\|v\|$. Відомо, що конус неперервних у Ω функцій є нормальний.

Оператор $T : E \rightarrow E$ називається додатним, якщо $TK \subset K$.

Оператор $T : E \rightarrow E$ називається гетеротонним, якщо супровідний оператор $\hat{T}\left(v,w\right)$ зростає за першим аргументом і спадає за другим, крім того, $T\left(u\right) = \hat{T}\left(u,u\right)$.

Монотонний оператор (тобто такий, що з $u_1 \leq u_2$ випливає $Tu_1 \leq Tu_2$) та антитонний оператор (тобто такий, що з $u_1 \leq u_2$ випливає $Tu_1 \geq Tu_2$) є частковими випадками гетеротонного оператора. Для монотонного оператора супровідним може бути $\hat{T}\left(v,w\right) = T\left(v\right)$, для антитонного оператора $\hat{T}\left(v,w\right) = T\left(w\right)$.

Множину $\left\langle v_0, w_0 \right\rangle = \left\{u \middle| v_0 \leq u \leq w_0\right\}$ називають конусним відрізком.

Конусний відрізок $\left\langle v_0, w_0 \right\rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T, якщо $\hat{T}\left(v_0, w_0\right) \geq v_0$ та $\hat{T}\left(v_0, w_0\right) \leq w_0$.

Нехай $u_0 \in K$ деякий фіксований ненульовий елемент. Через $K\left(u_0\right)$ позначимо множину таких відмінних від нуля елементів $u \in K$, для яких виконуються нерівності:

$$A\left(u\right)u_0 \leq u \leq B\left(u\right)u_0 \ \left(A > 0, B > 0\right). \qquad (4)$$

Додатний у K гетеротонний оператор називається псевдоугнутим, якщо $\hat{T}\left(v,w\right) \in K\left(u_0\right)$ для будь-яких $v, w \in K, v \neq 0, w \neq 0$, та для будь-яких $v, w \in K$ й $\forall t \in \left(0,1\right)$:

$$\hat{T}\left(tv, \frac{w}{t}\right) \geq t\hat{T}\left(v,w\right). \qquad (5)$$

Псевдоугнутий оператор називається u_0-псевдоугнутим, якщо умову (5) замінити більш жорсткою, а саме: $\forall t \in \left(0,1\right)$ можна вказати таку $\eta\left(v,w,t\right) > 0$, що:

$$\hat{T}\left(tv, \frac{w}{t}\right) \geq \left(1+\eta\right)t\hat{T}\left(v,w\right). \qquad (6)$$

Зауваження 1. Для монотонного оператора T з супровідним $\hat{T}\left(v,w\right) = T\left(v\right)$ терміни сильно інваріантний конусний відрізок, псевдоугнутість, u_0-псевдоугнутість переходять у терміни інваріантний конусний відрізок, угнутість, u_0-угнутість.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1 [4, теорема 2.4]. Нехай u_0-псевдоугнутий оператор T має сильно інваріантний конусний відрізок $\left\langle v_0, w_0 \right\rangle \in K\left(u_0\right)$, конус K є нормальний, оператор T

цілком неперервний. Тоді оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$.

Теорема 2 [4, теорема 2.5]. Нехай u_0-псевдоугнутий, оператор T є неперервним, має сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle \in K(u_0)$, конус K є нормальний та оператор $\hat{T}$ є цілком неперервний. Тоді оператор T має єдину нерухому точку $u^* \in K(u_0)$, до якої збігаються за нормою простору E послідовні наближення, побудовані за схемою:

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n),$$

$$n = 0,1,2,\dots, \qquad (7)$$

при будь-якому $u \in K, u \neq 0$.

Зауваження 2. Для монотонного оператора формули (5), (6), (7) набувають відповідно вигляду: $T(tu) \geq tTu$, $T(tu) \geq (1+\eta)tTu$, $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 0,1,2,\dots$.

III. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведемо дослідження властивостей відповідного задачі (1) оператора:

$$Tu = \lambda \int_\Omega G(x,s)\left(1+u(s)\right)^q ds, \; D(T) = K. \qquad (8)$$

1) Розглянемо випадок $q > 0$. Вочевидь, оператор T є монотонний. Крім того, оператор T є цілком неперервний [3, 4].

Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ покладемо у (8) $u = v_0 = 0$ та складемо елемент:

$$v_1(x) = \lambda \int_\Omega G(x,s)\,ds \geq v_0 = 0.$$

Маючи елемент v_1, будуємо елемент:

$$v_2(x) = \lambda \int_\Omega G(x,s)\left(1+v_1(s)\right)^q ds \geq v_1.$$

Продовжуючи процес, приходимо до співвідношень $0 = v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$. Якщо у (8) покласти $u = w_0 = \beta = const > 0$, отримаємо елемент:

$$w_1(x) = \lambda \int_\Omega G(x,s)(1+\beta)^q ds.$$

Параметри λ та β обираємо таким чином, щоб $w_1 \leq w_0 = \beta$, це призводить до умови:

$$\lambda(1+\beta)^q \int_\Omega G(x,s)\,ds \leq \beta, \quad \forall x \in \Omega,$$

звідки маємо:

$$\max_{x\in\Omega} \int_\Omega G(x,s)\,ds \leq \frac{\beta}{\lambda(1+\beta)^q}. \qquad (9)$$

Продовжуючи процес побудови елементів w_i аналогічно процесу для ν_i, отримаємо нерівності:

$$0 \leq \nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_n \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Отже, конусний відрізок $< \nu_0, w_0 > = < 0, \beta >$ є інваріантний для оператора T вигляду (8) з $q > 0$.

Для дослідження оператора T на угнутість складаємо:

$$T(tu) - tTu = \lambda \int_\Omega G(x,s)\left[(1+tu)^q - t(1+u)^q\right] ds.$$

Щоб ця різниця була додатною, достатньо, щоб $(1+tu)^q - t(1+u)^q > 0 \;\; \forall t \in (0,1), u > 0$, або, щоб:

$$q < \frac{\ln t}{\ln \dfrac{1+tu}{1+u}}. \qquad (10)$$

Якщо ввести у розгляд функцію:

$$\varphi(t) = \ln t \left(\ln \frac{1+tu}{1+u}\right)^{-1}, \; u \in < 0, \beta >,$$

неважко перевірити, що $\forall t \in (0,1)$ маємо $1 < \varphi(t) < \infty$, тому приходимо до висновку, що нерівність (10) виконується, якщо $0 < q < 1$. Виконання нерівностей (4) для Tu з $u_0 = \int_\Omega G(x,s)\,ds$ випливає з того факту, що $u \in < \nu_0, w_0 >$.

Маючи на увазі зауваження 1, легко зробити висновок про u_0-угнутість оператора T.

Таким чином, доведені властивості оператора T дозволяють зробити висновок про існування єдиного додатного розв'язку у задачі (1), якщо параметри λ, q та введений нами параметр β задовольняють умову (9) та $0 < q < 1$.

Ітераційний процес будуємо за схемою:

$$u_{n+1}(x)=\int_{\Omega}G(x,s)\left[1+u_n(s)\right]^q ds,\ n=0,1,...,$$

при цьому:

$$0\le \nu_0\le \nu_1\le ...\le \nu_n\le ...\le u^*\le ...\le w_n\le ...\le w_0=\beta ,$$

де u^* – точний розв'язок задачі (1), тобто маємо двобічні наближення до розв'язку u^* задачі (1) з $q>0$.

