

УДК 538.3+537.8

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

А.В. Казанко¹, Е.Н. Одаренко², А.А. Шматько³

¹ Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, 61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7,
тел.: (057) 730-10-39 e-mail: vtisusheet@mail.ru

² Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14,
тел.: (057) 702-10-57, e-mail: oen@kture.kharkov.ua

³ Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 61022, Харьков, пл. Свободы, 4,
тел.: (057) 707-51-33, e-mail: alexandr.a.shmatko@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию 18 апреля 2012 г.

В работе решена задача дифракции плоской H_x -поляризованной волны на решетке составленной из магнитодиэлектрических брусков прямоугольного поперечного сечения для произвольных соотношений между длиной волны и геометрическими размерами решетки. Исследованы зависимости коэффициентов отражения и прохождения пространственных гармоник поля от волнового параметра и угла падения для различных значений материальных параметров сред. Рассмотрены случаи одноволнового и многоволнового распространения гармоник поля как для обычных правосторонних сред, так и для левосторонних сред и их комбинаций. В случае многоволнового режима рассмотрено распространение двух пространственных гармоник. Определены размеры решетки и электродинамические параметры задачи, которые соответствуют полному отражению и полному прохождению падающей волны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифракционная решетка, метаматериал, многоволновый режим.

В роботі розв'язана задача дифракції плоскої H_x -поляризованої хвилі на решітці, що складається з магнітодіелектричних брусків з прямокутним перетином для довільних співвідношень між довжиною хвилі та геометричними розмірами решітки. Досліджені залежності коефіцієнтів відбиття та проходження просторових гармонік поля від хвильового параметру та кута падіння для різних значень матеріальних параметрів середовищ. Розглянуті випадки однохвильового та багатохвильового розповсюдження гармонік поля як для звичайних правосторонніх середовищ, так і для лівосторонніх середовищ та їх комбінацій. У випадку багатохвильового режиму розглянуто розповсюдження двох просторових гармонік. Визначені розміри решітки та електродинамічні параметри задачі, що відповідають повному відбиттю та повному проходженню хвилі, що падає на систему.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дифракційна решітка, метаматеріал, багатохвильовий режим.

Problem of the H_x -polarized wave diffraction on the magnetodielectric blocks grating for arbitrary relationship between the wavelength, grating geometrical and material parameters is solved. Dependencies of the reflection and transmission factors of the field spatial harmonics on the wave parameter and angle of incidence are investigated for different media material parameters. Single-wave and multiwave field harmonics propagation cases for right-handed and left-handed media are considered. Two spatial harmonics propagation is considered for multiwave regime. Electrodynamics problem parameters and grating sizes that correspond to total wave reflection or transmission are defined.

KEY WORDS: diffraction grating, metamaterial, multiwave regime.

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционные решетки, выполненные из метаматериала, находят широкое применение в различных системах передачи и приема электромагнитного излучения терагерцового диапазона. Особый интерес эти дифракционные структуры представляют в области оптоэлектроники и нанотехнологий. Они используются в приборах оптоэлектроники для улучшения характеристик монолитных и немонолитных твердотельных лазеров, являются составными элементами фильтров, интерферометров, мультиплексоров, дуплексоров, модуляторов и др. Важным представляется использование необычных свойств таких решеток при отрицательных значениях материальных параметров их элементов в одноволновом и многоволновом режимах распространения рассеянного поля, а также изучение физических особенностей распространения волн и выявление новых свойств таких необычных структур.

$$H_x^1 = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{\zeta_n} Z_{\zeta_n}. \quad (4)$$

Здесь Z_{ζ_n} – собственные функции, соответствующие собственным значениям $\zeta_n = k^2 \varepsilon_j \mu_j - \rho_n^2$ одномерной задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения

$$\ddot{Z} + (k^2 \varepsilon_j \mu_j - \rho_n^2) Z = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

