

УДК 621.396.67

В.В. ДОЛЖИКОВ, д-р физ.- мат. наук

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ АНТЕННЫ  
С КРУГЛОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

Введение

К настоящему времени поле ряда излучающих систем (ИС) в их зоне Френеля изучено довольно обстоятельно. Однако имеющаяся в литературе информация не в полной мере удовлетворяет потребности практики. Связано это с тем, что в реальных ИС распределение источников всегда в той или иной мере случайно. Наличие случайностей в распределении источников существенно ухудшает характеристики ИС, ограничивает их потенциальные возможности. При этом, с увеличением электрических размеров ИС и усложнением их конструкции, роль различных факторов, порождающих «случайности» в амплитудно-фазовом распределении и положении источников, значительно возрастает. Это проявляется особенно заметно в крупных, сложных, дорогостоящих антеннах. В 80 – 90-х годах Я.С. Шифриным и его сотрудниками был выполнен цикл работ по построению статистической теории ИС (теории антенн со случайными источниками) в зоне Френеля применительно к линейным излучающим системам, результаты которых в обобщенном виде приведены в [1].

Изучение статистики поля ИС в их зоне Френеля на примере линейной излучающей системы (ЛИС) позволило выявить присущие этой зоне основные статистические эффекты и закономерности их изменения. Однако, с практической точки зрения, более важное значение имеют исследования для ИС с двумерными апертурами, в частности для широко распространенного типа антенн – антенн с круглой апертурой. Результаты изучения средних и флуктуационных характеристик приведены в [2, 3].

Цель работы – изучение корреляционных характеристик поля на фокальной сфере сфокусированных в зону Френеля антенн с круглой апертурой, при наличии в их раскрыве фазовых флуктуаций.

1. Исходные соотношения

Рассмотрим плоскую синфазную равномерно возбужденную круглую апертуру  $S$  радиуса  $R$ , сфокусированную в зону Френеля. Поле данной антенны в приближении Френеля с

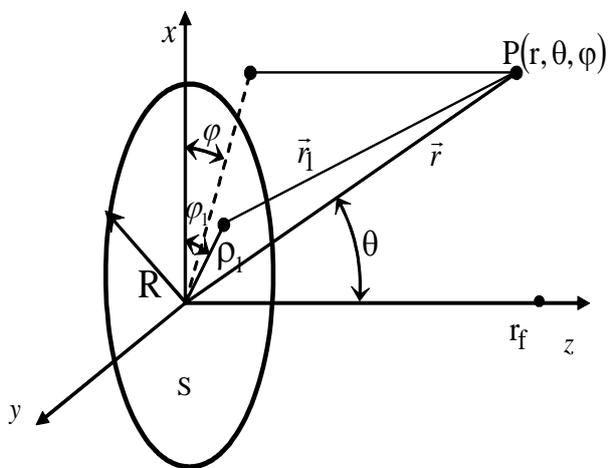


Рис. 1

точностью до несущественного множителя  $(ikE_A\pi e^{-ikr}/8)$ , где  $E_A$  – амплитуда поля на апертуре,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве, можно представить в виде [1]:

$$E_0(\zeta, \psi) = \frac{2}{\chi(\zeta)_0} \int_0^1 e^{i2\zeta u^2} J_0(u\psi) u du, \quad (1)$$

Входящие в (1) безразмерные переменные  $\psi, u$  и  $\zeta$  связаны с реальными координатами системы (см. рис.1) следующими соотношениями:

$$\psi = kR \sin \theta, \quad u = \rho_1 / R,$$

$$\zeta = \pi r_{дз} (1 - r_f / r) / 16 r_f;$$

где  $\chi(\zeta) = \pi\chi_0 / (1 - 16\chi_0\zeta/\pi) = r/r_{\text{дз}}$ ,  $r_{\text{дз}} = 8R^2/\lambda$  – расстояние до границы дальней зоны,  $\chi_0 = r_f/r_{\text{дз}}$ ,  $r_f$  – фокусное расстояние.

Множитель  $1/\chi(\zeta)$  в выражении (1) можно далее отбросить, так как в окончательных выражениях для коэффициентов корреляции (нормированных корреляционных функций) он исчезает. Соответственно, далее вместо (1) будем использовать для поля выражение

$$E_0(\zeta, \psi) = 2 \int_0^1 e^{i2\zeta u^2} J_0(u\psi) u du. \quad (2)$$

Если на апертуре имеются фазовые флуктуации  $\Phi(u, \varphi_1)$ , то вместо (2) имеем для поля отдельной реализации выражение [1]

$$E(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_S e^{i\Phi(u, \varphi_1)} e^{i2\zeta u^2} e^{i\psi u \cos(\varphi - \varphi_1)} ds. \quad (3)$$

Будем считать, что функция  $\Phi(u, \varphi_1)$  нормальная однородная по раскрытию случайная функция с нулевым средним значением, дисперсией  $\overline{\Phi^2(u, \varphi_1)} = \sigma^2(u, \varphi_1) = \alpha = \text{const}$  и коэффициентом корреляции гауссовского вида

$$r = \frac{\overline{\Phi(u, \varphi_1) \cdot \Phi(u', \varphi_1')}}{\alpha} = e^{-\frac{u^2 + u'^2 - 2uu' \cos(\varphi_1 - \varphi_1')}{c^2}}, \quad (4)$$

где числитель дроби в показателе экспоненты – квадрат расстояния между точками с координатами  $u, \varphi_1$  и  $u', \varphi_1'$ , а знаменатель – квадрат радиуса корреляции  $c$  в относительных единицах, связанного с реальным радиусом корреляции фазовых флуктуаций  $\rho_0$  соотношением  $c = \rho_0 / R$ .

Тогда, усредняя соотношение (3), получим [1]:

$$\overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} = e^{-\frac{\alpha}{2}} E_0(\zeta, \psi), \quad (5)$$

Флуктуации поля

$$\begin{aligned} \delta E(\zeta, \psi, \varphi) &= E(\zeta, \psi, \varphi) - \overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 e^{i[2\zeta u^2 + \psi u \cos(\varphi - \varphi_1)]} \left[ e^{i\Phi(u, \varphi_1)} - e^{-\frac{\alpha}{2}} \right] d\varphi_1 u du = A(\zeta, \psi, \varphi) + iB(\zeta, \psi, \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $A(\zeta, \psi, \varphi) = \text{Re} \delta E(\zeta, \psi, \varphi)$  и  $B(\zeta, \psi, \varphi) = \text{Im} \delta E(\zeta, \psi, \varphi)$  характеризуются корреляционной функцией

$$\begin{aligned} K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) &= \overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = \\ &= \overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} - \overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} \overline{E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь \* – знак комплексного сопряжения.

Значение функции  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  при  $\zeta_1 = \zeta, \psi_1 = \psi, \varphi_1 = \varphi$  определяет дисперсию флуктуаций комплексного поля:

$$K_1(\zeta, \psi, \varphi) = \overline{|\delta E(\zeta, \psi, \varphi)|^2} = \overline{|E(\zeta, \psi, \varphi)|^2} - \left| \overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} \right|^2, \quad (8)$$

где первое слагаемое есть средняя интенсивность поля, а второе – квадрат модуля среднего поля.

