УДК 681.513

*Е.В. БОДЯНСКИЙ, В.В. КОЛОДЯЖНЫЙ,
С.В. КОТЛЯРЕВСКИЙ*

МНОГОМЕРНЫЙ САМОНАСТРАИВАЮЩИЙСЯ ПИД-РЕГУЛЯТОР

Пусть объект управления описывается многомерным разностным уравнением типа ARMAX MIMO:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})w(t)\,, \tag{1}$$

где $y(t), u(t), w(t)$ - $(s\times 1), (r\times 1), (s\times 1)$ - векторы выходов, управлений и возмущений соответственно в дискретный момент времени $t = 0,1,2,...$; $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ - $(s\times s), (s\times r), (s\times s)$ - λ–матрицы степени n_A, n_B, n_C соответственно; $d \ge 1$ – время чистого запаздывания по каналам управления; q^{-1} – оператор сдвига назад.

Относительно объекта (1) принимаются следующие допущения:

$$A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} + ... + A_{n_A} q^{-n_A} = I + \widetilde{A}(q^{-1})\,, \tag{2}$$

(здесь $I - (s\times s)$ – единичная матрица);

$$\begin{gathered} B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + ... + B_{n_B} q^{-n_B} = B_0 + \widetilde{B}(q^{-1}), \\ rank\, B = \min\{s, r\} \end{gathered} \tag{3}$$

$$C(q^{-1}) = I + C_1 q^{-1} + ... + C_{n_C} q^{-n_C} = I + \widetilde{C}(q^{-1})\,, \tag{4}$$

при этом нули полинома $\det C(q^{-1})$ лежат внутри единичного круга

$$M\{w(t)|F_{t-1}\} = 0, M\{w(t)w^T(t)|F_{t-1}\} = P_w < \infty\,, \tag{5}$$

где $M\{\cdot|\cdot\}$ - символ условного математического ожидания; F_{t-1} - последовательность возрастающих s-алгебр, порождаемых $\{w(0), w(1),..., w(t)\}$, такая, что $F_0 \subset F_t \subset F$ для всех $t > 0$. Заметим также, что описание (1) содержит $ssn_A + sr(n_B + 1) + ssn_C$ параметров, в общем случае неизвестных.

Цель управления задается критерием типа многомерной обобщенной дисперсии [1, 2]:

$$I_t = M\{\left\| y^*(t+d) - y(t+d) \right\|_{Q_1}^2 + \left\| u(t) \right\|_{Q_2}^2 \left| F_t \right.\} \ , \tag{6}$$

где $y^*(t+d)$ – известный s-мерный внешний задающий сигнал; Q_1 и Q_2 - весовые $(s \times s)$ и $(r \times r)$ симметрические положительно-определенная и неотрицательно-определенная матрицы соответственно, а структура алгоритма управления совпадает с многомерным цифровым ПИД-регулятором в скоростной форме:

$$u(t) = u(t-1) + K_0 v_c(t) + K_1 v_c(t-1) + K_2 v_c(t-2) = u(t-1) + KV_c(t) \ . \tag{7}$$

Здесь $K_i (i = 0,1,2) - (r \times s)$ – матрицы параметров регулятора; $K = (K_0 \quad K_1 \quad K_2) - (r \times 3s) -$ составная матрица параметров; $v_C(t) = y^*(t) - y(t) - (s \times 1)$ – вектор ошибок управления на t-м такте; $V_C(t) = (v_C^T(t), v_C^T(t-1), v_C^T(t-2))^T - (3s \times 1)$ – составной вектор ошибок.

Задача состоит в нахождении процедуры настройки матрицы К параметров регулятора (7), обеспечивающей минимум критерия управления (6) при ограничениях на входные и выходные переменные объекта.