В силу периодичности структуры, используем теорему Флоке [1], а также непрерывность тангенциальных компонент поля на граничных поверхностях. Тогда:

$$\begin{cases} Z_{\zeta_n, \frac{d}{2}-l-0} - e^{ikal} Z_{\zeta_n, \frac{d}{2}-l+0} = 0 \\ \dot{Z}_{\zeta_n, \frac{d}{2}-l-0} - e^{ikal} \dot{Z}_{\zeta_n, \frac{d}{2}-l+0} = 0 \\ Z_{\zeta_n, -\frac{d}{2}-0} - Z_{\zeta_n, -\frac{d}{2}+0} = 0 \\ \dot{Z}_{\zeta_n, -\frac{d}{2}-0} - \dot{Z}_{\zeta_n, -\frac{d}{2}+0} = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

В (4) Y_{ζ_n} – общее решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка: $\ddot{Y} + \rho_n^2 Y = 0$, т. е. функция Y_{ζ_n} имеет вид: $Y_{\zeta_n} = C_{\zeta_n} e^{i\rho_n y} + D_{\zeta_n} e^{-i\rho_n y}$.

Решения Z_{ζ_n} дифференциального уравнения (5) с граничными условиями (6) образуют полную ортогональную систему функций в рассматриваемом функциональном пространстве [1-2]. При этом собственные функции Z_{ζ_n} , соответствующие собственным значениям ζ_n или ρ_n , в различных областях решетки имеют вид

$$Z_{\zeta_n} = \begin{cases} A_{\zeta_n^I} \cos \zeta_n^I(z + \frac{d}{2}) + B_{\zeta_n^I} \sin \zeta_n^I(z + \frac{d}{2}), & z \in [\frac{d}{2}-l, -\frac{d}{2}) \\ A_{\zeta_n^{II}} \cos \zeta_n^{II}(z + \frac{d}{2}) + B_{\zeta_n^{II}} \sin \zeta_n^{II}(z + \frac{d}{2}), & z \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \end{cases},$$

где $\zeta_n^I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \rho_n^2}$, $\zeta_n^{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \rho_n^2}$, $\eta = \frac{\zeta_n^I}{\zeta_n^{II}}$.

Из условий (6) можно получить СЛАУ 4-го порядка относительно амплитуд $A_{\zeta_n^I}$, $A_{\zeta_n^{II}}$, $B_{\zeta_n^I}$, $B_{\zeta_n^{II}}$. Если определитель матрицы коэффициентов СЛАУ обращается в нуль, то такая СЛАУ имеет бесконечное множество решений. Запишем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} e^{ikal} \cos \zeta_n^I(d-l) & e^{ikal} \sin \zeta_n^I(d-l) & -\cos \zeta_n^{II}d & -\sin \zeta_n^{II}d \\ -e^{ikal} \zeta_n^I \sin \zeta_n^I(d-l) & e^{ikal} \zeta_n^I \cos \zeta_n^I(d-l) & \sin \zeta_n^{II}d & -\cos \zeta_n^{II}d \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \zeta_n^I & 0 & \zeta_n^{II} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим в явном виде трансцендентное уравнение относительно переменной ρ_n :

$$\cos kal = \cos \zeta_n^{II}d \cos \zeta_n^I(d-l) + \frac{1}{2}(\eta + \frac{1}{\eta}) \sin \zeta_n^{II}d \sin \zeta_n^I(d-l) = f(\rho_n). \quad (7)$$

Данное дисперсионное уравнение имеет аналитическое решение для произвольных параметров задачи, а именно: $kal = \arccos f(\rho_n)$.

Таким образом, найдены собственные значения ζ_n , связанные с решением трансцендентного уравнения (7) величиной ρ_n и соответствующие им собственные функции Z_{ζ_n} задачи Штурма-Лиувилля.

