УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТА

Разрабатывается математический аппарат для формализации и моделирования систем искусственного интеллекта. Предложены способы записи уравнений теории интеллекта, а также методы их аналитического решения. Предложено несколько различных методов аналитического представления конечных алфавитных операторов с помощью формул универсальной алгебры.

АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ, ИНТЕЛЛЕКТ, УРАВНЕНИЕ, УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА, АЛФАВИТНЫЙ ОПЕРАТОР

Введение

Предикаты – это основной математический инструмент теории интеллекта, они используются для формального описания объектов бионики интеллекта. Алгебра предикатов – это логический аппарат первой ступени, ее можно рассматривать как аналог школьной алгебры, на языке которой записываются числовые функции. Аппаратом второй ступени в логике является *алгебра предикатных операций*, которую можно рассматривать как логический аналог изучаемого в вузах математического анализа. Алгебры предикатов и предикатных операций рекомендуются в качестве языка формального описания для разработчиков, создающих средства искусственного интеллекта. Язык алгебры предикатов представляет собой универсальное средство формального описания любых объектов, наблюдаемых в мире, на нем можно выразить любое отношение. Язык алгебры предикатных операций тоже универсален, но он используется уже в ином качестве: на нем можно выразить любые *действия над отношениями*. Когда возникает необходимость формально описать какой-нибудь процесс или объект, то прибегают к услугам алгебры предикатов. Когда же требуется реально воспроизвести уже описанный ранее процесс или создать в натуре спроектированный объект (то есть нужно перейти от *слов* к *делу*), то используется аппарат алгебры предикатных операций.

Отношения выражают внутреннее строение объектов, свойства объектов и связи между ними. Они представляют собой *универсальное* средство формального представления любых объектов. За две с половиной тысячи лет существования науки ей не удалось обнаружить в мире ни одного объекта, о котором можно было бы с уверенностью сказать, что он, в принципе, не поддается формальному представлению с помощью отношений. Никакие другие известные средства формального представления объектов (например, школьная алгебра и математический анализ) свойством универсальности не обладают. *Естественный язык*, представляющий собой *универсальное* средство духовного общения людей, можно рассматривать как инструмент для выражения отношений. Обращаясь с *речью* к другим людям, мы передаем им вполне определенный *смысл* произносимого *предложения*, который есть не что иное, как некоторое отношение. *Обмен мыслями* между людьми осуществляется за счет передачи и приема отношений. Каждая *мысль* представляет собой какое-то отношение. *Мышление* же есть процесс преобразования отношений, получения новых отношений из уже имеющихся. *Информация*, поступающая к нам из внешнего мира, имеет вид отношений, характеризующих структуру, свойства и связи окружающих нас предметов и процессов. *Результатом действий человека* во внешнем мире является приведение структуры предметов и процессов в соответствие тем отношениям, которые были сформированы в уме человека в результате его мыслительной деятельности.

1. Канонические уравнения

Любая интересующая нас информации о деятельности и суждениях интеллекта, в принципе, может быть записана в виде уравнений алгебры конечных предикатов. В данной статье будут рассмотрены способы записи таких уравнений, а также методы их аналитического решения. Для большего удобства записи уравнений алгебры конечных предикатов нам понадобятся, кроме уже введенных четырех операций – дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации, еще две двуместные операции – *равнозначность* $\sim$ и *неравнозначность* $\oplus$ *предикатов*. Эти операции формально определим следующими равенствами:

$$A \sim B \underset{def}{\equiv} AB \vee \overline{A}\,\overline{B} \qquad (1)$$

$$A \oplus B \underset{def}{\equiv} A\overline{B} \vee \overline{A}B \qquad (2)$$

Здесь буквами A и B обозначены произвольно выбранные формулы алгебры конечных предикатов. Условимся в случае отсутствия в формуле скобок, регулирующих порядок выполнения операций, непосредственно после выполнения операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции импликации выполнять операции равнозначности и лишь затем – операции неравнозначности.

Свойства введенных операций аналогичны свойствам одноименных операций, рассматриваемых в алгебре логики. Все они могут быть выведены из только что принятых определений. Перечислим наиболее важные тождества алгебры конечных предикатов, в которых фигурируют знаки ~, ⊕, а именно – *рефлексивность равнозначности*:

$$A\sim A\equiv 1; \tag{3}$$

антирефлексивность неравнозначности:

$$A\oplus A\equiv 0; \tag{4}$$

коммутативность равнозначности и неравнозначности:

$$A\sim B\equiv B\sim A; \tag{5}$$

$$A\oplus B\equiv B\oplus A; \tag{6}$$

ассоциативность равнозначности и неравнозначности:

$$(A\sim B)\sim C\equiv A\sim(B\sim C); \tag{7}$$

$$(A\oplus B)\oplus C\equiv A\oplus(B\oplus C); \tag{8}$$

дистрибутивность неравнозначности:

$$(A\oplus B)\,C\equiv AC\oplus BC; \tag{9}$$

транзитивность равнозначности:

$$(A\sim B)(B\sim C)\supset(A\sim C)\equiv 1; \tag{10}$$

свойства логических констант:

$$A\sim 0\equiv \overline{A}\,; \tag{11}$$

$$A\sim 1\equiv A; \tag{12}$$

$$A\oplus 0\equiv A; \tag{13}$$

$$A\oplus 1\equiv \overline{A}\,. \tag{14}$$

Уравнение вида

$$f_1(x_1, x_2,..., x_n)=1, \tag{15}$$

где f – произвольно выбранный фиксированный конечный предикат, назовем *каноническим уравнением* алгебры конечных предикатов для предиката f. К каноническому виду может быть приведено любое уравнение алгебры конечных предикатов. Действительно, уравнение

$$f_1(x_1, x_2,..., x_n)=f_2(x_1, x_2,..., x_n), \tag{16}$$

где f_1, f_2 – произвольно выбранные фиксированные конечные предикаты, является наиболее общим видом уравнения алгебры конечных предикатов, однако оно может быть записано в виде равносильного ему канонического уравнения:

$$f_1(x_1, x_2,..., x_n)\sim f_2(x_1, x_2,..., x_n)=1. \tag{17}$$

Система канонических уравнений

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2,..., x_n\right)=1, \\ f_2\left(x_1, x_2,..., x_n\right)=1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m\left(x_1, x_2,..., x_n\right)=1. \end{cases} \tag{18}$$

может быть записана в виде одного равносильного ей канонического уравнения:

$$f_1\left(x_1, x_2,..., x_n\right)\wedge f_2\left(x_1, x_2,..., x_n\right)\wedge ... \wedge f_m\left(x_1, x_2,..., x_n\right)=1. \tag{19}$$

Равносильными назовем такие уравнения или системы уравнений, множества всех решений которых совпадают между собой. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только канонических уравнений, имея в виду, что любое уравнение или система уравнений алгебры конечных предикатов могут быть заменены равносильными им каноническими уравнениями.

