

УДК 681.323

В.М. ГУСЯТИН, В.Н. СИДОРОВ

Харьковский Национальный университет радиоэлектроники, Украина

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПИСАНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД
В СИСТЕМАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

Предлагается модель описания газодинамических объектов, позволяющая определять параметры объекта в любой момент времени в любой точке. Анализируются различные виды расчетных сеток, которые могут быть использованы при расчете газодинамических объектов, и оценивается эффективность их применения при синтезе изображений этих объектов. Результаты могут быть использованы при разработке систем визуализации реального времени для авиационных и космических тренажеров.

газодинамический объект, метод «крупных частиц», плотность, давление, вектор скорости, поток массы, координатная сетка, квант времени, система визуализации

Введение

При формировании изображения в системах синтеза визуальной обстановки значительное внимание уделяется отображению различных природных явлений. Визуализация таких природных явлений, как марево перегретого воздуха или струя турбулентного течения за соплом реактивного двигателя необходимы в тренажерах летательных аппаратов, так как значительно повышают реалистичность получаемого изображения и помогают приблизить режим обучения пилота на тренажере к большей реальности.

Для визуализации указанных природных явлений необходимо иметь математическое описание и данные о газодинамических параметрах отображаемой среды. Существующие методы синтеза изображений указанных явлений не имеют такого описания и лишь визуально имитируют их [1].

Для получения необходимого описания за основу взят численный «метод крупных частиц» [2 – 4], использование которого граничит с проведением численного эксперимента. С помощью метода крупных частиц возможно описать поведение широкого спектра газодинамических систем. Указанный подход является развитием метода частиц в ячейках

Френсиса Харлоу [3] и широко применяется для исследования течений газа при наличии больших деформаций и перемещений.

Предлагаемое ниже математическое описание позволяет с достаточной степенью достоверности синтезировать изображения подобных явлений, так как физически точно описывает эти явления.

Метод крупных частиц

Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения [2, 3]. Среда здесь моделируется системой из жидких крупных частиц (в дальнейшем будем определять как ячейку эйлеровой сетки). Расчет каждого временного шага (вычислительного цикла) в свою очередь разбивается на три этапа:

1) *эйлеров этап*, когда пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением ячейки координатной сетки (потока массы через границы ячейки нет), и учитываем эффекты ускорения жидкости лишь за счет давления; здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{E})$ (рассмотрен двумер-

ный случай, u и v – скорости по соответствующим осям, E – энергия ячейки);

2) *лагранжев этап*, где при движении жидкости вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек;

3) *заключительный этап* – определяются в новый момент времени окончательные значения газодинамических параметров потока $\varphi(u, v, E, \rho)$ (ρ – плотность вещества в ячейке) на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждой

ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке.

Остановимся подробнее на разностных уравнениях всех трех этапов расчета. Для простоты изложения возьмем двумерный, т.е. плоский случай.

Первый этап. Для системы, заданной в декартовых координатах, явные конечно-разностные уравнения первого порядка точности по времени и второго порядка по пространству представлены следующими формулами [1, 2]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^n &= u_{i,j}^n - \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}; & \bar{v}_{i,j}^n &= v_{i,j}^n - \frac{P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}; \\ \bar{E}_{i,j}^n &= E_{i,j}^n - \left[\frac{P_{i+1/2,j}^n u_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{P_{i,j+1/2}^n v_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где p – давление; n – номер итерации, для которой производится расчет; Δx , Δy – линейные размеры ячейки; Δt – квант времени; ρ – плотность вещества в ячейке.

Величины с дробными индексами, относящиеся к границам ячеек, находятся, например, так:

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j}^n &= \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2}; \\ p_{i+1/2,j}^n &= \frac{p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n}{2}. \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях $\bar{u}, \bar{v}, \bar{E}$ – промежуточные значения параметров потока на слое $t^n + \Delta t$, полученные в предположении заторможенности поля плотности без учета перемещения среды.