Определим неизвестные коэффициенты для полей в областях вне решетки. Для этого воспользуемся граничными условиями для компоненты H_x на поверхности решетки, что приводит к следующим функциональным уравнениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{\zeta_n} e^{-i\rho_n \frac{h}{2}} + D_{\zeta_n} e^{i\rho_n \frac{h}{2}} \right) Z_{\zeta_n} = e^{-ik_y \frac{h}{2} + i k \alpha z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m, \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{\zeta_n} e^{i\rho_n \frac{h}{2}} + D_{\zeta_n} e^{-i\rho_n \frac{h}{2}} \right) Z_{\zeta_n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m, \quad (9)$$

здесь $e_m = e^{i(k\alpha + \lambda_m)z}$.

Введем коэффициенты $F_{\lambda_m}^{\pm} = B_{\lambda_m} \pm A_{\lambda_m}$, $G_{\lambda_m}^{\pm} = C_{\lambda_m} \pm D_{\lambda_m}$. Тогда из симметрии структуры относительно координатной оси OY следует разделение решения на четные $F_{\lambda_m}^{+}$ и нечетные $F_{\lambda_m}^{-}$ типы [1], т. е.:

$$2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\lambda_n}^{+} \cos \rho_n \frac{h}{2} Z_{\zeta_n} = (e^{ik_y \frac{h}{2}} + F_{\lambda_0}^{+} e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) e_0 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} F_{\lambda_m}^{+} e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m, \quad (10)$$

$$2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\lambda_n}^{-} \sin \rho_n \frac{h}{2} Z_{\zeta_n} = (-e^{ik_y \frac{h}{2}} + F_{\lambda_0}^{-} e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) e_0 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} F_{\lambda_m}^{-} e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m. \quad (11)$$

Из граничных условий для компоненты электрического поля E_z следует:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \left(-C_{\zeta_n} e^{-i\rho_n \frac{h}{2}} + D_{\zeta_n} e^{i\rho_n \frac{h}{2}} \right) Z_{\zeta_n} = -k_y e^{-ik_y \frac{h}{2} + i k \alpha z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_m} \gamma_m e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m, \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \left(C_{\zeta_n} e^{i\rho_n \frac{h}{2}} - D_{\zeta_n} e^{-i\rho_n \frac{h}{2}} \right) Z_{\zeta_n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda_m} \gamma_m e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m. \quad (13)$$

Очевидно, что разделение на четные и нечетные решения происходит также при использовании граничных условий для компоненты электрического поля E_z , т. е.:

$$-2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\lambda_n}^{+} \rho_n \sin \rho_n \frac{h}{2} Z_{\zeta_n} = i(k_y e^{ik_y \frac{h}{2}} + \gamma_0 F_{\lambda_0}^{+} e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) e_0 + i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} F_{\lambda_m}^{+} \gamma_m e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m, \quad (14)$$

$$2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\lambda_n}^{-} \rho_n \cos \rho_n \frac{h}{2} Z_{\zeta_n} = i(-k_y e^{ik_y \frac{h}{2}} + \gamma_0 F_{\lambda_0}^{-} e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) e_0 + i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \gamma_m F_{\lambda_m}^{-} e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} e_m. \quad (15)$$

Из функциональных уравнений (10), (11), (12), (13) можно получить СЛАУ для определения искомых амплитуд C_{ζ_n} , D_{ζ_n} . Однако, ввиду возможного разделения решения на четные и нечетные, уравнения (10) и (14) могут рассматриваться независимо от (11) и (15). Поэтому получим СЛАУ из (10) и (14), а затем, аналогично, СЛАУ для других коэффициентов из (11) и (15). Воспользуемся ортогональностью системы функций $\{e_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ на интервале $\left[\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - l\right]$ и ортогональностью системы собственных функций $\{Z_{\zeta_n}\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале $\left[\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - l\right]$. Умножив скалярно левую и правую части уравнения (10) на функцию e_p ($p = 0, \pm 1, \dots$) и учитывая нормировку $\|e_p\|^2 = l$, получим линейное алгебраическое уравнение относительно коэффициентов $F_{\lambda_m}^{+}$, $G_{\lambda_m}^{+}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\lambda_n}^{+} \cos \rho_n \frac{h}{2} L_{ps} = (e^{ik_y \frac{h}{2}} \delta_{0p} + F_{\lambda_0}^{+} e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) l, \quad (16)$$

где $L_{ps} = (Z_{\zeta_n}, e_p)$, ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера).