Любое каноническое уравнение может быть интерпретировано как некоторое высказывание. В самом деле, уравнение $x^{\sigma}=1$ равносильно высказыванию «$x=\sigma$»: если $x^{\sigma}=1$, то $x=\sigma$; если $x=\sigma$, то $x^{\sigma}=1$. Точно так же, уравнения $A\vee B=1$, $AB=1$, $\overline{A}=1$, $A\supset B=1$, $A\sim B=1$, $A\oplus B=1$ соответственно равносильны высказываниям «A или также B», «A и B», «ложно, что A», «если A, то B», «A равносильно B», «или A, или B». На том же основании можно утверждать, что любое сложное высказывание, у которого в качестве простых высказываний фигурируют канонические уравнения, может быть представлено в виде некоторого канонического уравнения. Для перехода от такого высказывания к каноническому уравнению нужно в высказывании логические связки «или также», «и», «ложно, что», «если – то», «равносильно», «или – или» заменить соответственно символами $\vee$, $\wedge$, , $\supset$, ~, ⊕ и приравнять полученную формулу к единице.

Как решить каноническое уравнение $f(x_1, x_2,..., x_n)=1$ алгебры конечных предикатов? Решить уравнение – это значит отыскать множество всех наборов значений переменных $(x_1, x_2,..., x_n)$, удовлетворяющих этому уравнению, то есть обращающих его левую часть в 1. Мы уже располагаем универсальным, хотя, быть может, громоздким и не всегда удобным, методом решения канонического уравнения. В качестве такого метода может быть использован алгоритм приведения любой формулы алгебры конечных предикатов к СДНФ, описанный в п. 3 [1]. Пусть задано уравнение (15) и требуется его решить. Представляя предикат f в виде СДНФ, имеем:

$$f(x_1, x_2,..., x_n)=\bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}\,.$$

Каждой конституэнте единицы $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}$ СДНФ предиката f соответствует решение $(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n)$ уравнения (15). Вместе взятые, эти решения образуют систему всех решений уравнения (15).

Рассмотрим пример решения уравнения вида (15) при $A=\{a, b\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$. Предикат f задан формулой:

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv (x_1^a\vee x_2^b)(x_1^a\vee x_1^b x_3^a)\vee(x_1^a\vee x_2^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a).$$

СДНФ этого предиката имеет вид:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^b.$$

По СДНФ предиката f находим систему T всех решений уравнения $f(x_1, x_2, x_3)=1$:

$$T=\{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b),$$
$$(b, a, a), (b, b, b)\}.$$

Система всех решений уравнения (15) может быть представлена, как правило, в значительно более компактном виде, чем в форме СДНФ, если воспользоваться алгоритмом получения некоторой ДНФ предиката, описанным в [1]. Более компактное представление системы всех решений предиката достигается использованием минимальной ДНФ. Каждой элементарной конъюнкции

$$x_{i_1}^{\sigma i_1} x_{i_2}^{\sigma i_2} \ldots x_{i_s}^{\sigma i_s}$$

($s \leq n$) ДНФ предиката соответствует некоторое подмножество системы всех решений уравнения (15), составленное из всевозможных наборов значений переменных (x_1, x_2,..., x_n), у которых на i_1, i_2,..., i_s местах стоят соответственно буквы $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_s}$. Объединение всех таких подмножеств дает систему всех решений уравнения (15).

Рассмотрим пример представления системы всех решений уравнения алгебры конечных предикатов при $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{x_1, x_2, x_3\}$с помощью минимальной ДНФ. Предикат f задан формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

Минимальная ДНФ этого предиката имеет вид:

$$f = x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$

Система T всех решений уравнения $f(x_1, x_2, x_3)=1$ может быть представлена в следующей сокращенной форме $T=\{(a, a, x_3), (a, b, x_3), (x_1, c, a)\}$. В данной записи под x_1 и x_3 понимаются произвольные буквы алфавита A. Полная же запись системы всех решений имеет вид: $T=\{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), (a, b, b), (a, b, c), (a, c, a), (b, c, a), (c, c, a)\}$.

Введенные ранее понятия конечного предиката, формулы алгебры конечных предикатов, канонического уравнения и множества всех его решений допускают содержательную логическую интерпретацию. Формулы алгебры конечных предикатов можно интерпретировать как *высказывания* или *суждения интеллекта*. Каноническое уравнение $A=1$, где A – произвольно выбранная формула алгебры конечных предикатов, можно интерпретировать как утверждение об *истинности высказывания A*, уравнение $A=0$ можно интерпретировать как утверждение о *ложности высказывания A*. Конечный предикат $f(x_1, x_2,..., x_n)$, обозначаемый формулой A, а также эквивалентное ему множество T всех решений ($x_1, x_2,..., x_n$) уравнения $A=1$ можно интерпретировать как *содержание высказывания A*.

Формулы, обозначающие тождественно истинный предикат, назовем *тождественно истинными*, их можно интерпретировать как *бессодержательные* или *тавтологические высказывания*. Формулы, обозначающие тождественно ложный предикат, назовем *тождественно ложными*. Их можно интерпретировать как *противоречивые высказывания*. Формулу, не являющуюся тождественно ложной, можно рассматривать как *выполнимое высказывание*. В случае, когда формула $A \supset B$ тождественно истинна, высказывание B можно интерпретировать как *логическое следствие* высказывания A. Если тождественно истинна формула $A \sim B$, то высказывания A и B можно интерпретировать как *логически равносильные*. Если формула $A \sim B$ – тождественно ложна, то высказывания A и B можно интерпретировать как *логически несовместимые*, в противном случае – как *логически совместимые*, иначе говоря, как высказывания, имеющие общее содержание.