Функция  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  является исходной при изучении корреляций комплексного поля. При изучении корреляционных характеристик амплитуды и фазы поля наряду с функцией  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  нам потребуется также вспомогательная функции  $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ , определяемая соотношением

$$K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \frac{\overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}}{\overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} - \overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} \overline{E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}}. \quad (9)$$

Величины  $\overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}$  и  $\overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}$ , входящие в (7) и (9), при принятой в данной работе статистике фазовых флуктуаций описываются выражениями:

$$\overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-\alpha} \left\{ E_0(\zeta, \psi) E_0^*(\zeta_1, \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \right\}, \quad (10)$$

$$\overline{E(\zeta, \psi, \varphi) E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-\alpha} \left\{ E_0(\zeta, \psi) E_0(\zeta_1, \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $c_n = c/\sqrt{n}$ ,  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$  и согласно формуле (П1.7)

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) S_m^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1), \quad (12)$$

где

$$S_m^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2 + u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 \mp \zeta_1 u_1^2)} I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 du du_1.$$

Подставляя (10), (11) в (7), (9) и учитывая (5), получаем:

$$K_{1,2}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi). \quad (13)$$

Так как, согласно (7), (9) и (6)

$$K_1 = (A + iB) \cdot (A_1 + iB_1)^* = (K_{AA_1} + K_{BB_1}) + i(K_{BA_1} - K_{AB_1}),$$

и

$$K_2 = \overline{(A + iB) \cdot (A_1 + iB_1)} = (K_{AA_1} + K_{BB_1}) + i(K_{BA_1} + K_{AB_1}),$$

корреляционные функции реальной и мнимой частей флуктуаций поля  $K_{AA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ ,  $K_{BB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  и взаимные корреляционные функции  $K_{AB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ ,  $K_{BA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  выражаются через введенные функции  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  и  $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  следующим образом:

$$K_{AA_1, BB_1} = \frac{\text{Re } K_1 \pm \text{Re } K_2}{2}, \quad K_{BA_1, AB_1} = \frac{\text{Im } K_2 \pm \text{Im } K_1}{2}. \quad (14)$$

Полученные соотношения справедливы при произвольных значениях дисперсии  $\alpha$  и радиуса корреляции  $c$  фазовых флуктуаций на апертуре.

## 2. Корреляция флуктуаций комплексного поля

В общем случае корреляция флуктуаций комплексного поля описывается соотношением (8) для функции  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ .

Коэффициент корреляции флуктуаций комплексного поля (ККФП)

$$R(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_1(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma(\zeta, \psi)\sigma(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (15)$$

где  $\sigma(\zeta, \psi) = \sqrt{K_1(\zeta, \psi, \zeta, \psi, \Delta\varphi = 0)}$ .

Ограничимся далее рассмотрением случая, когда точки наблюдения принадлежат фокальной сфере.

### 2.1. Корреляция флуктуаций комплексного поля

Для точек на фокальной сфере ( $\zeta = \zeta_1 = 0$ ) поперечные<sup>1</sup> корреляционные функции будем записывать с верхним индексом “ $\perp$ ” – например,  $K_1^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi)$ ,  $R^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi)$ .

Полагая  $\zeta = \zeta_1 = 0$ , на основании (13) имеем

$$K_1^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \psi, \psi_1, \Delta\varphi), \quad (16)$$

где  $T_n^{(1)}(c_n, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  определяется выражением (П1.8).

Соответственно

$$R^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \psi, \psi, 0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \psi_1, \psi_1, 0)}}, \quad (17)$$

Как видно из (17) поперечный ККФП зависит от  $\psi$  и  $\psi_1$  для двух точек на фокальной сфере и разности их азимутальных углов  $\Delta\varphi$ . Изучение корреляционных свойств флуктуаций поля на фокальной сфере, при разных значениях  $\psi$ ,  $\psi_1$  и  $\Delta\varphi$ , является достаточно громоздким и к тому же с плохо интерпретируемыми результатами. Более интересным представляется изучение корреляции флуктуаций поля по  $\psi$  и  $\Delta\varphi$  порознь, с соответственно фиксированными  $\Delta\varphi$  и  $\psi$ . Соответствующие коэффициенты корреляции будем обозначать  $R_\psi^\perp$  и  $R_{\Delta\varphi}^\perp$ .

#### 2.1.1. Анализ $R_\psi^\perp$ при $\Delta\varphi = 0$ .

При  $\Delta\varphi = 0$  точки наблюдения лежат в полуплоскости  $\varphi = \text{const}$ .

**Флуктуации фазы на апертуре малы** ( $\alpha \ll 1$ ). В этом случае, при выяснении характера изменения коэффициента корреляции по мере изменения параметра  $c$ , в (17) достаточно ограничиться членами первого порядка малости по  $\alpha$ . Тогда

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi_1, 0) = T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, 0) / \left[ T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, 0) T_1^{(1)}(c, \psi_1, \psi_1, 0) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

<sup>1</sup> Здесь и далее вместо терминов «корреляционные функции и коэффициент корреляции в поперечном направлении» будем использовать термины «поперечные корреляционные функции и поперечный коэффициент корреляции».

При  $c \ll 1$ , учитывая, что функция  $T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, 0)$  определяется выражением (П1.14)  $T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, 0) = 2c^2 J_1(\psi - \psi_1) / (\psi - \psi_1)$ , получаем

$$R_{\psi}^{\perp}(\psi, \psi_1, 0) = 2 J_1(\psi - \psi_1) / (\psi - \psi_1). \quad (19)$$

Из (19) следует, что при малых  $c$  поперечный ККФП, с точностью до величин порядка  $c^2$ , не зависит от радиуса корреляции фазовых флуктуаций на апертуре.

При  $c \gg 1$  в (18) необходимо подставить  $T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, 0)$ , определяемое формулой (П1.19):

$$T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, 0) = 4 \frac{J_1(\psi) J_1(\psi_1)}{\psi \psi_1} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} - \frac{2 J_2(\psi) J_2(\psi_1)}{J_1(\psi) J_1(\psi_1)} \right] \right\}.$$

Соответственно

$$R_{\psi}^{\perp}(\psi, \psi_1, 0) = \frac{1 - \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} - \frac{2 J_2(\psi) J_2(\psi_1)}{J_1(\psi) J_1(\psi_1)} \right]}{\left\{ 1 - \frac{2}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} - \frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi)} - \frac{J_2^2(\psi_1)}{J_1^2(\psi_1)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\psi \psi_1} \text{sign}[J_1(\psi) J_1(\psi_1)]. \quad (20)$$

Результаты расчета величины  $R_{\psi}^{\perp}(\psi, \psi_1, 0)$  по (18) для ряда значений параметра  $c$  приведены на рис. 2, а. На рис. 2, б приведены аналогичные кривые для ЛИС, построенные по соотношениям из [3].

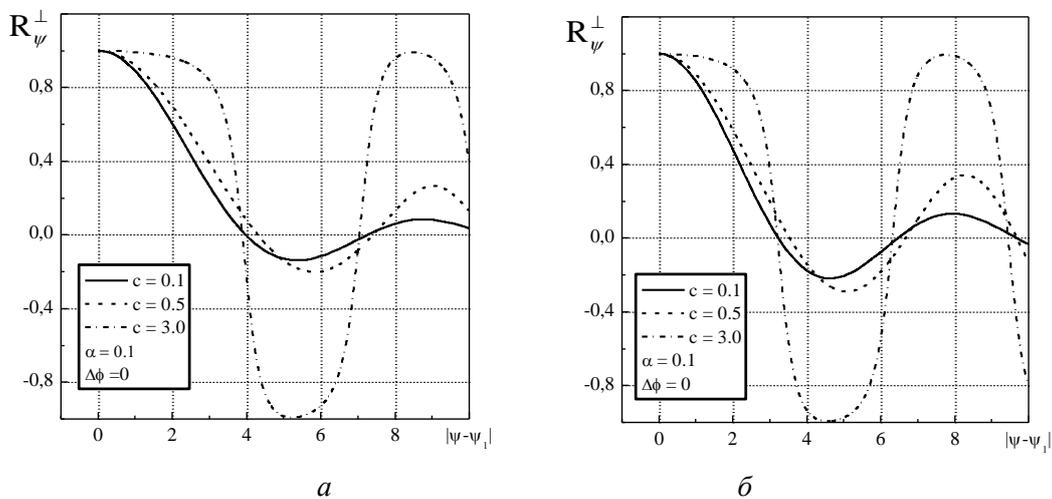


Рис. 2

При  $c \ll 1$  (сплошная кривая) угловой интервал корреляции комплексного поля равен примерно 3.3. Так как при малых  $c$  поле распределено по нормальному закону, то это означает, что поля в точках, разнесенных по  $\psi$  более чем на 3.3 независимы. Видно далее, что уже при значениях  $c$  порядка трех, ситуация близка к случаю детерминированной антенны.