Аналогично из уравнения (14), используя ортогональность собственных функций Z_{ε_s} ($s = 0, \pm 1, \dots$) на интервале $\left[\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - l\right]$, получим линейное уравнение относительно коэффициентов $F_{\lambda_s}^+$, $G_{\lambda_s}^+$:

$$iG_{\lambda_s}^+ \rho_s \sin \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2 = (k_y e^{ik_y \frac{h}{2}} + \gamma_0 F_{\lambda_0}^+ e^{i\gamma_0 \frac{h}{2}}) L_{0s} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} F_{\lambda_m}^+ \gamma_m e^{i\gamma_m \frac{h}{2}} L_{ms}, \quad (17)$$

где $\|Z_{\varepsilon_s}\|^2 = \int_{\frac{d}{2}-l}^{\frac{d}{2}} |Z_{\varepsilon_s}|^2 dz$ -- норма собственной функции.

Исключая коэффициенты $F_{\lambda_m}^+$ в уравнениях (16) и (167, получим СЛАУ относительно коэффициентов $G_{\lambda_s}^+$:

$$iG_{\lambda_s}^+ \rho_s \sin \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2 = (k_y - \gamma_0) e^{ik_y \frac{h}{2}} L_{0s} + \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} G_{\lambda_n}^+ Q_{n0}^+ + \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} G_{\varepsilon_n}^+ Q_{ns}^+, \quad (18)$$

где матричные коэффициенты $Q_{ns}^+ = \cos \rho_n \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m L_{mn} L_{ms}$.

Эту СЛАУ можно записать в канонической форме:

$$G_{\lambda_s}^+ + \sum_{n=0}^{\infty} G_{\varepsilon_n}^+ P_{ns}^+ = V_s^+, \quad s = 0, \pm 1, \dots, \quad (19)$$

где

$$V_s^+ = \frac{i}{\rho_s \sin \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2} (k_y - \gamma_0) e^{ik_y \frac{h}{2}} L_{0s}, \quad P_{ns}^+ = \frac{iQ_{ns}^+(1 + \delta_{s0})}{l \rho_s \sin \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2}.$$

Чтобы получить СЛАУ для определения коэффициентов $F_{\lambda_s}^-$, $G_{\lambda_s}^-$ в каноническом виде проведем аналогичные преобразования. Как и выше, воспользовавшись ортогональностью системы функций $\{e_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$, решим уравнение (11) относительно коэффициентов $F_{\lambda_m}^-$, затем, воспользовавшись ортогональностью собственных функций $\{Z_{\varepsilon_n}\}_{n=0}^{\infty}$, решим уравнение (15) относительно коэффициентов $G_{\lambda_n}^-$. Исключая из уравнений одну последовательность неизвестных коэффициентов, получим уравнение:

$$iG_{\lambda_s}^- \rho_s \cos \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2 = (k_y - \gamma_0) e^{ik_y \frac{h}{2}} L_{0s} + \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} G_{\lambda_n}^- Q_{n0}^- + \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} G_{\varepsilon_n}^- Q_{ns}^-,$$

где $Q_{ns}^- = \sin \rho_n \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m L_{mn} L_{ms}$. После приведения к каноническому виду это уравнение представляется следующим образом:

$$G_{\lambda_s}^- + \sum_{n=0}^{\infty} G_{\varepsilon_n}^- P_{ns}^- = V_s^-, \quad s = 0, \pm 1, \dots, \quad (20)$$

где

$$V_s^- = \frac{1}{\rho_s \cos \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2} (k_y - \gamma_0) e^{ik_y \frac{h}{2}} L_{0s}, \quad P_{ns}^- = \frac{iQ_{ns}^-(1 - \delta_{s0})}{l \rho_s \cos \rho_s \frac{h}{2} \|Z_{\varepsilon_s}\|^2}.$$