Рассмотрим пример логического использования понятия уравнения алгебры конечных предикатов. Решим средствами алгебры конечных предикатов одну простую задачу. Пусть задано, что $x \in \{a, b, c\}$ $x \neq a$, $x \neq b$. Требуется определить значение буквенной переменной x. Человек, лишь взглянув на условие задачи, мгновенно находит: $x=c$. Алгебраическое же решение данной задачи требует определенной затраты усилий. Условие $x \in \{a, b, c\}$ означает, что $x=a$ или $x=b$, или $x=c$. Оно формально запишется в виде канонического уравнения $x^a \vee x^b \vee x^c = 1$. Условия $x \neq a$ и $x \neq b$ на языке алгебры конечных предикатов запишутся в виде уравнений $x^a = 1$, $x^b = 1$. Все вместе условия задачи запишутся в виде уравнения:

$$(x^a \vee x^b \vee x^c)\,\overline{x^a}\;\overline{x^b} = 1.$$

Упрощаем левую часть этого уравнения:

$$(x^a \vee x^b \vee x^c)\,\overline{x^a}\;\overline{x^b}\;x^b \equiv x^a\,\overline{x^a}\;\overline{x^b} \vee x^b\,\overline{x^a}\;\overline{x^b} \vee x^c\,\overline{x^a}\;\overline{x^b} \equiv$$
$$\equiv 0 \vee 0 \vee x^c \equiv x^c.$$

Таким образом, $x^c=1$, откуда находим $x=c$. Рассмотрим другой пример на ту же тему: доказать, что из $x \in \{a, b, c\}$, $x \neq a$, $x \neq b$ следует $x=c$. Чтобы решить эту задачу, записываем формулу, соответствующую утверждению, которое требуется доказать:

$$(x^a \vee x^b \vee x^c)\,\overline{x^a}\;\overline{x^b} \supset x^c.$$

Производим упрощение этой формулы

$$(x^a \vee x^b \vee x^c)\;\overline{x^a}\;\overline{x^b} \supset x^c \equiv x^c \supset x^c \equiv 1.$$

Таким образом, формула тождественно истинна, а значит, утверждение $x=c$ следует из условия $x \in \{a, b, c\}$, $x \neq a$, $x \neq b$.

Приведенные примеры могут служить иллюстрацией к следующему общему утверждению: процесс решения уравнений и определения значения формул алгебры конечных предикатов можно интерпретировать как *мышление интеллекта*, являющееся основой интеллектуальной деятельности человека. Машинное мышление возможно в той же мере, в какой возможно машинное решение уравнений и машинное определение значений формул алгебры конечных предикатов. Одной из важнейших задач теории интеллекта является разработка методов оперирования с формулами и уравнениями алгебры конечных предикатов, предназначенных для их машинной реализации.

2. Универсальная алгебра

До сих пор говорилось об алгебре конечных предикатов в единственном числе, на самом же деле была введена не одна, а целое семейство таких алгебр. Данное семейство включает в себя бесконечное число различных алгебр. Каждой паре – алфавиту букв $A=\{a_1, a_2,..., a_k\}$ и алфавиту переменных $B=\{x_1, x_2,..., x_n\}$ – соответствует отличная от других алгебра конечных предикатов. Всякий раз, прежде чем приступить к рассмотрению той или иной задачи, мы указывали алфавиты A и B, производя тем самым выбор конкретной алгебры конечных предикатов, на языке которой затем велось решение задачи. Указанный образ действий, однако, не всегда удобен, в частности при рассмотрении проблем, включающих в себя ряд взаимосвязанных задач. Если для каждой из таких задач выбрать наиболее экономную при заданных условиях алгебру конечных предикатов и на ее языке описывать решение задачи, то впоследствии могут возникнуть трудности, обусловленные «языковым барьером», при соединении в единое целое результатов, полученных при решении различных задач. Так, например, если формула A записана на языке одной алгебры конечных предикатов, а формула B – на языке другой, то система уравнений $\{A=1, B=1\}$, вообще говоря, теперь уже не равносильна уравнению $A\vee B=1$.

К такого рода проблемам относится проблема математического описания функций человеческого интеллекта. Интеллект человека – это очень сложная система, его функционирование не может быть описано «одним ударом». Теория интеллекта, без сомнения, будет развиваться постепенно, накапливая отдельные результаты. Чтобы в процессе развития не столкнуться с языковым барьером при объединении отдельных результатов в единую систему, очевидно, нужно с самого начала выбрать в качестве формального языка весьма мощную и единую для всех задач теории интеллекта алгебру, оперирующую достаточно большим числом букв и переменных. Тогда все объекты теории интеллекта можно будет описывать на одном и том же языке.

Однако возникает серьезное неудобство: всякий раз, описывая те или иные функции интеллекта, в том числе самые простые (а именно с простейшими функциями теория интеллекта будет иметь дело в первую очередь), придется использовать в качестве формального языка громоздкий математический аппарат, рассчитанный на применение к сложным объектам. Так, например, для записи СДНФ простейшего предиката придется ввести в действие весь арсенал букв и переменных. Такая СДНФ должна иметь невообразимо большую длину, оперировать ею будет практически невозможно. Вместе с тем, резервирование с самого начала огромного числа букв и переменных не спасает положения: сколь бы ни была обширна выбранная алгебра конечных предикатов, рано или поздно она станет недостаточной для удовлетворения постоянно растущих нужд развивающейся теории интеллекта. Таким образом, оба подхода – использование для каждой конкретной задачи собственной экономной специализированной алгебры и использование алгебры, общей для всех возможных в теории интеллекта задач, – обладают достоинствами и недостатками. Хотелось бы иметь такой третий подход, который, соединяя достоинства первых двух подходов, был бы свободен от присущих им недостатков. Такой подход существует. Он основан на использовании универсальной алгебры конечных предикатов, к рассмотрению которой мы и переходим

Теперь мы будем во всех случаях пользоваться единой алгеброй с алфавитом букв $A=\{a_1, a_2,..., a_\chi\}$ и алфавитом переменных $B=\{x_1, x_2,..., x_\nu\}$, называемой *универсальной алгеброй конечных предикатов*, особенность которой заключается в том ,что числа χ и ν букв и переменных в ее алфавитах всегда будут оставаться неопределенными. Вместе с тем, при практическом применении универсальной алгебры не должна возникать необходимость узнать точные значения этих чисел. О числах χ и ν будем считать известным лишь то, что они конечны и настолько велики, что удовлетворяют любым нуждам теории интеллекта, которые могут возникнуть даже в самом отдаленном будущем при ее развитии. При указанном подходе невозможно перечислить все буквы и переменные универсальной алгебры, однако такое перечисление нам никогда и не понадобится. Просто мы будем считать, что в алфавитах A и B содержатся все нужные знаки и в универсальной алгебре можно будет пользоваться любыми знаками без каких бы то ни было ограничений. Поскольку у отдельного человека (и даже у всего человечества в целом за всю историю его существования) может находиться в обращении лишь конечное число знаков, мы не вступаем в противоречие с требованием конечности алфавитов A и B универсальной алгебры.

