

УСТЕХИ
УР **СОВРЕМЕННОЙ**
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
6' 2006

В номере:

Из серии | Ученые России

Лев Давидович Бахрах



Тел./факс: (495) 625-9241
E-mail: info@radiotec.ru
<http://www.radiotec.ru/>

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 70325 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

Види Догрунени

Выходит с марта 1947 года

ISSN 0373-2428

<http://www.radiotec.ru>

УС ТЕХ И Р СОВРЕМЕННОЙ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

6'
2006

Ежемесячный научно-технический журнал

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Л.П. Андрианова, М.А. Басараб, Л.Д. Бахрах, О.М. Белоцерковский, О.В. Бешкий, А.С. Бугаев, В.А. Буц (Украина), В.П. Васильев, И.Г. Волкова, В.К. Волосюк (Украина), А.И. Галушкин, Ю.В. Гуляев, А.С. Дмитриев, П.И. Зудков, Г.Д. Карташов, А.М. Крот (Белоруссия), А.А. Кураев (Белоруссия), Б.Г. Кутуза, И.К. Лифанов, В.В. Мериакри, В.И. Меркулов, Я. Миядзаки (Япония), Г.А. Несененко, И. Окуно (Япония), А.И. Панас, В.И. Пустовойт, В.А. Садовничий, А.В. Соколов, Ю.Г. Стоян (Украина), А.П. Сухоруков, В.И. Тихонов, К.В. Черевков, В.А. Черепенин, Л. Ф. Черногор (Украина), А.Д. Шатров, Ю.В. Шестопапов, Я.С. Шифрин (Украина), В.М. Яковенко (Украина), В.П. Яковлев

Главный редактор
доктор
физ.-мат. наук,
профессор
В. Ф. Кравченко

Содержание

Лев Давидович Бахрах (к 85-летию со дня рождения).

Lev Davydovich Bahrah. His 85th Birthday.

3

Моделирование возбуждения конической антенны с неоднородными поверхностными свойствами.
Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф.

Modeling of Exciting a Conical Antenna with Inhomogeneous Surface Properties.
V.A. Doroshenko, V.F. Kravchenko

5

Исследование характеристик алгоритма Хэбба в задачах обработки радиосигналов.
Литвинов О.С., Зимина С.В.

Investigation of Hebb's Algorithm Characteristics in Tasks of Signal.
O.S. Litvinov, S.V. Zimina

23

Дифракция электромагнитных волн на протяженных неоднородностях в круглом волноводе.
Губский А. Д., Губский Д. С., Ляпин В. П., Синявский Г. П.

Calculation of Electromagnetic Waves Diffraction on Spread Irregularities in Circular Waveguide.
A.D. Gubsky, D.S. Gubsky, V.P. Lyapin, G.P. Sinyavsky

28

Моделирование возбуждения конической антенны с неоднородными поверхностными свойствами

В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко

Проведено исследование в строгой постановке задачи возбуждения полубесконечного неоднородного кругового конуса радиальными диполями, поле которых меняется по гармоническому закону. Поверхностными неоднородностями являются продольные щели и переменный импеданс, зависящий от расстояния между вершиной конуса и точкой поверхности. С помощью интегрального преобразования Конторовича – Лебедева получено аналитическое решение задачи для полупрозрачного конуса, состоящего из большого числа идеально проводящих конических лент, сплошных импедансных конусов, а также импедансного конуса с продольными щелями в предельном случае большого числа щелей. Изучена структура поля и его особенности, обусловленные неоднородностями.

A model problem of exciting a conical slotted antenna with a varying surface impedance by harmonic point sources is considered. The rigorous problem solution method is based on using the Kontorovich-Lebedev integral transforms and a semi-inversion method. Analytical solutions and average boundary conditions those have a curvature cone parameter are obtained for a semi-transparent cone that is a limiting case of a perfectly conducting cone with a lot of slots. Inhomogeneous properties effects on scattering field structure are studied for an impedance isotropic cone and an impedance cone with a lot of longitudinal slots.

Введение

Создание аппаратуры, обеспечивающей заданное преобразование пространственной структуры поля, является одной из важных задач электродинамики. Управление пространственным распределением поля может осуществляться путем изменения как геометрических размеров рассеивающих тел, так и параметров, связанных с их поверхностными свойствами. К таким поверхностям, в частности, относятся анизотропно проводящие с определенными граничными условиями (эквивалентные граничные условия, приближенные или усредненные граничные условия). Моделями анизотропно проводящих поверхностей служат полупрозрачные структуры, которые могут выполняться в виде перфорированных металлических листов, частопериодических решеток и сеток, диэлектрических листов, частично покрытых с обеих сторон металлом, листов из диэлектрика с высокой проницаемостью [1]. Однако при использовании указанных граничных условий предполагается, что они имеют локальный характер и справедливы в основном для слабо искривленных поверхностей [1,2]. Эти граничные условия могут быть двух типов: односторонние и двусторонние [2 – 4]. Учет кривизны тела требует изменения граничных условий, в связи с чем они приобретают сложный вид. В [5] получены односторонние импедансные граничные условия на поверхности цилиндра и сферы и показана зависимость импеданса от формы и выбранной стороны поверхности. Результаты исследования задач дифракции электромагнитных волн на изотропных и незамкнутых телах переменной кривизны, на по-

верхностях которых нанесены поглощающие слои, представляют значительный интерес при создании и разработке широкополосных и сверхширокополосных антенных и радиолокационных систем. Моделями элементов этих систем являются сплошные и щелевые конические структуры [6 – 8]. Строгое решение электродинамических задач для таких структур требует привлечения сложного математического аппарата или упрощения рассматриваемых моделей. Авторам работы [9] удалось свести скалярную задачу дифракции волн на полубесконечном сплошном конусе произвольного сечения, на поверхности которого заданы односторонние импедансные условия без явного учета кривизны, к решению интегрального уравнения, и в случае узкого кругового конуса исследовать пространственное распределение поля на основе полученных диаграмм. В работе отмечено, что импеданс является постоянной величиной. Наличие постоянного импеданса в случае рассеяния электромагнитных волн приводит к появлению в структуре рассеянного поля поверхностных волн, но при этом не наблюдается излучение в окружающее данное тело пространство [10]. Поле излучения поверхностных волн возможно в случае поверхности с переменным импедансом. В [10 – 12] получено аналитическое решение задачи рассеяния электромагнитных волн на сплошном полубесконечном конусе и неограниченной плоскости с односторонними импедансными условиями без учета кривизны конуса при условии, что импеданс является линейной функцией расстояния от некоторой фиксированной точки поверхности (например, вершины

конуса) и показано существование в структуре поля поверхностных волн излучения.

Цель данной работы – исследование в строгой постановке модельной задачи дифракции электромагнитных волн на полубесконечном тонком круговом конусе с периодическими продольными щелями и сплошном конусе, на поверхности которых заданы двусторонние импедансные условия, учитывающие кривизну. Для достижения сформулированной цели необходимо найти строгое решение задачи дифракции для полубесконечной идеально проводящей конической поверхности в приближении полупрозрачного конуса и получить усредненные граничные условия (УГРУ) с учетом его угловых размеров.

Возбуждение идеально проводящего конуса с продольными щелями

Пусть полубесконечный тонкий идеально проводящий круговой с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями конус Σ (рис.1) находится в поле электрического ($\chi=1$) или магнитного ($\chi=2$) радиального диполя, меняющемся по закону $e^{ia\omega t}$ ($a=\pm 1$). Обозначим через 2γ угол раствора конуса Σ , через d ширину щелей и через $l=2\pi/N$ период конической структуры. Ширина щелей и период – величины двугранных углов, которые образованы плоскостями, проведенными через ось структуры и ребра конических лент (секторов). Для удобства введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в вершине конуса, в которой рассматриваемая структура Σ определяется уравнением $\theta=\gamma$ и плоскость $\varphi=0$ проходит через ось одной из щелей конуса. Радиальный ди-

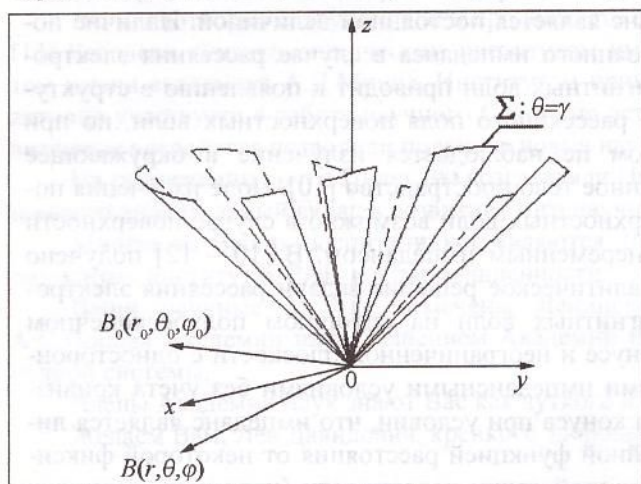


Рис. 1. Геометрия структуры

поль [электрический ($\chi=1$) или магнитный ($\chi=2$) диполь] с моментом

$$\mathbf{P}_r^{(\chi)}(\mathbf{r}) = M_r^{(\chi)} \mathbf{e}_r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1)$$

расположен в точке $B(\mathbf{r}_0)$. Среда, в которую помещены коническая поверхность и источник, является однородной, изотропной и стационарной с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Требуется найти электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в присутствии конической структуры и источника, удовлетворяющее:

- уравнениям Максвелла;
- граничному условию на конических лентах поверхности Σ

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Sigma} = 0;$$

- условию на бесконечности в форме Сильвера – Мюлера [2]:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times) - qr] \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times) - qr] \mathbf{H} = 0;$$

- условию ограниченности энергии.

Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [13, 14].

Искомое поле представим в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ – поле диполя (первичное поле) с моментом (1), $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ – поле, обусловленное присутствием конической структуры (вторичное поле).

Для решения рассматриваемой электродинамической задачи удобно ввести электрический $v^{(1)}$ и магнитный $v^{(2)}$ потенциалы Дебая, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля по формулам [15]:

поле E -типа ($\chi=1$)

$$\begin{aligned} E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (rv^{(1)}), \quad H_r = 0, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rv^{(1)}), \quad H_\theta = \frac{q}{w \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(1)}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rv^{(1)}), \quad H_\varphi = -\frac{q}{w} \frac{\partial}{\partial \theta} v^{(1)}; \end{aligned} \quad (5)$$

поле H -типа ($\chi = 2$)

$$\begin{aligned} E_r &= 0, \quad H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r v^{(2)}), \\ E_\theta &= -\frac{q w}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(2)}, \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r v^{(2)}), \\ E_\varphi &= q w \frac{\partial}{\partial \theta} v^{(2)}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r v^{(2)}), \end{aligned} \quad (6)$$

$w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновое сопротивление среды;
 $q = iak$; $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое число.