При любом значении  $|\psi - \psi_1|$  коэффициент корреляции по модулю близок к единице, меняя знак при изменении  $|\psi - \psi_1|$  на величину порядка  $3.3^2$ . Картина, показанная на

<sup>2</sup> Как известно, картина поля на фокальной сфере сфокусированной антенны подобна картине поля в дальней зоне обычной (несфокусированной) антенны. Ширина главного лепестка ДН антенны с круглой апертурой в единицах  $\psi$  составляет  $\approx 3.3$ . Соответственно результаты рис. 2, а означают, что при малых  $c$  поля в сосед-

рис. 2, а качественно присуща (см. рис. 2, б) и линейной излучающей системе. При этом случае  $c \ll 1$  (сплошная кривая) соответствует функция  $\sin \psi / \psi$ , где  $\psi = (kL/2) \sin \theta$  и  $L$  – длина ЛИС, а  $\theta$  – угол, отсчитываемый от нормали к оси антенны.

**Флуктуации фазы на апертуре велики ( $\alpha \gg 1$ ).** В этом случае, согласно (П2.5)

$$K_1^\perp(\psi, \psi_1, 0) = T_1^{(1)}(c_\alpha, \psi, \psi_1, 0), \quad (21)$$

где  $c_\alpha = c/\sqrt{\alpha}$ .

Учитывая (21), из выражения (15) придем к соотношению типа (18) с заменой в нем величины  $c$  на  $c_\alpha$ . Соответственно при  $c \ll 1$  и при  $c \gg 1$  имеем соотношения (19) и (20) с той же заменой  $c$  на  $c_\alpha$ .

**Радиус корреляции мал.** При  $c \ll 1$ , подставляя выражение (П1.14) для  $T_n^{(1)}(c_n, \psi, \psi_1, 0)$  в (17), для коэффициента корреляции  $R_\psi^\perp(\psi, \psi_1, 0)$  получим:

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi_1, 0) = 2J_1(\psi - \psi_1)/(\psi - \psi_1).$$

Таким образом, при малых  $c$  поперечный ККФП описывается выражением, совпадающим с (19) и сплошной кривой на рис. 2, а, и не зависит от величины дисперсии фазовых флуктуаций на апертуре.

### 2.1.2. Анализ $R_\psi^\perp$ в симметричных точках ( $\Delta\varphi = \pi$ ).

Симметричные точки на фокальной сфере определяются условиями  $\psi = \psi_1$  и  $\Delta\varphi = \pi$

При этих условиях согласно (15)

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi, \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c, \psi, \psi, \pi) / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c, \psi, \psi, 0). \quad (22)$$

Соотношение (22) определяет ККФП при любых значениях дисперсии  $\alpha$  и радиусов корреляции  $c$  флуктуаций фазы на апертуре.

**Флуктуации фазы на апертуре малы ( $\alpha \ll 1$ ).** С точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$  из (22) имеем

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi, \pi) = T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, \pi) / T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, 0). \quad (23)$$

Используя далее (П1.14) и (П1.19), из (23) получим:

при  $c \ll 1$

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi, \pi) = J_1(2\psi)/\psi, \quad (24)$$

при  $c \gg 1$

$$R_\psi^\perp(\psi, \psi, \pi) = \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} + 2 \frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi)} \right] \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - 2 \frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi)} \right] \right\}. \quad (25)$$

Соотношение (24) совпадает с (19), если учесть, что для симметрично расположенных точек величина  $2\psi$  играет роль величины  $|\psi - \psi_1|$  для случая, когда точки наблюдения расположены по одну сторону от фокальной оси ( $\Delta\varphi = 0$ ).

них лепестках ДН антенны с круглой апертурой независимы, а уже при  $c$  порядка трех при любом разное точек наблюдения ККФП по модулю близок к единице, меняя знак при переходе от одного лепестка ДН к другому.

На рис. 3, а приведены построенные по формуле (23) зависимости ККФП от величины  $2\psi$  при малых флуктуациях фазы на апертуре. Аналогичные кривые для ЛИС в дальней зоне, построенные по соотношениям из [3], приведены на рис. 3, б.

Из сравнения рис. 2, а и 3, а следует, что при малых радиусах корреляции, вплоть до  $c = 0.5$ , корреляционный интервал практически не зависит от того, расположены ли точки наблюдения с одной стороны от фокальной оси ( $\Delta\varphi = 0$ ) или симметрично ( $\Delta\varphi = \pi$ ) относительно её (см. также (19) и (24)). Аналогичное имеет место и для ЛИС (рис. 2, б и 3, б).

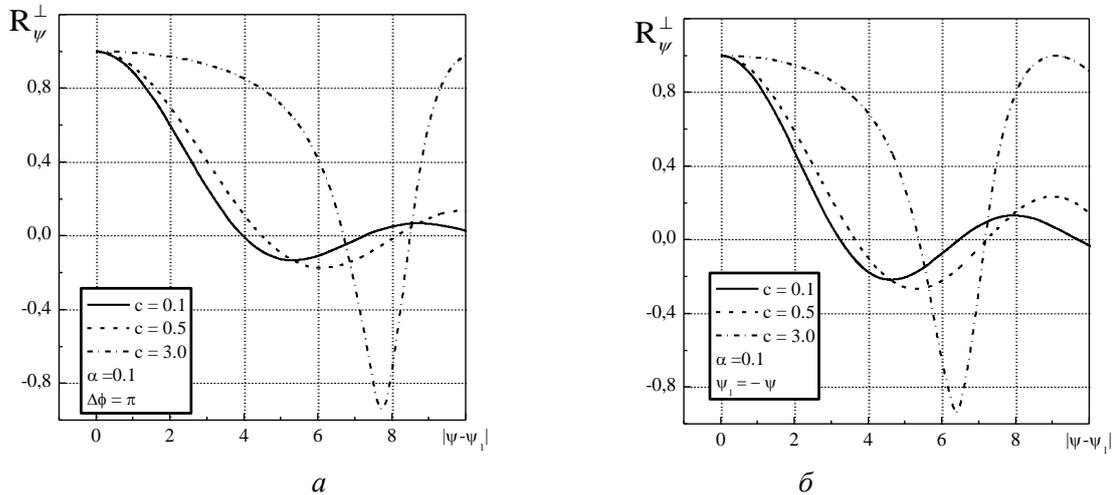


Рис. 3

**Флуктуации фазы на апертуре велики ( $\alpha \gg 1$ ).** Согласно (П2.5) при  $\zeta = \zeta_1$  и  $\Delta\varphi = \pi$   $K_1^\perp(\psi, \psi_1, \pi) = T_1^{(1)}(c_\alpha, \psi, \psi_1, \pi)$  и ККФП при произвольных радиусах корреляции описывается выражением (23), а при  $c_\alpha \ll 1$  и  $c_\alpha \gg 1$  соотношениями (24) и (25) соответственно с заменой  $c$  на  $c_\alpha$ .

**Радиус корреляции мал.** При малых радиусах корреляции ( $c \ll 1$ ) и произвольных значениях дисперсии  $\alpha$  из (23) и (П1.14) для ККФП получаем выражение

$$R_{\psi}^\perp(\psi, \psi, \pi) = J_1(2\psi)/\psi,$$

совпадающее с (24), из которого следует, что коэффициент корреляции при малых  $c$  не зависит от  $\alpha$ .

### 2.1.3. Анализ $R_{\Delta\varphi}^\perp$ (корреляция поля по азимуту при $\psi = \psi_1$ ).

При  $\psi = \psi_1$  на основании (17) имеем:

$$R_{\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c, \psi, \psi, 0)}, \quad (26)$$

где  $T_n^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi)$  определяется формулой (П1.8).

