

УДК 517.9:535.4

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА–ФОКА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ СТРУКТУРАХ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2005 г. В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко, член-корреспондент РАН В. И. Пустовойт

Поступило 06.06.2005 г.

На основании идей, изложенных в [1, 2], применение впервые интегрального преобразования Конторовича–Лебедева к решению первой и второй краевых задач для уравнения Гельмгольца с трехмерной незамкнутой биконической геометрией позволило понизить их размерность и получить решение электродинамической задачи в частотной области [3]. В работе предложен и обоснован новый метод решения краевых задач для волнового уравнения в клиновидных и конических областях, основанный на использовании интегрального преобразования Мелера–Фока [4] в сочетании с методом сингулярных интегральных уравнений или методом парных сумматорных уравнений [5]. Применение его к решению краевых электродинамических задач во временной области для незамкнутых конических структур позволяет получить аналитическое решение и провести качественный анализ их рассеивающих свойств.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу дифракции волн на неограниченной тонкой конической структуре (рис. 1) Σ , состоящей из двух имеющих общую вершину и ось конусов Σ_1, Σ_2 ($\Sigma = \bigcup_{j=1}^2 \Sigma_j$) с углами раствора $2\gamma_j$ и периодически прорезанными вдоль образующих N щелями, имеющими соответственно угловую ширину $d_j, j = 1, 2$. Период структуры $l = \frac{2\pi}{N}$ и d_j – величины двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конусов и кромки щелей. Источником поля является точечный источник, расположен-

ный в точке $M_0(r_0)$. Поле источника во времени меняется по закону, определяемого функцией $f(t - t_0)$ (источник включается в момент $t = t_0$). Введем с началом в вершине конической структуры сферическую систему координат r, θ, φ , в которой каждый из конусов определяется уравнением $\Sigma_j: \theta = \gamma_j$. Требуется определить потенциал $v^{(x)}(r, t)$, который в каждый момент времени удовлетворяет следующим условиям:

волновому уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) v^{(x)}(r, t) = -\widehat{F}^{(x)}(r, t), \quad r \notin \Sigma, \quad r_0, \quad (1)$$

$$\widehat{F}^{(x)}(r, t) = \frac{b^{(x)}}{r} \delta(r - r_0) f(t - t_0);$$

начальному условию

$$v^{(x)} \equiv 0 \equiv \frac{\partial v^{(x)}}{\partial t}, \quad t \leq t_0; \quad (2)$$

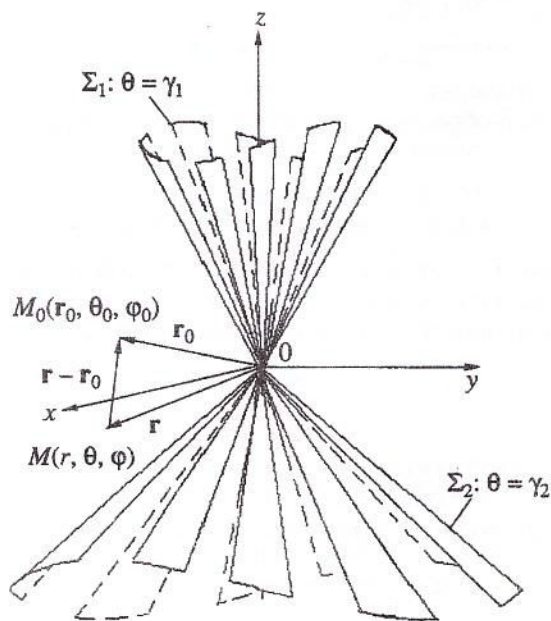


Рис. 1. Геометрия структуры.

Харьковский технический университет
радиоэлектроники
Институт радиотехники и электроники
Российской Академии наук, Москва
Научно-технологический центр
уникального приборостроения
Российской Академии наук, Москва

краевому условию

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} \left(\frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma} = 0; \quad (3)$$

условию ограниченности энергии

$$\iiint_V \left(\left| \frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v^{(\chi)}|^2 \right) dV < \infty, \quad (4)$$

где индекс $\chi = 1, 2$ определяет тип поверхности и источника. Краевая задача в постановке (1)–(4) согласно [6, 7] имеет единственное решение. Представим потенциал $v^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$v^{(\chi)}(\mathbf{r}, t) = v_0^{(\chi)}(\mathbf{r}, t) + v_1^{(\chi)}(\mathbf{r}, t),$$

где

$$v_0^{(\chi)} = -\frac{b^{(\chi)}}{4\pi r_0 R} f\left(t - t_0 - \frac{1}{a}R\right) \eta\left(t - t_0 - \frac{1}{a}R\right)$$