Потенциал Дебая $v^{(\chi)}$ удовлетворяет:

1) уравнению Гельмгольца

$$(\Delta - q^2)v^{(\chi)} = 0, \quad \mathbf{r} \notin \Sigma, \mathbf{r}_0; \quad (7)$$

2) краевому условию

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} v^{(\chi)} \Big|_{\Sigma} = 0; \quad (8)$$

3) принципу предельного поглощения;

4) условию ограниченности энергии.

В соответствии с (3), (4) потенциал Дебая $v^{(\chi)}$ для полного поля ищем в виде

$$v^{(\chi)}(\mathbf{r}) = v_0^{(\chi)}(\mathbf{r}) + v_1^{(\chi)}(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где $v_0^{(\chi)}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{p}_\chi e^{-qR}}{r_0 4\pi R}$ – потенциал первичного по-

ля; $v_1^{(\chi)}$ – потенциал вторичного поля. Неизвестный потенциал $v_1^{(\chi)}$ из (9) всюду вне конуса Σ и источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца (7), которое в сферической системе координат записывают в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_1^{(\chi)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_1^{(\chi)}}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_1^{(\chi)}}{\partial \varphi^2} - q^2 v_1^{(\chi)} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Одним из распространенных методов решения уравнения Гельмгольца является метод разделения переменных [15, 16]. В рамках этого метода общее решение уравнения (10) записывают в виде ряда по собственным функциям уравнения Гельмгольца для однородной среды. Коэффициенты разложения находят из условий электродинамической задачи. Так, в случае рассеяния электромагнитных волн на сплошном полубесконечном идеально проводящем тонком круговом конусе $\tilde{\Sigma}: \theta = \tilde{\gamma}$ коэффициенты

разложения находят с помощью условий ортогональности в области $\theta \in (0, \tilde{\gamma})$ функций Лежандра $P_{\tilde{\nu}}^m(\cos \theta)$, индексы которых являются корнями уравнения $P_{\tilde{\nu}}^m(\cos \tilde{\gamma}) = 0$ [17, 18]:

$$\int_0^{\tilde{\gamma}} P_{\tilde{\nu}}^m(\cos \theta) P_{\tilde{\nu}}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad \tilde{\nu}_n^{(m)} \neq \tilde{\nu}_s^{(m)}. \quad (11)$$

Решение этого уравнения записывают в виде двойного ряда, члены которого в сферической системе координат представляют собой произведения функций Макдональда, содержащих радиальную координату r , присоединенные функции Лежандра угловой переменной θ и экспоненты азимутального угла φ [17, 18]. Однако при исследовании поля в волновой зоне ($qr \gg 1$) такие ряды плохо сходятся и дают неудовлетворительные результаты [19, 20]. Возникла необходимость в другом представлении для решения, и оно было найдено в виде интеграла при интегрировании по индексу функции Макдональда, что позволило исследовать рассеянное конусом поле в волновой зоне, где оно представляет собой уходящую волну [18, 19, 21]. Это интегральное представление явилось основой для определения интегрального преобразования с ядром в виде функции Макдональда либо частного случая последней – функции Ханкеля или Бесселя [18, 20, 22]. Российскими учеными Конторовичем М.И. и Лебедевым Н.Н. [22] было найдено, а затем Лебедевым Н.Н. [23, 24] строго обосновано интегральное разложение

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{i\tau}(\rho) d\tau \int_0^{+\infty} u(x) K_{i\tau}(x) dx, \quad \tau \geq 0$$

по функциям Макдональда мнимого порядка $K_{i\tau}(\rho)$. Это разложение справедливо для произвольной функции $u(\rho)$, удовлетворяющей на интервале $(0, +\infty)$ следующим условиям:

а) $u(\rho)$ непрерывна и интегрируема на любом конечном интервале (ρ_0, ρ_1) , содержащемся внутри $(0, +\infty)$;

б) интегралы $\int_0^{1/2} \ln \frac{1}{\rho} |u(\rho)| \frac{d\rho}{\rho}$ и $\int_{1/2}^{+\infty} |u(\rho)| \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}$

сходятся.

При выполнении этих условий преобразование Конторовича – Лебедева функции $u(\rho)$ определяется интегралом

$$\mathcal{N}[u(\rho)] = \hat{u}(\tau) = u(\rho) = \frac{2}{\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} u(\rho) K_{i\tau}(\rho) \frac{d\rho}{\rho},$$

$$\tau \in (0, +\infty),$$

и формулой его обращения

$$\mathcal{N}^{-1}[\hat{u}(\tau)] = u(\rho) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{u}(\tau) K_{i\tau}(\rho) d\tau,$$

$$\rho \in (0, +\infty).$$

Более симметричная форма этих соответствий приведена в [25]

$$\hat{u}(\tau) = \int_0^{+\infty} u(\rho) \frac{K_{i\tau}(\rho)}{\sqrt{\rho}} d\rho, \quad \tau \in (0, +\infty),$$

$$u(\rho) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{u}(\tau) \frac{K_{i\tau}(\rho)}{\sqrt{\rho}} d\tau, \quad \rho \in (0, +\infty).$$

Одним из эффективных средств исследования задач дифракции на конических структурах является интегральное представление Конторовича – Лебедева относительно радиальной координаты сферической системы [22, 26]:

$$\hat{g}(\tau) = \int_0^{+\infty} g(r) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (12)$$

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{g}(\tau) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (13)$$

Использование для решения поставленной задачи в случае конуса с продольными щелями метода разложения по собственным функциям оказывается весьма затруднительным из-за отсутствия аналогичных условий ортогональности (11) для конической поверхности с продольными щелями. Поэтому для решения краевой задачи (7), (8) используем интегральные преобразования Конторовича – Лебедева (12), (13), в связи с чем представим потенциалы $\nu_0^{(\chi)}(\mathbf{r})$, $\nu_1^{(\chi)}(\mathbf{r})$ в виде

$$\nu_0^{(\chi)}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{\nu}_0^{(\chi)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (14)$$

$$\hat{\nu}_0^{(\chi)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(\chi)} U_{m\tau}^{(0)} e^{im\varphi},$$

$$a_{m\tau}^{(\chi)} = \frac{\hat{p}_\chi}{4} e^{-im\varphi_0} (-1)^m \frac{K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \tau} \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)},$$

$$\hat{p}_\chi = \frac{M_r^{(\chi)}}{\varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1}},$$

$$U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0), & \theta < \theta_0, \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0), & \theta_0 < \theta, \end{cases}$$

$$\nu_1^{(\chi)}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{\nu}_1^{(\chi)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (15)$$

$$\hat{\nu}_1^{(\chi)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(\chi)} b_{m\tau}^{(\chi),p} U_{m\tau}^{(\chi)},$$

$$b_{m\tau}^{(\chi),p}(\gamma, \theta_0) = \eta[(-1)^p(\theta_0 - \gamma)] \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0),$$

$$p=1: \theta_0 < \gamma; \quad p=2: \gamma < \theta_0,$$

$$U_{m\tau}^{(\chi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+\tilde{m}_0}^{(\chi)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} e^{i(m+nN)\varphi}, \quad (16)$$

где $P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода; $\eta(\gamma)$ – функция Хэвисайда; $x_{m,n+\tilde{m}_0}^{(\chi)}$ – неизвестные коэффициенты, не зависящие от пространственных координат; $m/N = m_0 + \nu$; m_0 – ближайшее целое число к m/N ; $-1/2 \leq \nu < 1/2$.

Верхние знаки в аргументах функций Лежандра (16) соответствуют области $0 < \theta < \gamma$, а нижние – области $\gamma < \theta < \pi$. В результате использования краевого условия (8) и условия непрерывности поля в щелях получаем функциональные уравнения для определения коэффициентов $x_{m,n}^{(\chi)}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(\chi)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \text{ленты } \Sigma, \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [N(n+\nu)]^{\tilde{\rho}(\chi)} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_n^{(\chi)}) x_{m,n}^{(\chi)} e^{inN\varphi} = 0 \quad \text{щели } \Sigma, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & [N(n+\nu)]^{\tilde{\rho}(\chi)} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_n^{(\chi)}) = \\ & = \frac{(-1)^{(n+\nu)N+\chi-1} \operatorname{ch} \pi \tau}{\pi (\sin \gamma)^{1-\tilde{\rho}(\chi)}} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + (n+\nu)N)}{\Gamma(1/2 + i\tau - (n+\nu)N)} \times \\ & \times \frac{1}{\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma_2) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2)}, \\ & \tilde{\rho}(\chi) = (-1)^{\chi-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из независимости матричных коэффициентов $\hat{\varepsilon}_n^{(\chi)}$ (19) от волнового параметра следует независимость от волнового числа также неизвестных коэффициентов $x_{m,n}^{(\chi)}$, что упрощает анализ поля, в частности, в волновой зоне ($qr \gg 1$) и его поведения вблизи вершины конуса ($qr \ll 1$). Полученная система линейных алгебраических уравнений (17), (18) является системой первого рода (СЛАУ-1) и мало пригодна для нахождения неизвестных коэффициентов $x_{m,n}^{(\chi)}$ [27]. Однако в результате применения метода полуобращения ее удастся свести к системе линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2):

$$X^{(\chi)} = \bar{A}^{(\chi)} X^{(\chi)} + \bar{B}^{(\chi)}, \quad (20)$$

для решения которой можно использовать при любых соотношениях параметров задачи метод редукции, а в частных случаях конической структуры (например, в случае большого числа узких щелей или узких лент) также методом последовательных приближений.