2) Розглянемо випадок $q<0$. Позначимо $q=-p,\ p>0$. Оператор T вигляду (8) можна переписати таким чином:

$$Tu=\lambda\int_{\Omega}\frac{G(x,s)}{\left(1+u(s)\right)^p}ds\ . \tag{11}$$

У даному разі оператор T є антитонний, тому що з $u_1\le u_2$ випливає $Tu_1\ge Tu_2$. Пропонуємо наступну процедуру побудови сильно інваріантного конусного відрізка $<\nu_0,w_0>=\{u\mid \nu_0\le u\le w_0\}$, такого, що $T<\nu_0,w_0>\subset<\nu_0,w_0>$, яка використовує саме антитонність оператора. Супровідним для антитонного оператора (11) беремо:

$$\hat{T}(\nu,w)=T(w)=\int_{\Omega}\frac{\lambda G(x,s)}{\left(1+w(s)\right)^p}ds.$$

Скористаємось схемою послідовних наближень:

$$w_{n+1}(x)=\lambda\int_{\Omega}\frac{G(x,s)}{\left(1+w(s)\right)^p}ds,\ n=0,1,2,... \tag{12}$$

та покладемо у (12) $w_0=\gamma=const>0$, отримаємо елемент:

$$w_1(x)=\lambda\int_{\Omega}\frac{G(x,s)}{(1+\gamma)^p}ds=\lambda\frac{u_0(x)}{(1+\gamma)^p}\ ,$$

де $u_0=\int_{\Omega}G(x,s)ds.$

Нашою метою є завдяки вибору γ досягти виконання нерівності $w_1\le w_0$, або $\lambda\frac{u_0(x)}{(1+\gamma)^p}\le\gamma$, звідки отримаємо умову:

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}\int_{\Omega}G(x,s)ds\le\frac{\gamma(1+\gamma)^p}{\lambda}\ . \tag{13}$$

Далі будуємо елемент:

$$w_2(x)=\lambda\int_{\Omega}\frac{G(x,s)}{\left(1+w_1(s)\right)^p}ds,$$

який завдяки антитонності оператора T задовольняє нерівності $w_1\le w_2\le w_0=\gamma$.

Продовжуючи процес (12), отримаємо нерівності $w_1\le w_3\le ...\le w_{2n-1}\le w_{2n}\le ...\le w_2\le w_0=\gamma$, а тому можна покласти $\nu_0=w_1(x)$. Побудова сильно інваріантного конусного відрізка $<\nu_0,w_0>$, де ν_0 та w_0 є обмежені функції, доводять справедливість виконання нерівності (4).

Розглянемо умову (5), для цього визначимо знак наступної різниці в залежності від $t\in(0,1)$:

$$\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\frac{t^p ds}{\left(1+w(s)\right)^p}-\lambda t\int_{\Omega}\frac{G(x,s)ds}{\left(1+w(s)\right)^p}=$$

$$=\lambda\left(t^p-t\right)\int_{\Omega}\frac{G(x,s)ds}{\left(1+w(s)\right)^p}>0\ ,$$

звідки випливає, що $t^p-t>0$, або $t^{p-1}>1$. Остання нерівність виконується, якщо $p-1<0$, а тому, $0<p<1$.

u_0 -псевдоугнутість оператору T повинна забезпечити умова (6). Складаємо:

$$\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\frac{t^p ds}{\left(1+w(s)\right)^p}-(1+\eta)\lambda t\int_{\Omega}\frac{G(x,s)ds}{\left(1+w(s)\right)^p}=$$

$$=\lambda\int_{\Omega}\frac{G(x,s)ds}{\left(1+w(s)\right)^p}\left[t^p-(1+\eta)t\right]ds\ge 0\ .$$

Для виконання цієї нерівності достатньо, щоб виконувалась умова $t^p-(1+\eta)t\ge 0$, звідки маємо, що $\eta\le t^{p-1}-1$. Таким чином, умова (6) виконується для будь-якої $\eta(\nu,w,t)$, що задовольняє умову $0<\eta<t^{p-1}-1$. Отже, оператор T є псевдоугнутий.

Доведені властивості оператора T вигляду (8) дозволяють зробити висновок, що задача (1) з $q<0$ має єдиний додатний розв'язок u^*, послідовні наближення до якого можна отримати за схемою (12), при цьому мають місце нерівності:

$$\nu_0 = w_1 \le w_3 \le \ldots \le w_{2n+1} \le \ldots \le u^* \le \ldots$$

$$\ldots \le w_{2n} \le \ldots \le w_2 \le w_0 = \gamma\ ,$$

тобто отримали двобічні наближення до точного розв'язку задачі (1) у випадку $q < 0$.