В силу введенных обозначений СЛАУ (19) и (20) можно записать в более компактной форме:

$$G_{\lambda_s}^{\pm} + \sum_{n=0}^{\infty} G_{\varepsilon_n}^{\pm} P_{ns}^{\pm} = V_s^{\pm}, \quad s = 0, \pm 1, \dots \quad (21)$$

Таким образом, получены СЛАУ (21) для нахождения амплитуд дифракционных гармоник в рассматриваемых структурах пригодны для анализа рассеянных решеткой полей при произвольных

геометрических размерах и различных материальных параметрах сред. Результаты решения СЛАУ могут рассматриваться как амплитудно-частотные характеристики для заданного угла падения φ волны или амплитудно-угловые характеристики для фиксированной длины падающей волны λ .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из условия распространения дифракционных гармоник над поверхностью структуры $(k^2 - (k\alpha + \lambda_m)^2 \geq 0)$ следует, что существует одноволновый и многоволновый режимы, которые могут отличаться в частотном диапазоне для правосторонних и левосторонних сред [1-2]. Численные результаты были получены для двух случаев. Первоначально рассмотрим СЛАУ для решетки, один из элементов которой выполнен из метаматериала комбинированная среда $(\varepsilon_1, \mu_1 > 0, \varepsilon_2, \mu_2 < 0)$, а затем для решетки, элементы которой состоят из метаматериала $(\varepsilon, \mu < 0)$. В каждом из упомянутых случаев были выделены одноволновый и многоволновый режимы. Рассмотрим сначала комбинированную решетку $(\varepsilon_2 < 0, \mu_2 < 0; \varepsilon_1 > 0, \mu_1 > 0)$.

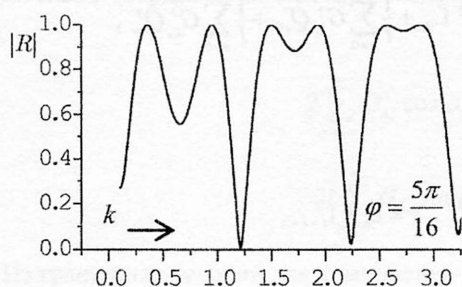


Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от k

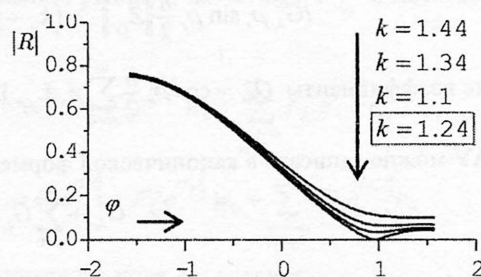


Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от φ (резонансные значения $k = 1.24, \varphi = 0.9817$)

Одноволновый случай. Рассмотрим структуру, один из элементов решетки которой имеет отрицательные материальные параметры $(\varepsilon_2 = -1, \mu_2 = -2)$, а другой – положительные $(\varepsilon_1 = 1, \mu_1 = 2)$. На рис. 2 представлена зависимость модуля коэффициента отражения $|R| = |A_{z0}|$ от волнового числа k при фиксированном угле падения $\varphi = \frac{5\pi}{16} \approx 0.9817$. На рис. 3 представлена угловая зависимость коэффициента отражения $|R|$ для нескольких значений волнового числа k . Из

