УДК 519.854.2

И.В. Гребенник[1], О.С. Чёрная[2]

[1] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, grebennik@onet.com.ua;
[2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, titovaolga90@gmail.com

ЦИКЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СМЕЖНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье вводятся два типа транспозиций элементов в перестановке. Рассматривается их воздействие на циклическую структуру перестановок. Вводится понятие смежных перестановок. Доказываются утверждения о свойствах смежных перестановок.

МНОЖЕСТВО ПЕРЕСТАНОВОК, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ МНОГОГРАННИК, КРИТЕРИЙ СМЕЖНОСТИ, СВОЙСТВА ПЕРЕСТАНОВОК, ТРАНСПОЗИЦИЯ

Введение

Множество перестановок является одним из наиболее распространенных в научных и прикладных исследованиях в области комбинаторики и комбинаторной оптимизации [1–6]. Для перестановок широко исследованы многие свойства, в частности, касающиеся циклической структуры перестановок. Известны методы и алгоритмы, позволяющие производить разложение перестановок в произведение циклов и генерировать перестановки с заданной циклической структурой [1, 2, 5].

Одним из известных способов исследования комбинаторных множеств является их погружение в евклидово пространство, что позволяет использовать средства непрерывной математики при анализе комбинаторных задач [3]. В результате погружения комбинаторные множества приобретают новые свойства. В частности, элементы комбинаторных множеств являются вершинами комбинаторных многогранников [4], принадлежат семействам параллельных гиперплоскостей [3, 6]. Указанные свойства погруженных комбинаторных множеств составляют основу методов комбинаторной оптимизации [3, 6]. Выпуклая оболочка множества перестановок, погруженного в евклидово пространство, представляет собой перестановочный многогранник [4]. Одним из базовых свойств перестановочного многогранника является критерий смежности его вершин [3, 4]. Перестановки, соответствующие смежным вершинам перестановочного многогранника, далее в работе называются смежными перестановками.

Данная работа посвящена исследованию тех свойств смежных перестановок, которые являются существенными при анализе их циклической структуры.

В статье вводится классификация транспозиций элементов в перестановке. Она основана на том, каким образом соответствующая транспозиция влияет на циклическую структуру перестановки и к каким изменениям она приводит.

В работе рассматриваются только те транспозиции, которые соответствуют критерию смежности вершин перестановочного многогранника. Таким образом, свойства, формулируемые на основе введенной классификации, справедливы для перестановок, смежных в многограннике перестановок. На основе этих свойств формулируются теоремы о циклических свойствах смежных перестановок.

Целью данной работы является исследование циклической структуры и свойств смежности перестановок на основе свойств транспозиций соседних элементов перестановок и свойств перестановочного многогранника.

1. Базовые определения

Рассмотрим P_n — множество перестановок без повторений из n действительных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Далее будем использовать следующее определение перестановки [5].

Определение. Линейное упорядочение элементов некоторого порождающего множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется перестановкой

$$\pi = \pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n)) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$$

или, если необходимо подчеркнуть тот факт, что она содержит n элементов, n-перестановкой.

Рассмотрим некоторую перестановку

$$\pi = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n)) \in P_n ,$$

и её элемент $\pi(a_i) = a_j$, $\forall i, j \in J_n$. Тогда можно записать: $\pi(a_j) = \pi(\pi(a_i)) = \pi^2(a_i)$. Обобщенно можно эту формулу представить в таком виде:

$$\pi^{k-1}(a_j) = \pi(\pi^{k-1}(a_i)) = \pi^k(a_i) , \ \forall i, j \in J_n , \ k \,''\, n .$$

Таким образом [1, 5], если для некоторого $l \geq 1$ имеем $\pi^l(a_i) = a_i$, $i \in J_n$, и элементы $a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i)$ все различны, то последовательность $(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i))$ называется циклом длины l.

Определение [3]. Циклической перестановкой называется такая перестановка $\neq$ из n элементов, которая содержит единственный цикл длины n, то есть $\pi^n(a_i) = a_i$, $\forall i \in J_n$. Такие перестановки будем обозначать $\neq_C$.