Приступая к рассмотрению той или иной конкретной задачи теории интеллекта, будем каждый раз перечислять все переменные, которые мы собираемся в этой задаче использовать. Остальные переменные универсальной алгебры, не указанные в этом перечне, будем молчаливо считать фиктивными. Обозначим переменные, введенные в данной конкретной задаче, через $x_1, x_2,..., x_n$. Для каждой такой переменной укажем область ее задания, то есть множество всех тех букв, которые эта переменная может принимать в данной задаче. С этой целью вводим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{21}} \vee ... \vee x_1^{a_{k_1 1}} = 1, \\ x_2^{a_{12}} \vee x_2^{a_{22}} \vee ... \vee x_2^{a_{k_2 2}} = 1, \\ .... \\ x_n^{a_{1n}} \vee x_n^{a_{2n}} \vee ... \vee x_n^{a_{k_n n}} = 1. \end{cases} \qquad (20)$$

Эти уравнения означают, что $x_1 \in \{a_{11}, a_{21},..., a_{k_1 1}\}$, $x_2 \in \{a_{12}, a_{12},..., a_{k_2 2}\}$,..., $x_n \in \{a_{1n}, a_{2n},..., a_{k_n n}\}$; они задают для каждой переменной, участвующей в задаче, свою область изменения. Здесь $a_{11}, a_{21},..., a_{k_1 1}$, $a_{12}, a_{22},..., a_{k_2 2}$,..., $a_{1n}, a_{2n},..., a_{k_n n}$ – буквы алфавита A, предназначенные для использования в задаче; $k_1, k_2,..., k_n$ – числа, не превышающие число χ. На систему уравнений (20) целесообразно смотреть, как на часть математического описания объекта, рассматриваемого в задаче. При решении задачи уравнения (20) должны учитываться наравне с другими фигурирующими в ней уравнениями.

Требование предварительного задания области изменения для каждой переменной, встречающейся в задаче, не более обременительно, чем необходимость указания алфавита букв при выборе специализированной алгебры конечных предикатов для той же задачи. Если область изменения некоторой переменной точно неизвестна, то всегда допустимо взять для этой переменной область задания «с запасом», включив в нее и такие значения, которые переменная, быть может, никогда не будет принимать. В частности, при желании можно для всех переменных, участвующих в задаче, принять одну и ту же область задания. В универсальной алгебре, ввиду невозможности перечисления всех букв алфавита A, практически не удается воспользоваться законом истинности:

$$x_j^{a_1} \vee x_j^{a_2} \vee ... \vee x_j^{a_\chi} = 1, \ (1 \le j \le n). \qquad (21)$$

Указанное обстоятельство, однако, не приводит к затруднениям, так как в универсальной алгебре на смену системе тождеств (21) в каждой конкретной задаче приходит система (20) уравнений того же типа. Уравнения (20) назовем *усеченными законами истинности*.

В универсальной алгебре по той же причине нельзя практически применить и закон отрицания

$$\overline{x_j^{a_i}} = x_j^{a_1} \vee x_j^{a_2} \vee ... \vee x_j^{a_{i-1}} \vee x_j^{a_{i+1}} \vee ... \vee x_j^{a_\chi}, \quad (1 \le j \le n), \qquad (22)$$

лежащий в основе определения операции отрицания. Однако это не ведет к трудностям, поскольку в универсальной алгебре на смену законам отрицания приходит система равенств

$$\overline{x_j^{\sigma_{ij}}} = x_j^{\sigma_{1j}} \vee x_j^{\sigma_{2j}} \vee ... \vee x_j^{\sigma_{i-1,j}} \vee \vee x_j^{\sigma_{i+1,j}} \vee ... \vee x_j^{\sigma_{k_j,j}}, \qquad (23)$$

легко выводимых из усеченных законов истинности. Здесь i пробегает значения в пределах от 1 до k_j, j – в пределах от 1 до n. Уравнения (23) назовем *усеченными законами отрицания*. Они дают возможность ввести операцию отрицания также и в универсальной алгебре, в которой можно без каких бы то ни было ограничений пользоваться всеми тождествами алгебры конечных предикатов, кроме законов истинности и отрицания. Все законы ложности сохраняют силу, однако в конкретной задаче фактически используются только те, в которых фигурируют введенные в задаче переменные и показатели узнавания при них из областей изменения для данных переменных.

Как было уже отмечено выше, в универсальной алгебре невозможно практически воспользоваться совершенными дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами – важным инструментом алгебры конечных предикатов. К счастью, им на смену приходят усеченные формы, к рассмотрению которых мы и приступаем. Изучение вопроса начнем с введения *смешанных* n-разрядных *числовых кодов* или кодов типа $(k_1, k_2,..., k_n)$. *Типом кода* назовем набор чисел $(k_1, k_2,..., k_n)$. Введем n множеств символов $R_j=\{0, 1,..., k_{j-1}\}$, $(1 \le j \le n)$. Символы множества R_j назовем k_j-ичными цифрами j-го разряда, под этими символами понимаем первые k_j чисел натурального ряда. Число k_j назовем основанием j-го разряда. При построении смешанных кодов в их j-м разряде разрешается использовать лишь цифры из множества R_j. Каждый код: $a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$ обозначает некоторое число, называемое значением этого кода и вычисляемое по формуле:

$$a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n = a_1 k_2 ... k_n + a_2 k_3 ... k_n + ... + a_{n-1} k_n + a_n. \qquad (24)$$

В качестве примера найдем с помощью формулы (24) числовое значение смешанного кода 122 типа (2, 4, 5). Десятичная запись значения этого кода равна $122_{(2,\ 4,\ 5)} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 = 32_{10}$. Справа внизу у смешанного кода 122 указан его тип (2, 4, 5).