В частном случае большого числа щелей ($N \gg 1$) и узких щелей ($d/l \ll 1$) или узких лент ($(l-d)/l \ll 1$) коническая структура при условии существования пределов

$$Q = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] > 0 \quad (21)$$

или

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 0}} \left[-\frac{1}{N} \ln \sin \frac{\pi d}{2l} \right] > 0 \quad (22)$$

представляет собой модель тонкой пленки, способной как пропускать, так и отражать электромагнитное поле. Поэтому эти предельные случаи структуры (21), (22) будем называть полупрозрачным конусом. Используя метод последовательных приближений в случае полупрозрачного конуса (21), (22), получаем аналитическое решение СЛАУ-2 (20)

$$x_{m,n}^{(\chi)} = \frac{1}{1 + 2^{3-2\chi} [Q^{2-\chi} W^{\chi-1}]^{\bar{\rho}(\chi)} m^{\bar{\rho}(\chi)} \frac{|m|}{m} (1 - \varepsilon_{m,2}^{(\chi)})} \quad (23)$$

Потенциал Дебая $v^{(\chi)}(\mathbf{r})$ (9) для полупрозрачного конуса Σ (21), (22) с учетом (23) записывают в виде

$$v^{(\chi)}(\mathbf{r}) = v_{\text{сплн}\Sigma}^{(\chi)}(\mathbf{r}) + f_{\text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)}(\mathbf{r}) \text{ при } \gamma_2 < \theta_0 < \pi, \quad (24)$$

$$v_{\text{сплн}\Sigma_2}^{(\chi)}(\mathbf{r}) = v_0^{(\chi)}(\mathbf{r}) + v_{\text{сплн}\Sigma_2}^{(\chi)}(\mathbf{r}),$$

где $v_{\text{сплн}\Sigma}^{(\chi)}(\mathbf{r})$ – потенциал Дебая для сплошного (без щелей) конуса Σ [17]; $f_{\text{п.пр}\Sigma_2}^{*(\chi)}(\mathbf{r})$ обусловлено наличием неоднородностей в виде щелей,

$$f_{\text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{f}_{\text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (25)$$

$$\hat{f}_{\text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(\chi)} \hat{f}_{m\tau, \text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)} \frac{\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma)}{\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) e^{im\varphi},$$

$$\hat{f}_{m\tau, \text{п.пр}\Sigma_2}^{*(\chi)} = \left(2Q^{2-\chi} W^{\chi-1} \right)^{2-\chi} \frac{\left(A_{i\tau}^{(\chi),m} \right)^{\chi-1}}{A_{i\tau}^{(\chi),m} + 2Q^{2-\chi} W^{\chi-1}}, \\ A_{i\tau}^{(1),m}(\gamma) = (-1)^m \frac{\pi}{ch\pi\tau} \frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma), \quad (26)$$

$$A_{i\tau}^{(2),m}(\gamma) = \frac{(-1)^{m+1} ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{\Gamma(1/2+i\tau+m)}{\Gamma(1/2+i\tau-m)} \times \\ \times \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)}. \quad (27)$$

Функция $f_{\text{п.пр}\Sigma}^{*(\chi)}(\mathbf{r})$ (25) соответствует добавочным слагаемым в представлениях (5), (6) для составляющих электромагнитного поля, рассеянного сплошным идеально проводящим конусом Σ (при отсутствии щелей).

На поверхности Σ_2 полупрозрачного конуса выполняются следующие граничные условия для потенциала $v^{(\chi)}(\mathbf{r})$ (9) и составляющих электромагнитного поля (5), (6):

$$\left[v^{(1)} \right]_{\Sigma_2} = 0, \quad (28)$$

$$v^{(1)}|_{\Sigma_2} - Q \sin \gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} v^{(1)} \right]_{\Sigma_2} = 0, \quad (29)$$

где

$$\left[\frac{\partial^{\chi-1} g}{\partial \theta^{\chi-1}} \right]_{\Sigma_2} = \frac{\partial^{\chi-1} g}{\partial \theta^{\chi-1}} \Big|_{\Sigma_2^+} - \frac{\partial^{\chi-1} g}{\partial \theta^{\chi-1}} \Big|_{\Sigma_2^-}, \quad \Sigma_2^\pm: \theta = \gamma_2 \pm 0;$$

$$\left[E_r \right]_{\Sigma_2} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{-q}{wQ \sin \gamma_2} E_r \Big|_{\Sigma} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r \tilde{H}_\varphi), \quad (31)$$

или

$$\frac{-q}{wQ \sin \gamma_2} E_r \Big|_{\Sigma} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r j_r),$$

где $\tilde{H}_\varphi = [\tilde{H}_\varphi]_{\Sigma_2}$; j_r – радиальная составляющая плотности поверхностного тока, наведенного на поверхности полупрозрачного конуса Σ_2 ;

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta} v^{(2)} \right]_{\Sigma_2} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} v^{(2)} \Big|_{\Sigma_2} - \frac{1}{4W \sin \gamma_2} [v^{(2)}]_{\Sigma_2} = 0; \quad (33)$$

$$\left[E_\varphi \right]_{\Sigma_2} = 0, \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r E_\varphi) \Big|_{\Sigma_2} = \frac{-wq}{4W \sin \gamma_2} \tilde{H}_r, \quad (35)$$

$$\text{или } \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (r E_\varphi) \Big|_{\Sigma_2} = \frac{-wq}{4W \sin \gamma_2} j_\varphi,$$

где j_φ – азимутальная составляющая плотности поверхностного тока, наведенного на поверхности полупрозрачного конуса Σ_2 . Граничные условия типа (28) – (35) относятся к классу усредненных граничных условий (УГРУ) [1, 23], которые могут использоваться как эквивалентные граничные условия для решения электродинамических граничных задач для сеточных структур. Полупрозрачный конус можно рассматривать как коническую сеточную структуру, состоящую из большого числа проводников ($\chi=1$), или густую щелевую структуру ($\chi=2$).

Граничные условия (28), (29) и (32), (33) можно записать так:

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} v^{(\chi)} \Big|_{\Sigma} - \tilde{Z}^{(\chi)}(\vec{r}) \left[\frac{\partial^{2-\chi}}{\partial n^{2-\chi}} v^{(\chi)} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (36)$$

$$\left[\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} v^{(\chi)} \right]_{\Sigma} = 0,$$

где

$$\tilde{Z}^{(\chi)}(\vec{r}) = 4^{1-\chi} (rQ^{2-\chi}W^{\chi-1} \sin \gamma)^{\tilde{p}(\chi)}. \quad (37)$$

Так, при $\chi=1$ (36) принимает вид

$$v^{(1)} \Big|_{\Sigma} - \tilde{Z}^{(1)}(\vec{r}) \left[\frac{\partial}{\partial n} v^{(1)} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (38)$$

а для $\chi=2$ соответственно

$$\frac{\partial}{\partial n} v^{(2)} \Big|_{\Sigma} - \tilde{Z}^{(2)}(\vec{r}) [v^{(2)}]_{\Sigma} = 0. \quad (39)$$

Вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности конуса Σ имеет направление единичного орта $\mathbf{e}_\theta$ (в локальной системе координат). Граничные условия (38), (39) представляют собой граничные условия импедансного типа на густой конической решетке (скалярная задача). Они соответствуют УГРУ, приведенным в [1] для густых решеток (плоских или с большой кривизной по сравнению с длиной волны). Однако наличие множителя $\sin \gamma$ в выражении для $\tilde{Z}^{(\chi)}$ (37) свидетельствуют об учете кривизны конуса (поверхности с переменным импедансом) в условиях (38), (39) и являются обобщением известных УГРУ для конуса, но полученных из строгого решения для полупрозрачного конуса (21), (22). Импедансный параметр $\tilde{Z}^{(\chi)}(\vec{r})$ зависит также и от расстояния от вершины конуса r . В случае возбуждения полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем ($\chi=1$)

$$\tilde{Z}^{(1)}(\vec{r}) = Qr \sin \gamma, \quad (40)$$

и с ростом параметра заполнения конуса Q , определенного в (21), или с удалением от вершины конуса он растет им прямо пропорционально. В соответствии с (22) увеличение Q приводит к тому, что полупрозрачный конус по своим свойствам близок к конической пленке, слабо отражающей падающее на нее поле.

Таким образом, можно заключить, что увеличение параметра $\tilde{Z}^{(1)}$ (40) приводит к значительному ослаблению степени отражения от полупрозрачного конуса. Это, в частности, объясняется тем, что на больших расстояниях от вершины узкие проводники (в силу угловых размеров структуры) значительно разнесены в пространстве и

практически не оказывают влияния друг на друга (ширина каждой ленты значительно меньше периода конической структуры). Аналогичные рассуждения можно провести и в случае возбуждения полупрозрачного конуса магнитным радиальным диполем.

Следовательно, прямая ($\chi=1$) или обратная ($\chi=2$) зависимость параметра $\tilde{Z}^{(\chi)}$ от радиальной координаты r обусловлена самой природой полупрозрачного конуса, определенного существованием пределов (21), (22).

Если проанализировать УГРУ для составляющих поля (30), (31) и (34), (35), то наличие в них производных второго порядка по радиальной координате в некоторой степени делает их похожими на граничные условия, содержащих производные и приведенными в [2]. По мере удаления от вершины слагаемое, содержащее производную второго порядка, уменьшается и вносит незначительный вклад в граничное условие. Начиная с некоторых значений r , им можно пренебречь, и в результате приходим к граничным условиям резистивного типа для составляющих поля [1, 2], но с импедансным параметром, зависящим от r . Зависимость импедансного параметра от продольной координаты может привести к появлению в структуре поля поверхностных волн, соответствующих определенным значениям спектра рассматриваемой граничной задачи [10, 11, 15]. Для изучения структуры поля целесообразно представить потенциал Дебая и соответственно составляющие поля в виде ряда, каждый член которого является модой вторичного поля. Перейдем в представлении (25) к интегрированию по мнимой оси, а затем запишем интеграл в виде ряда по вычетам подынтегральной функции в ее изолированных особых точках. В рассматриваемом случае изолированными особыми точками являются простые полюсы, множество которых будем называть спектром граничной задачи. Для простоты исследования спектра рассмотрим случай осесимметричного возбуждения полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем ($\theta_0 = \pi$, $\chi = 1$). В этом случае спектр определяется корнями уравнения

$$\pi P_{-1/2+\tilde{\mu}}(\cos \gamma) P_{-1/2+\tilde{\mu}}(-\cos \gamma) + 2Q \cos \pi \tilde{\mu} = 0. \quad (41)$$

При малых значениях параметра Q ($Q \ll 1$) поверхностные свойства полупрозрачного конуса незначительно отличаются от поверхностных свойств идеально проводящего конуса, а корни уравнения (41)

$$\mu_s^\pm = \alpha_s^\pm - \frac{2W_1 \cos \pi \alpha_s^\pm}{\pi \frac{d}{d\tilde{\mu}} [P_{-1/2+\tilde{\mu}}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\tilde{\mu}}(-\cos \gamma_2)]|_{\tilde{\mu}=\alpha_s^\pm}} + O(W_1^2), \quad (42)$$

$$P_{-1/2+\alpha_s^+}(\cos \gamma_2) = 0, \quad P_{-1/2+\alpha_s^-}(-\cos \gamma_2) = 0, \\ s = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (43)$$

находятся вблизи корней $P_{-1/2+\tilde{\mu}}(\pm \cos \gamma) = 0$ (43), которые определяют спектр для сплошного идеально проводящего конуса [17, 18, 29].