Поскольку модель объекта содержит запаздывание, необходимо построить настраиваемый упредитель. Для этого с использованием теоремы о делении λ-матриц для объекта (1) введем следующие соотношения [1]:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}), \tag{8}$$

где

$$F(q^{-1}) = I + F_1 q^{-1} + ... + F_{d-1} q^{-d+1}, G(q^{-1}) = G_0 + G_1 q^{-1} + ... + G_{n_A - 1} q^{-n_A + 1}.$$

Существуют матрицы $F'(q^{-1}), C'(q^{-1})$ (не обязательно единственные) такие, что [1,3]

$$\begin{gathered} F'(q^{-1})G(q^{-1}) = G'(q^{-1})F(q^{-1}), F'(0) = I, \\ \det F'(q^{-1}) = \det F(q^{-1}) \end{gathered} \tag{9}$$

$$C'(q^{-1})F(q^{-1}) = F'(q^{-1})C(q^{-1}), C'(0) = I,$$
$$\det C'(q^{-1}) = \det C(q^{-1}), \quad (10)$$

при этом справедливо выражение

$$C'(q^{-1}) = F'(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G'(q^{-1}). \quad (11)$$

Очевидны следующие преобразования:

$$F'(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F'(q^{-1})C(q^{-1})w(t), \quad (12)$$

$$(C'(q^{-1}) - q^{-d}G'(q^{-1}))y(t) = F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F'(q^{-1})C(q^{-1})w(t), \quad (13)$$

$$C'(q^{-1})y(t) - C'(q^{-1})F(q^{-1})w(t) = G'(q^{-1})y(t-d) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d), \quad (14)$$

$$C'(q^{-1})y(t) - C'(q^{-1})F(q^{-1})w(t) - C'(q^{-1})\hat{y}(t|t-d) =$$
$$= G'(q^{-1})y(t-d) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) - \hat{y}(t|t-d) - \widetilde{C}'(q^{-1})\hat{y}(t|t-d), \quad (15)$$

где $\hat{y}(t|t-d) = M\{y(t)|F_{t-d}\}$ – оптимальный относительно F_{t-d} прогноз выходной последовательности $y(t)$. Тогда оптимальный прогноз на момент $t+d$, сделанный в момент времени t, будет иметь вид

$$\hat{y}(t+d|t) = G'(q^{-1})y(t) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t) - \widetilde{C}'(q^{-1})\hat{y}(t+d|t), \quad (16)$$

а ошибка прогнозирования $v_p(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-d) = F(q^{-1})w(t) = \widetilde{w}(t)$ характеризуется ковариационной матрицей

$$M\{v_p(t)v_p^T(t)|F_{t-d}\} = F(q^{-1})P_w F^T(q^{-1}) = \widetilde{P}_w. \quad (17)$$

Выражение (16) описывает многошаговый оптимальный упредитель, соответствующий объекту (1), и содержит $ssn_A + sr(n_B + d) + ssn_C$ параметров, что на $(d-1)sr$ больше, чем в описанном объекте управления. Для удобства дальнейших преобразований введем обобщенный вектор входов

$$\varphi(t+d) = (u^T(t), u^T(t-1), \ldots, u^T(t-d-n_B+1), y^T(t), \ldots$$
$$\ldots, y^T(t-n_A+1), -\hat{y}^T(t+d-1|t-1), \ldots, -\hat{y}^T(t+d-n_C|t-n_C))^T = (u^T(t), \psi^T(t))^T$$

и составную матрицу параметров упредителя

$$\widetilde{L} = (B_0, F_1' B_0, ..., F_{d-1}' B_{n_B}, G_0', ..., G_{n_A-1}', C_1', ..., C_{n_C}') = (B_0, L),$$

после чего перепишем (16) в форме

$$\hat{y}(t+d|t) = \widetilde{L}\varphi(t+d) = B_0 u(t) + L\psi(t)\,, \tag{18}$$

которая в дальнейшем будет использована для синтеза закона управления.

Поскольку параметры оптимального упредителя, входящие в матрицу $\widetilde{L}$, в общем случае неизвестны, они должны быть определены с помощью процедуры адаптивной идентификации, для чего в соответствие (18) ставится настраиваемая модель вида

$$\hat{y}(t+d) = \hat{\widetilde{L}}(t)\varphi(t+d) = \hat{B}_0(t)u(t) + \hat{L}(t)\psi(t)\,, \tag{19}$$

где $\hat{y}(t+d)$ – настраиваемый многошаговый прогноз; $\hat{\widetilde{L}}(t), \hat{B}_0(t), \hat{L}(t)$ – матрицы оценок, полученные по данным, имеющимся в момент времени t.

