УДК519.21

ПРОЦЕСС ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ

ВОВК А.В.

Исследуется процесс вытеснения одной жидкости другой из объёма, заполненного порошковой смесью. Эта задача рассматривается как задача с подвижной границей. Формулируются условия, которые должны выполняться на поверхности раздела жидкостей, а также дифференциальные уравнения, описывающие изменение границы раздела жидкостей во времени. Приводится аналитическое решение задачи о прямолинейном вытеснении одной жидкости другой.

1. Введение и постановка задачи

При рассмотрении процессов формирования порошковых смесей в объёме, заполненном активной жидкостью (раствором электролита) [1-3], возникает вопрос об очистке порошковой смеси от активной жидкости и её замены на нейтральную среду (воду). Такой процесс можно рассмотреть как вытеснение из пористой среды одной жидкости другой. Эту задачу часто удается сформулировать как задачу с подвижной границей. Предполагается, что пористая среда насыщена раствором электролита (e) с вязкостью μ_e и плотностью ρ_e. Остальная часть порового объема среды насыщена неподвижной связанной водой (w) с вязкостью μ_w и плотностью ρ_w. Обозначим насыщенность среды, связанной водой, через S_{cw}. Тогда насыщенность электролита будет равна $1-S_{cw}$.

Пусть в некоторый момент времени в пористую среду начинают нагнетать воду в целях вытеснения из неё электролита. Предположим, что в процессе этого вытеснения область, в которой насыщенность заметно меняется, достаточно мала. Тогда всю область течения можно разделить на две области. В одной из них содержится только электролит и связанная вода. В другой – только вода и неподвижный остаточный раствор электролита. Первая область находится перед «фронтом», вторая – позади «фронта». Граница, разделяющая эти области, представляет собой поверхность разрыва насыщенности – фронт. Перед фронтом находится только электролит, позади фронта – только вода. Такой фронт порождается разрывом характеристик насыщенности среды и определяется уравнением Бакли-Леверетта:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{S_c} = \frac{q}{mA}\frac{df_c(S_c)}{dS_c}.$$

Здесь q – полный расход жидкости; m – пористость среды; A – площадь поперечного сечения объёма, заполненного смесью; $f_c = \frac{q_c}{q}$ – относительный расход смачивающей жидкости.

Описанная схема движения осуществляется при заданных значениях вязкостей.

Целью работы является анализ процессов вытеснения из пористого материала одной жидкости другой.

Задача исследования состоит в нахождении условий, которые должны выполняться на поверхности раздела сред и выводе дифференциальных уравнений, описывающих процесс вытеснения одной жидкости другой в зависимости от времени.

Сформулируем условия, которые должны удовлетворяться на поверхности раздела.

Рассмотрим маленький цилиндр длиной δs, площадью поперечного сечения δA и осью, перпендикулярной к фронту (рис. 1). Пусть в момент времени t основание цилиндра лежит на фронте. К более позднему моменту $t+\delta t$ фронт пройдет расстояние по нормали, равное

$$\delta s = v_f \delta t. \quad (1)$$

Здесь v_f – скорость продвижения фронта по нормали к фронту.

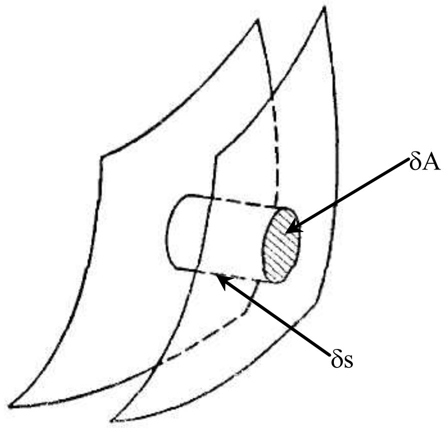

Рис. 1. Фронт вытеснения и трубка тока

За время δt в цилиндр войдет объем воды, равный

$$Q = v_{wn}\delta A\delta t,$$

где v_{wn} – проекция вектора плотности объемного потока воды на нормаль к фронту.

Этот объем воды должен равняться объему воды, заполняющему в момент $t+\delta t$ рассматриваемый цилиндр длины δs, за вычетом связанной воды, т.е.

$$v_{wn}\delta A\delta t = \delta A\delta s(1-Sre)m - \delta s S_{cw} m. \quad (2)$$

Здесь S_{re} – остаточная насыщенность электролита позади фронта.