Таким образом, спектр собственных значений в случае малых Q (42) представляет собой возмущенный спектр собственных значений граничной задачи Дирихле для сплошного конуса (43) [30] при осесимметричном способе возбуждения. Наименьшее собственное значение из спектра характеризует поведение поля у вершины полупрозрачного конуса. Вблизи вершины компоненты электрического поля ведут себя как $(qr)^{-3/2+\mu_0^-}$, а магнитного – как $(qr)^{-1/2+\mu_0^-}$, где

$$\mu_0^- = \alpha_0^- - QG^{**} + O(Q^2); \quad (44)$$

$$G^{**} = \frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-1/2+\alpha_0^-}(\cos \gamma_2) \frac{d}{d\tilde{\mu}} [P_{-1/2+\tilde{\mu}}(-\cos \gamma)]|_{\tilde{\mu}=\alpha_0^-}}.$$

Принимая во внимание поведение функции Лежандра $P_{-1/2+\tilde{\mu}}(-\cos \gamma)$ в окрестности своего первого корня α_0^- [31] и предполагая $\gamma \leq \pi/2$ (при этом $1/2 < \alpha_0^- \leq 3/2$), приходим к выводу, что $G^{**} > 0$. Тогда из (44) следует, что при достаточно малом параметре Q ($Q \ll 1$) имеем $\mu_0^- < \alpha_0^-$. Поскольку поведение электрического поля вблизи острия сплошного конуса определяется слагаемым порядка $(qr)^{-3/2+\alpha_0^-}$, а магнитного $(qr)^{-1/2+\mu_0^-}$, то из вышеизложенного заключаем, что особенность поля у вершины полупрозрачного конуса при $Q \ll 1$ больше, чем у сплошного. В случае полупрозрачного конуса ($Q \gg 1$) корни (41) имеют вид

$$\tilde{\mu}_s = 1/2 + s + \frac{1}{2Q} [P_s(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}), \\ s = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (45)$$

$$\hat{\mu}_0 = 1/2 + \frac{1}{2Q} + O(Q^{-2}). \quad (46)$$

Поля в окрестности вершины ведут себя следующим образом:

$$|\mathbf{E}| \sim |qr|^{-1+1/(2Q)}, \quad |\mathbf{H}| \sim |qr|^{1/(2Q)}. \quad (47)$$

Из (47) видно, что поведение поля вблизи острия конуса слабо зависит от угла раствора конуса γ и входит в $O(Q^{-2})$ асимптотического представления для $\hat{\mu}_0$ (46).

Выражение для составляющей $E_{1\theta}$ вторичного поля в случае полупрозрачного конуса ($Q \gg 1$) и зависимости поля от времени в виде $e^{i\omega t}$ ($q = ik$) приведены ниже:

$$\begin{aligned} E_{1\theta} = & \frac{ik\hat{p}_1}{4Q} \left(\frac{kr_0}{2} \right)^{-3/2+\hat{\mu}_0} \frac{\sin kr_0}{r_0} \frac{e^{-ikr}}{r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \\ & - \frac{\pi p_1 i}{rr_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{kr_0}{2} \right)^{\hat{\mu}_n - (1/2+n)} \right] c_n^* J_{1/2+n}(kr_0) \times \\ & \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{r} H_{1/2+n}^{(2)}(kr) \right] P_n^{-1}(\cos \theta) + \\ & + \frac{\hat{p}_1}{2W_1} \frac{\pi i}{rr_0 \sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{kr_0}{2} \right)^{\mu_n - (1/2+n)} (-1)^n \times \\ & \times \left[P_n(\cos \gamma) \right]^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} M_n^{-1} \right] + \\ & + O(Q^{-2}), \quad r > r_0, \quad 0 < \theta < \gamma, \end{aligned} \quad (48)$$

где $c_n^* = (-1)^n (1/2+n)n(n+1)$;

$$\begin{aligned} M_n^{-1} = & \hat{Z}_n^{-1} + 2n(n+1) J_{1/2+n}(kr_0) H_{1/2+n}^{(2)}(kr) \frac{P_n^{-1}(\cos \theta)}{P_n(\cos \gamma)} \times \\ & \times \left\{ \frac{d}{d\hat{\mu}} P_{\frac{1}{2}+\hat{\mu}}(\cos \gamma) \Big|_{\hat{\mu}=1/2+n} + (-1)^n \times \right. \\ & \times \left. \frac{d}{d\hat{\mu}} P_{-1/2+\hat{\mu}}(-\cos \gamma) \Big|_{\hat{\mu}=1/2+n} \right\}; \\ \hat{Z}_n^{-1} = & \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{kr_0}{2} \right)^{1/2+n+2m} \times \\ & \times \frac{d}{d\hat{\mu}} \left\{ \hat{\mu} \left(\hat{\mu}^2 - 1/4 \right) H_{\hat{\mu}}^{(2)}(kr) \frac{P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \theta)}{\Gamma(\hat{\mu} + m + 1)} \right\} \Big|_{\hat{\mu}=1/2+n}. \end{aligned}$$

Аналогичное представление имеет место и для $\gamma < \theta < \pi$. Остальные составляющие электромагнитного поля записывают в аналогичном (48)

виде и определяются бесконечным набором мод, являющихся членами ряда. С практической точки зрения интерес представляет способ возбуждения, когда источник расположен вблизи вершины конуса ($kr_0 \ll 1$).

В случае расположения источника близко к вершине конуса выражение (48) определяется доминирующим слагаемым

$$E_{1\theta}^* = \frac{ik\hat{p}_1}{4Q} \left(\frac{kr_0}{2} \right)^{-3/2+\hat{\mu}_0} \frac{\sin kr_0}{r_0} \frac{e^{-ikr}}{r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (49)$$

которое и является приближением для $E_{1\theta}$ в этом режиме при $r > r_0$ и $0 < \theta < \gamma$. Правая часть (49) представляет собой сферическую ТЕМ-волну, соответствующую спектральному значению $\hat{\mu}_0$ (46) и распространяющуюся от вершины конуса. Поле этой волны определяет поведение электромагнитного поля вблизи вершины конуса. В структуре поля для сплошного идеально проводящего конуса такой волны нет и ее существование обусловлено поверхностными свойствами полупрозрачного конуса. Вдоль оси конуса ($\theta = 0$) поле этой волны отсутствует, а вблизи поверхности конуса ($\theta = \gamma$) оно достигает своего наибольшего значения. Если источник располагается в точках $kr_0 = n\pi$ и $n \in \mathbb{N}$, то поле этой волны пренебрежимо мало и ее вклад в общее поле незначителен. При возбуждении полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем на поверхности конуса наводятся радиальные токи (токи, имеющие только радиальную составляющую). В случае полупрозрачного конуса, когда $Q \gg 1$, его поверхность состоит из очень большого числа тонких и узких прямолинейных проводников, в связи с чем такая поверхность может считаться приближением радиально проводящей поверхности [20]. Однако главное отличие полупрозрачного конуса от радиально проводящего состоит в том, что поверхностные свойства полупрозрачного конуса задаются параметром заполнения Q , который и определяет степень отражения от конуса и прохождение поля через его поверхность, в то время как для радиально проводящих конусов аналогичные параметры не вводятся [20]. О возможности существования ТЕМ-волн в структуре рассеянного подобной конической поверхностью поля упоминается в [20, 32–34].

Для произвольных значений параметра заполнения Q анализ спектра граничной задачи проведен на основе численного решения (41).

Спектральные значения $\hat{\mu}$ зависят от угла γ и параметра Q . Изменению параметра Q в пределах от нуля до больших значений соответствует изменению поверхностных свойств полупрозрачного конуса от свойств, близких к свойствам идеально проводящего конуса до свойств густой сетки, слабо отражающей падающее на нее поле.

На рис. 2 приведены кривые зависимостей собственных значений $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ от параметра Q при фиксированных значениях угла γ . Анализ этих зависимостей, а также асимптотических разложений (42), (45) показал, что спектр граничной задачи представляет собой монотонно возрастающую последовательность собственных значений $\{\mu_n\}_{n=0}^{+\infty}$, наименьшим из которых является μ_0 . Все они положительны и больше 0,5. Величины соседних собственных значений при одних и тех же углах γ и параметрах Q отличаются прибли-

зительно на единицу. Каждый из μ_n при фиксированных γ_2 представляет собой монотонно убывающую функцию параметра Q . Интерес представляет изучение характера изменения в зависимости от γ и Q наименьшего значения из спектра μ_0 , определяющего поведение поля у вершины конической поверхности ($qr \ll 1$) [29] и его приближение в случае близкого расположения источника к вершине ($qr_0 \ll 1$). Из вышеприведенного следует, что при фиксированном параметре прозрачности Q большему углу γ соответствует и большая величина μ_0 . С увеличением параметра Q наблюдается убывание μ_0 по закону для Q , близкому к обратно пропорциональному. Для параметра прозрачности Q , превышающего 4, для нахождения величины μ_0 представляется возможным пользоваться приближением (46).