есть потенциал источника, $v_1^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$ – искомый потенциал Дебая, соответствующий возмущенному конусом полю, $\eta(\xi)$ – функция Хевисайда, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

ФУНКЦИЯ ГРИНА. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА-ФОКА

Для решения краевой задачи (1)–(4) используем функцию Грина, через которую выразим $v^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$:

$$v^{(\chi)}(\mathbf{r}, t) = \frac{b^{(\chi)}}{r_0} \int_0^{t-t_0} G^{(\chi)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, z) f(t - t_0 - z) dz. \quad (5)$$

Функция Грина

$$G^{(\chi)}(\mathbf{r}, t) = G_0(\mathbf{r}, t) + G_1^{(\chi)}(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

где $G_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta\left[t - t_0 - \frac{R}{a}\right]}{4\pi R}$ – функция Грина свободного пространства, удовлетворяет волновому уравнению (1) с δ -образной правой частью, начальному условию (2), краевому условию (3) и условию ограниченности энергии (4). Потенциал $v_1^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$ находим в виде (5), а исходная задача сводится к нахождению функции $G_1^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$ для сложной конической структуры Σ . Для этой цели используем преобразование Лапласа функции $G^{(\chi)}(\mathbf{r}, t)$ по временному параметру

$$G^{s,(1)} = G^{s,(1)}(\mathbf{r}) = \int_0^{+\infty} G^{(1)}(\mathbf{r}, t) e^{-st} dt, \quad \text{Res} > 0. \quad (7)$$

Найдем изображение $G^{s,(1)}$, которое должно удовлетворять следующим требованиям:
неоднородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta - q^2) G^{s,(1)}(\mathbf{r}) = -e^{-st_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (8)$$

$$\mathbf{r} \notin \Sigma_0, \quad \mathbf{r}_0, \quad q = \frac{s}{a};$$

краевому условию

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} G^{s,(1)} \Big|_{\Sigma} = 0; \quad (9)$$

принципу предельного поглощения;
условию ограниченности энергии.

Считаем, что $q > 0$. Тогда в конечных формулах проведем аналитическое продолжение. Согласно (6) запишем $G^{s,(1)}$ в виде

$$G^{s,(1)}(\mathbf{r}) = G_0^s(\mathbf{r}) + G_1^{s,(1)}(\mathbf{r}),$$

где

$$G_0^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{-(qR+st_0)}}{4\pi R} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \widehat{G}_0^s \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

$$\widehat{G}_0^s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{\alpha}_{m\tau}^s \widehat{U}_{m\tau}^{(0)} e^{im\varphi},$$

$$U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0), & \theta < \theta_0, \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0), & \theta_0 < \theta, \end{cases} \quad (10)$$

$$\widehat{\alpha}_{m\tau}^s = \frac{(-1)^m K_{i\tau}(qr_0)}{4 \text{ch} \pi \tau \sqrt{r_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)} e^{-i(st_0 + m\varphi_0)}.$$

Здесь $K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда, $P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Для решения задачи (8), (9) используем интегральные преобразования Конторовича–Лебедева

$$\widehat{g}(\tau) = \int_0^{+\infty} g(r) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (11)$$

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \widehat{g}(\tau) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (12)$$

Представим $G_1^{s,(1)}(\mathbf{r})$ в виде (12). Тогда

$$G_1^{s,(1)}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \widehat{G}_1^{s,(1)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau; \quad (13)$$

$$\widehat{G}_1^{s,(1)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{b}_{m\tau}^s \widehat{U}_{m\tau}^{(1)}(\theta, \varphi), \quad (14)$$

$$\widehat{b}_{m\tau}^s = -\widehat{\alpha}_{m\tau}^s P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma_2), \quad \gamma_2 < \theta_0;$$

$$\widehat{U}_{m\tau}^{(\chi)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\hat{\beta}_{mn}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) + \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)] e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi, \end{cases} \quad (15)$$

где $\hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)}$, $\hat{\beta}_{mn}^{(\chi)}$, $\hat{\xi}_{mn}^{(\chi)}$, $\hat{\zeta}_{mn}^{(\chi)}$ — неизвестные коэффициенты, не зависящие от параметра q . На основании результатов [3, 8], можно показать, что функция Грина $G_{\kappa}^{(\chi)}(r, t)$ ($\kappa = 0, 1$) может быть представлена и притом единственным образом в виде интеграла

$$G_{\kappa}^{(\chi)}(r, t) = \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \tilde{G}_{\kappa}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) d\tau, \quad (16)$$