Однак, скористатись схемами побудови двобічних наближень для задачі (1) практично можливо лише тоді, коли область, у якій розглядається задача, є такою, що для неї відома функція Гріна. Якщо функція Гріна невідома або має складний вигляд, пропонуємо застосовувати наближений метод розв'язання задачі (1), що використовує квазіфункцію Гріна, яка була введена у розгляд Рвачовим В. Л. для крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь [6]. У роботах [7, 8] застосування методу квазіфункцій Гріна поширено на крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Суть цього методу полягає в тому, що вихідна задача (1) на класі функцій $W_2^1(\Omega)$ зводиться до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння:

$$u(x) = \int_\Omega G_{кв}(x,s) f(\lambda, s, u(s)) ds + \int_\Omega u(s) K(x,s) ds, \quad (14)$$

де

$$G_{кв}(x,s) = \frac{1}{2\pi}\left[ln\frac{1}{r} - \psi(x,s) \right],$$

$$\psi(x,s) = -\frac{1}{2} ln\left[r^2 + 4\omega(x)\omega(s) \right],$$

$$K(s,x) = -\frac{1}{2\pi}\Delta_s \psi(x,s)$$

для $\Omega \subset R^2$,

$$G_{кв}(x,s) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \psi(x,s) \right],$$

$$\psi(x,s) = \left(r^2 + 4\omega(x)\omega(s) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$K(s,x) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_s \psi(x,s)$$

для $\Omega \subset R^3$. В обох випадках:

$$r = |x - s|, \quad \Delta_s = \sum_{i=1}^{w} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}, \quad s \in \Omega \subset R^n,$$

$$\omega(x) = \begin{cases} > 0, \forall x \in \Omega, \\ 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Така функція $\omega(x)$ може бути побудована практично для області будь якої геометрії за допомогою конструктивного апарату R-функцій [6], $W_2^1(\Omega)$ – простір функцій, що дорівнюють нулю на $\partial\Omega$ та мають квадратично сумовні в Ω похідні першого порядку.

Для розв'язання рівняння (14) пропонуємо скористатись методом послідовних наближень за Свирським [9], що дозволяє звести його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь, кожне з яких можна розв'язати методом Бубнова-Гальоркіна [10].

IV. ВИСНОВКИ

У роботі доведено існування єдиного додатного розв'язку та можливість побудови послідовних, а саме, двобічних наближень до нього для розглядуваної задачі, математичною моделлю якої є задача Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння з двома параметрами, при цьому розглянуто можливості одного з параметрів набувати як додатні, так і від'ємні значення. Отримано умови, які гарантують збіжність двобічного ітераційного процесу. Крім того, нам вдалось накласти умови на два параметри λ та q, які входять до постановки задачі, з введеним при дослідженні параметром β, що є правим кінцем конусного відрізка, при яких існує єдиний додатний розв'язок розглядуваної задачі. Побудувавши інваріантний конусний відрізок (для $q > 0$) та сильно інваріантний конусний відрізок (для $q < 0$), ми отримали апріорну оцінку шуканого розв'язку в обох випадках.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] G. A. Afrouzi, S. Khademloo, «Some numerical results on a convex nonlinear elliptic problem». Applied Mathematicies and Computation. 175(2006). P. 465–471.

[2] D. D. Joseph, T. S. Lundgren, «Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources», Arch. Rat. Mech. Anal. 49(1973). P. 241–269.

[3] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с.

[4] Опойцев В. И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов. Труды Московского математического общества. 1978. Том 36. С. 237–273.

[5] Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси. Издательство Тбилисского университета, 1984. 270 с.

[6] Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

[7] Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдема. Вісник Запоріжсього національного університету.Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.

[8] Колосова С. В., Луханін В. С. Про додатні розвязки однієї задачі з гетеротонним оператором та про побудову послідовних наближень. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2016. Випуск 31. С. 59–72.

[9] Свирский И. В. Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.

[10] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.