Второй этап. Поток массы ΔM^n определяется по формулам первого порядка точности:

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n > 0; \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i+1,j}^n < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Третий этап. Уравнения этого этапа представляют собой следующие законы:

- сохранения массы M ;
- сохранения импульса P ;
- сохранения полной энергии E ,

записанные для данной ячейки в разностной форме:

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n + \sum \Delta M_{zp}^n; \\ P^{n+1} &= P^n + \sum \Delta P_{zp}^n; \\ E^{n+1} &= E^n + \sum \Delta E_{zp}^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где ΔM_{zp}^n – масса газа, которая пересекла за время Δt одну из границ рассматриваемой ячейки; суммирование производится по всем сторонам ячейки; аналогичным образом понимаются следующие суммы:

$$\sum \Delta P_{zp}^n; \quad \sum \Delta E_{zp}^n.$$

Окончательные значения параметров потока

$$\rho, X(u, v, E)$$

на новом временном слое

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t$$

вычисляются по следующим формулам:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_{\kappa}^n}{\Delta x \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n}{\Delta x \Delta y}; \quad (4)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \bar{X}_{i,j}^n + \frac{\sum \bar{X}_{\kappa} \Delta M_{\kappa}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \bar{X}_{i,j}^n + \frac{\bar{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-1/2,j}^n + \bar{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-1/2}^n - \bar{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+1/2,j}^n - \bar{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}. \quad (5)$$

Соотношение (5) справедливо, когда поток втекает в ячейку (i, j) через все стороны. При реализации произвольного направления течения жидкости необходимо ввести функцию $D_{i,j}^n$, которая определяет направление движения жидкости через границы расчетных ячеек. Пронумеруем все стороны ячейки (i, j) индексом $k = 1, 2, 3, 4$.

Определим значение $D_{i,j}^n(k)$, относящееся к стороне k , следующим образом:

$$D_{i,j}^n(k) = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость втекает в} \\ & \text{ячейку } (i, j) \text{ через сторону } k; \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из} \\ & \text{ячейки } (i, j) \text{ через сторону } k. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда получаем:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_{\kappa}^n}{\Delta x \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n}{\Delta x \Delta y}, \quad (7)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{D_{i,j}^n(1) \bar{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-1/2,j}^n + D_{i,j}^n(2) \bar{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-1/2}^n + D_{i,j}^n(3) \bar{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+1/2,j}^n + D_{i,j}^n(4) \bar{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} + \quad (8)$$

$$+ \bar{X}_{i,j}^n \cdot \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i,j}^n(1)] \Delta M_{i-1/2,j}^n - [1 - D_{i,j}^n(2)] \Delta M_{i,j-1/2}^n - [1 - D_{i,j}^n(3)] \Delta M_{i,j+1/2}^n - [1 - D_{i,j}^n(4)] \Delta M_{i+1/2,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}.$$

Анализ расчетной сетки

Использовании метода «крупных частиц» для составления математического описания рассматриваемых явлений с последующей их визуализацией в режиме реального времени сопровождается жесткими требованиями ко времени счета. В связи с этим возникает задача оптимизации размера ячеек расчетной сетки таким образом, чтобы сократить их количество при сохранении детализации описания отображаемого явления на таком уровне, при котором в процессе итерационного счета не изменяется

его физическая природа. Физическая природа отображаемого явления может измениться в том случае, когда в связи с большими линейными размерами ячеек расчетной сетки или большого кванта времени в процессе счета пропускаются малые возмущения. Возникающие ошибки впоследствии накапливаются и приводят либо к расхождению алгоритма, либо к несоответствию параметров среды с аналогичными параметрами, полученными в результате более точных вычислений. Для оптимального построения расчетной сетки необходимо определить зависимость между линейными пара-

метрами ячейки сетки и квантом времени одной итерации с параметрами, характеризующими состояние газодинамической среды.

Для разностороннего и как можно более полного описания поведения газодинамических сред с последующей их визуализацией, в работе рассмотрены два природных явления, которые значительно различаются по своей природе. Одно из них – марево перегретого воздуха над нагретой поверхностью. Это явление характеризуется, с одной стороны, большими линейными размерами, а с другой – относительно небольшими температурами и скоростями. Второе – турбулентная струя, истекающая из сопла реактивного двигателя самолета. Это явление характеризуется достаточно компактной локализацией в пространстве, однако имеет высокую температуру истекающих газов, большие значения скоростей и давления. Таким образом, приведенные явления охватывают широкий спектр поведения газодинамического поля. Рассмотрим типы расчетных сеток, которые могут быть использованы при описании поведения и визуализации указанных природных явлений. При построении расчетных сеток были выбраны статические сетки. Статические сетки при проведении расчетов, связанных с аппроксимацией газодинамических величин в рамках рассматриваемого объекта, позволяют снизить затраты как процессорного времени, так и памяти. Кроме того, статические сетки упрощают процесс нахождения газо-

динамических параметров поля в процессе визуализации объекта. Все это в целом создает предпосылки к тому, чтобы процесс расчета параметров поля и визуализацию оказалось возможным выполнять в режиме реального времени.