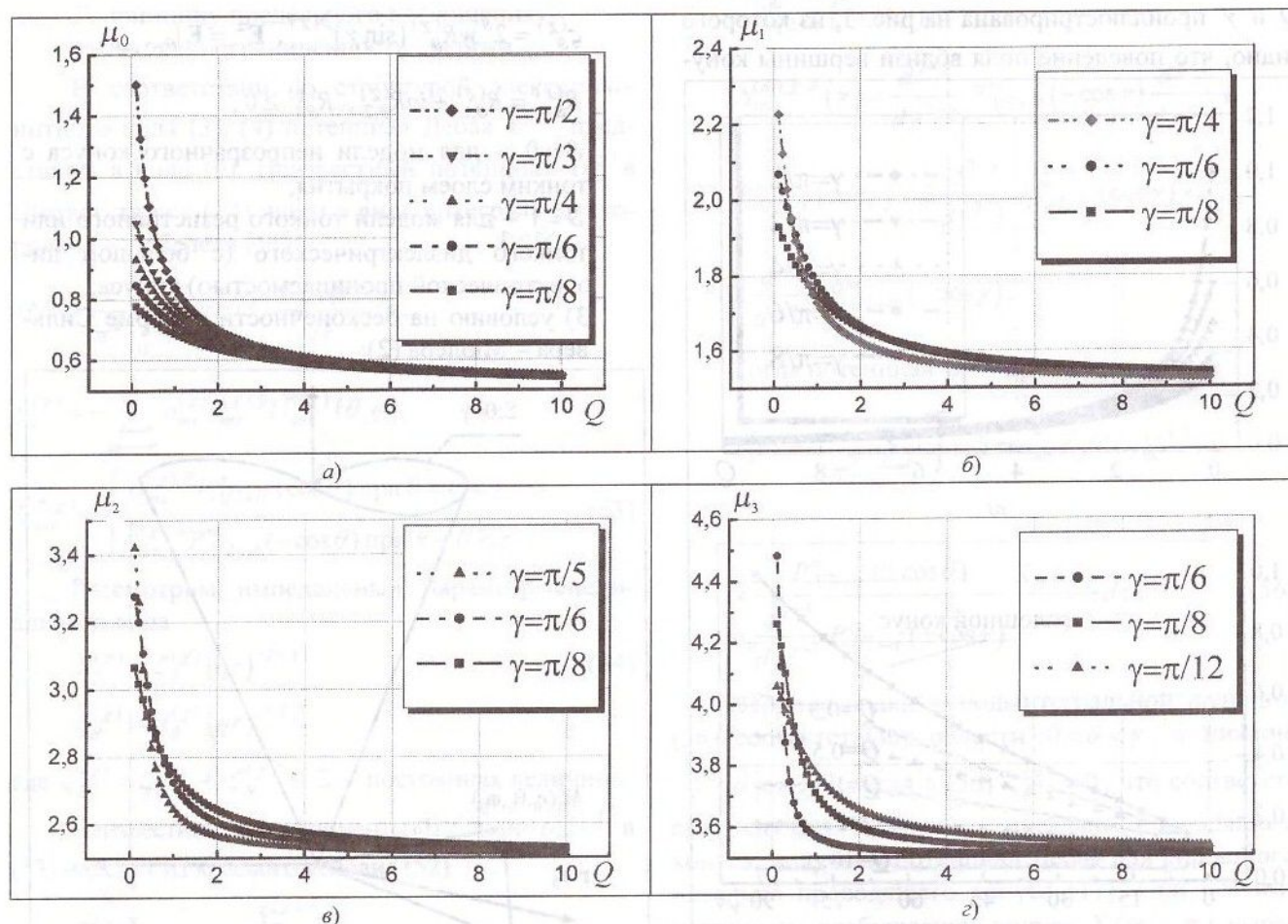


Рис. 2. Спектр собственных значений в зависимости от параметра заполнения Q для различных углов раскрытия γ «полупрозрачного» конуса: а – μ_0 ; б – μ_1 ; в – μ_2 ; з – μ_3

Следует отметить, что в случае возбуждения конической структуры электрическим радиальным диполем вблизи вершины конуса ($qr \ll 1$) составляющие поля E -типа ведут себя следующим образом:

$$E_r, E_\theta, E_\varphi \sim (qr)^{-3/2 + \tilde{\mu}_{\min}^{\text{эл.р.д}}}, \quad (50)$$

$$H_r, H_\theta, H_\varphi \sim (qr)^{-1/2 + \tilde{\mu}_{\min}^{\text{эл.р.д}}}, \quad (51)$$

где $\tilde{\mu}_{\min}^{\text{эл.р.д}}$ – наименьшее собственное значение спектра граничной задачи.

Поле в окрестности острия ведет себя следующим образом:

$$|\mathbf{E}| \sim (kr)^{-1+\alpha}, \quad |\mathbf{H}| \sim (kr)^\alpha,$$

где $\alpha = -\frac{1}{2} + \min(\mu_n)$.

Отсюда следует, что особенность поля у вершины полупрозрачного конуса сильнее, чем у вершины сплошного. Зависимость параметра α от Q и γ проиллюстрирована на рис. 3, из которого видно, что поведение поля вблизи вершины кону-

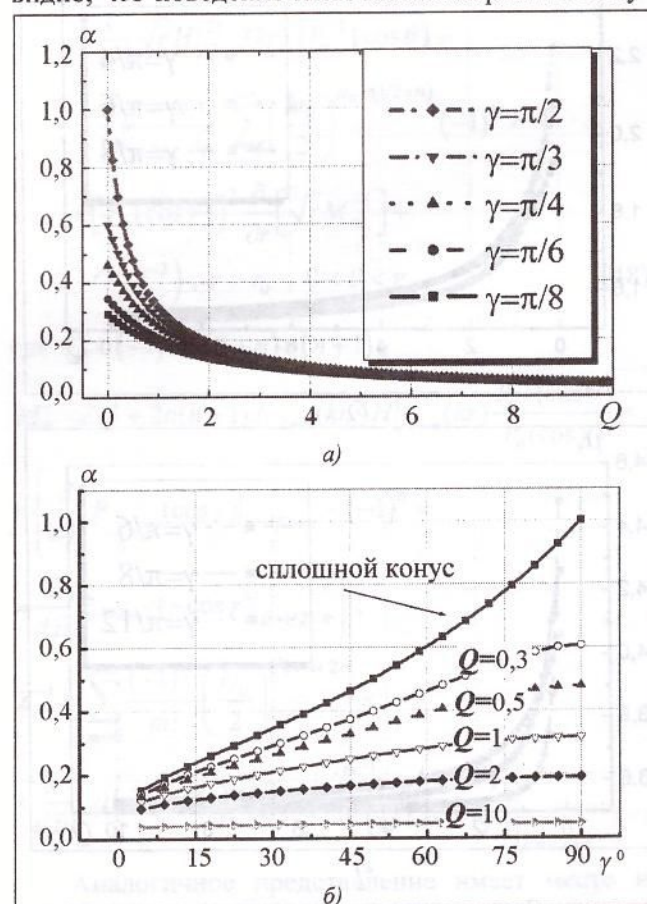


Рис. 3. Зависимость параметра α от параметра заполнения Q (а) и от угла полуоткрытия «полупрозрачного» конуса γ (б)

са (50), (51) слабо зависит от угла его раскрытия γ при больших значениях Q . С уменьшением параметра заполнения Q , особенность поля у вершины полупрозрачного конуса приближается к такой, как у вершины сплошного.

Неидеально проводящий конус

Пусть неидеально проводящий сплошной неограниченный круговой конус $\Sigma: \theta = \gamma$ находится в поле гармонического радиального диполя, расположенного в точке $M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ (рис. 4). Требуется найти поле в присутствии неидеально проводящего конуса Σ и источника, которое удовлетворяет:

1) системе уравнений Максвелла;

2) граничному условию

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times [\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-] \} = -\zeta_g^{(\chi)} \mathbf{n} \times [\mathbf{H}^+ + \mathcal{G} \mathbf{H}^-], \\ \mathbf{n} \times \{ \mathcal{G} [\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-] \} = 0; \quad \Sigma: \theta = \gamma, \end{cases} \quad (52)$$

$$\zeta_g^{(\chi)} = 2^g w R_g^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)}, \quad \mathbf{E}^\pm = \mathbf{E}|_{\theta=\gamma, \pm 0},$$

$$R_g^{(\chi)} = R_{g,1}^{(\chi)} + ia R_{g,2}^{(\chi)}, \quad R_{g,1}^{(\chi)} \geq 0,$$

$\mathcal{G} = 0$ – для модели непрозрачного конуса с тонким слоем покрытия,

$\mathcal{G} = 1$ – для модели тонкого резистивного или тонкого диэлектрического (с большой диэлектрической проницаемостью) конуса;

3) условию на бесконечности в форме Сильвера – Мюлера (2);

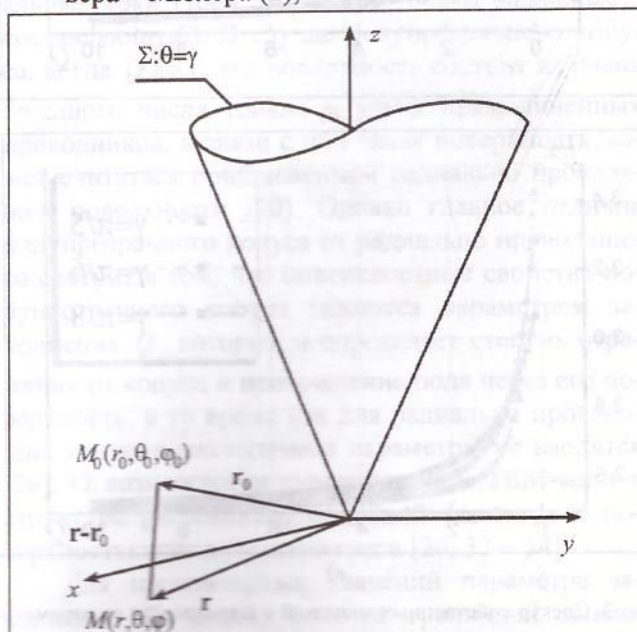


Рис. 4. Сплошной конус

4) условию ограниченности энергии.

Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [2, 14]. Введенные потенциалы Дебая $v^{(\chi)}$, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля согласно (5), (6), удовлетворяют:

1) однородному уравнению Гельмгольца всюду вне конуса Σ и источника;

2) краевым условиям на поверхности конуса:

$$\begin{cases} L^{(\chi)} v^{(\chi)}|_{\Sigma} = \\ = -R_g^{(\chi)} (q \sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)} \{ L^{(\chi+\tilde{\rho})} v^{(\chi)+} - \mathcal{G} L^{(\chi+\tilde{\rho})} v^{(\chi)-} \}, \\ L^{(\chi)} \{ \mathcal{G} (v^{(\chi)+} - v^{(\chi)-}) \} = 0, \end{cases}$$

$$L^{(1)} v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (rv), \quad v^+ = v|_{\theta=\gamma+0},$$

$$L^{(2)} v = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad v^- = v|_{\theta=\gamma-0};$$

3) принципу предельного поглощения;

4) условию ограниченности энергии.

В соответствии со структурой электромагнитного поля (3), (4) потенциал Дебая $v^{(\chi)}$ представим в виде (9). Неизвестный потенциал $v_1^{(\chi)}$ в соответствии с (14) ищем в виде интеграла Контровича – Лебедева (15):

$$v_1^{(\chi)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{v}_1^{(\chi)} \frac{K_{it}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

$$\hat{v}_1^{(\chi)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(\chi)} b_{m\tau}^{(\chi),p} \hat{U}_{m\tau}^{*(\chi)}(\theta, \varphi),$$

$$\hat{U}_{m\tau}^{*(\chi)} = \begin{cases} \hat{\alpha}_{m\tau}^{(\chi),g} P_{-1/2+it}^m(\cos \theta) & \text{при } 0 < \theta < \gamma, \\ \hat{\beta}_{m\tau}^{(\chi),g} P_{-1/2+it}^m(-\cos \theta) & \text{при } \gamma < \theta < \pi. \end{cases} \quad (53)$$

Рассмотрим импедансный параметр специального вида

$$R_g^{(\chi)} = \zeta_g^{(\chi)} (qr)^{-\tilde{\rho}(\chi)}, \quad (54)$$

$$\zeta_g^{(\chi)} = R_g^{(\chi)} (qr)^{\tilde{\rho}(\chi)},$$

где $\zeta_g^{(\chi)} = \zeta_g^{(\chi)'} + i\zeta_g^{(\chi)''} \in \mathbb{C}$ – постоянная величина.