Множество циклических перестановок из n действительных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ обозначим P_n^C.

Отметим, что $Card\ P_n^C = (n-1)!$ [1].

Циклы

$$(a_i, \pi(a_i), ..., \pi^{l-1}(a_i))$$

$$\text{и } (\pi^j(a_i), \pi^{j+1}(a_i), ..., \pi^{l-1}(a_i), a_i, ..., \pi^{j-1}(a_i))$$

считаются эквивалентными. Каждый элемент множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ встречается в единственном цикле перестановки $\neq$, и возможно рассматривать $\neq$ как объединение непересекающихся циклов, или по-другому, как произведение различных циклов $C_1, ..., C_k$, записывая в виде $\pi = C_1 C_2 ... C_k$. Например, если перестановка $\neq : [7] \to [7]$ определена равенствами $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 7$, $\pi(4) = 1$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 6$, $\pi(7) = 5$, то $\pi = (14)(2)(375)(6)$. Возможны различные обозначения такого представления $\neq$; например, имеем: $\pi = (753)(14)(6)(2)$. Можно определить стандартное представление; при этом в каждом цикле пишется первым его наибольший элемент, и циклы записываются в порядке возрастания их максимальных элементов. Таким образом, стандартная форма рассмотренной выше перестановки $\neq$ есть $(2)(41)(6)(753)$.

Исходя из обозначений, используемых в определении циклической перестановки, рассмотрим некоторое подмножество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}$ множества порождающих элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, такое что, $a_{i_{k+1}} = \pi^l(a_{i_k})$, где $l'' n$, $k, l \in J_n$, $\forall k, i_k \in J_n$, и назовем его цепочкой. Выделение одной цепочки возможно только из одного цикла. То есть, если рассматривается циклическая перестановка $p \in P_n^C$, в цепочке могут быть зафиксированы любые элементы и связи между ними. Если же исходная перестановка состоит из нескольких циклов, $p \in P_n \setminus P_n^C$, то одна цепочка может быть записана с использованием только тех элементов, которые принадлежат одному циклу.

Опишем способ наглядного представления цепочек. Рассмотрим циклическую перестановку $p \in P_n^C$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 & & 3 & & 7 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 & & 3 & & 7 & & 1 \end{pmatrix}$$

и выделим в ней цепочку

$$(a_1, \pi(a_1), \pi^2(a_1), \pi^3(a_1)) =$$

$$= (1, \pi(1), \pi^2(1), \pi^3(1)) = (1,4,6,2):$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 6 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 6 & & 2 \end{pmatrix}.$$

Так же часть цепочки может быть скрыта на представлении. Полная запись:

$$(1, \pi(1), \pi^2(1), \pi^3(1), \pi^4(1), \pi^5(1), \pi^6(1)) = (1,4,6,2,5,8,3).$$

Часть цепочки: $(a_1, \pi(a_1), \pi^3(a_1), \pi^6(a_1)) = (1,4,2,3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 & & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \pi^2(1) & & \pi^5(1) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 2 & & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \pi(4) & & \pi^2(2) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 2 & & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Погружение в евклидово пространство и базовые свойства многогранника перестановок Π_n

Одним из широко используемых способов исследования комбинаторных множеств является их погружение в евклидово пространство [3, 6].

Осуществим отображение множества перестановок P_n в арифметическое евклидово пространство R^n. Согласно [3, 6] указанное отображение (называемое погружением) зададим в виде:

$$f : P_n \to R^n,\ \forall p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in P_n,$$

$$x = f(p) = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E \subset R^n,$$

$$x_i = p_i,\ i \in J_n,\ J_n = \{1, 2, ..., n\}.$$

В результате погружения f множеству P_n поставим во взаимнооднозначное соответствие множество $E \subset R^n$: $E_n = f(P_n)$.