Рассмотрим турбулентную струю за соплом реактивного двигателя. Поскольку сопло реактивного двигателя является фигурой вращения, то при описании этого явления целесообразно использовать цилиндрическую систему координат. На рис. 1 представлены геометрические элементы задачи. Ось симметрии сопла реактивного двигателя (рис. 1, а) совпадает с направлением оси H . Таким образом, положение точки описывается радиусом R , высотой H и углом поворота β . Преимуществом этой координатной сетки является, в первую очередь, простое вычисление объема и граничных площадей тех ячеек, которые частично занимаются твердой, непроницаемой для газа оболочкой, т.е. стенками реактивного сопла. К достоинствам этой координатной сетки можно отнести простоту вычисления потоков массы через границы ячеек. На рис. 1, б приведена геометрия отдельной ячейки координатной сетки. Вектор скорости ячейки газодинамического поля представлен тремя проекциями $(\bar{V}, \bar{U}, \bar{W})$ на соответствующие оси координат. Соответствующие проекциям скорости потока масс определяются относительно следующих границ ячейки:

$$A_3B_3B_4A_4, A_2B_2B_3A_3, B_1B_2B_3B_4.$$

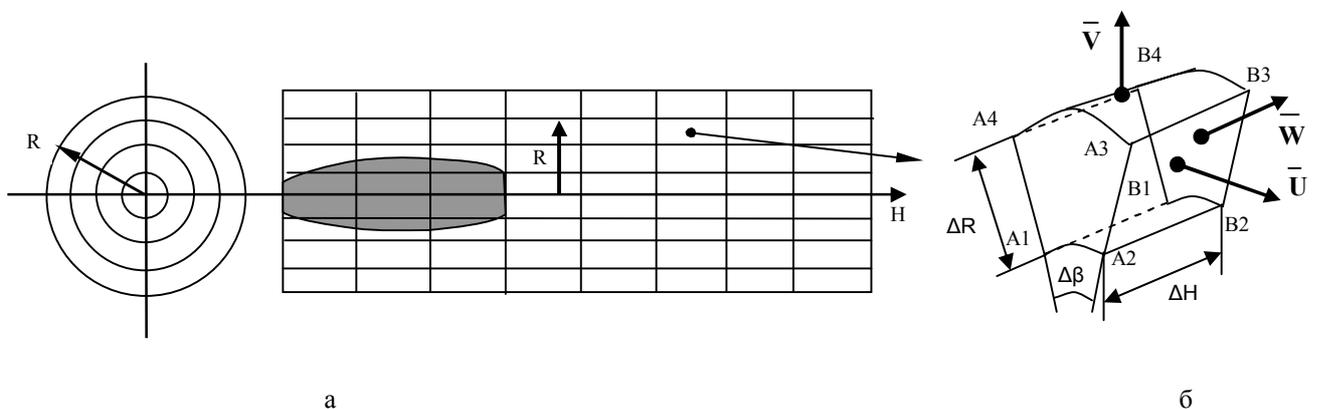


Рис. 1. Геометрические элементы задачи

Таким образом, величины, необходимые для расчета и связанные с геометрическими параметрами объекта, имеют вид:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot \Delta r^2 \cdot \Delta h}{N} \cdot (2 \cdot n_r - 1); \\ S_q &= \frac{\pi \cdot \Delta r}{N} \cdot (2 \cdot n_r - 1); \\ S_j &= \Delta r \cdot \Delta h; \\ S_r &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta r \cdot n_r}{N} \cdot \Delta h, \end{aligned} \quad (9)$$

где V – объем ячейки координатной сетки; S_q – площадь стенки ячейки, соответствующая фигуре $B_1B_2B_3B_4$; S_j – площадь стенки ячейки, соответствующая фигуре $A_2B_2B_3A_3$; S_r – площадь стенки ячейки, соответствующая фигуре $A_3B_3B_4A_4$; Δr – дискретизация по радиусу; Δh – дискретизация по координате H ; N – количество ячеек по координате j , т.е. по углу β ; n_r – номер анализируемой ячейки по радиусу.