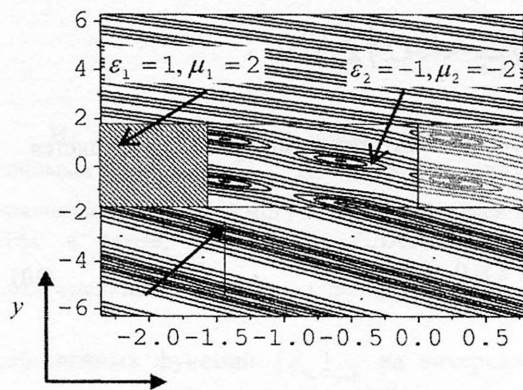


Рис. 4. Распределение амплитуды компоненты H_x поля для

$$\varphi = \frac{5\pi}{16} \approx 0.9817, k = 1.24$$

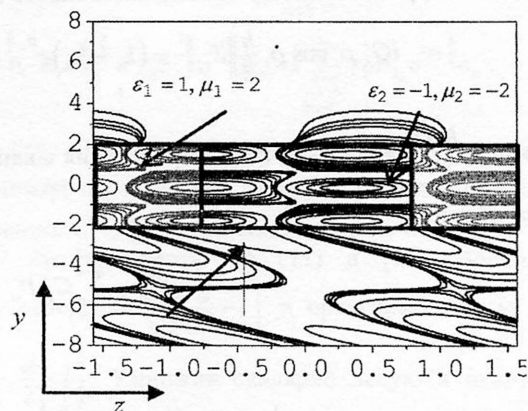


Рис. 5. Распределение амплитуды компоненты H_x поля для

$$\varphi = \frac{5\pi}{12} \approx 1.3089, k = 0.82$$

рисунков видно, что для значения волнового числа $k = 1.24$ наблюдается полное прохождение волны (коэффициент отражения $|R| = 0$) при угле падения $\varphi = \frac{5\pi}{16} \approx 0.9817$.

На рис. 4 представлены изолинии напряженности магнитного поля ($\text{Re } H_x$) в случае полного прохождения волны через решетку. Видно, что в этом случае плоская волна полностью проникает

через решетку, изменяя лишь направление распространения за счет преломляющих свойств системы. Варьируя параметрами решетки и углом падения волны φ , можно также обеспечить полное отражение волны ($|R|=1$). Изолинии поля в случае полного отражения, показаны на рис. 5. Очевидно, что в положительном направлении оси Oy за решеткой распространяющаяся волна отсутствует.

При решении исходной задачи дифракции были рассчитаны собственные значения задачи Штурма-Лиувилля – зависимости поперечного волнового числа ρ_n от параметра $\alpha = \cos \varphi$ (рис. 6) для решетки при значениях материальных параметров $\varepsilon_1 = 1, \mu_1 = 2, \varepsilon_2 = -1, \mu_2 = -2$ (аналог диаграммы Брилюэна для неограниченной в поперечном направлении решетки). Из рисунка видно, что искомые значения параметра ρ_n , в данном случае, отвечают ординатам точек пересечения решений дисперсионного уравнения и прямой $\alpha = \cos \frac{5\pi}{16} \approx .555$

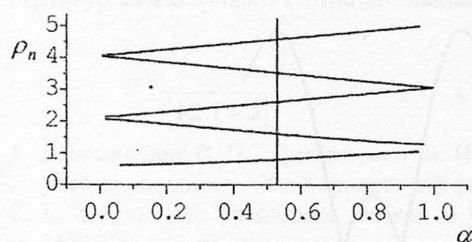


Рис. 6. Значения параметра ρ_n на плоскости параметров (α, ρ_n)

Многоволновый случай. Рассмотрим случай распространения двух пространственных гармоник. Заметим, что количество излучающихся гармоник (индекс m) может быть установлено из неравенства $k^2 - (k\alpha + \lambda_m)^2 \geq 0$. Решая это квадратное неравенство относительно λ_m , получаем:

$$-k(1+\alpha) \leq \lambda_m \leq k(1-\alpha) \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2} \frac{kl}{\pi} (1+\alpha) \leq m \leq \frac{1}{2} \frac{kl}{\pi} (1-\alpha). \quad (22)$$

Целые индексы m , удовлетворяющие неравенству (22), соответствуют распространяющимся пространственным гармоникам. Очевидно, что этому неравенству удовлетворяет также гармоника с индексом $m=0$. Эта гармоника распространяется при любых значениях волнового числа k и угле падения φ . Для примера выберем такие значения параметров, при которых распространяются две пространственные гармоники: $\varphi = \frac{\pi}{20} \approx 0.15707, k = 2.0$.