**Флуктуации фазы на апертуре малы ( $\alpha \ll 1$ ).** В этом случае в (26) достаточно ограничиться слагаемыми с  $n = 1$ . Соответственно имеем

$$R_{\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) = T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi) / T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, 0). \quad (27)$$

Учитывая (П1.14) и (П1.19), для малых и больших значений радиусов корреляции фазовых ошибок на апертуре получаем следующие выражения:

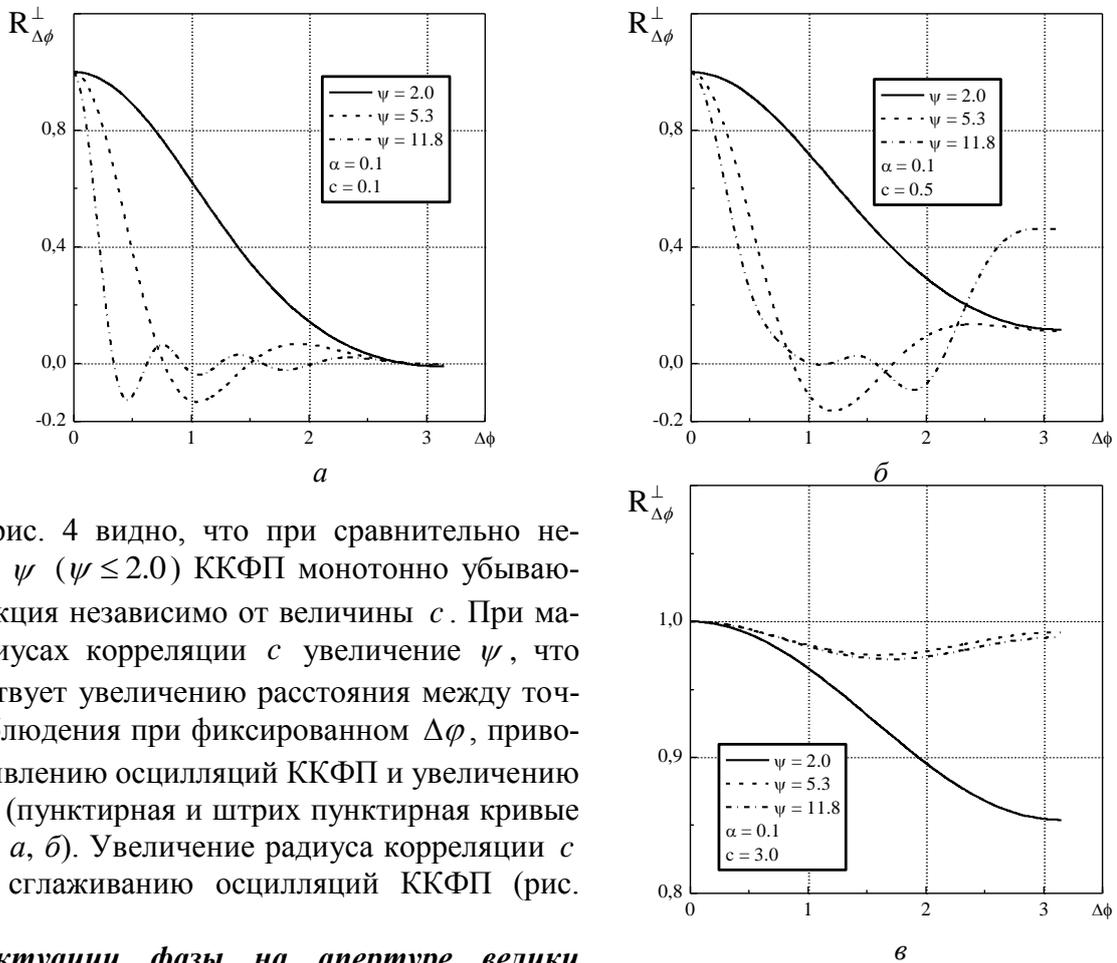
для  $c \ll 1$

$$R_{\Delta\varphi}^{\perp}(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\Delta\varphi) \left[ J_m^2(\psi) - J_{m-1}(\psi) J_{m+1}(\psi) \right], \quad (28)$$

для  $c \gg 1$

$$R_{\Delta\varphi}^{\perp}(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \frac{\left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} \right) \right] + \frac{2}{c^2} \frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi)} \cos(\Delta\varphi)}{\left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} \right) \right] + \frac{2}{c^2} \frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi)}}. \quad (29)$$

На рис. 4 приведены кривые  $R_{\Delta\varphi}^{\perp}$  при  $c = 0.1, 0.5, 3.0$  для ряда значений  $\psi$  (значение  $\psi = 2.0$  примерно соответствует координате  $0.5|E_0|_{\max}^2$  углового распределения (по  $\psi$ ) распределения интенсивности невозмущенного поля на фокальной сфере, а значения  $\psi = 5.3$  и  $11.8$  – максимумам первого и третьего боковых лепестков этого распределения).



Из рис. 4 видно, что при сравнительно небольших  $\psi$  ( $\psi \leq 2.0$ ) ККФП монотонно убывающая функция независимо от величины  $c$ . При малых радиусах корреляции  $c$  увеличение  $\psi$ , что соответствует увеличению расстояния между точками наблюдения при фиксированном  $\Delta\varphi$ , приводит к появлению осцилляций ККФП и увеличению их числа (пунктирная и штрих пунктирная кривые на рис 4, а, б). Увеличение радиуса корреляции  $c$  ведет к сглаживанию осцилляций ККФП (рис. 4, в).

### Флуктуации фазы на апертуре велики ( $\alpha \gg 1$ ).

Согласно (П2.5)

$$K_{\Gamma}^{\perp}(\psi, \psi, \Delta\varphi) = T_{\Gamma}^{(1)}(c_{\alpha}, \psi, \psi, \Delta\varphi)$$

и коэффициент корреляции при  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$  описывается соотношениями (28) и (29) и кривыми, приведенными на рис. 4 с заменой  $c$  на  $c_{\alpha}$ .

Рис. 4

**Радиус корреляции мал ( $\epsilon \ll 1$ ).** В этом случае ККФП определяется выражением (28)

и не зависит от уровня фазовых флуктуаций на апертуре, зависимость его от  $\Delta\varphi$  показана на рис. 4, а

### 3. Корреляция амплитуд и фаз поля

При изучении этого вопроса ограничимся случаем малых фазовых флуктуаций в апертуре ( $\alpha \ll 1$ ). При этом флуктуации амплитуды  $\delta P$  и фазы  $\delta\Psi$  комплексного поля сфокусированной в зону Френеля круглой апертуры в предположении, что  $|E_0(\zeta, \psi)| \gg \delta P(\zeta, \psi)$  описываются следующими выражениями [2]:

$$\delta P(\zeta, \psi, \varphi) = \cos \Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E) + \sin \Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E), \quad (30)$$

$$\delta\Psi(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)|} [\cos \Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E) - \sin \Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E)], \quad (31)$$

где величины с нижним нулевым индексом относятся к случаю, когда флуктуации фазы на апертуре отсутствуют.

Введем величины  $C_0(\zeta, \psi) = \operatorname{Re} E_0(\zeta, \psi)$ ,  $D_0(\zeta, \psi) = \operatorname{Im} E_0(\zeta, \psi)$  и учтем, что  $\cos \Psi_0 = C_0(\zeta, \psi)/|E_0(\zeta, \psi)|$ ,  $\sin \Psi_0 = D_0(\zeta, \psi)/|E_0(\zeta, \psi)|$ . Тогда, учитывая (7), получим

$$\delta P(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)|} [C_0(\zeta, \psi)A(\zeta, \psi, \varphi) + D_0(\zeta, \psi)B(\zeta, \psi, \varphi)],$$

$$\delta\Psi(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)|^2} [C_0(\zeta, \psi)B(\zeta, \psi, \varphi) - D_0(\zeta, \psi)A(\zeta, \psi, \varphi)].$$

Корреляционные функции флуктуаций амплитуды  $K_{PP_1}$ , фазы  $K_{\Psi\Psi_1}$  и их взаимные корреляционные функции  $K_{P\Psi_1}$ ,  $K_{\Psi P_1}$  запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} &K_{PP_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \\ &|E_0(\zeta, \psi)||E_0(\zeta_1, \psi_1)|K_{\Psi\Psi_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)||E_0(\zeta_1, \psi_1)|} \times, \quad (32)$$

$$\times [C_0C_{01}K_{AA_1, BB_1} + D_0D_{01}K_{BB_1, AA} \pm C_0D_{01}K_{AB_1, BA_1} \pm D_0C_{01}K_{BA_1, AB_1}]$$

$$K_{P\Psi_1, \Psi P_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)||E_0(\zeta_1, \psi_1)|^2} \times, \quad (33)$$

$$\times [C_0C_{01}K_{AB_1, BA_1} - D_0D_{01}K_{BA_1, AB_1} \mp C_0D_{01}K_{AA_1, BB_1} \pm D_0C_{10}K_{BB_1, AA_1}]$$

где  $K_{AA_1, BB_1}$  и  $K_{AB_1, BA_1}$  определены соотношением (14).