Для нахождения смешанного кода типа $(k_1, k_2,..., k_n)$ заданного числа нужно разделить это число на k_n, полученную целую часть частного разделить на k_{n-1} и т. д., наконец, целую часть частного n-1-го деления разделить на k_1. Считывая остатки этих делений в обратном порядке, получаем смешанный код заданного числа. В целой части частного после n-го деления должен получиться 0, в противном случае для заданного числа код типа $(k_1, k_2,..., k_n)$ не существует. В качестве примера найдем код типа (4, 3, 5) числа, заданного десятичным кодом 38. Выполняем последовательные деления, остатки делений указываем в скобках: 38:5=7(3), 7:3=2(1), 2:4=0(2). Имеем $38_{10}=213_{(4,\,3,\,5)}$. Заметим, что число $L(k_1, k_2,..., k_n)$ всех различных n-разрядных кодов типа $(k_1, k_2,..., k_n)$ определяется формулой:

$$L(k_1, k_2,..., k_n)=k_1k_2...k_n. \qquad (25)$$

При использовании универсальной алгебры описание объектов той или иной конкретной задачи осуществляется с помощью *усеченных форм*, то есть таких формул алгебры конечных предикатов, в которых встречаются не все буквы и переменные универсальной алгебры, а только их часть, указанная в условии задачи. Предикат, заданный усеченной формой, можно представить в виде *усеченной таблицы* его значений, которая составляется только для тех переменных и их значений, которые указаны в условии рассматриваемой задачи. Каждая переменная x_j при этом пробегает все значения из заданной области $T_j=\{a_{1j}, a_{2j},..., a_{k_j j}\}$. Наборы значений аргументов, указанные в задаче (назовем их *усеченными наборами*), $(x_1, x_2,..., x_n)$ удобно интерпретировать как n-разрядные смешанные числовые коды типа $(k_1, k_2,..., k_n)$. Буквы $a_{1j}, a_{2j},..., a_{k_j j}$, расположенные на j-ом месте усеченного набора, интерпретируем как числа 0, 1,..., k_j-1. Заметим, что одни и те же буквы, стоящие на разных местах в наборе, могут интерпретироваться как различные числа.

В усеченной таблице наборы $x_1, x_2,..., x_n$ будем располагать в порядке возрастания числовых значений соответствующих этим наборам смешанных кодов. Порядок расположения кодов назовем *лексикографическим*. Усеченную таблицу значений иногда удобно рассматривать как полную таблицу некоторого конечного предиката, заданного на декартовом произведении $T_1{\times}T_2{\times}...{\times}T_n$. Указанный предикат будем называть *усеченным конечным предикатом* или усечением исходного предиката универсальной алгебры. Усеченные предикаты могут быть все пронумерованы, для чего воспользуемся способом, описанным в п. 1.1. Всего существует $2^{k_1k_2...k_n}$ различных предикатов, заданных на декартовом произведении $T_1{\times}T_2{\times}...{\times}T_n$.

Универсальную алгебру, вместе с введенными в ней усеченными законами истинности и отрицания, можно рассматривать как некую разновидность алгебры конечных предикатов. Назовем такую алгебру *усеченной*. Уравнения (20) играют в ней роль тождеств этой алгебры. В усеченной алгебре сохраняют силу все понятия и результаты, рассмотренные в [1], в том числе понятия СДНФ и СКНФ. Отличие усеченной алгебры от ранее рассмотренной алгебры конечных предикатов состоит в том, что в ней каждая буквенная переменная определена на своей собственной области. В неусеченной же алгебре все переменные заданы на единой области. СДНФ и СКНФ усеченной алгебры можно использовать в качестве заменителей недосягаемых СДНФ и СКНФ универсальной алгебры при рассмотрении той или иной конкретной задачи, приняв их в качестве *усеченных СДНФ* и *СКНФ* универсальной алгебры.

Аналогично все другие понятия и результаты усеченной алгебры конечных предикатов могут быть приняты в качестве «усеченных» понятий и результатов универсальной алгебры. Понятия и результаты усеченной алгебры могут быть получены тем же путем, что и в неусеченной алгебре с той разницей, что вместо законов истинности и отрицания нужно везде применять усеченные законы истинности и отрицания. Универсальной алгеброй можно пользоваться при решении многих произвольных взаимосвязанных друг с другом задач столь же свободно, как и конкретной алгеброй конечных предикатов, используемой для решения какой-нибудь одной задачи. Единственной платой за полученную свободу служит необходимость введения в каждой конкретной задаче дополнительных уравнений – усеченных законов истинности, ограничивающих области изменения всех переменных, фигурирующих в данной задаче.

Рассмотрим пример пользования усеченными формами. Заданы следующие усеченные законы истинности:

$$x_1^a \vee x_1^b=1,\ x_2^c \vee x_2^d=1,\ x_3^a \vee x_3^d=1. \qquad (а)$$

Требуется преобразовать к усеченной СДНФ формулу:

$$f=(x_1^a \vee x_2^d)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^d x_3^d \vee x_2^c x_3^a). \qquad (б)$$

Преобразование производим, руководствуясь алгоритмом преобразования к СДНФ произвольной формулы алгебры конечных предикатов, описанным в п. 3 [1]. Раскрывая скобки и производя упрощения, имеем:

$$f=x_1^a \vee x_1^a x_2^d \vee x_1^b x_2^d x_3^a \vee x_1^a x_2^d x_3^d \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

Во все конъюнкции вводим недостающие переменные, при этом, вопреки указаниям, содержащимся в описании алгоритма, пользуемся не законами истинности, а равенствами (а):

$$f=x_1^a(x_2^c \vee x_2^d)(x_3^a \vee x_3^d) \vee x_1^a x_2^d(x_3^a \vee x_3^d) \vee x_1^b x_2^d x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^d x_3^d \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee (x_1^a \vee x_1^b) x_2^c x_3^a.$$

Раскрывая скобки и производя упрощения, получаем усеченную СДНФ:

$$f=x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^a x_2^c x_3^d \vee x_1^a x_2^d x_3^a \vee x_1^a x_2^d x_3^d \vee$$
$$\vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^b x_2^d x_3^a.$$

Важным свойством усеченной СДНФ является то, что она указывает все решения системы уравнений, математически описывающей объект в конкретной рассматриваемой задаче. В рассмотренном примере СДНФ указывает множество {(*a*, *c*, *a*), (*a*, *c*, *d*), (*a*, *d*, *a*), (*a*, *d*, *d*), (*d*, *c*, *a*), (*b*, *d*, *a*)} всех решений системы, состоящей из уравнения (б) и уравнений (а).