Вводя матрицу обобщенных входов

$$X(t+d) = I \otimes \varphi(t+d) \tag{20}$$

(здесь $\otimes$ – символ тензорного произведения), можно записать выражения для оптимального (21) и настраиваемого (22) упредителей:

$$\hat{y}(t+d|t) = X^T(t+d)\theta\,; \tag{21}$$

$$\hat{y}(t+d) = X^T(t+d)\hat{\theta}(t)\,, \tag{22}$$

(здесь θ и $\hat{\theta}(t) - (ssn_A + sr(n_B + d) + ssn_C)\times 1$ – векторы параметров и оценок соответственно), после чего для настройки вектора оценок $\hat{\theta}(t)$ применить алгоритм идентификации, предложенный и исследованный в [4, 5]:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \dfrac{a}{r(t)} X(t)(y(t) - X^T(t)\hat{\theta}(t-1)), \\ r(t) = r(t-1) + s^{-1} Tr(X^T(t)X(t)), \\ 0 < a < 2, r(0) = 1. \end{cases} \tag{23}$$

В [4—6] показано, что при принятых допущениях относительно объекта (1) адаптивная процедура идентификации (23) обеспечивает сходимость оценок $\hat{\theta}(t)$ к оптимальным параметрам упредителя (21).

Теперь перейдем непосредственно к разработке алгоритма настройки параметров многомерного ПИД-регулятора. Критерий управления (6)

$$I_t = M\{\left\|y^*(t+d) - y(t+d)\right\|^2_{Q_1} + \left\|u(t)\right\|^2_{Q_2} |F_t\} =$$
$$= M\{\left\|y^*(t+d) - \hat{y}(t+d|t) - \tilde{w}(t+d)\right\|^2_{Q_1} + \left\|u(t)\right\|^2_{Q_2} |F_t\}, \quad (24)$$

с учетом некоррелированности $\tilde{w}(t+d)$ с $u(t)$, $y^*(t+d)$ и $\psi(t)$ можно преобразовать к виду

$$I_t = M\{\left\|y^*(t+d) - B_0 u(t) - L\psi(t) - \tilde{w}(t+d)\right\|^2_{Q_1} + \left\|u(t)\right\|^2_{Q_2} |F_t\} =$$
$$= M\{\left\|y^*(t+d) - B_0 u(t-1) - B_0 K V_C(t) - L\psi(t) - \tilde{w}(t+d)\right\|^2_{Q_1} +$$
$$+ \left\|u(t-1) + K V_C(t)\right\|^2_{Q_2} |F_t\} = V_C^T(t) K^T (B_0^T Q_1 B_0 + Q_2) K V_C(t) - \quad (25)$$
$$- 2 y^{*T}(t+d) Q_1 B_0 K V_C(t) + 2u^T(t-1) B_0^T Q_1 B_0 K V_C(t) +$$
$$+ \psi^T(t) L^T Q_1 B_0 K V_C(t) + 2u^T(t-1) Q_2 K V_C(t) + \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — члены, не зависящие от матрицы коэффициентов К.

Решая далее систему уравнений $\partial I_t / \partial K = 0$, получаем, что на t-м такте управления матрица коэффициентов многомерного ПИД-регулятора задается выражением

$$K(t) = (B_0^T Q_1 B_0 + Q_2)^{-1} (B_0^T Q_1 (y^*(t+d) - B_0 u(t-1) - L\psi(t)) - Q_2 u(t-1)) V_C^+(t), \quad (26)$$

где $V_C^+(t)$ — вектор-строка, псевдообратная к вектору $V_C(t)$, причем если не все компоненты $V_C(t)$ равны нулю, то $V_C^+(t) = V(t) \left\|V_C(t)\right\|^{-2}$ [7].