Пусть P_n – множество перестановок из n элементов. Каждой перестановке

$$\pi = (\pi(a_1), \pi(a_2), ..., \pi(a_n)) \in P_n$$

сопоставим точку

$$a_\pi = f(\pi) = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E \subset R^n.$$

Выпуклая оболочка точек

$$\{a_\pi = (a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, ..., a_{\pi_n}) : \forall \pi \in P_n\} \text{ в } R^n,$$

является перестановочным многогранником Π_n, $vert\ \Pi_n = E_n$ – его множество вершин [4].

Отметим некоторые комбинаторные свойства перестановочного многогранника [4].

1. Элементы множества $E_n = vert\ \Pi_n$ и только они являются вершинами многогранника $\Pi_n(a)$. Другими словами, существует взаимнооднозначное соответствие между перестановками – элементами множества P_n и вершинами многогранника $\Pi_n(a)$ – элементами множества $vert\ \Pi_n$.

Далее будем говорить, что перестановка $\pi \in P_n$ соответствует вершине $a_\pi = f(\pi)$ перестановочного многогранника Π_n.

2. Критерий смежности вершин перестановочного многогранника $\Pi_n(a)$. В соответствии с ним, вершиной перестановочного многогранника, смежной с вершиной $v = (a_{v_1}, a_{v_2}, a_{v_3}, ..., a_{v_n}) \in \Pi_n(a)$, соответствующей перестановке $p \in P_n$, является вершина, отвечающая перестановке p_k, полученной из p транспозицией компонентов, равных k и $k+1$, $\forall k \in J_{n-1}$.

Используя понятие смежности вершин перестановочного многогранника, введем определение смежных перестановок.

Определение. Две перестановки $p_1, p_2 \in P_n$, соответствующие вершинам $v_1, v_2 \in \Pi_n$, называются смежными перестановками, если вершины v_1, v_2 являются смежными вершинами многогранника Π_n.

3. Циклическая структура перестановок различных элементов

Рассмотрим произвольную перестановку $p \in P_n$, содержащую, в общем случае, несколько циклов. Не снижая общности, будем считать, что множество порождающих элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ имеет вид $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Определение. Для любой вершины $v \in vert\,\Pi_n$ транспозицию компонентов, равных

$$i \text{ и } i+1,\ i \in J_n, \tag{1}$$

принадлежащих одному циклу длины k, $k'' n$, соответствующей перестановки $p \in P_n$, будем называть транспозицией «разрыва». Будем обозначать такую транспозицию T_P.

Определение. Для любой вершины $v \in vert\,\Pi_n$ транспозицию компонентов, равных i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, принадлежащих двум разным циклам длины k_1 и k_2 соответствующей перестановки $p \in P_n$, будем называть транспозицией «соединения». Будем обозначать такую транспозицию T_C.

Названия для этих двух типов транспозиций связаны с их воздействии на циклическую структуру исходной перестановки. В соответствии с этим транспозиция «разрыва» делает из одного цикла два, разрывая его, а транспозиция «соединения» из двух циклов составляет один, соединяя их.

Докажем соответствующие леммы о воздействии транспозиций на циклическую структуру перестановки.

Лемма. Пусть вершина $v \in vert\,\Pi_n$, соответствующая перестановке $p \in P_n$, содержит цикл длины k, $k'' n$. Транспозиция «разрыва» для элементов цикла вида (1) приведет к образованию смежной с v вершины $v_1 \in vert\,\Pi_n$, для которой соответствующая перестановка $p_1 \in P_n$ содержит, по крайней мере, два цикла длины k_1 и k_2, $k_1 + k_2 = k$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует такой цикл длины k, $\pi^k(i) = x$, $k'' n$, которому принадлежат компоненты i и $i+1$. Рассмотрим цепочку, образованную компонентами i и $i+1$. Компоненты i и $i+1$ связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_1}(i) & \pi^{k_2}(i+1) \\ \downarrow\nearrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow \\ i & i+1 & x \end{pmatrix}.$$

Здесь компонент $x \in A$ — элемент порождающего множества, ссылающийся на компонент i, значение которого может быть произвольным. Произведем транспозицию компонентов i и $i+1$:

$$\text{получится} \begin{pmatrix} x & \pi^{k_2}(i+1) & \pi^{k_1}(i) \\ \downarrow\ \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i+1 & x & i \end{pmatrix}.$$

Получаем: $\pi^{k_1}(i) = i$, $\pi^{k_2}(i+1) = i+1$, $k_1 + k_2 = k$, два цикла длины k_1 и k_2.