Коэффициент корреляции флуктуаций амплитуды (ККФА)  $R_{PP_1}$  и фазы (ККФФ)  $R_{\Psi\Psi_1}$ , а также коэффициенты взаимной корреляции  $R_{P\Psi_1}$ ,  $R_{\Psi P_1}$  определяются выражениями:

$$R_{PP_1, \Psi\Psi_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{PP_1, \Psi\Psi_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{P, \Psi}(\zeta, \psi)\sigma_{P_1, \Psi_1}(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (34)$$

$$R_{P\Psi_1, \Psi P_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{P\Psi_1, \Psi P_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{P, \Psi}(\zeta, \psi)\sigma_{\Psi_1, P_1}(\zeta_1, \psi_1)}. \quad (35)$$

Рассмотрим далее случай, когда точки наблюдения находятся на фокальной сфере.

### 3.1. Корреляция амплитуд и фаз поля на фокальной сфере

На фокальной сфере ( $\zeta = \zeta_1 = 0$ ).

Согласно (2)  $E_0(0, \psi) = 2J_1(\psi)/\psi$ ,  $C_0(0, \psi) = 2J_1(\psi)/\psi$ ,  $D_0(0, \psi) = 0$  и, соответственно,  $\Psi_0(\psi)$  равно 0 или  $\pi$ .

Из (14), учитывая, что на основании (13) и (П1.8) для точек на фокальной сфере при малых флуктуациях  $K_{1,2}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = \pm \alpha T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  вещественные функции, получим:

$$K_{AA_1, BB_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{1}{2} \left[ K_1^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) \pm K_2^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) \right], \quad (36)$$

$$K_{AB_1, BA_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 0.$$

Для корреляционных и взаимных корреляционных функций амплитуды и фазы из (32), (33) и (14) имеем

$$\left. \begin{array}{l} K_{PP_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) \\ \left| \frac{8J_1(\psi)J_1(\psi_1)}{\psi\psi_1} \right| K_{\Psi\Psi_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) \end{array} \right\} = \alpha \left[ \begin{array}{l} T_1^{(1)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) \mp \\ \mp T_1^{(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) \end{array} \right] \text{sign}[J_1(\psi)J_1(\psi_1)], \quad (37)$$

$$K_{P\Psi_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = K_{\Psi P_1}^\perp(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 0. \quad (38)$$

Из (38) следует, что на фокальной сфере флуктуации амплитуд и фаз не коррелированы. Аналогичное имеет место и для ЛИС [3] в дальней зоне.

#### 3.1.1. Анализ $R_{PP, \psi}^\perp$ и $R_{\Psi\Psi, \psi}^\perp$ при $\Delta\varphi = 0$ .

Для точек наблюдения, лежащих в плоскости  $\varphi = const$ , с учетом того, что  $\Delta\varphi = 0$ , для произвольных  $c$   $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, 0)$  определено выражением (П1.8).

Выясним характер изменения коэффициентов корреляций по мере изменения параметра  $c$ . При  $c \ll 1$ , учитывая (П1.14) для  $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, 0)$ , из (37):

$$R_{PP_1, \Psi\Psi_1}^\perp(\psi, \psi_1, 0) = 2 \frac{\frac{J_1(\psi - \psi_1)}{\psi - \psi_1} \mp \frac{J_1(\psi + \psi_1)}{\psi + \psi_1}}{\sqrt{1 \mp J_1(2\psi)/\psi} \sqrt{1 \mp J_1(2\psi_1)/\psi_1}} \text{sign}[J_1(\psi)J_1(\psi_1)], \quad (39)$$

при  $c \gg 1$  функция  $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, 0)$  описывается формулой (П1.19) при  $n = 1$  и, соответственно, для ККФА и ККФФ получаем:

$$R_{PP_1, \Psi\Psi_1}^\perp(\psi, \psi_1, 0) = 1 - O(1/c^4). \quad (40)$$

Последнее означает, что при  $c \square 1$ , с точностью до величин третьего порядка малости по  $(1/c)$  включительно флуктуации амплитуд и фаз поля на фокальной сфере коррелированы.

На рис. 5 приведены графики поперечных коэффициентов корреляции флуктуаций амплитуды и фазы поля на фокальной сфере при различных значениях радиуса корреляции

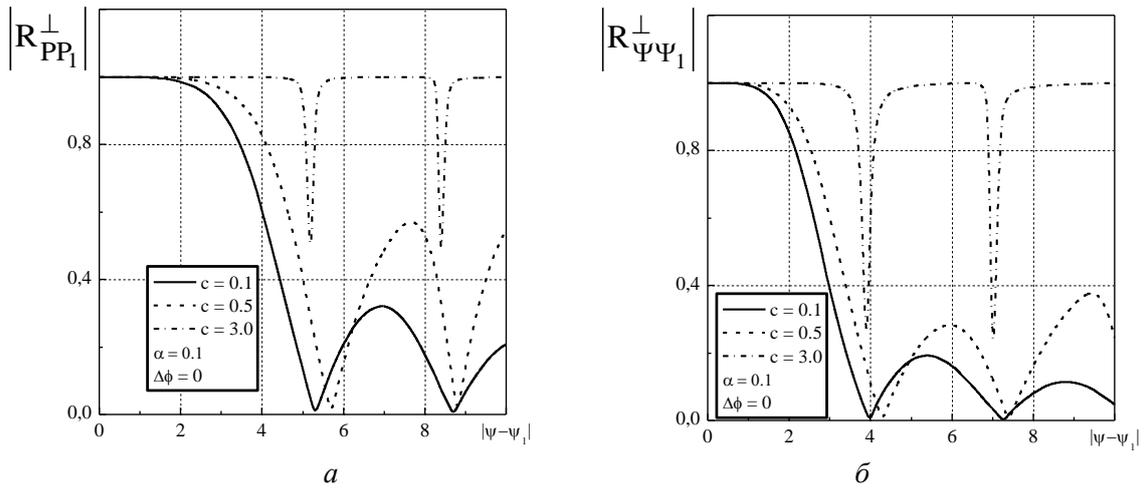


Рис. 5

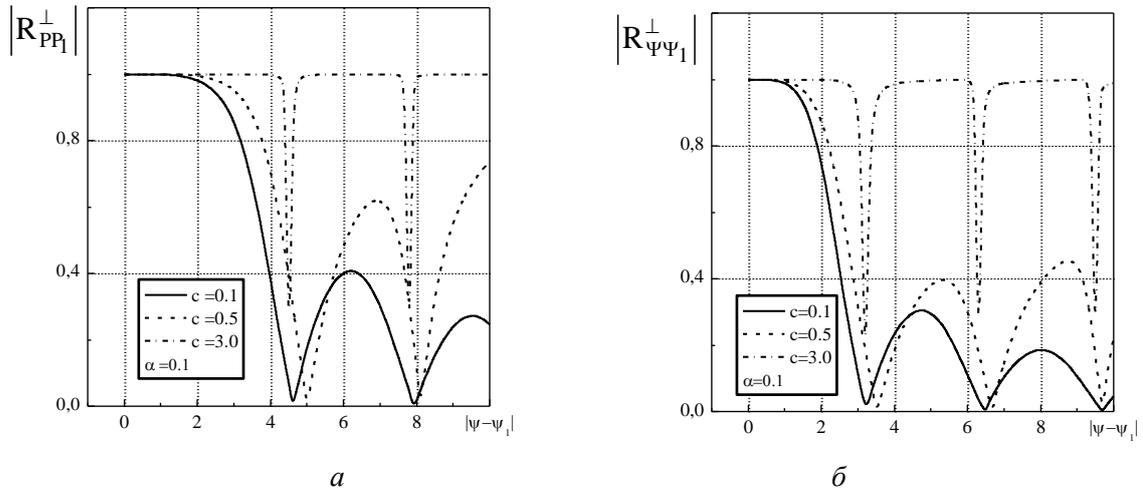


Рис. 6

флуктуаций фазы на апертуре, а на рис. 6 – аналогичные графики для ЛИС, построенные по соотношениям из [3].