где

$$\tilde{G}_0 = \frac{1}{r} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau} U_{m\tau}^{(0)} e^{im\varphi}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1^{(\chi)} &= -\frac{1}{r} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau} \widehat{U}_{m\tau}^{(\chi)} \times \\ &\times P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta_0) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\gamma_2), \\ a_{m\tau} &= \frac{1}{4\pi r_0} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\operatorname{ch} b = \frac{a^2(t-t_0)^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}, \quad b \in [0, +\infty).$$

Интегральное представление типа (16) является разновидностью интегрального преобразования Мелера-Фока [4], которое можно записать как

$$\Psi(b) = \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \hat{\Psi}(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) d\tau, \quad (19)$$

где

$$\hat{\Psi}(\tau) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh} b \Psi(b) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b) db, \quad b \in [0, +\infty). \quad (20)$$

Функция Грина $G_1^{(\chi)}(r, t)$ (6) для сложной конической структуры Σ находится с использованием интегральных преобразований (19), (20), представлений (17), (18), краевого условия (3) и условия сопряжения в щелях. В результате приходим к двум связанным системам функциональных уравнений, вид которых приведен в [3, 9], для определения неизвестных коэффициентов функции $\widehat{U}_{m\tau}^{(\chi)}$ (15). Решение этих систем может быть получено с помощью метода сингулярных интегральных уравнений или метода задачи Римана-Гильберта [3, 5]. Приведем выражения для потенциалов Дебая в некоторых частных случаях сложной конической структуры и функции $f(t-t_0)$.

А. $f(t) = e^{i\alpha\omega t}$, $\alpha = \pm 1$, $t_0 = 0$.

Одиночный конус Σ_1 с N узкими щелями ($\chi = 2$, $\frac{d_1}{l} \ll 1$, $\theta_0 = \pi$):

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= v_{1\text{сплн}}^{(2)} + \frac{1}{-\frac{1}{N} \ln\left(\frac{1-u_1}{2}\right)} \int_0^{\infty} a_{i\tau}^{*(2)} \frac{K_{i\tau}(\tilde{q}r)}{\sqrt{r}} \frac{F_{i\tau}^*}{\tilde{W}_{i\tau}^{(2)}} \times \\ &\times A_{i\tau}^{*(2)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta) d\tau + \frac{1}{-\frac{1}{N} \ln\left(\frac{1-u_1}{2}\right)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} a_{i\tau}^{*(2)} \frac{K_{i\tau}(\tilde{q}r)}{\sqrt{r}} \frac{F_{i\tau}^*}{\tilde{W}_{i\tau}^{(2)}} A_{i\tau}^{*(2)} \times \\ &\times \sum_{n \neq 0} \frac{1}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_{n,2}^{*(2)} V_{n-1}^{n-1}(u_1)} \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{nN}(-\cos\gamma_2) \times \\ &\times e^{inN\varphi} d\tau + O(1-u_1), \quad \gamma_1 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{W}_{i\tau}^{(2)} = F_{i\tau}^* + \frac{1}{-\frac{1}{N} \ln\left(\frac{1-u_1}{2}\right)},$$

$$F_{i\tau}^* = \frac{1}{A_{i\tau}^{*(2)} - \frac{1}{N} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{|p|} \varepsilon_{p,2}^{*(2)}}$$

$u_1 = \cos\left(\frac{\pi d_1}{l}\right)$, $\tilde{q} = i\alpha k$, k — волновое число; $a_{i\tau}^{*(2)}$,

$\varepsilon_{n,\tau}^{*(2)}$ и $A_{i\tau}^{*(2)}$ — известные коэффициенты, функции $V_{n-1}^{n-1}(u_1)$ определены в [10], а $v_{1\text{сплн}}^{(2)}$ является потенциалом для сплошного конуса Σ_1 [11]. Представление (21) справедливо вдали от щелей.