К недостаткам следует отнести явную избыточность этой координатной сетки. Избыточность проявляется в том, что по всей координатной сетке размеры ячеек одинаковы вне зависимости от скоростей движения газа и возможных возмущений потока.

Особенно это проявляется возле объемов, которые находятся в непосредственной близости от граничных условий различного рода. Так, например, в начале координатной оси H мы имеем граничные условия по потоку, втекающему в моделируемую область. Этим граничным условиям соответствует большая скорость потока по оси H . Для обеспечения устойчивости алгоритма необходимо выполнить соответствие [2 – 4]:

$$\Delta t \leq \frac{h_{\min}}{3 \cdot c_0},$$

где h_{\min} – минимальные линейные размеры ячейки расчетной сетки, а значение c_0 численно равно

скорости звука в данной среде (в случае, если скорость движения среды относительно осей координат больше, чем скорость звука, то c_0 равно этой скорости).

Однако по мере удаления по оси H от начала отсчета скорость потока относительно этой оси падает, что, в свою очередь, уменьшает возможные возмущения потока и позволяет увеличивать размер ячеек по оси H , не теряя необходимой точности описания газодинамического поля. Это приводит к сокращению числа расчетных ячеек при моделировании одного и того же газодинамического объема. Следовательно, сокращается время расчета одной итерации алгоритма при сохранении необходимой точности описания объекта.

Аналогичные соображения могут быть приведены по отношению и к радиусу R .

На рис. 2 показан примерный вид расчетной сетки, оптимизированной по количеству расчетных ячеек.

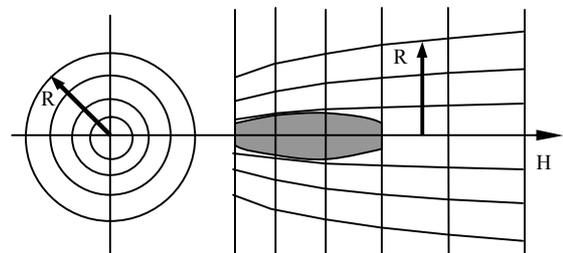


Рис. 2. Цилиндрическая расчетная сетка с приростом длины ячеек по осям R и H

Преимуществом этой сетки является наиболее рациональное распределение ячеек, необходимых для описания исследуемого объекта.

К недостаткам приведенной координатной сетки относятся значительно усложненные математические выкладки, описывающие объем ячеек и их граничные площади.

Кроме этого возникают большие проблемы при вычислении потоков масс через границы ячеек рас-

четной сетки, так как приходится учитывать перенос масс из ячеек, которые непосредственно не граничат с анализируемой ячейкой.

Ниже приведены соотношения применительно к приведенной на рис. 2 расчетной сетке.

$$S_{q-1} = \frac{\pi}{N} (\Delta R \cdot (2n_r - 1) + \delta R \cdot (n_q - 2) \times \text{Fact}(n_r - 2) \cdot n) \cdot (\Delta R + \delta R \cdot (n_q - 2) \cdot (n_r - 1));$$

$$S_q = \frac{\pi}{N} (\Delta R \cdot (2n_r - 1) + \delta R \cdot (n_q - 1) \times \text{Fact}(n_r - 2) \cdot n) \cdot (\Delta R + \delta R \cdot (n_q - 1) \cdot (n_r - 1));$$

$$V = \frac{1}{2} (S_{q-1} + S_q) \cdot (\Delta Q + \delta Q \cdot (n_q - 1));$$

$$S_j = \frac{1}{2} (2\Delta R + \delta R \cdot (n_r - 1) \cdot (2n_q - 3)) \cdot (\Delta Q + \delta Q \cdot (n_q - 1));$$

$$S_r = \frac{\pi}{N} (2\Delta R \cdot 2n_r + \delta R \cdot \text{Fact}(n_r - 1) \times (2n_q - 3)) \cdot (\Delta Q + \delta Q \cdot (n_q - 1));$$

где V – объем ячейки расчетной сетки; S_q, S_{q-1}, S_j, S_r – площади стенок ячейки относительно соответствующих координат; ΔR – дискретизация по радиусу; ΔQ – дискретизация по координате H ; δR – прирост длины ячейки в зависимости от номера по H в дискретизации по радиусу; δQ – прирост длины ячейки относительно оси H в дискретизации по этой оси; N – количество ячеек по координате j , т.е. по углу; n_r – номер анализируемой ячейки по радиусу; n_q – номер анализируемой ячейки по оси H .