Видно, что интервал корреляции растет с увеличением радиуса корреляции флуктуаций фазы на апертуре. При этом интервал корреляции флуктуаций амплитуды  $\Delta\psi_P^\perp$  больше, чем интервал корреляции флуктуаций фазы  $\Delta\psi_\Psi^\perp$ . Расчеты показали, что отношение  $\Delta\psi_P^\perp / \Delta\psi_\Psi^\perp \approx 1.5$ . Такое же значение  $\Delta\psi_P^\perp / \Delta\psi_\Psi^\perp$  имеет место и для ЛИС.

### 3.1.2. Анализ $R_{PP,\psi}^\perp$ и $R_{\Psi\Psi,\psi}^\perp$ в симметричных точках ( $\Delta\varphi = \pi$ ).

В симметричных точках  $\Delta\varphi = \pi$ ,  $\psi = \psi_1$  и согласно (12)

$$T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi, \pi) = T_1^{(2),(1)}(c, \psi, \psi, 0)$$

при любых значениях радиуса корреляции флуктуаций фазы на апертуре  $c$ .

Соответственно для поперечных ККФА и ККФФ из (34) с учетом (37) имеем:

$$R_{PP_1}^\perp(\psi, \psi, \pi) = -1, \quad R_{\Psi\Psi_1}^\perp(\psi, \psi, \pi) = 1. \quad (41)$$

На фокальной сфере в симметричных точках (равно как и в точках дальней зоны, симметричных относительно направления главного максимума ДН) флуктуации амплитуды и

фазы жестко коррелированы при любых  $\psi$  и  $c$ . Однако при этом ККФА и ККФФ имеют противоположные знаки. Аналогичное имеет место и для ЛИС [3].

### 3.1.3. Анализ $R_{PP,\Delta\varphi}^\perp$ и $R_{\Psi\Psi,\Delta\varphi}^\perp$ (корреляции поля по азимуту, $\psi = \psi_1$ )

Из соотношений (37) при  $\psi_1 = \psi$  имеем

$$\left. \begin{aligned} &K_{PP,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) \\ &\left[ 8J_1^2(\psi)/\psi^2 \right] K_{\Psi\Psi,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) \end{aligned} \right\} = \alpha \left[ T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi) \mp T_1^{(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi) \right], \quad (42)$$

где  $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi)$  определяются выражением (П1.8).

Так как, согласно (П1.9)  $T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi = \pi/2) = T_1^{(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi = \pi/2)$ , то из (42) следует, что при малых флуктуациях фазы поля на апертуре и любых значениях их радиусов корреляции  $c$ , флуктуации амплитуды в любых двух точках, разность азимутальных углов которых равна  $\pi/2$ , не коррелированы. При этом ККФФ определяется соотношением

$$\left[ 8J_1^2(\psi)/\psi^2 \right] K_{\Psi\Psi,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \pi/2) = T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi) / T_1^{(1)}(c, \psi, \psi, 0).$$

Применительно к дальней зоне синфазной круглой апертуры это означает, что в любых двух ортогональных главных плоскостях ДН флуктуации амплитуд поля не коррелированы.

Рассмотрим последовательно случаи малых и больших радиусов корреляции.

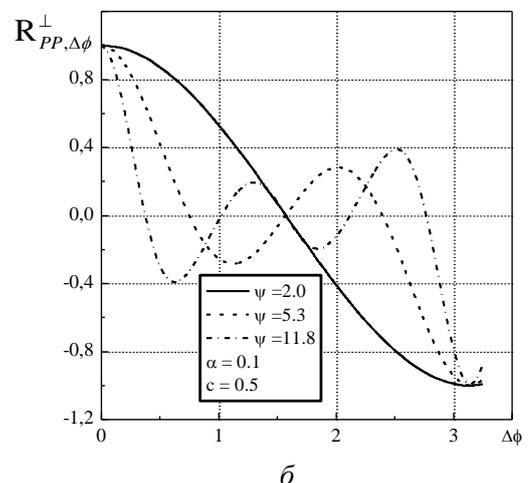
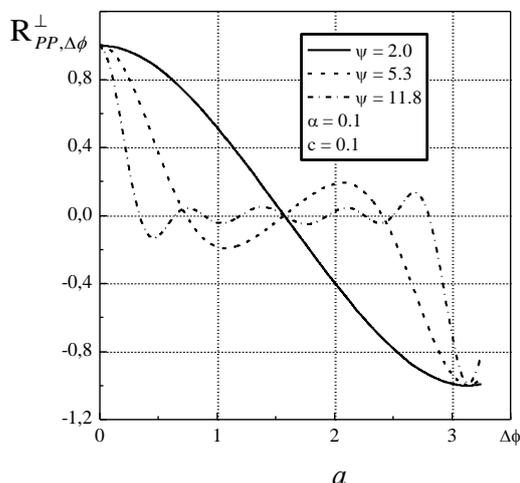
**Радиусы корреляции малы ( $c \ll 1$ ).** Подставив в (42) выражение (П1.13) для  $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi)$  и учитывая (34), получим

$$R_{PP,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \cos[(2m+1)\Delta\varphi] \left[ J_{2m+1}^2(\psi) - J_{2k}(\psi)J_{2m+2}(\psi) \right]}{1 + [J_0(2\psi) + J_2(2\psi)]}, \quad (43)$$

$$R_{\Psi\Psi,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(2m\Delta\varphi) \left[ J_{2m}^2(\psi) - J_{2m-1}(\psi)J_{2m+1}(\psi) \right]}{1 - [J_0(2\psi) + J_2(2\psi)]}. \quad (44)$$

**Радиусы корреляции велики ( $c \gg 1$ ).** В этом случае для  $T_1^{(1),(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi)$  воспользуемся выражением (П1.19), тогда

$$R_{PP,\Delta\varphi}^\perp(\psi, \psi, \Delta\varphi) = \cos \Delta\varphi, \quad (45)$$



$$R_{\Psi\Psi,\Delta\varphi}^{\perp}(\psi,\psi,\Delta\varphi)=1. \quad (46)$$

На рис. 7 и 8 приведены поперечные ККФА и ККФФ для нескольких значений радиуса корреляции и различных значений угла  $\psi$ , построенные по формулам (36).

Из (43), (44) и рис. 7, а, б; 8, а, б видно, что при малых радиусах корреляции флуктуаций фазы на апертуре  $c$  азимутальная зависимость поперечных ККФА и ККФФ различна для различных  $\psi$ . С увеличением  $\psi$  при фиксированном  $\Delta\varphi$  увеличивается расстояние между точками наблюдения, что приводит к появлению

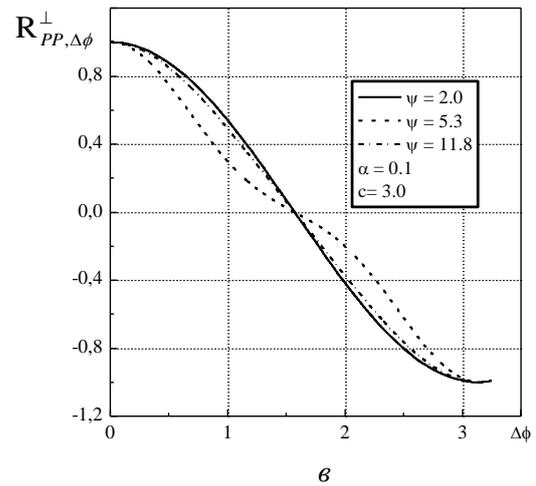
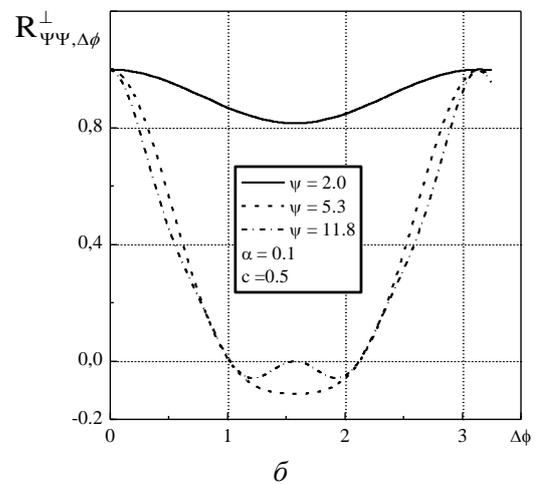
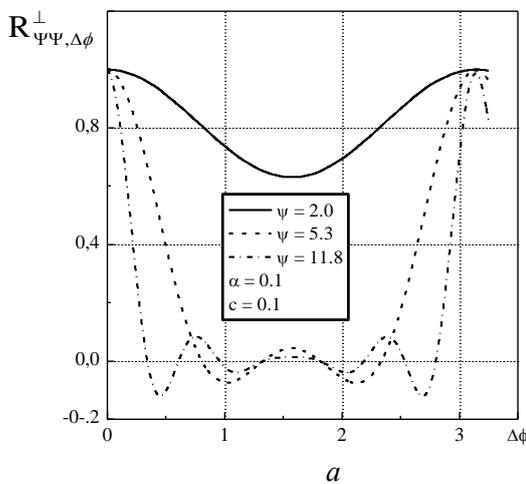


Рис. 7



осцилляций и росту их числа. При этом  $R_{PP,\Delta\varphi}^{\perp}$  – несимметричная функция относительно точки  $\Delta\varphi = \pi/2$ , в которой она обращается в нуль, а ККФФ – симметричная функция относительно  $\Delta\varphi = \pi/2$  и имеет в ней локальный минимум или максимум (44). С ростом  $c$  осцилляции ККФА и ККФФ сглаживаются (рис. 7, б, в; 8, б, в).