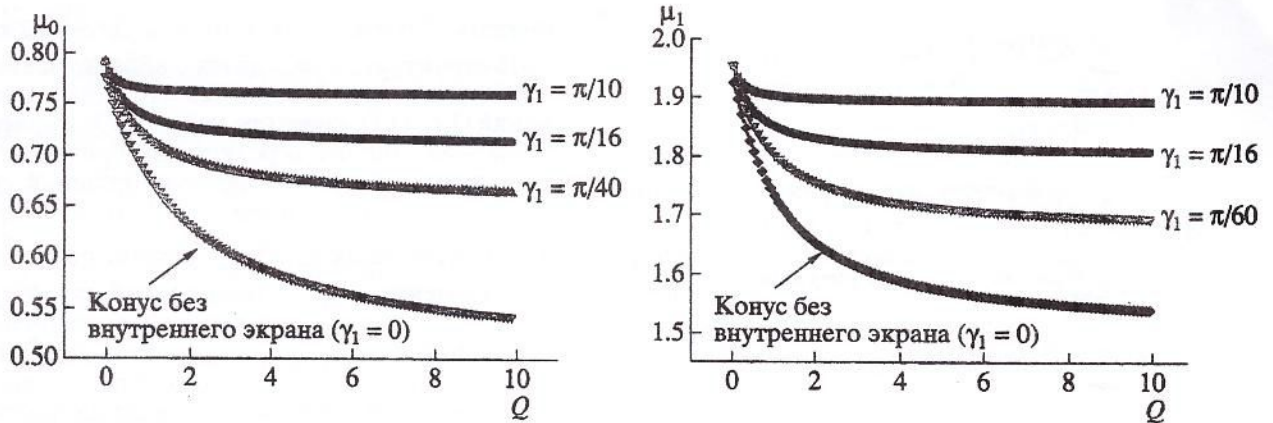


Рис. 2. Зависимость $\mu_n(Q, \gamma_1, \gamma_2)$ от параметра заполнения Q для различных углов $\gamma_1; \gamma_2 = \frac{\pi}{8}$.

Б. $f(t - t_0) = \delta(t - t_0)$, $\chi = 1$, $\theta_0 = \pi$.

Коническая структура Σ состоит из сплошного конуса Σ_1 и полупрозрачного конуса Σ_2 , который определяется существованием предела

$$Q = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ d_2/l \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d_2}{2l} \right].$$

$$v_1^{(1)} = \eta \left(t - t_0 - \frac{r + r_0}{a} \right) \frac{Q}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \Psi_{\mu_n}(\gamma_1, \gamma_2) \times \\ \times P_{-1/2+\mu_n}(-\cos \theta) Q_{-1/2+\mu_n}(\text{ch} b), \quad \gamma_2 < \theta < \pi, \quad (22)$$

$$\Psi_{\mu}(\gamma_1, \gamma_2) = -\frac{ab^{(1)}}{\pi r_0^2} \mu \cos \pi \mu \times \\ \times \frac{\Delta_{\mu}(\gamma_1, \gamma_2)}{P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma_1)} \frac{P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma_2)}{\frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma_2)}, \quad (23) \\ \nabla_{\mu} = \pi \frac{P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma_2)}{P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma_1)} \Delta_{\mu}^{(1),0}(\pi - \gamma_1, \pi - \gamma_2) + \\ + 2Q \cos \pi \mu, \quad \nabla_{\mu_n} = 0,$$

где $Q_{-1/2+\mu}(\text{ch} b)$ – функция Лежандра второго рода. Представление (22) получено из (16) в результате разложения интеграла (после перехода в (16) к интегрированию по мнимой оси: $\mu = i\tau$) в ряд по вычетам подынтегральной функции в ее простых полюсах $\mu_n(Q, \gamma_1, \gamma_2)$, которые являются корнями уравнения (23). На рис. 2 приведены зависимости значений μ_0, μ_1 от параметра заполнения Q при $\gamma_2 = \frac{\pi}{8}$ и различных углах γ_1 . Последовательность

значений $\{\mu_n\}_{n=0}^{+\infty}$ является монотонно возрастающей. Наименьшее из них μ_0 определяет поведе-

ние поля вблизи вершины структуры и его пространственное распределение в случае близкого расположения источника к вершине.

Таким образом, предложен и обоснован метод решения краевых задач дифракции волн во временной области на сложных трехмерных незамкнутых конических структурах. Он является обобщением результатов авторов [3, 9] применительно к решению задач дифракции волн на незамкнутых идеально проводящих биконусах в частотной области. Такой подход может быть использован также при решении нестационарных задач дифракции волн на трехмерных незамкнутых импедансных структурах конической геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорошенко В.А., Сологуб В.Г. // РЭ. 1987. Т. 32. № 5. С. 1110–1112.
2. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. // ДАН. 2000. Т. 375. № 5. С. 611–614.
3. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. // Электромагнит. волны и электрон. системы. 2003. Т. 8. № 6. С. 2–78.
4. Фок В.А. // ДАН. 1943. Т. 39. № 7. С. 279–283.
5. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1209–1213.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
8. Chan K.-K., Felsen L.B. // IEEE Trans. on Ant. and Propagat. 1977. V. 25. № 6. P. 802–806.
9. Дорошенко В.А. // Успехи соврем. радиоэлектроники. 2005. № 5. С. 41–52.
10. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
11. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1, 2.

Контроль Л.В., Антонов П.П. Физ. см. и. и. Харьков, 1977. 742с.