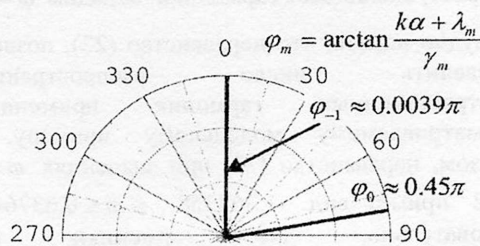


Рис. 7. Углы излучения φ_{-1}, φ_0 распространяющихся гармоник

В этом случае неравенство (22) принимает вид: $-1.98768 \leq m \leq 0.01231$. Следовательно, для выбранных значений φ и k распространяются две гармоники с индексами $m = -1, m = 0$. Эти

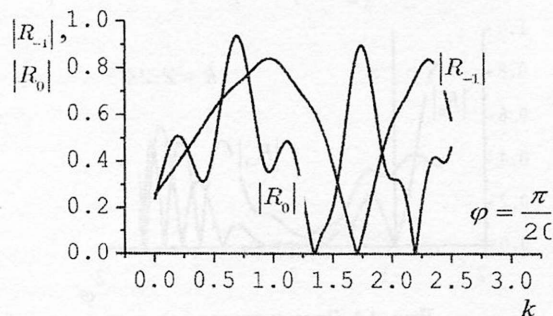


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициентов отражения $|R_{-1}|, |R_0|$ от волнового числа k

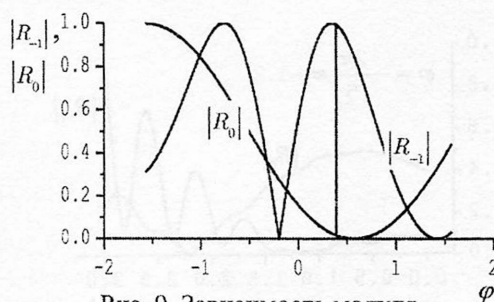


Рис. 9. Зависимость модуля коэффициентов отражения $|R_0|, |R_{-1}|$ от угла φ .

гармоники распространяются под углами $\varphi_m = \arctan \frac{k\alpha + \lambda_m}{\gamma_m} \approx 0.0039\pi; 0.45\pi$ ($m = -1, 0$)

соответственно (рис. 7). Амплитудно-частотные и амплитудно-угловые характеристики рассеянного поля для этого случая представлены на рис. 8 и 9 соответственно. Рассмотрим далее решетку из метаматериала.

Одноволновый случай. Рассмотрим решетку, целиком состоящую из метаматериала ($\varepsilon_2 = -1, \mu_2 = -2, \varepsilon_1 = -1, \mu_1 = -1$). На рис. 10 представлена зависимость модуля коэффициента отражения $|R| = |A_{\lambda_0}|$ от волнового числа k при фиксированном угле падения $\varphi = -1.2$. А на рис. 11 представлена угловая зависимость коэффициента отражения $|R|$ от угла падения φ при фиксированном значении волнового числа $k = 1.24$. Из рисунков видно, что для значения волнового числа $k = 1.24$ наблюдается полное прохождение волны (коэффициент отражения $|R| = 0$) при угле падения $\varphi = -1.2$.

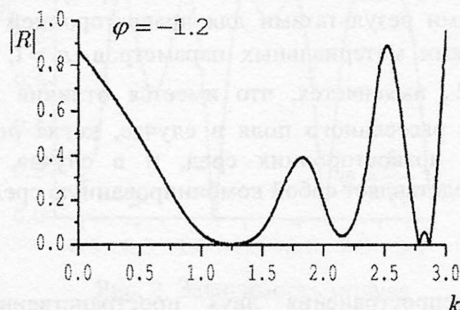


Рис. 10. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от k

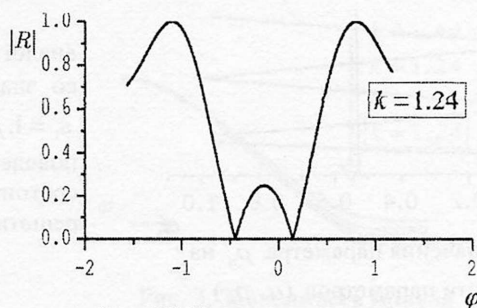


Рис. 11. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от φ (резонансные значения $k = 1.24, \varphi = -1.2$)

Многоволновый случай. Рассмотрим модельный пример, в котором наблюдается две распространяющиеся гармоники. Зададим $\varphi = -\frac{2\pi}{5} \approx -1.2$ и $k = 2$.