### Заключение

В работе получены выражения для корреляционных и взаимных корреляционных функций вещественной и мнимой компонент поля, а также для амплитуды и фазы этого поля в зоне Френеля. Проанализированы зависимости указанных характеристик от параметров фазовых флуктуаций – их дисперсии и радиуса корреляции. Полученные результаты будут полезны при оценке разброса случайной ДН (амплитудной, фазовой, поляризационной в определенном угловом секторе), необходимого при решении ряда важных прикладных задач. К числу таковых можно, в частности, отнести задачу анализа потенциальной точности моноимпульсных РЛС или фазовых пеленгаторов, работающих в неоднородной среде, расчет надежности систем углового разнесенного приема.

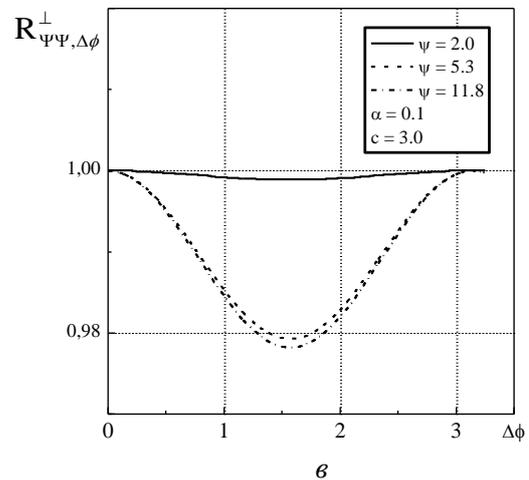


Рис. 8

**Вычисление функций**  $T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$ .

П1.1. Общие выражения

Исходные выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$  имеют вид:

$$T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \int_S \int_{S'} e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 \mp \zeta_1 u_1^2)} F^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) u u_1 du du_1, \quad (\text{П1.1})$$

где  $c_n = c/\sqrt{n}$  и

$$F^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} e^{i[u\psi \cos(\varphi - \varphi') \mp u_1\psi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')]} d\varphi' d\varphi_1'. \quad (\text{П1.2})$$

Введем ряд переменных:  $\eta' = \varphi - \varphi'$ ,  $\eta_1' = \varphi - \varphi_1'$ ,  $\theta = \varphi_1' - \varphi'$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ , и заметим, что  $\eta_1' - \eta' = \theta + \Delta\varphi$ .

С учётом новых переменных экспоненциальные множители в (П1.2) запишутся следующим образом:

$$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} = e^{x \cos \theta}, \quad e^{i\psi u \cos(\varphi - \varphi')} = e^{iy \cos \eta'}, \quad e^{\mp i\psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')} = e^{\mp iy_1 \cos \eta_1'},$$

где  $x = 2uu_1/c_n^2$ ,  $y = \psi u$ ,  $y_1 = \psi_1 u_1$ .

Воспользуемся формулами Якоби-Ангера для производящих функций [5]:

$$e^{\mp iz \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mp i)^n e^{in\varphi} J_n(z), \quad e^{z \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} I_n(z). \quad (\text{П1.3})$$

где  $J_n(z)$  и  $I_n(z)$  – функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя  $n$ -го порядка соответственно.

С учетом (П1.3) и введенных обозначений будем иметь:

$$e^{iy \cos \eta'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\psi u), \quad e^{\mp iy_1 \cos \eta_1'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mp 1)^n i^n e^{im\eta_1'} J_n(\psi_1 u_1),$$

$$e^{i[\psi u \cos(\varphi - \varphi') \mp \psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')]} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (\mp 1)^n i^{n+m} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} J_n(\psi u) J_m(\psi_1 u_1),$$

$$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right).$$

Тогда (П1.2) принимает вид

$$F^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) = \sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty} (\mp 1)^m i^{n+m} I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_n(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} d\eta' d\eta_1'. \quad (\text{П1.4})$$

Интегрирование по  $\eta'$  и  $\eta_1'$  дает следующий результат:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} d\eta' d\eta_1' = 4\pi^2 \delta_{n,k} \delta_{n,(-m)}, \quad (\text{П1.5})$$

где  $\delta_{n,k}$  – символ Кронекера.

Подставив (П1.5) в (П1.4), после ряда преобразований получим:

$$F^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1), \quad (\text{П1.6})$$

и для  $T_n^{(1),(2)}(c, u, u_1, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  соответственно имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 \mp \zeta_1 u_1^2)} I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 dud u_1 \quad (\text{П1.7})$$

П1.2. Асимптотические выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  при  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$ .

При произвольных  $c$  из (П1.7), полагая  $\zeta = \zeta_1 = 0$  и опуская эти нулевые значения из перечня аргументов, имеем:

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) S_m(c_n, \psi, \psi_1), \quad (\text{П1.8})$$

где

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 dud u_1.$$

Заметим, что при  $\Delta\varphi = \pi/2$  в (П1.8) будут отличны от нуля слагаемые только с четным значением  $m$ . Тогда, полагая  $m = 2k$ , получим

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \pi/2) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{0,2k})(-1)^k S_{2k}(c_n, \psi, \psi_1), \quad (\text{П1.9})$$

то есть  $T_n^{(1)}(c, \psi, \psi_1, \pi/2) = T_n^{(2)}(c, \psi, \psi_1, \pi/2)$ .

Рассмотрим случай  $c \ll 1$ . Введем следующие обозначения:

$$f_m(u, u_1) = e^{-\frac{2uu_1}{c_n^2}} I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1, \quad s(u_1) = -(u - u_1)^2$$

Тогда  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  в (П1.8) примет вид:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{s(u_1)}{c_n^2}} f_m(u, u_1) du_1 du \quad (\text{П1.10})$$

Внутренний интеграл по  $u_1$  в (П1.10) является интегралом Лапласа и для вычисления его асимптотического (при  $c \rightarrow 0$ ) значения воспользуемся следующим разложением [7]:

$$\int_0^1 e^{-\frac{s(u_1)}{c_n^2}} f_m(u, u_1) du_1 \approx e^{-\frac{s(u=u_1)}{c_n^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2(k+\frac{1}{2})},$$

где

$$b_k = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2k)!} \left( \frac{d}{du_1} \right)^k \left\{ f_m(u_1, u) \left[ \frac{2(s(u_1=u) - S(u_1, u))}{(u_1 - u)^2} \right]^{-k-\frac{1}{2}} \right\} \Big|_{u_1=u}$$

и ограничимся в нем главным членом. Тогда для  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  имеем:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = c_n \sqrt{\pi} \int_0^1 e^{-\frac{2u^2}{c_n^2}} I_m\left(\frac{2u^2}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u) u^2 du.$$

При вычислении интеграла при  $c \rightarrow 0$ , используем асимптотическое разложение  $\exp(-2u^2/c_n^2) I_m(-2u^2/c_n^2)$  при больших значениях аргумента [7] и, ограничившись в нем членами второго порядка малости по  $c_n$ , для  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  имеем:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{c_n^2}{2} \frac{\psi J_{m+1}(\psi) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2}. \quad (\text{П1.11})$$