3. Аналитическое представление алфавитных операторов в виде уравнений

Формулы универсальной алгебры – удобное средство для аналитического представления конечных алфавитных операторов, нашего главного орудия математического описания деятельности интеллекта. Можно предложить несколько различных методов аналитического представления конечных алфавитных операторов. Их целесообразно разделить на две группы: методы неявного и явного задания операторов. Рассмотрим два метода неявного задания алфавитных операторов и один метод явного задания. Метод, который мы рассмотрим первым, позволяет осуществить *неявное задание алфавитного оператора одним уравнением*. Пусть $y_1y_2...y_q=F(x_1x_2...x_p)$ – произвольно выбранный конечный алфавитный оператор, преобразующий входные слова $x_1x_2...x_p$ длины *p* в выходные слова $y_1y_2...y_q$ длины *q*. Чтобы получить в универсальной алгебре корректное математическое описание объекта, нужно ограничить области изменения всех буквенных переменных, относящихся к этому объекту. В данном случае объектом математического описания служит алфавитный оператор *F*, в роли буквенных переменных выступают символы $x_1, x_2,..., x_p, y_1, y_2,..., y_q$.

Требуемые ограничения вводим с помощью усеченных законов истинности для буквенных переменных входного слова:

$$\begin{cases} x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{21}} \vee \ldots \vee x_1^{a_{k_1 1}} = 1, \\ x_2^{a_{12}} \vee x_2^{a_{22}} \vee \ldots \vee x_2^{a_{k_2 2}} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p^{a_{1p}} \vee x_p^{a_{2p}} \vee \ldots \vee x_p^{a_{k_p p}} = 1; \end{cases} \tag{26}$$

для буквенных переменных выходного слова:

$$\begin{cases} y_1^{b_{11}} \vee y_1^{b_{21}} \vee \ldots \vee y_1^{b_{l_1 1}} = 1, \\ y_2^{b_{12}} \vee y_2^{b_{22}} \vee \ldots \vee y_2^{b_{l_2 2}} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_q^{b_{1q}} \vee y_q^{b_{2q}} \vee \ldots \vee y_q^{b_{l_q q}} = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Смысл указанных уравнений состоит в том, что $x_1 \in \{a_{11}, a_{21},..., a_{k_1 1}\}$, $x_2 \in \{a_{12}, a_{22},..., a_{k_2 2}\}$,..., $x_p \in \{a_{1p}, a_{2p},..., a_{k_p p}\}$, $y_1 \in \{b_{11}, b_{21},..., b_{l_1 1}\}$, $y_2 \in \{b_{12}, b_{22},..., b_{l_2 2}\}$,..., $y_q \in \{b_{1q}, b_{2q},..., b_{l_q q}\}$.

Построим усеченный конечный предикат $f(x_1, x_2,..., x_p, y_1, y_2,..., y_q)$ с областью определения $S_1 \times S_2 \times ... \times S_p \times T_1 \times T_2 \times ... \times T_q$, где $S_i=\{a_{1i}, a_{2i},..., a_{k_i i}\}$, $T_j=\{b_{1j}, b_{2j},..., b_{l_j j}\}$, $(1 \le i \le p, 1 \le j \le q)$, задавая его значения следующим правилом:

$$f\left(x_1, x_2,\ldots, x_p, y_1, y_2,\ldots, y_q\right)= \begin{cases} 1, \text{если } y_1 y_2 \ldots y_q = F(x_1 x_2 \ldots x_p), \\ 0, \text{если } y_1 y_2 \ldots y_q \neq F(x_1 x_2 \ldots x_p). \end{cases} \tag{28}$$

Запишем уравнение

$$\bigvee_{F(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p)=\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_q} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_p^{\sigma_p} y_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_q^{\varepsilon_q} = 1, \tag{29}$$

левая часть которого совпадает с усеченной СДНФ предиката *f*. Запись $F(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_p)=\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_q$ под знаком $\vee\vee$ означает, что логическое суммирование ведется по тем буквенным наборам $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_p,\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_q)$, для которых имеет место равенство $F(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_p)=\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_q$. Уравнение (29) можно принять в качестве математической записи конечного алфавитного оператора *F*. Действительно, подставляя в него вместо $x_1, x_2,..., x_p$ соответственно буквы $\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_p$ из областей $S_1, S_2,..., S_p$ и решая уравнение (29) относительно набора переменных $(y_1, y_2,..., y_q)$ получаем единственное решение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_q)$. Составленное из букв этого решения слово $\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_q$ совпадает с выходным словом оператора *F* для входного слова $\sigma_1\sigma_2...\sigma_p$.

Отметим, что уравнение (29) не только задает реакции оператора *F* в области его определения $S_1 \times S_2 \times ... \times S_p$, но, кроме того, формирует саму область определения. Если мы захотим найти реакцию оператора *F* на входное слово, находящееся за пределами области определения оператора, то, подставив буквы этого слова в (29), получим противоречие: 0=1. Следовательно, в данном случае указанное уравнение не имеет решений. Таким образом, характеризуемый им оператор не ставит в соответствие заданному входному слову никакого выходного слова, иначе говоря, алфавитный оператор в этом случае не определен. Если представление конечного алфавитного оператора *F* в виде усеченной СДНФ нас чем-то не устраивает, то можно путем тождественных преобразований левой части уравнения (29) перейти к любому другому формальному представлению этого уравнения. В процессе тождественных преобразований, поскольку здесь мы имеем дело с усеченными формулами универсальной алгебры, следует вместо закона истинности пользоваться равенствами (26) и (27). Если в процессе тождественных преобразований левой части уравнения (29) приходится использовать какие-либо из равенств (26) и (27), то преобразованное уравнение уже нельзя считать полной записью оператора *F*. Для полноты представления оператора *F* следует к преобразованному уравнению присовокупить те из уравнений (26), (27), которые были использованы при тождественных преобразованиях.

Рассмотрим пример аналитического представления конечного алфавитного оператора по первому методу. Пусть $y_1y_2y_3=F(x_1x_2)$ – алфавитный оператор, который ставит в соответствие троичным цифрам x_1, x_2 их сумму в виде трехразрядного двоичного кода $y_1y_2y_3$. Требуется записать в виде уравнения универсальной алгебры алфавитный оператор F. Записываем уравнения, ограничивающие значения введенных переменных:

$$x_1^0 \vee x_1^2 \vee x_1^2 = 1,\ x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2 = 1,$$
$$x_1^0 \vee x_1^1 = 1,\ x_2^0 \vee x_2^1 = 1,\ x_3^0 \vee x_3^1. \qquad (а)$$

Составляем таблицу соответствия между входными словами x_1x_2 и выходными словами $y_1y_2y_3$, задаваемого оператором F (табл. 1).

