

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МАССООБМЕНА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ламтюгова С.Н.

Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники  
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,  
тел. (057) 702-14-36), e-mail: maliatko@gmail.com

The problem of mass transfer of the cylindrical body with uniform translational flow is considered.  $R$ -functions and the Bubnov-Galerkin method are used for solving the problem. Computational experiment has been conducted for the problem of flow around a circular and elliptic cylinders at different Peclet numbers.

В работе рассматривается задача массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости [1]. Для описания процесса при малых числах Пекле используется приближение Озеена:

$$\Delta c = \text{Pe } U_{\infty} \left( \cos \varphi \frac{\partial c}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ вне } \bar{\Omega}. \quad (1)$$

В общем случае математическая модель задачи массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$c|_{\partial \Omega} = c_0, \quad (3)$$

$$c \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где  $c = c(\rho, \varphi)$  – концентрация,  $c_0$  – заданная концентрация на границе  $\partial \Omega$

обтекаемого тела,  $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $\text{Pe}$  – число Пекле,  $\psi = \psi(\rho, \varphi)$

– функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями  $v_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ ,  $v_{\varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$ ,  $U_{\infty}$  – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Задача (1), (3), (4) от функции тока  $\psi = \psi(\rho, \varphi)$  не зависит. А для задачи (2) – (4) функцию тока  $\psi = \psi(\rho, \varphi)$  можно найти, например, как решение линеаризованной задачи медленного обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью (приближение Озеена) [2] или как решение нелинейной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью [3].

Приближенное решение поставленных задач ищем в виде функции  $c = c_0(1 - \omega_M) + \omega_M \Psi_1 + \omega_M(1 - \omega_M) \Psi_2$ , которая при любом выборе доста-

точно гладких функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  ( $\Psi_1 \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow +\infty$ ) точно удовлетворяет краевым условиям (3) и условию на бесконечности (4),  $\omega_M = f_M(\omega)$ ,

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(M\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \leq \omega < M, \\ 1, & \omega \geq M, \end{cases} \text{ а } \omega - \text{ функция, обладающая}$$

свойствами: 1)  $\omega > 0$  вне  $\bar{\Omega}$ ; 2)  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ ; 3)  $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$  на  $\partial\Omega$  – строится с использованием конструктивного аппарата теории  $R$ -функций [4]. Для аппроксимации неопределенных компонент  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  используется проекционный метод Бубнова-Галеркина [5]. Функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  аппроксимируются выражениями вида

$$\Psi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k, \quad \Psi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j,$$

где  $\{\varphi_k(\rho, \varphi)\} = \{\rho^{-k} \cos k\varphi, \rho^{-k} \sin k\varphi\}$ ,  $\{\tau_j(\rho, \varphi)\} = \{1, \rho^j \cos k\varphi, \rho^j \sin k\varphi\}$ .

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$  и эллиптического цилиндра  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  при  $U_\infty = 1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $M = 5$  при разных числах Рейнольдса и Пекле. На рис. 1 приведены линии концентрации при  $Re = 0$ ,  $Pe = 10$  для кругового цилиндра, на рис. 2 – для эллиптического.

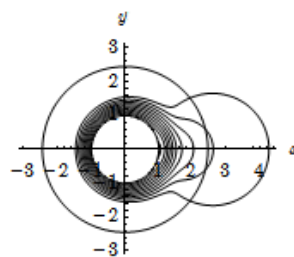


Рис. 1

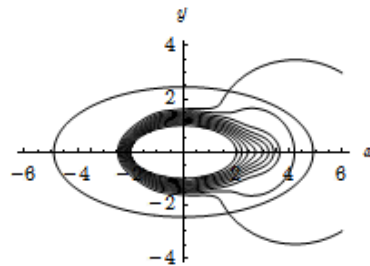


Рис. 2

1. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов [и др.]. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.

2. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С. 112 – 122.

3. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. – 2012. – № 2. – С.57–65.

4. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

5. Приближенное решение операторных уравнений. / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 420 с.