НЕЛІНІЙНИЙ МЕТОД ГАЛЬОРКІНА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ СТАЦІОНАРНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ

Шпакович М.О.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: maksym.shpakovych@nure.ua

The problem of calculating the stationary flow of a viscous incompressible fluid in a bounded simply connected domain is considered. For its numerical analysis it was proposed to use the R-function method and the nonlinear Galerkin method. The results of a computational experiment for a test problem are given.

При дослідженні різних процесів у геофізиці, біології, теплоенергетиці, біомедицині часто виникає необхідність моделювати стаціонарні течії в'язкої нестисливої рідини. Для цього зазичай використовується система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса. Складність безпосереднього аналізу цієї системи пов'язана перш за всё з її нелінійністю і з тим, що у просторовому випадку вона складається з чотирьох рівнянь. Для плоскопаралельних течій введенням функції течії $\psi(x, y)$ за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

від вихідної системи Нав'є-Стокса можна перейти до одного нелінійного рівняння четвертого порядку

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\, J(\Delta\psi, \psi) \text{ у } \Omega, \tag{2}$$

де Re – число Рейнольдса, $J(\Delta\psi, \psi) = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$, Ω – область течії.

Виходячи із заданого на $\partial\Omega$ вектора швидкостей рідини, для функції течії $\psi(x, y)$ можна поставити такі крайові умови:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s),\ s \in \partial\Omega, \tag{3}$$

де $\frac{df_0}{ds}$, g_0 – розподіли нормальної та тангенціальної складових швидкості потоку відповідно.

Для розв'язання задачі (2), (3) застосуємо структурний метод R-функцій, запропонований акад. НАН України В.Л. Рвачовим [1]. У відповідності до загальної методики побудови структури розв'язку задачі Стокса [2] отримаємо, що структура розв'язку задачі (2), (3) має вигляд

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi, \tag{4}$$

де $f = \mathrm{EC}\, f_0$, $g = \mathrm{EC}\, g_0$ – продовження функцій f_0, g_0 в область Ω, $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$, $D_1 v = (\nabla\omega, \nabla v)$, Φ – невизначена компонента структури.

Для апроксимації невизначеної компоненти структури скористаємося нелінійним методом Гальоркіна. Функцію Φ шукатимемо у вигляді

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \tau_k ,$$

де $\{\tau_k\}$ – деяка повна у $L_2(\Omega)$ система функцій.

Невідомі коефіцієнти c_1, …, c_n знайдемо з умови ортогональності у $L_2(\Omega)$ відхилу $R_n = \Delta^2\psi_n - \mathrm{Re}\, J(\Delta\psi_n, \psi_n)$, де $\psi_n = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi_n$, першим n координатним функціям $\omega^2\tau_1$, …, $\omega^2\tau_n$. Це призводить до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, розв’язання яких можливе, наприклад, методом Ньютона.

Після знаходження функції ψ_n за формулами (1) можна знайти поле швидкостей рідини. Для відтворення поля тиску пропонується наступний підхід. З системи Нав’є-Стокса маємо, що

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v_x - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v_y - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}.$$

Застосовуючи далі процедуру відновлення функції за її повним диференціалом, отримаємо

$$p(x,y) = \int_{M_0 M} \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + C ,$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – фіксована точка, а $M(x,y)$ – довільна точка області Ω.

Обчислювальний експеримент в задачі (2), (3) було проведено у квадратній каверні $\overline{\Omega} = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ з рухомою верхньою кришкою для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$. Крайові умови (3) в цьому випадку є

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 , \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -1, & y = 1; \\ 0, & x = 0, x = 1, y = 0, \end{cases}$$

а нормалізоване рівняння $\partial\Omega$ – $\omega \equiv [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)] = 0$ (тут $\wedge_0$ – знак R-кон’юнкції. Невизначена компонента структури апроксимувалась сплайнами Шенберга п’ятого степеня.

1. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. Думка, 1982. – 552 с

2. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 3 (20). – С. 52 – 54.