Таблица 1

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
y_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
y_2	0	0	1	0	1	1	1	1	0
y_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0

По таблице записываем уравнение (29), связывающее переменные x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 точно так, как их связывает алфавитный оператор F:

$$x_1^0x_2^0y_1^0y_2^0y_3^0 \vee x_1^0x_2^1y_1^0y_2^0y_3^1 \vee x_1^0x_2^2y_1^0y_2^1y_3^0 \vee$$
$$\vee x_1^1x_2^0y_1^0y_2^0y_3^1 \vee x_1^1x_2^1y_1^0y_2^1y_3^0 \vee x_1^1x_2^2y_1^0y_2^1y_3^1 \vee \qquad (б)$$
$$\vee x_1^2x_2^0y_1^0y_2^1y_3^0 \vee x_1^2x_2^1y_1^0y_2^1y_3^1 \vee x_1^2x_2^2y_1^1y_2^0y_3^0 = 1.$$

В левой части уравнения (б) записана усеченная СДНФ предиката f, определяемая по оператору F соотношениями (28). Пользуясь первым законом дистрибутивности (8), уравнение (б) можно представить в более компактном виде, переходя к скобочной форме:

$$((x_1^0y_2^0 \vee x_1^2y_2^1)(x_2^0y_3^0 \vee x_2^1y_3^1) \vee$$
$$\vee (x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1)y_2^1y_3^0 \vee \qquad (в)$$
$$(x_2^0y_2^0 \vee x_2^2y_2^1)x_1^1y_3^1)y_1^0 \vee x_1^2x_2^2y_1^1y_2^0y_3^0)) = 1.$$

Дополнять уравнение (в) уравнениями (а) в данном случае нет необходимости, поскольку они не приняли участия при преобразовании уравнения (б) в уравнение (в). Обратим внимание на то, что формульное представление предиката f, полученное в примере, неизмеримо компактнее табличного. Усеченная таблица значений предиката f должна была бы содержать $3{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2=72$ столбца. Уравнение же, выражающее предикат f, содержит всего 26 узнаваний букв. Определим, например, с помощью уравнения (в) выходное слово алфавитного оператора F для входного слова 12. Имеем $x_1=1$, $x_2=2$. Подставляем значения x_1.и x_2 в уравнение (в):

$$((1^0y_2^0 \vee 1^2y_2^1)(2^0y_3^0 \vee 2^1y_3^1) \vee (1^02^2 \vee 1^12^1)y_2^1y_3^0 \vee (2^0y_2^0 \vee$$
$$\vee 2^2y_2^1)1^1y_3^1)y_1^0 \vee 1^22^2y_1^1y_2^0y_3^0))=1.$$

Из полученного уравнения исключаем константы. В результате получаем уравнение $y_1^0y_2^1y_3^1=1$, откуда находим: $y_1^0=1$, $y_2^1=1$, $y_3^1=1$. Таким образом, $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=1$. Выходное слово равно 011.

Располагая уравнением, описывающим алфавитный оператор F, можно решать обратную задачу: по заданному выходному слову отыскать соответствующее ему для оператора F входное слово. Рассмотрим пример. Для алфавитного оператора, введенного в предыдущем примере, по выходному слову 100 требуется найти соответствующее ему входное слово. Имеем $y_1=1$, $y_2=0$, $y_3=0$. Подставляем значения y_1, y_2, y_3 в уравнение (в) и производим упрощения. В результате получаем: $x_1^2x_2^2=1$, входное слово равно 22. Если в качестве выходного слова взять слово 010, то для него уравнение (в) принимает вид:

$$x_1^2x_3^0 \vee x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1=1.$$

Согласно последнему уравнению, выходному слову 010 соответствует три входных слова: 20, 02 и 11. Беря же в качестве выходного слова 101 и подставляя $y_1=1$, $y_2=0$, $y_3=1$ в уравнение (в), получаем в его левой части 0; мы приходим к равенству 0=1, то есть к противоречию. Следовательно, не существует ни одного входного слова, которому бы алфавитный оператор F ставил в соответствие выходное слово 101.

Уравнение универсальной алгебры, описывающее алфавитный оператор F, можно использовать при решении различного рода логических задач, в которых фигурирует оператор F. Рассмотрим пример одной из указанных задач. В ней для того же алфавитного оператора, который рассматривался в предыдущих примерах параграфа, требуется найти входное и выходное слова, если известно, что обе буквы входного слова одинаковы, а первые и последние буквы выходного слова различны. По условию имеем $x_1=x_2$ и $y_1 \neq y_3$. Условие $x_1=x_2$ запишем в виде высказывания: «$x_1=0$ и $x_2=0$, или $x_1=1$ и $x_2=1$, или $x_1=2$ и $x_2=2$», которое, в свою очередь, математически описывается следующим уравнением универсальной алгебры:

$$x_1^0x_2^0 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^2x_2^2=1. \qquad (г)$$

Условие $y_1 \neq y_3$ представим в виде равносильного ему высказывания «$y_1=1$ и $y_3=0$, или $y_1=0$, $y_3=1$» а затем – в виде уравнения

$$y_1^1y_3^0 \vee y_1^0y_3^1=1. \qquad (д)$$

Решим совместно уравнения (б), (г) и (д). Для этого запишем все три уравнения в виде единого канонического уравнения:

$$(x_1^0x_2^0y_1^0y_2^0y_3^0 \vee x_1^0x_2^1y_1^0y_2^0y_3^1 \vee x_1^0x_2^2y_1^0y_2^1y_3^0 \vee$$
$$\vee x_1^1x_2^0y_1^0y_2^0y_3^1 \vee$$
$$\vee x_1^1x_2^1y_1^0y_2^1y_3^0 \vee x_1^1x_2^2y_1^0y_2^1y_3^1 \vee x_1^2x_2^0y_1^0y_2^1y_3^0 \vee$$
$$\vee x_1^2x_2^1y_1^0y_2^1y_3^1 \vee x_1^2x_2^2y_1^1y_2^0y_3^0)(x_1^0x_2^0 \vee x_1^1x_2^1 \vee$$
$$\vee x_1^2x_2^2)(y_1^1y_3^0 \vee y_1^0y_3^1)=1,$$

в левой части которого раскрываем скобки и производим упрощения, пользуясь законами ложности [1, (19)]. В результате получаем $x_1^2x_2^2y_1^1y_2^0y_3^0=1$, откуда находим $x_1=x_2=2$, $y_1=1$, $y_2=y_3=0$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственная пара слов: входное слово 22 и соответствующее ему выходное слово 100 алфавитного оператора F.