Неизвестные коэффициенты $\hat{\alpha}_{m\tau}^{(\chi),g}$ и $\hat{\beta}_{m\tau}^{(\chi),g}$ в (53) находят из краевого условия (52)

$$\hat{\alpha}_{m\tau}^{(\chi),g} = \frac{\tilde{y}_m^{(\chi),g}}{d^{\chi-1} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma)},$$

$$\hat{\beta}_{m\tau}^{(\chi),g} = \frac{\tilde{y}_m^{(\chi),g}}{d^{\chi-1} P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma)},$$

$$\tilde{y}_m^{(\chi),g} = \frac{\tilde{I}_m^{(\chi),g}}{\tilde{G}_m^{(\chi),g}}, \quad (55)$$

$$\tilde{I}_m^{(\chi),g} = \left(\tau^2 + 1/4 \right)^{\tilde{\rho}(\chi)} \Xi_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) - (1 - \mathcal{G}) \zeta_g^{(\chi)} \times$$

$$\times (\sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)} \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma),$$

$$\tilde{G}_m^{(\chi),g} = \left(\tau^2 + 1/4 \right)^{\tilde{\rho}(\chi)} \Xi_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) -$$

$$-\zeta_g^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)} \tilde{\Delta}_{it}^{(m),\chi,g},$$

$$\Xi_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) = \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} \times$$

$$\times P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma),$$

$$\tilde{\Delta}_{it}^{(m),\chi,g}(\gamma) = \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} \times$$

$$P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma) - \mathcal{G} \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma) \times$$

$$\times \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma).$$

Тогда потенциал $v_1^{(\chi)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} v_1^{(\chi)} = & -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{m\tau}^{*(\chi)} b_{m\tau}^{*(\chi),p} \tilde{y}_m^{(\chi),g} \times \\ & \times \frac{P_{-1/2+it}^m(\pm \cos \theta)}{d^{\chi-1} P_{-1/2+it}^m(\pm \cos \gamma)} \frac{K_{it}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \end{aligned} \quad (56)$$

Верхние знаки у подынтегральной функции (56) соответствуют области $0 < \theta < \gamma$, а нижние $-\gamma < \theta < \pi$. Полагая в (56) $\zeta_g^{(\chi)} = 0$, что соответствует случаю сплошного идеально проводящего конуса, получаем потенциал Дебая для сплошного идеально проводящего конуса [17]. При осесимметричном возбуждении конуса $\Sigma(\theta_0 = \pi)$ выражение для $v_1^{(\chi)}$ упрощается и записывается так:

$$v_1^{(\chi)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{0r}^{(\chi)} \bar{y}_0^{(\chi),g} \times \\ \times \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \theta) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (57)$$

Рассмотрим отдельно случаи непрозрачного (идеально проводящего) конуса с тонким слоем покрытия и резистивного конуса (или конуса из тонкой диэлектрической пленки с большой диэлектрической проницаемостью).

Идеально проводящий конус с тонким неидеально проводящим слоем покрытия ($\vartheta=0$)

Решение для такой модели конуса с покрытием приведено в [11], где использовались импедансные условия Шукина – Леонтовича без учета кривизны конуса. Здесь приведем решение задачи с учетом кривизны конуса, на поверхности которого заданы граничные условия импедансного типа (52) при условии (54). В этом случае $\bar{y}_0^{(\chi),g}$ (55) и $v_1^{(\chi)}$ (57) принимают вид

$$\bar{y}_0^{(\chi),0} = \frac{(\tau^2 + 1/4)^{\bar{\rho}(\chi)} \Xi_{0r}^{(\chi)}(\gamma) - \zeta_0^{(\chi)}(\sin \gamma)^{\bar{\rho}(\chi)}}{(\tau^2 + 1/4)^{\bar{\rho}(\chi)} \Xi_{0r}^{(\chi)}(\gamma) - \zeta_0^{(\chi)}(\sin \gamma)^{\bar{\rho}(\chi)} \tilde{\Delta}_{ir}^{(0),\chi,0}} \times \\ \times \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma), \\ v_1^{(\chi)} = v_{1\text{ид.пр}}^{(\chi)} + \zeta_0^{(\chi)} v_{1\text{покр}}^{(\chi)}, \quad (58)$$

где $v_{1\text{ид.пр}}^{(\chi)}$ соответствует потенциалу для идеально проводящего сплошного конуса, а слагаемое $v_{1\text{рез}}^{(\chi)}$ учитывает эффекты за счет неидеальной проводимости:

$$v_{1\text{покр}}^{(\chi)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{0r}^* \Upsilon_{ir}^{(\chi)}(\gamma) \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta)}{d^{\chi-1}} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (59)$$

$$\Upsilon_{ir}^{(\chi)}(\gamma) = \frac{\tilde{\Delta}_{ir}^{(0),\chi,0} - \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma)}{\left(\tau^2 + 1/4\right)^{\bar{\rho}(\chi)} \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) - \zeta_0^{(\chi)}(\sin \gamma)^{\bar{\rho}(\chi)} \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma)}.$$

В частном случае идеально проводящей поверхности ($\zeta_0^{(\chi)} = 0$) из (58) получаем потенциал Дебая для сплошного идеально проводящего конуса [17]. Исследование спектра краевой задачи дает ответ на вопрос о структуре вторичного поля, учитывающего эффекты, обусловленные неидеальной проводимостью покрытия. После перехода к интегрированию по мнимой оси в (59), замыкания контура интегрирования и использования основной теоремы о вычетах интеграл в (59) можно представить в виде ряда по вычетам подынтегральной функции и определить множество мод, описывающих поле. Спектром краевой задачи для идеально проводящего конуса с тонким неидеально проводящим покрытием является множество корней уравнения

$$\left(1/4 - \mu^2\right)^{\bar{\rho}(\chi)} \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) - \\ - \zeta_0^{(\chi)}(\sin \gamma)^{\bar{\rho}(\chi)} \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) = 0. \quad (60)$$

В случае возбуждения рассматриваемой конической поверхности с покрытием магнитным радиальным диполем ($\chi = 2$) уравнение (60) запишем в виде

$$\sin \gamma P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) + \zeta_0^{(2)} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) = 0. \quad (61)$$

Результаты аналитического исследования уравнения (61) показали, что в случае действительных малых значений $\zeta_0^{(2)}$ (среда без поглощения, случай реактивного импеданса) корни (61) находятся вблизи корней

$$P_{-1/2+\mu_s}^{-1}(-\cos \gamma) = 0,$$

множество которых представляет собой спектр граничной задачи для сплошного идеально проводящего конуса в случае возбуждения последнего магнитным радиальным диполем:

$$\hat{\mu}_s^{-1} = \mu_s^{-1} - \zeta_0^{(2)} \frac{P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma)}{\sin \gamma \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Big|_{\mu=\mu_s^{-1}} + \\ + O\left(\left(\zeta_0^{(2)}\right)^2\right).$$

При этом значения $\hat{\mu}_s^{-1}$, как и μ_s^{-1} , являются действительными. Следует отметить, что среди корней уравнения

(61) в случае малых по абсолютной величине, но отрицательных $\zeta_0^{(2)}$ содержится чисто мнимый корень

$$\mu = i\hat{\tau}, \quad \hat{\tau} \approx -\frac{\sin \gamma}{\zeta_0^{(2)}} \gg 1. \quad (62)$$

Это значение и определяет поверхностную волну, появление которой и обусловлено реактивным импедансом. В [11] найден корень типа (62), но без учета $\sin \gamma$, поскольку уравнение, которому такой корень удовлетворяет, не содержит $\sin \gamma$. Приведем представление для одной из составляющих полного магнитного поля в виде ряда

$$H_\theta = \frac{\hat{p}_2}{4rr_0\sqrt{r_0}} \Omega_\mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_\mu(r, r_0)] P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\mu=i\hat{\tau}} + \frac{\hat{p}_2}{4rr_0\sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_\mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_\mu(r, r_0)] \times P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\mu=\hat{\mu}_n^{-1}}, \quad (63)$$

$$\Omega_\mu(\gamma) = \frac{\mu(\mu^2 - 1/4) \hat{S}_\mu(\gamma)}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} \bar{D}_\mu^{(2),0}},$$

$$\hat{S}_\mu(\gamma) = \sin \gamma P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) - \zeta_0^{(2)} P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma),$$

$$\bar{D}_\mu^{(2),0} = \sin \gamma P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) + \zeta_0^{(2)} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma).$$

Сплошной резистивный конус ($\mathfrak{S}=0$)

В этом случае потенциал $u_1^{(\chi)}$ (56) запишем в виде

$$u_1^{(\chi)} = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Theta_{m\tau}^{(\chi),p}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\pm \cos \theta)}{d^{\chi-1}} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (64)$$

$$\Theta_{m\tau}^{(\chi),p}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) = \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{m\tau}^* b_{m\tau}^{*(\chi),p}}{1 + 2\zeta_1^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\hat{\rho}(\chi)} \left[\sin \gamma \left(\tau^2 + 1/4 \right) A_{i\tau}^{(\chi),m}(\gamma) \right]^{\hat{\rho}(\chi)}}.$$

Представим $u_1^{(\chi)}$ (64) в виде, удобном для выделения вклада за счет неидеальной проводимости поверхности,

$$u_1^{(\chi)} = u_{1\text{ид.пр}}^{(\chi)} + \zeta_1^{(\chi)} u_{1\text{резист}}^{(\chi)},$$

$$u_{1\text{резист}}^{(\chi)} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Psi_{m\tau}^{(\chi),p}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\pm \cos \theta)}{d^{\chi-1}} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (65)$$

$$\Psi_{m\tau}^{(\chi),p}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) = \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{m\tau}^* b_{m\tau}^{*(\chi),p}}{[\sin \gamma (\tau^2 + 1/4) A_{i\tau}^{(\chi),m}(\gamma)]^{\hat{\rho}(\chi)} + 2\zeta_1^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\hat{\rho}(\chi)}},$$

где $A_{i\tau}^{(\chi),m}$ определены в (26), (27). При осесимметричном возбуждении ($\theta_0 = \pi$) формула (65) упрощается и принимает вид

$$u_{1\text{резист}}^{(\chi)} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \Psi_{0\tau}^{(\chi),p}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) \times \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \theta) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (66)$$

$$\Psi_{0\tau}^{(\chi)}(\zeta_1^{(\chi)}, \gamma) = \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{0\tau}^*}{[\sin \gamma (\tau^2 + 1/4) A_{i\tau}^{(\chi),0}(\gamma)]^{\hat{\rho}(\chi)} + 2\zeta_1^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\hat{\rho}(\chi)}}.$$

Спектр краевой задачи для резистивного конуса в случае возбуждения магнитным радиальным диполем (после перехода в (66) к интегрированию по мнимой оси $\hat{\mu} = i\tau$) определяется множеством корней уравнения

$$\bar{D}_{\hat{\mu}}^{(2),0} = 0, \quad (67)$$

$$\bar{D}_{\hat{\mu}}^{(2),0} = \frac{\pi}{2} \frac{\hat{\mu}^2 - \frac{1}{4}}{\cos \pi \hat{\mu}} \sin^2 \gamma P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma) \times P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma) - \zeta_1^{(2)}.$$

По виду уравнение (67) имеет сходство с уравнением для спектра в случае полупрозрачного конуса, который определяется существованием предела (22). Однако, на первый взгляд, незначительные отличия приводят к существенным отличиям при анализе модовой структуры поля. Главное отличие заключается в том, что эти уравнения соответствуют разным моделям импедансных структур. Так, для полупрозрачного конуса (22) параметр $W_2 > 0$ спектра граничной задачи определяются корнями уравнения

$$\cos \pi \tilde{\mu} + 2W_2 \pi \sin^2 \gamma_2 (\tilde{\mu}^2 - \frac{1}{4})^2 \times \\ \times P_{-1/2+\tilde{\mu}}^{-1}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\tilde{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2) = 0, \quad (68)$$

которые все действительные.