Следует заметить, что вычисление приведенных параметров для дробных ячеек, т.е. ячеек, в состав которых входят поверхности, непроницаемые для газодинамического поля, представляет еще большую сложность. В связи с этим в системах реального времени использование этой расчетной сетки нерационально, так как выигрыш по количеству ячеек нивелируется сложностью расчета параметров самих ячеек.

Компромиссным является вариант, при котором размер ячеек в направлении радиус-вектора остается неизменным. В этом случае получаем значительную

Предположим, что для описания используется следующая функция:

$$\Delta R^n = \Delta R + \delta R \cdot (n_q - 1).$$

Тогда:

экономии по количеству ячеек расчетной сетки за счет изменения размеров ячеек относительно оси H при сохранении простоты вычислений. Таким образом, с точки зрения скорости вычислений итерации при сохранении достаточной для системы визуализации точности рациональная расчетная сетка имеет вид, приведенный на рис. 3.

Основой расчета ячеек этой сетки являются соотношения (9), за исключением того, что добавляется прирост длины ячейки относительно оси H в зависимости от анализируемой ячейки. Вычисление величины прироста длины ячейки аналитическим путем является сложной задачей в связи с неоднородностью распределения газодинамических параметров среды в рамках расчетной сетки. Алгоритм выбора прироста длины ячейки будет рассмотрен в последующих публикациях.

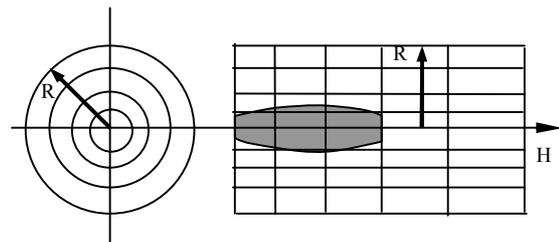


Рис. 3. Цилиндрическая расчетная сетка с приростом длины ячейки по оси H

Природное явление, называемое «маревое перегретого воздуха», характеризуется большими линейными размерами и относительной равномерностью газодинамических параметров на всем протяжении анализируемого объекта. В связи с этим при описании объекта целесообразно использовать прямоугольную координатную сетку. Кроме того, следует заметить, что при удалении от нагреваемой поверхности возмущения газодинамического поля убывают. Это дает нам возможность вдоль координаты, ось которой перпендикулярна нагреваемой поверхности, равномерно увеличивать линейный размер ячейки. Увеличение размеров ячеек не приводит к потере точности и в тоже время сокращает время расчета одной итерации в связи с уменьшением количества анализируемых ячеек.

Заключение

1. Выбран метод описания газодинамических сред для дальнейшего использования в системах визуализации.
2. Определен набор уравнений для описания каждого этапа алгоритма, описывающего газодинамический объект (1 – 9).
3. Предложенное описание позволяет проводить визуализацию сложных многокомпонентных газодинамических систем, в том числе течений с излучением.
4. В описании заложена возможность гибкого управления параметрами модели газодинамического поля, что, в свою очередь, дает возможность отобразить процесс взаимодействия газодинамического объекта с другими объектами сцены.
5. Описание может быть использовано в инженерных расчетах и научных исследованиях с последующей визуализацией результатов.

Дальнейшие работы направлены на решение следующих задач:

- оптимизация строения расчетной сетки;
- оптимальный выбор кванта времени итерации и линейных размеров расчетной сетки для ускорения процесса визуализации при сохранении требуемой точности вычислений и др.

Литература

1. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. Computer Graphics (principles and practice). – Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996. – 1175 p.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 401 с.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 500 с.
4. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод «крупных частиц» для задач газовой динамики // Информ. бюллетень СО АН СССР "Численные методы механики сплошной среды". – 1970. – Т. 1. – С. 27.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966. – 870 с.
6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности: Пер. с франц. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

Поступила в редакцию 29.03.05

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.