Лемма доказана.

Лемма. Пусть вершина $v \in vert\,\Pi_n$, соответствующая перестановке $p \in P_n$, содержит два цикла, имеющих длины k_1, k_2, $k_1 + k_2 = k \le n$. Транспозиция «соединения» для элементов цикла вида (1) приведет к образованию смежной с v вершины $v_1 \in vert\,\Pi_n$, для которой соответствующая перестановка $p_1 \in P_n$ содержит, по крайней мере, один цикл длины $k_1 + k_2 = k$.

Доказательство. Исходная перестановка $p \in P_n \setminus P_n^C$ состоит, по крайней мере, из двух циклов длин k_1, k_2, $k_1 + k_2 \le n$. И существует компонент i, такой что $i = \pi^1(x)$, следовательно, можно записать последовательность $(x, i, \pi^2(x), ..., \pi^{k_1-1}(x), x)$, $i \in J_n$, и компонент $i+1 \in (y, \pi(y), \pi^2(y), ..., \pi^{k_2-1}(y))$, причем $\exists b \in J_n$, $b < k_2 - 2$, и $i+1 = \pi^{b+1}(y)$.

Исходные цепочки:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_1-2}(i) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_2-b-2}(y) \\ \downarrow\nearrow & \downarrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow \\ i & x & \pi(y) & i+1 & y \end{pmatrix}.$$

Имеются два цикла, длины которых могут быть вычислены:

$$\left.\begin{matrix} x = \pi^{k_1-1}(i) \\ i = \pi^1(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \pi^{k_1-1}(\pi^1(x)) = \pi^{k_1-1+1}(x) = \pi^{k_1}(x),$$

$$\left.\begin{matrix} y = \pi^{k_2-b-1}(i+1) \\ i+1 = \pi^{b+1}(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pi^{k_2-b-1}(\pi^{b+1}(y)) = \pi^{k_2-b-1+b+1}(y) = \pi^{k_2}(y).$$

Произведем транспозицию компонентов i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} x & \pi^{k_1-2}(i) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_2-b-2}(i+1) \\ \downarrow\nearrow & \downarrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow \\ i & x & \pi(y) & i+1 & y \end{pmatrix} \underset{i \leftrightarrow i+1}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{i \leftrightarrow i+1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} x & \pi^{k_2-b-2}(i+1) & y & \pi^b(y) & \pi^{k_1-2}(i) \\ \downarrow\ \nearrow & \downarrow & \nearrow\ \downarrow & \nearrow\ \downarrow & \nearrow\ \downarrow \\ i+1 & y & \pi(y) & i & x \end{pmatrix}.$$

В результате после транспозиции $i \leftrightarrow i+1$ получили единый цикл длины:

$$\left.\begin{matrix} x = \pi^{k_1-1}(i) \\ i+1 = \pi^1(x) \\ y = \pi^{k_2-b-1}(i+1) \\ i = \pi^{b+1}(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \pi^{k_1-1+b+1+k_2-b-1+1}(x) = \pi^{k_1+k_2}(x).$$

Лемма доказана.

Свойство. Пусть $p \in P_n$ – произвольная перестановка, i, j – элементы перестановки, не принадлежащие одному циклу. Не более чем за $n-1$ ТС из $p \in P_n$ можно получить перестановку $p_1 \in P_n$, содержащую цикл, в который входят оба элемента i, j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вначале случай, когда для построения цикла нужно выполнить максимальное число ТС. Для этого необходимо, чтобы перестановка $p \in P_n$ не имела ни одного цикла и состояла из n неподвижных точек:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Наибольшее число транспозиций вида $i \leftrightarrow i+1, i \in J_n$ в таком случае необходимо будет произвести, для того чтобы объединить в один цикл элементы 1 и n.