Поскольку в рамках рассматриваемой задачи корректен принцип стохастической эквивалентности (ЛКГ-задача), то, заменяя неизвестные параметры оптимального упредителя их оценками, полученными в контуре идентификации с помощью алгоритма (23), запишем алгоритм работы самонастраивающегося многомерного ПИД-регулятора в виде

$$\begin{cases} \hat{u}(t) = \hat{u}(t-1) + \hat{K}(t) V_C(t), & (27а) \\ \hat{K}(t) = (\hat{B}_0^T(t) Q_1 \hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \times \\ \times \{\hat{B}_0^T(t) Q_1 [y^*(t+d) - \hat{B}_0(t) u(t-1) - \hat{L}(t)\psi(t)] - Q_2 u(t-1)\} V_C^+(t). & (27б) \end{cases}$$

При этом, однако, необходимо уточнить, что алгоритм (27а), (27б) минимизирует (как впрочем и все системы, основанные на принципе стохастической эквивалентности) не критерий (6) или (24), в основе которого лежит ошибка $V_C(t) = y^*(t+d) - y(t+d)$, а целевую функцию $\hat{I}_t$, основанную на ошибке слежения адаптивной системы $\hat{v}_C(t) = y^*(t+d) - \hat{y}(t)$. По мере стремления оценок $\hat{\theta}(t)$ к своим оптимальным значениям θ качество управления, обеспечиваемое алгоритмом (27а), (27б), стремится к качеству, обеспечиваемому регулятором (6) или алгоритмом настройки (26). Для того чтобы все же оценить это качество, преобразуем (27б) к виду

$$\begin{aligned} \hat{K}(t) &= (\hat{B}_0^T(t) Q_1 \hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \hat{B}_0^T(t) Q_1 \times (y^*(t+d) - \hat{L}(t)\psi(t)) V_C^+(t) - \\ &- (\hat{B}_0^T(t) Q_1 \hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} (\hat{B}_0^T(t) Q_1 \hat{B}_0(t) u(t-1) + Q_2 u(t-1)) V_C^+(t) = \\ &= u^*(t) V_C^+(t) - u(t-1) V_C^+(t) = (u^*(t) - u(t-1)) V_C^+(t), \end{aligned} \tag{28}$$

$$u^*(t) = (\hat{B}_0^T(t) Q_1 \hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \hat{B}_0^T(t) Q_1 \times (y^*(t+d) - \hat{L}(t)\psi(t)). \tag{29}$$

Выражение (29) представляет собой многомерный самонастраивающийся алгоритм управления ARMAX MIMO объектом, предложенный и исследованный в [3] и являющийся обобщением широко известного алгоритма У.Боррисона [1].

Подставляя далее (28) в (27а), несложно видеть, что

$$\hat{u}(t) = u(t-1) + \frac{(u^*(t) - u(t-1))V_C^T(t)}{\|V_C(t)\|^2} V_C(t) = u^*(t), \qquad (30)$$

т.е. предлагаемый алгоритм обеспечивает качество управления такое же, как и известные адаптивные системы [1 – 3], сохраняя при этом свою ПИД-структуру. Данное обстоятельство важно в случае, когда на технологическом объекте уже установлен цифровой ПИД-регулятор, коэффициенты которого с помощью микропроцессорного контроллера могут быть вычислены на основании соотношения (27б).

Список литературы: 1. *Borrison U.* Self-tutning regulators for a class of multivariable systems // Automatica. 1979. 15. P. 209-215. 2. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с. 3. *Bayomi M.M.*, Wong K.J., El-Bagouri M.A. A self-tuning regulator for multivariable systems // Automatica. 1981. 17. P. 575-592. 4. *CainesP.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems. Multivariable case // Proc. 21-st IEEE Conf. Decis. and Contr. Orlando, Fla., Dec. 8-10, 1982. Vol. 3. N.Y.: 1982. P. 978-983. 5. *CainesP.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1984. 29. P. 312-321. 6. *Льюнг Л.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991. 432 с. 7. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

Поступила в редколлегию 05.10.98

Бодянский Евгений Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы, искусственные нейронные сети. Увлечения: фелинология, японская поэзия. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-98-90. bodya@kture.kharkov.ua bodyanskiy@writeme.com

Колодяжный Виталий Владимирович, младший научный сотрудник ПНИЛ АСУ ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: программирование для Win32, компьютерная графика, английский язык. Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-98-90.

Котляревский Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: рыбная ловля, футбол. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-98-90.