В частном случае полупрозрачного конуса (22) при $W_2 \sin^2 \gamma_2 \gg 1$ среди корней (68) находится значение

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2W_2 \sin^2 \gamma} + O(W_2^{-2}), \quad (69)$$

которому в структуре вторичного поля соответствует распространяющаяся вдоль поверхности полупрозрачного конуса ТЕМ-волна. Среди корней (67) возмущенного значения $\tilde{\mu} = 1/2$ вида (69) нет, но в силу произвольности параметра $\zeta_1^{(2)}$ в структуре поля в случае резистивных поверхностей возможно существование других типов волн, которых нет в структуре поля полупрозрачного конуса (22). При малых значениях импедансного параметра $|\zeta_1^{(2)}| \ll 1$ (свойства конической поверхности близки к свойствам идеально проводящего конуса) корни уравнения (67) находятся вблизи корней функций Лежандра

$$P_{-1/2+\tilde{\mu}_n^{1\pm}}^{-1}(\cos \gamma_2) = 0, \quad P_{-1/2+\tilde{\mu}_n^{1\pm}}^{-1}(-\cos \gamma_2) = 0$$

и имеют вид

$$\tilde{\mu}_n^{\pm} = \tilde{\mu}_n^{1\pm} + \zeta_1^{(2)} \times \\ \times \frac{\sin \gamma \cos \pi \alpha_n^{1\pm}}{(\mu^2 - \frac{1}{4}) \frac{d}{d\mu} \left[P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]_{\mu=\tilde{\mu}_n^{1\pm}}} + \\ + O((\zeta_1^{(2)})^2). \quad (70)$$

В зависимости от значения $\zeta_1^{(2)}$ корни (70) могут быть как действительными, так и комплексными. Перепишем уравнение (67), полагая в нем $\mu = i\tau$,

$$\frac{\pi \tau^2 + \frac{1}{4}}{2 \sin \pi \tau} \sin^2 \gamma P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma) + \zeta_1^{(2)} = 0 \quad (71)$$

и, используя асимптотики входящих в это уравнение функций при $\tau \gg 1$, приходим к выводу, что для реактивного импеданса ($\zeta_1^{(2)} < 0, \zeta_1^{(2)} \ll 1$) среди корней (71) есть корень, приближенное значение которого находим по формуле

$$\tilde{\tau} \approx -\frac{\sin \gamma}{2\zeta_1^{(2)}} \gg 1. \quad (72)$$

После перехода к интегрированию мнимой части в (64) и использования теоремы Коши о вычетах представим одну из составляющих магнитного поля в случае возбуждения конуса магнитным диполем в следующем виде ($\theta_0 = \pi$, $\chi = 2$, $\gamma < \theta < \pi$):

$$H_\theta = \frac{-\hat{p}_2}{4rr_0\sqrt{r_0}} \tilde{\Omega}_{ir}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_{ir}(r, r_0)] \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\tau=\tilde{\tau}} - \\ - \frac{\hat{p}_2}{2rr_0\sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\Omega}_\mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_\mu(r, r_0)] \times \\ \times \frac{P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\mu=\tilde{\mu}_n^{\pm 1}}, \quad (73)$$

$$\tilde{\Omega}_\mu(\gamma) = \frac{\mu(\mu^2 - 1/4) \tilde{S}_\mu(\gamma)}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{D}_\mu^{(2,0)}(\gamma)},$$

$$\tilde{S}_\mu(\gamma) = \frac{\pi \mu^2 - \frac{1}{4}}{2 \cos \pi \mu} \sin^2 \gamma P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \times$$

$$\times P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma),$$

$$\tilde{D}_\mu^{(2,0)}(\gamma) = \tilde{S}_\mu(\gamma) - \zeta_1^{(2)}$$

Первое слагаемое в (73) является волной, которая соответствует спектральному значению $\mu = i\tilde{\tau}$, а второе представляет собой ряд из мод, отвечающих спектральным значениям $\tilde{\mu}_n^{\pm}$ (70). Волна, соответствующая спектральному значению $\mu = i\tilde{\tau}$, обусловлена неоднородными свойствами конической поверхности в случае прямо пропорциональной зависимости импеданса от расстояния r между вершиной конуса и точкой наблюдения на нем:

$$\zeta_1^{(2)} = \frac{2}{\sin \gamma} wqr \zeta_1^{(2)}. \quad (74)$$

Для изучения распределения поля этой волны используем асимптотики функций, входящих в первое слагаемое (73) при $\tau \gg 1$ в силу (72). В результате приходим к выводу, что поле вышеуказанной волны в области $\gamma < \theta < \pi$ по мере удаления от конуса с импедансным параметром (74) убывает по закону $e^{-(\theta-\gamma)\tilde{\tau}}$. Волны подобной природы обнаружены

в структуре поля, рассеянного конической поверхностью, на которой заданы импедансные условия модели идеально проводящего конуса с тонким проводящим покрытием (52), $\vartheta = 0$ (63).

Неидеально проводящий конус с продольными щелями в поле точечного источника

Полубесконечный неидеально проводящий тонкий круговой конус с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями находится в поле гармонического точечного источника электромагнитного поля [электрического ($\chi = 1$) или магнитного ($\chi = 2$) радиального диполя], помещенного в точку B_0 . Данная структура имеет только угловые геометрические параметры: 2γ – угол раскрытия; d – ширина щелей; $l = 2\pi/N$ – период структуры. Для удобства решения данной задачи введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в вершине конуса, в которой поверхность конуса определяется уравнением $\Sigma: \theta = \gamma$ (рис. 1). Полное электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в пространстве с конусом и источником записываем в виде (3), (4). Искомое поле удовлетворяет:

- 1) системе уравнений Максвелла;
- 2) граничным условиям на нерегулярных лентах конуса:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times [\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-] \} = -\zeta^{(\chi)} \mathbf{n} \times [\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-], \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{E}^- = 0; \quad \Sigma: \theta = \gamma, \end{cases} \quad (75)$$

$$\zeta^{(\chi)} = 2w\tilde{R}^{(\chi)}(\sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)},$$

$$\tilde{R}^{(\chi)} = \tilde{R}_1^{(\chi)} + ia\tilde{R}_2^{(\chi)}, \quad \tilde{R}_1^{(\chi)} \geq 0,$$

$$\tilde{E}^\pm = \tilde{E}|_{\theta=\gamma \pm 0};$$

- 3) условию на бесконечности в форме Сильвера – Мюллера (2);
- 4) условию ограниченности энергии.

Потенциалы Дебая $v^{(\chi)}$ (9), через которые выражаются составляющие, удовлетворяют:

- 1) уравнению Гельмгольца всюду вне конуса Σ и источника;
- 2) соответствующим (75) краевым условиям на лентах Σ :

$$\begin{cases} L^{(\chi)} v^{(\chi)}|_\Sigma = -\tilde{R}^{(\chi)}(q \sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)} \times \\ \times \{ L^{(\chi+\tilde{\rho})} v^{(\chi)+} - L^{(\chi+\tilde{\rho})} v^{(\chi)-} \}, \\ L^{(\chi)} v^{(\chi)+} = L^{(\chi)} v^{(\chi)-}; \end{cases} \quad (76)$$

- 3) принципу предельного поглощения;

- 4) условию конечности энергии.

Неизвестный потенциал $v_1^{(\chi)}$ ищем с помощью интегральных преобразований Контровича – Лебедева (12), (13):

$$v_1^{(\chi)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh}(\pi \tau) \hat{v}_1^{(\chi)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (77)$$

$$\hat{v}_1^{(\chi)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(\chi)} b_{m\tau}^{*(\chi),p} U_{m\tau}^{(\chi)}(\theta, \varphi),$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m\tau}^{(\chi)}(\theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_{m,n+m_0}^{(\chi)} \times \\ \times \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{d^{j-1}} e^{i(m+nN)\varphi}, \end{aligned} \quad (78)$$

где $\tilde{x}_{m,n+m_0}^{(\chi)}$ – неизвестные коэффициенты.

В дальнейшем полагаем, что импедансный параметр $\tilde{R}^{(\chi)}$ зависит от радиальной координаты

$$\tilde{R}^{(\chi)} = \frac{\tilde{\zeta}^{(\chi)}}{(qr \sin \gamma)^{\tilde{\rho}(\chi)}}, \quad (79)$$

что упростит решение задачи и позволит получить его в случае реактивного переменного импеданса. Вследствие применения интегрального преобразования Контровича – Лебедева к обеим частям краевого условия (76) с учетом (79) получаем для трансформанта $\hat{v}^{(\chi)}$ на поверхности конуса следующие соотношения:

$$\begin{cases} \left(\tau^2 + 1/4 \right)^{\tilde{\rho}(\chi)} \frac{\partial^{\chi-1}}{\partial \chi-1} \hat{v}^{(\chi)}|_\Sigma = \\ = \tilde{\zeta}^{(\chi)} \left\{ \frac{\partial^{2-\chi}}{\partial \chi-1} \hat{v}^{(\chi)}|_{\theta=\gamma+0} - \frac{\partial^{2-\chi}}{\partial \chi-1} \hat{v}^{(\chi)}|_{\theta=\gamma-0} \right\}, \\ \frac{\partial^{\chi-1}}{\partial \chi-1} \hat{v}^{(\chi)}|_{\theta=\gamma+0} = \frac{\partial^{\chi-1}}{\partial \chi-1} \hat{v}^{(\chi)}|_{\theta=\gamma-0}. \end{cases} \quad (80)$$

Соотношения (80) имеют сходство с усредненными граничными условиями (28), (29) и (32), (33) на поверхности полупрозрачного конуса (21), (22).