Для этого необходимо произвести следующие ТС:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{\underbrace{1 \;\; 2}_{TC} \;\; 3}_{TC} & & & \ldots & \underbrace{n-2 \;\; \underbrace{n-1 \;\; n}_{TC}}_{TC} & & \end{pmatrix}.$$

Если n – четное, то необходимо произвести минимум $\frac{n}{2}-1$ ТС с одной стороны и $\frac{n}{2}-1$ ТС с другой, получив таким образом два цикла длины $\frac{n}{2}$.

Всего будет произведено $(\frac{n}{2}-1)+(\frac{n}{2}-1)=n-2$ ТС. И последней перестановкой соединения необходимо объединить два цикла длины $\frac{n}{2}$. Итого будет произведено $(n-2)+1=n-1$ ТС.

Рассмотрим случай, когда n – нечетное:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & (n+1)/2 & n-2 & n-1 & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{\underbrace{1 \;\; 2}_{TC} \;\; 3}_{TC} & & & (n+1)/2 & \underbrace{n-2 \;\; \underbrace{n-1 \;\; n}_{TC}}_{TC} & & \end{pmatrix}.$$

С помощью $\frac{n-1}{2}-1$ ТС будет получено два цикла длиной $\frac{n-1}{2}$ и неподвижная точка. Они с помощью двух транспозиций объединяются в один цикл. Итого получается: $(\frac{n-1}{2}-1)+(\frac{n-1}{2}-1)+2=n-1$.

Свойство доказано.

Оценим количество ТС и ТР, которые возможно произвести для некоторого цикла, если исходная перестановка $p \in P_n$ содержит несколько циклов различной длины. Так как любой порождающий элемент, кроме первого и последнего, имеет два элемента соседних по значению, следовательно, с каждым компонентом цикла i можно произвести 2 транспозиции – одну с компонентом $i-1$ и одну с компонентом $i+1$. При этом, если компоненты, участвующие в транспозиции, принадлежат разным циклам, это будет ТС, если одному – то ТР.

Теорема. Рассмотрим некоторую перестановку $p \in P_n$, состоящую из нескольких циклов произвольной длины. Предположим, что один из этих циклов C_j, $j \in J_n$ длины m, тогда количество транспозиций вида (1), которые можно совершить с использованием элементов данного цикла, равно

$$T = 2m - l - g,$$

где: m – количество элементов в рассматриваемом цикле; l – количество пар компонентов равных $i, i+1$, принадлежащих C_j; g – величина, принимающая следующие значения:

$$g = \begin{cases} 2, \text{ если } 1 \in C_j \text{ и } n \in C_j \\ 1, \text{ если } 1 \in C_j \text{ или } n \in C_j \\ 0, \text{ если } 1 \notin C_j \text{ и } n \notin C_j \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим исходный цикл C_j, $j \in J_n$ длины m.

Так как любой порождающий элемент имеет два элемента, соседних по значению, следовательно, с каждым компонентом цикла i можно произвести 2 транспозиции – одну с компонентом $i-1$ и одну с компонентом $i+1$ – итого $2m$ транспозиций.

Необходимо учесть, что если пара компонентов i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, принадлежит одному циклу, то их транспозиция будет учтена два раза. Таким образом, необходимо от величины $2m$ отнять l – количество пар компонентов $i, i+1$, $i \in J_{n-1}$, принадлежащих C_j, $j \in J_n$.

Также необходимо отметить, что существуют два порождающих элемента, обладающих одним соседом вместо двух – это компоненты «1» и «n». Соответственно, если они оба принадлежат циклу C_j для получения конечного результата необходимо отнять 2. Если один из компонентов или «1» или «n» принадлежат циклу, необходимо отнять 1.

Таким образом, получаем величину g, принимающую следующие значения:

$$g = \begin{cases} 2, \text{ если } 1 \in C_j \text{ и } n \in C_j \\ 1, \text{ если } 1 \in C_j \text{ или } n \in C_j \\ 0, \text{ если } 1 \notin C_j \text{ и } n \notin C_j \end{cases}.$$

Итого количество уникальных транспозиций компонентов i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, которые можно совершить с использованием элементов данного цикла, равно $T = 2m - l - g$.