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$v_f = \frac{v_{wn}}{m(1 - S_{re} - S_{cw})} . \qquad (3)$$

Таким же способом, подсчитывая количество электролита, вытекающее с другой стороны цилиндра, находим

$$v_f = \frac{v_{en}}{m(1 - S_{re} - S_{cw})} , \qquad (4)$$

где v_{en} – проекция вектора плотности объемного потока электролита на нормаль к фронту. Таким образом, на движущейся границе имеем

$$v_{en} = v_{wn} . \qquad (5)$$

Позади фронта (в водонасыщенной области) находится только вода. В этой области из закона Дарси

$$u = -\frac{K}{\mu}\left(i_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + i_3 \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g \right) \right)$$

и уравнения неразрывности [4] получаем дифференциальное уравнение в частных производных для потенциала течения воды ψ_w. Здесь u – скорость фильтрации; K –коэффициент фильтрации; p –давление; g – ускорение свободного падения; i_1, i_2, i_3 – единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей x_1, x_2, x_3. Ось x_3 считаем направленной по вертикали вверх.

Впереди фронта в области, занятой электролитом, из таких же уравнений получаем дифференциальное уравнение в частных производных для потенциала электролита ψ_e. Если пренебречь капиллярными силами, то нужно потребовать, чтобы при переходе через подвижную границу давление менялось непрерывно. Заметим, что последнее требование, вообще говоря, не означает равенства потенциалов. Требование равенства давлений на границе необходимо для того, чтобы давление всюду было однозначно определено.

Если пренебречь влиянием силы тяжести, то уравнения можно составить так, чтобы в них входили только давления. При этом уравнения для давлений в разделяемых фронтом областях будут, вообще говоря, разными.

Перейдем теперь к формулировке задачи вытеснения. Переходной зоной является поверхность.

Эта поверхность в пространстве x_1, x_2, x_3 передвигается и изменяется с течением времени. Запишем ее уравнение в виде

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha = \text{const} . \qquad (6)$$

При фиксированном t уравнение (6) определяет однопараметрическое семейство поверхностей. Это значит, что какая-нибудь одна поверхность выделяется из этого семейства заданием некоторого фиксированного значения одного параметра α. Изменяя t и сохраняя α постоянным, мы будем получать, вообще говоря, разные поверхности. Эти поверхности можно рассматривать как первоначальную поверхность, которая за истекший промежуток времени передвинулась и изменила форму.

Величины x_1, x_2, x_3 в уравнении (6) – это координаты точки фронта в момент t. В момент $t + \delta t$ координаты этой точки фронта будут равны $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2$, $x_3 + \delta x_3$.

Так как рассматриваемая точка все время передвигается вместе с фронтом, то

$$F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3, t + \delta t) = \alpha . \qquad (7)$$

Разлагая левую часть (7) в ряд Тейлора и сохраняя только члены первого порядка малости, получаем уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}\delta x_3 + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t) = 0 . \qquad (8)$$

Отметим, что точка фронта – это жидкая частица, которая передвигается со скоростью

$$v = \frac{v_w}{m(1 - S_{re} - S_{cw})} . \qquad (9)$$

Отсюда

$$\delta x_i = \frac{V_{wt}\delta t}{m(1 - S_{re} - S_{cw})} , \qquad (10)$$

значит

$$\begin{aligned} & v_{w1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + v_{w2}\frac{\partial F}{\partial x_2} + v_{w3}\frac{\partial F}{\partial x_3} + \\ & + m(1 - S_{re} - S_{cw})\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \end{aligned} . \qquad (11)$$

В этом уравнении можно v_w заменить на v_e.

Решение уравнения (11) описывает изменение границы с течением времени. Но прежде чем решать это уравнение относительно F, нужно знать зависимость составляющих скорости v_{wi} от координат и времени. Таким образом, распределение потенциалов либо должно быть известно заранее, либо должно определяться одновременно с F. Вообще говоря, при передвижении границы распределение потенциалов изменяется. Оно остается неизменным только в том случае, когда «вода» и «электролит» динамически неотличимы, иными словами, когда вязкость, плотность и проницаемость для обеих жидкостей одинаковы. Так, можно рассматривать вытеснение «красной» воды «голубой» водой. При таком вытеснении положение границы раздела не будет влиять на распределение потенциалов. Тогда задача о распределении потенциалов может быть решена независимо. После этого из уравнения (11) можно определить, как будет продвигаться граница.