Принимая во внимание (77), (78), (80), а также условия сопряжения поля в щелях, получаем систему функциональных уравнений для коэффициентов Фурье $\tilde{x}_{m,n+m_0}^{(\chi)}$ потенциала Дебая $v_1^{(\chi)}$ вида (17), (18), которую с помощью метода полуоб-

ращения удается свести к СЛАУ-2 типа (20) и найти решение системы и краевой задачи в случае большого числа узких щелей при существовании предела (22), $\chi = 2$. В случае реактивного импеданса ($0 < (-\zeta^{(2)}) < 1$) одна из составляющих магнитного поля имеет вид ($\theta_0 = \pi$, $\gamma < \theta < \pi$):

$$\begin{aligned}
 H_\theta = & \frac{-\hat{p}_2}{2rr_0\sqrt{r_0}} \hat{\Omega}_{ir}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_{ir}(r, r_0)] \times \\
 & \times \frac{P_{-1/2+ir}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+ir}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+ir}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\tau=\tilde{\tau}^*} - \\
 & - \frac{\hat{p}_2}{rr_0\sqrt{r_0}} \hat{\Omega}_\mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_\mu(r, r_0)] \times \\
 & \times \frac{P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\mu=\tilde{\mu}_0} - \\
 & - \frac{\hat{p}_2}{rr_0\sqrt{r_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{\Omega}_\mu(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} T_\mu(r, r_0)] \times \\
 & \times \frac{P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \theta) \Big|_{\mu=\tilde{\mu}_n^*}, \quad (81) \\
 \hat{\Omega}_\mu(\gamma) = & \frac{\mu(\mu^2 - 1/4)^2 \tilde{S}_\mu(\gamma)}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} \hat{F}_\mu(\gamma)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_\mu(\gamma) = & 2(\mu^2 - 1/4) \hat{D}_\mu^{(2),0}(\gamma) + \frac{1}{2W}, \\
 \hat{D}_\mu^{(2),0} = & \frac{\pi \mu^2 - \frac{1}{4}}{2 \cos \pi \mu} \sin^2 \gamma P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \times \\
 & \times P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) - \zeta^{(2)}, \\
 \tilde{\tau}^* \approx & -\frac{\sin \gamma}{2\zeta^{(2)}} + \frac{2}{\sin \gamma W} \gg 1, \quad \zeta^{(2)} \ll 1, \quad (82)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2W(\sin^2 \gamma + 2\zeta^{(2)})} + O(W^{-2}), \quad (83)$$

$$\tilde{\mu}_n^* = \tilde{\mu}_n^\pm + \frac{1}{2W} \frac{1}{(\mu^2 - \frac{1}{4}) \frac{d}{d\mu} \left[\pi \sin^2 \gamma \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{\cos \pi \mu} P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]_{\mu=\tilde{\mu}_n^\pm}} + O(W^{-2}).$$

Считаем, что

$$\frac{\sin \gamma}{2(-\zeta^{(2)})} \gg 1, \quad W \sin \gamma \gg 1, \quad (84)$$

$$0 < \sin^2 \gamma + 2\zeta^{(2)}.$$

Первое слагаемое в представлении (81) является обусловленной реактивным импедансом модой, соответствующей спектральному значению $\tilde{\mu}^* = i\tilde{\tau}^*$. Принимая во внимание (72) $\tilde{\tau}^*$ (82) можно записать в виде

$$\tilde{\tau}^* \approx \tilde{\tau} + \frac{2}{\sin \gamma W},$$

где $\tilde{\tau}$ представляет собой спектральное значение для моды в случае возбуждения магнитным радиальным диполем сплошного конуса, на поверхности которого выполняются двусторонние граничные условия (52), а добавка $2/(W \sin \gamma)$ характеризует влияние неоднородностей в виде продольных щелей, причем $\tilde{\tau} < \tilde{\tau}^*$. Второе слагаемое в (82) является модой, отвечающей спектральному значению $\tilde{\mu}_0$ (83), которое удобно представить так

$$\tilde{\mu}_0 \approx \xi + \frac{(-\zeta^{(2)})}{W(\sin^2 \gamma + 2\zeta^{(2)})},$$

где ξ (69) соответствует ТЕМ-волне в структуре рассеянного поля полупрозрачным конусом, являющимся предельным случаем идеально проводящего конуса с периодическими продольными щелями (22). В рассматриваемом случае ($0 < (-\zeta^{(2)}) < 1$) с учетом (84) имеем $\xi < \tilde{\mu}_0$.

Таким образом, в структуре рассеянного поля густой конической решеткой, состоящей из большого числа импедансных лент, присутствуют поверхностные волны, обусловленные неоднородностью свойств поверхности конуса за счет наличия продольных щелей и зависимости импеданса от расстояния между вершиной и точкой поверхности. Согласно приведенным формулам влиянием полей этих волн можно управлять путем изменения параметра заполнения конической структуры и импеданса.

Заключение

Итак, проведено исследование модельной задачи дифракции поля сосредоточенного источника на импедансных полубесконечных тонких круговых сплошном конусе и конусе с периодическими продольными щелями в случае линейной зависимости импеданса от расстояния, отсчитываемого от вершины конуса. Двусторонние импедансные условия на поверхности конуса, которые моделируют условия на поверхности тонкой резистивной пленки или тонкого диэлектрического слоя, зависят от связанного с кривизной поверхности угла раскрытия конуса. На основе полученного аналитического решения для импедансного сплошного конуса и густой конической решетки из большого числа лент изучены пространственный спектр соответствующих краевых задач, структура поля и его поведение у вершины конуса. Показано, что в структуре поля, рассеянного полупрозрачным конусом (предельный случай идеально проводящего конуса с продольными щелями), существует поверхностная волна, поле которой зависит от неотрицательного параметра прозрачности (заполнения) поверхности и определяет особенность поля у вершины. В результате анализа спектра краевой задачи для сплошного конуса с двусторонними импедансными условиями в случае реактивного импеданса в структуре поля обнаружена поверхностная волна, поле которой экспоненциально убывает при удалении от поверхности конуса в зависимости от одной из угловых координат сферической системы. Природа появления этой волны такая же, как и у поверхностной волны в случае рассеяния электромагнитных волн на сплошном конусе с односторонними импедансными условиями (модель непрозрачной конической поверхности с тонким поглощающим слоем) и реактивным импедансом. При возбуждении густой конической решетки из узких импедансных лент в структуре поля появляются поверхностные волны обоих типов. В зависимости от способа возбуждения (вида источника, его расположения), а также от поверхностных свойств неоднородных конусов представляется возможным возбуждение вышеуказанных типов волн.

Авторы выражают благодарность проф. Шифрину Я.С. за полезные советы и замечания при обсуждении результатов работы, а также Семенову Е.К. за помощь в численных расчетах.

Литература

1. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Коришнова Е.Н. и др. Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: Методы конструктивного синтеза. — М: Наука, 1989.
2. Senior, T. B. A. and Volakis, J.L. Approximate boundary conditions in electromagnetics. Published by: The institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 1995.
3. Терещин О.Н., Седов В.М., Чаплин А.Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. — М: Связь, 1980.
4. Bleszynski, E., Bleszynski, M., and Jaroszewicz, T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets. IEEE Trans. Antennas Propag. Mag., 1993, vol. 36, no 6, pp. 14-25.
5. Ерофеев В.Т., Кравченко В.Ф. Об импедансных граничных условиях, учитывающих кривизну поверхности. — ДАН РАН, 2000, т. 45, №11, с. 1-7.
6. Кюн Р. Микроволновые антенны. — Л.: Судостроение, 1967.
7. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. — М.: Радио и связь, 1989.
8. Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур. — М: Радиотехника, 2003.
9. Bernard, J.M.L. and Lyalinov, M.A. Spectral domain solution and asymptotics by an impedance cone. IEEE Trans. Antennas Propagat., 2000, vol. 49, no 12, pp. 1633-1637.
10. Felsen, L.B. Radiation from a tapered surface wave antenna// IRE Trans. Antennas Propagat., 1960, Nov., pp. 577-586.
11. Felsen, L.B. Electromagnetic properties of wedge and cone surfaces with a linearly varying surface impedance. IRE Trans. Antennas Propagat., 1959, Dec., pp. 231-243.
12. Kritikos, H.N. Boundary waves along an impedance plane with a linearly varying impedance. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1965, July, pp. 577-583.
13. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.
14. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высш школа, 1991.
15. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
16. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
17. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978, т. 1,2.
18. Колодий Б.И., Куриляк Д.Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. — Киев: Наукова думка, 1995.
19. Горяинов А.С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса. — Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, №1, с. 47-57.
20. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. — Томск: Томск. ун-т, 1987.
21. Лебедев Н.Н., Конторович М.И. О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики. — ЖЭТФ, 1939, т. 9, вып. 10, с. 729-741.
22. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем. — ЖЭТФ, 1938, т. 8, вып. 10-11, с. 1192-1206.

23. Лебедев Н.Н. Об одной формуле обращения. — ДАН СССР, 1946, т. 52, №8, с. 661-664.
24. Лебедев Н.Н. О разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям мнимого значения и аргумента — Прикладная математика и механика, 1949, т. 13, вып. 5, с. 465-476.
25. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М: Наука, 1974.
26. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: Физ.-мат. лит., 1963.
27. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е. и др. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. — Харьков: Основа, 1997.
28. Конторович М.И., Астрахан М.И., Акимов В.П. и др. Электродинамика сетчатых структур. — М.: Радио и связь, 1987.
29. Ван Бладель Я. Сингулярности поля вблизи вершины конуса. — ТИИЭР, 1983, т. 71, с. 146-147.
30. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур. — Электромагнитные волны и электронные системы, 2003, т. 8, №6, с. 4-78.
31. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1973.
32. Беличенко В.П., Гошин Г.Г., Дмитренко А.Г. и др. Математические методы в граничных задачах электродинамики. — Томск: Томск. ун-т, 1990.
33. Щелкунов С., Фриис Г. Антенны. — М.: Сов. радио, 1955.
34. Рамзей В. Частотно независимые антенны. — М.: Мир, 1968.

Поступила 30 января 2006 г.

Дорошенко Владимир Алексеевич (1954 г. р.) — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Область научных интересов: математическая физика, электродинамика.

Кравченко Виктор Филиппович (1939 г.р.) — докт. физ.-мат. наук, проф., гл. научн. сотр. ИРЭ РАН, заслуженный деятель науки РФ.

Область научных интересов: радиофизика, математическая физика, вычислительные методы в прикладной математике, R-функции и атомарные функции.

Сердечно поздравляем
Владислава Ивановича Пустовойта —
члена нашей редколлегии —
с избранием академиком
Российской академии наук!

Редколлегия журнала «Успехи современной радиоэлектроники»