Теорема доказана.

Следствие. Рассмотрим некоторую перестановку $p \in P_n$, состоящую из нескольких циклов произвольной длины. Предположим, что один из этих циклов C_j, $j \in J_n$, длины m, тогда количество транспозиций «соединения», которые можно совершить с использованием элементов данного цикла, равно

$$T_C = T - l,$$

где T – общее количество транспозиций, согласно теореме 1, l – количество пар компонент равных $i,i+1$, принадлежащих C_j, $j \in J_n$.

Доказательство. Если из общего количества уникальных транспозиций вычесть те, в которых оба компонента принадлежат циклу C_j, останутся только транспозиции, в которых один из компонентов принадлежит рассматриваемому циклу C_j, а второй произвольному, отличному от C_j циклу в перестановке $p \in P_n$. Согласно определению все эти транспозиции будут транспозициями «соединения».

Следствие доказано.

Следствие. Рассмотрим некоторую перестановку $p \in P_n$, состоящую из нескольких циклов произвольной длины. Предположим, что один из этих циклов C_j, $j \in J_n$ длины m, тогда количество транспозиций «разрыва», которые можно совершить с использованием элементов данного цикла, равно

$$T_P = T - T_C = l,$$

где T – общее количество транспозиций, согласно теореме 1; T_C – количество транспозиций «соединения», согласно следствию 1; l – количество пар компонентов равных $i,i+1$, принадлежащих C_j, $j \in J_n$.

Доказательство. Так как l – количество пар компонентов равных $i,i+1$, $i \in J_n$, принадлежащих C_j, а согласно определению транспозиция компонентов, принадлежащих одному циклу, является транспозицией «разрыва», следовательно, количество соответствующих пар и T_P совпадает.

Так как любая транспозиция вида (1) может быть либо транспозицией «разрыва» либо транспозицией «соединения», следовательно, так же можно вычислить T_P путем вычитания из общего количества транспозиций T_C.

Следствие доказано.

Выводы

Данная работа посвящена исследованию смежных перестановок и их циклических свойств.

На базе известного критерия смежности вершин перестановочного многогранника Π_n введены определения двух типов транспозиций компонентов перестановки. Исследованы изменения в циклической структуре перестановок при совершении транспозиций каждого из типов.

На основании введенных определений сформулированы леммы о воздействии разных типов транспозиций на циклическую структуру перестановок, смежных с данной перестановкой.

Используя доказанные леммы о циклической структуре смежных перестановок, доказывается теорема об оценке количества транспозиций каждого типа для произвольной перестановки $p \in P_n$.

Список литературы: **1.** *Стенли, Р.* Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 440 с. **2.** *Гребенник И.В.* Описание и генерация перестановок, содержащих циклы // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 97 – 105. **3.** *Стоян, Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с. **4.** *Емеличев, В. А.* Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с. **5.** *Bona, M.* Combinatorics of permutations. / M. Bona — Chapman & Hall/CRC, 2004. — 337 с. **6.** *Стоян, Ю.Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Поступила в редколлегию 20.01.2014

УДК 519. 854. 2

Циклічні властивості суміжних перестановок різних елементів / І.В. Гребеннік, О.С. Чорна // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2014. – № 1 (82). – С. 7–11.

У статті вводяться два типи транспозицій елементів у перестановці. Розглядається їх вплив на циклічну структуру перестановок. Вводиться поняття суміжних перестановок. Доводяться твердження про властивості суміжних перестановок.

Бібліогр.: 6 найм.

UDK 519. 854. 2

Cyclic properties adjacent permutations of various elements / I. V. Grebennik, O. S. Chorna // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2014. – № 1 (82). – P. 7–11.

This paper introduced two types of transpositions of elements in the permutation. Consider their impact on the cyclic structure changes. The concept adjacent permutations is introduced. Brought allegations of properties adjacent permutations.

Ref.: 6 items.