2. Аналитическое решение задачи о прямолинейном вытеснении

Рассмотрим прямолинейное вытеснение электролита водой из однородной пористой среды с образованием фронта. Обозначим длину исследуемого образца через L и пренебрежем влиянием капиллярных сил и силы тяжести. Из закона Дарси и уравнений неразрывности для распределения давления получаем уравнения:

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < x_f, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} = 0, \quad x_f < x < L, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} p_e &= p_w, \\ \frac{K_{wre}}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial x} &= \frac{K_{ecw}}{\mu_e}\frac{\partial p_e}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad x = x_f(t) \tag{14}$$

$$p_w = p_1, \quad x = 0, \tag{15}$$

$$p_e = p_2, \quad x = L. \tag{16}$$

Здесь K_{wre} – проницаемость для воды в присутствии остаточного электролита; K_{ecw} – проницаемость для электролита в присутствии связанной воды. Уравнения (14) получаются из граничного условия (5). Интегрирование уравнений (12) и (13) дает соответственно

$$p_w = Ax + B, \tag{17}$$

$$p_e = A'x + B'. \tag{18}$$

Учитывая граничные условия, получаем

$$B = p_1,$$

$$A = -\frac{\Delta p}{\varphi L + (1-\varphi)x_f},$$

$$A' = -\frac{\Delta p}{\varphi L + (1-\varphi)x_f}, \tag{19}$$

$$B' = -\frac{(1-\varphi)x_f \Delta p}{\varphi L + (1-\varphi)x_f} + p_1.$$

Входящая сюда величина

$$\varphi = \frac{K_{wre}}{K_{ecw}}\frac{\mu_e}{\mu_w} \tag{20}$$

называется коэффициентом подвижности, величина Δp равна разности давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2. \tag{21}$$

Из приведенных выше уравнений и равенства

$$v_w = -\frac{K_{wre}}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial x} = -\frac{K_{wre}}{\mu_w}A \tag{22}$$

получаем следующее уравнение для координаты поверхности раздела:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{K_{wre}\Delta p}{\mu_w m(1 - S_{re} - S_{cw})}\frac{1}{\varphi L + (1-\varphi)x_f}. \tag{23}$$

Интегрируя это уравнение при условии $x_f = 0$ при $t = 0$, получаем для времени t продвижения фронта от $x = 0$ до $x = x_f$ выражение:

$$t = \frac{\mu_w m(1 - S_{re} - S_{cw})}{K_{wre}\Delta p}\left(\varphi L x_f + \frac{1-\varphi}{2}x_f^2\right). \tag{24}$$

Из (24) видно, что при $\varphi > 1$ фронт ускоряется, а при $\varphi < 1$ – замедляется. В исключительном случае, когда $\varphi = 1$, фронт перемещается с постоянной скоростью, и в этом случае распределение давления не зависит от координаты фронта x_f. Это видно из уравнения (20).

Графически полученные результаты изображены на рис. 2, из которого видно, какую важную роль играет в процессе вытеснения коэффициент подвижности.

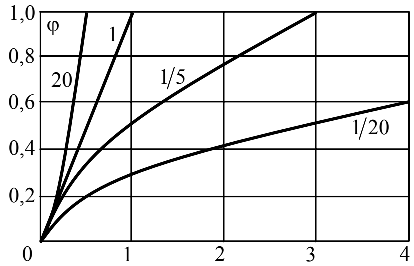

Рис. 2. Влияние отношения подвижности на закон движения фронта в процессе прямолинейного вытеснения

На рис. 2 по оси абсцисс $K_{wr}\frac{\Delta pt}{\mu_w}m(1 - S_{re} - S_{cw})L^2$, по оси ординат $\frac{x_f}{L}$.

3. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Приведены условия, которые должны выполняться на поверхности раздела жидкостей в пористой среде. Выведены дифференциальные уравнения, описывающие перемещение границы жидкостей во времени. Приведено аналитическое решение задачи о прямолинейном вытеснении одной жидкости другой.

Практическая ценность работы заключается в том, что предложенная математическая модель позволяет исследовать процесс вытеснения одной жидкости другой. Она может быть использована для жидкостей с различными химическими характеристиками. Установлена зависимость времени вытеснения от коэффициента подвижности фронта.

Литература: 1. *Вовк А.В.* Процесс формирования порошковых масс в объёме активной смеси. Ч.2 // Радиоэлектроника и информатика. 2007. С. 141-144. **2.** *Вовк А.В., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С.* Управление процессом формирования порошковых смесей // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып.141. С. 53-58. **3.** *Вовк А.В.* Использование следящих сетей при исследовании жидких смесей // АСУ и приборы автоматики. Вып. 142. 2008. С. 43-47. **4.** *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде М.-И.: РХД, 2004. 628с.

Поступила в редколлегию 11.08.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Вовк Александр Владимирович, аспирант кафедры «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61100, Харьков, пр. Маршала Жукова, 45, кв. 16, тел. 716-16-88.