Подставив (П1.11) в (П1.8), получим окончательное выражение при  $c \ll 1$

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 2c_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) \frac{\psi J_{m+1}(\psi u) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2}. \quad (\text{П1.12})$$

Для  $\psi_1 = \psi$  с учетом того, что

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow \psi} \frac{\psi J_{m+1}(\psi) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2} = \frac{1}{2} \left[ J_m^2(\psi) - J_{m-1}(\psi) J_{m+1}(\psi) \right],$$

получим

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi, \Delta\varphi) = c_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) \left[ J_m^2(\psi) - J_{m-1}(\psi) J_{m+1}(\psi) \right]. \quad (\text{П1.13})$$

В частных случаях, когда  $\Delta\varphi = 0$  или  $\Delta\varphi = \pi$ , учитывая, что [6]

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \frac{\psi J_{m+1}(\psi u) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2} = \frac{J_1(\psi \mp \psi_1)}{\psi \mp \psi_1}$$

для  $T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, 0)$  и  $T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \pi)$  имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \psi, \psi_1, 0) = T_n^{(2),(1)}(c_n, \psi, \psi_1, \pi) = 2c_n^2 \frac{J_1(\psi \mp \psi_1)}{\psi \mp \psi_1}. \quad (\text{П1.14})$$

Рассмотрим теперь случай  $c \gg 1$ . Для получения асимптотического выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  воспользуемся разложением  $I_m(2uu_1/c_n^2)$  [6]:

$$I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{u^{2k+m} u_1^{m+2k}}{c_n^{2(m+2k)}}.$$

Тогда  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  в (П1.8) запишется в виде

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{1}{c_n^{2(m+2k)}} \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{c_n^2}} u^{m+2k} J_m(\psi u) u du \int_0^1 e^{-\frac{u_1^2}{c_n^2}} u_1^{m+2k} J_m(\psi_1 u_1) u_1 du_1 \right\}.$$

Интегралы в фигурных скобках после разложения  $\exp(-u^2/c_n^2)$  в степенной ряд сводятся к сумме стандартных интегралов от произведения степенной и бесселевой функций [6]. Опуская простые, но громоздкие преобразования, получим:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{1}{c_n^{2(m+2k)}} F_{m,k}(\psi) F_{m,k}(\psi_1), \quad (\text{П1.15})$$

где

$$F_{m,k}(\psi) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(m+p+k)!(p+k)!}{p!c_n^{2p}} \sum_{t=0}^{p+k} (-1)^t \frac{(m+2t+1)}{(m+p+k+t)!(p+k-t)!} \frac{J_{m+2t+1}(\psi)}{\psi}. \quad (\text{П1.16})$$

Из выражений (П1.15) и (П1.16) видно, что если ограничиваться членами второго порядка малости по  $(1/c_n)$ , то необходимо найти только  $S_0(c_n, \psi, \psi_1)$  и  $S_1(c_n, \psi, \psi_1)$ . Соответствующие выражения имеют вид:

$$S_0(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{J_1(\psi)J_1(\psi_1)}{\psi\psi_1} \left\{ 1 - \frac{1}{c_n^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} \right] \right\}, \quad (\text{П1.17})$$

$$S_1(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{1}{c_n^2} \frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1}. \quad (\text{П1.18})$$

Выражения (П1.8), (П1.17) и (П1.18) позволяют получить в явном виде  $T_n^{(1),(2)}$  при  $c \gg 1$ :

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \left\{ \frac{J_1(\psi)J_1(\psi_1)}{\psi\psi_1} \left[ 1 - \frac{1}{c_n^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} \right) \right] \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2}{c_n^2} \cos(\Delta\varphi) \frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1} \right\}. \quad (\text{П1.19})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Вычисление функций $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ и $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ при $\alpha \gg 1$

Согласно (6), (7) и (5) выражения для  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}$  и  $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}$  с учетом того, что

$$\overline{e^{i\Phi(u, \phi)}} = e^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{e^{i[\Phi(u, \phi) - \Phi(u_1, \phi_1)]}} = e^{-\alpha(1-r)}, \quad \overline{e^{i[\Phi(u, \phi) + \Phi(u_1, \phi_1)]}} = e^{-\alpha(1+r)}$$

имеют вид

$$K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i2(\zeta u^2 - \zeta_1 u_1^2)} e^{i[\psi u \cos(\varphi - \phi) - \psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \phi_1)]} \times \\ \times \left[ e^{\alpha(r-1)} - e^{-\alpha} \right] u u_1 d u d u_1 d \phi d \phi_1, \quad (\text{П2.1})$$

$$K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i2(\zeta u^2 + \zeta_1 u_1^2)} e^{i[\psi u \cos(\varphi - \phi) + \psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \phi_1)]} \times \\ \times \left[ e^{-\alpha(1+r)} - e^{-\alpha} \right] u u_1 d u d u_1 d \phi d \phi_1, \quad (\text{П2.2})$$

где

$$r = \exp \left[ - \left( u^2 + u_1^2 \right) - 2 u u_1 \cos(\phi - \phi_1) / c^2 \right] \quad (\text{П2.3})$$

коэффициент корреляции фазовых флуктуаций на апертуре.

Функция, стоящая в квадратной скобке подынтегрального выражения в (П2.1) принимает максимальное значение при  $r=1$ . Следовательно, основной вклад при интегрировании в (П2.1) даст область значений переменных, для которой  $r \approx 1$ . Тогда, учитывая, что  $\ln r = (r-1) + \frac{(r-1)^2}{2} + \dots$  для  $(r-1) < 1$  и ограничиваясь в этом разложении первым членом, имеем

$$\left[ e^{\alpha(r-1)} - e^{-\alpha} \right] \approx e^{\alpha \ln r} (1 - e^{-\alpha r}) \approx e^{\alpha \ln r} = -\frac{u^2 + u_1^2 - 2uu_1 \cos(\phi - \phi_1)}{c_\alpha^2}, \quad (\text{П2.4})$$

где  $c_\alpha = c/\sqrt{\alpha}$ .

Подставляя (П2.4) в (П2.1) и сравнивая с (П1.1) получаем, что

$$K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = T_1^{(1)}(c_\alpha, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi). \quad (\text{П2.5})$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ .

Функция, стоящая в квадратной скобке подынтегрального выражения для  $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ , также достигает максимального значения при  $r = 1$  и для  $\alpha \gg 1$  может быть преобразована следующим образом:

$$\left[ e^{-\alpha(1+r)} - e^{-\alpha} \right] = e^{-\alpha} (e^{-\alpha r} - 1) \approx -e^{-\alpha}. \quad (\text{П2.6})$$

Тогда

$$K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) \approx e^{-\alpha} \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[2\zeta u^2 c \cos(\varphi - \phi)]} u du d\phi \right]^2.$$

Так как интеграл, стоящий в квадратной скобке, есть ограниченная величина, то при  $\alpha \gg 1$  модуль  $K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) \ll 1$  и можно считать, что

$$K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) \approx 0. \quad (\text{П2.7})$$

**Список литературы:** 1. Шифрин Я.С., Должиков В.В. Статистика поля антенны с круглой апертурой сфокусированной в зону Френеля, часть 1. Средние характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы. – Т.15. № 9. – 2010. – С. 15-31. 2. Шифрин Я.С., Должиков В.В. Статистика поля антенны с круглой апертурой сфокусированной в зону Френеля. Ч. 2. Флуктуационные характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы: – Т.15. № 10. – 2010. – С. 6-23. 3. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. – М. : Сов. радио, 1970. Англ. пер. Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory. Golem Press, 1971. – 370 p. 4. Шифрин Я.С. Статистическая теория антенн // Справочник по антенной технике. В 5 т. ; под ред. Л.Д. Бахраха и Е.Г. Зелкина. – М. : ИПРЖР, 1997. – Т. 1. – С. 148 – 206. Англ. пер. Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory (Theory Foundation, State-of-the-Art, Basic Applications) // Telecommunications and Radio Engineering. – 2001. – vol. 55, N 6–7. – P 1– 68. 5. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М. : Наука, 1979. 6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. – М. : ИЛ, 1949. 7. Федорюк М.В. Метод перевала. – М. : Наука, 1977.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.02.2013