Нетрудно видеть, что неравенство (22), позволяющее определить число распространяющихся пространственных гармоник применимо к рассматриваемому модельному примеру. Таким образом, неравенство (22) при значениях $\varphi = -1.2$ и $k = 2$ примет вид $-1.362358... \leq m \leq 0.637642...$ и, следовательно, две гармоники, которым соответствуют индексы $m = -1, m = 0$, будут распространяющимися (рис 12). Угол распространения φ_0 гармоники с индексом $m = 0$ определяется следующим выражением

$$\varphi_0 = \arctan \frac{k\alpha}{\sqrt{k^2 - k^2\alpha^2}} = \arctan \operatorname{ctan} \varphi = -\arctan \tan \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\frac{\pi}{2} - \varphi = -0.9\pi.$$

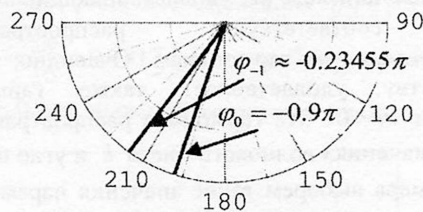


Рис. 12. Углы излучения φ_{-1}, φ_0 распространяющихся гармоник

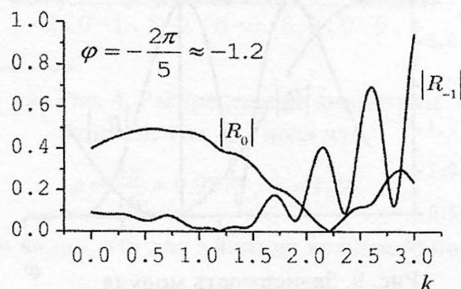


Рис. 13. Зависимость модуля коэффициентов отражения $|R_{-1}|, |R_0|$ от волнового числа k

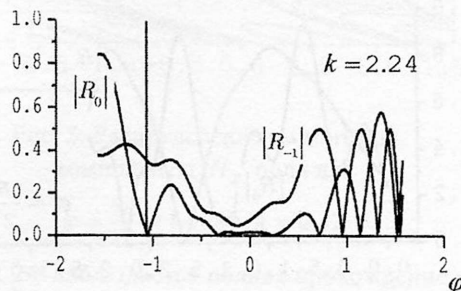


Рис. 14. Зависимость модуля коэффициентов отражения $|R_{-1}|, |R_0|$ от угла φ

Гармоника с индексом $m = -1$ распространяется под углом φ_{-1} :

$$\varphi_{-1} = \arctan \frac{k\alpha + \lambda_{-1}}{\sqrt{k^2 - (k\alpha + \lambda_{-1})^2}} = \arctan \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - (\alpha - 1)^2}} \approx -0.736875 \approx -0.234555\pi$$

$= 2\alpha - \alpha^2$

Амплитудно-частотные и амплитудно-угловые характеристики рассеянного поля, представленные на рис 13-14, соответственно.

ВЫВОДЫ

Получено строгое численное решение задачи дифракции плоской волны на решетке из метаматериала. Установленные особенности распространения волны над такой структурой позволяют моделировать различные устройства современной радиофизики при наличии в них периодических структур из материалов с отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках: учебное пособие – Х.: Харьковский университет им. Горького, 1973. – 289 с.
2. L. Solymar, E. Shamonina. Waves in Metamaterials – Oxford University Press, USA, 1st edition, 2009. – 368p.