Перейдем к рассмотрению второго метода представления алфавитных операторов. Метод позволяет осуществить *неявное задание алфавитного оператора системой уравнений*, число которых совпадает с числом букв выходного слова этого оператора. Когда указывают некоторый конечный алфавитный оператор $y_1y_2...y_q=F(x_1, x_2,..., x_p)$, то тем самым задают систему

$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1x_2...x_p), \\ y_2 = F_q(x_1x_2...x_p), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_q = F_q(x_1x_2...x_p) \end{cases} \tag{30}$$

алфавитных операторов $F_1, F_2, ..., F_q$, каждый из которых формирует в зависимости от входного слова $x_1x_2...x_p$ соответственно одну букву $y_1, y_2, ..., y_q$ выходного слова $y_1y_2...y_q$ алфавитного оператора F. Записывая для каждого из алфавитных операторов (30) соответствующее ему уравнение (29) универсальной алгебры, получаем аналитическое представление алфавитного оператора F в виде следующей системы, состоящей из q уравнений:

$$\begin{cases} \bigvee\limits_{F(\sigma_1\sigma_2...\sigma_p)=\varepsilon_1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_p^{\sigma_p}y_1^{\varepsilon_1}=1, \\ \bigvee\limits_{F(\sigma_1\sigma_2...\sigma_p)=\varepsilon_2} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_p^{\sigma_p}y_2^{\varepsilon_2}=1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bigvee\limits_{F(\sigma_1\sigma_2...\sigma_p)=\varepsilon_q} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_p^{\sigma_p}y_q^{\varepsilon_q}=1. \end{cases} \tag{31}$$

Рассмотрим пример аналитического представления алфавитного оператора по второму методу. Описываем тот же оператор, что и в предыдущих примерах. По табл. 1 составляем три уравнения типа (31):

$$\begin{gathered} x_1^0x_2^0y_1^0 \vee x_1^0x_2^1y_1^0 \vee x_1^0x_2^2y_1^0 \vee x_1^1x_2^0y_1^0 \vee \\ \vee x_1^1x_2^1y_1^0 \vee x_1^1x_2^2y_1^0 \vee x_1^2x_2^0y_1^0 \vee \\ x_1^2x_2^1y_1^0 \vee x_1^2x_2^2y_1^1=1, \\ x_1^0x_2^0y_2^0 \vee x_1^0x_2^1y_2^0 \vee x_1^0x_2^2y_2^1 \vee x_1^1x_2^0y_2^0 \vee \\ \vee x_1^1x_2^1y_2^1 \vee x_1^1x_2^2y_2^1 \vee x_1^2x_2^0y_2^1 \vee \\ \vee x_1^2x_2^1y_2^1 \vee x_1^2x_2^2y_2^0=1, \\ x_1^0x_2^0y_3^0 \vee x_1^0x_2^1y_3^1 \vee x_1^0x_2^2y_3^0 \vee x_1^1x_2^0y_3^1 \vee \\ \vee x_1^1x_2^1y_3^0 \vee x_1^1x_2^2y_3^1 \vee \\ \vee x_1^2x_2^0y_3^0 \vee x_1^2x_2^1y_3^1 \vee x_1^2x_2^2y_3^0=1. \end{gathered} \tag{е}$$

Записанная система уравнений равносильна уравнению (б), полученному для того же алфавитного оператора по первому методу. При сравнении описаний (б) и (е) видим, что в данном конкретном примере первый метод дает более простое представление алфавитного оператора, чем второй (45 узнаваний буквы против 81), однако каждое из уравнений (е) проще, чем уравнение (б) (27 узнаваний буквы против 45).

Заметим, что нетрудно перейти от описания алфавитного оператора одним уравнением к описанию того же оператора системой уравнений. Для получения описания функции $y_i=F(x_1x_2...x_p)$, где $1\le i\le q$, нужно все узнавания букв для переменных $y_1,..., y_{i-1}, y_{i+1},..., y_q$ в исходном уравнении положить равными 1. Например, подставляя 1 в уравнение (б) вместо y_2^0, y_2^1, y_3^0, y_3^1, находим первое из уравнений (е). Для перехода от описания алфавитного оператора системой уравнений к описанию того же оператора одним уравнением надо образовать конъюнкцию всех уравнений системы. Например, образуя конъюнкцию левых частей всех уравнений (е) и приравнивая ее логическому значению 1, выведем уравнение, равносильное уравнению (б). Попытаемся упростить левые части уравнений (е). Осуществляя в них вынос за скобки некоторых из узнаваний и применяя усеченные законы истинности (а) и вытекающие из них усеченные законы отрицания, а также используя сокращения с помощью знаков ~ и ⊕, перепишем систему (е) в более компактном виде:

$$\begin{gathered} x_1^2x_2^2 \sim y_1^1=1,\ (x_1^2 \oplus x_2^2) \vee x_1^2x_2^2 \sim y_2^1=1, \\ (x_1^2 \oplus x_2^2) \sim y_3^1=1. \end{gathered} \tag{ж}$$

Сравнивая систему (ж) с уравнением (в), видим, что в результате преобразования выражений, полученных вторым методом, мы пришли в данном примере к более компактному результату, чем тот, который был достигнут на базе первого метода (11 узнаваний буквы против 26). Правда, систему (ж) можно считать полным описанием заданного алфавитного оператора только при условии присоединения к ней системы уравнений (а), а это добавляет еще 12 узнаваний букв. Заметим, что без предварительного перехода к описанию алфавитного оператора F системой уравнений было бы затруднительно перейти от уравнения (в) к системе (ж). Таким образом, использование второго метода неявного представления алфавитного оператора в данном случае привело, в конечном счете, к отысканию более простой записи этого оператора. Практика решения одних и тех же задач обоими методами показывает, что в зависимости от характера задачи в одних случаях более предпочтительным оказывается первый метод, а в других – второй. Было бы интересно на базе изучения асимптотических оценок сложности формул выяснить вопрос о рациональных областях применения двух этих методов. Представляет интерес и разработка других методов аналитического представления алфавитных операторов, в чем-то более предпочтительных в сравнении с только что описанными методами.

Рассмотрим метод *явного задания алфавитного оператора*. Выражения, которые получаются при явном задании алфавитных операторов, имеют, как правило, большую суммарную длину, чем выражения неявного задания, однако они незаменимы для построения переключательных цепей, реализующие конечные алфавитные операторы. Явное задание алфавитного оператора можно рассматривать как формальную запись переключательной цепи, воспроизводящей реакции этого алфавитного оператора. Хранить же информацию об алфавитных операторах в памяти более удобно в форме выражений их неявного задания.

Сформулируем и докажем важное утверждение, которое назовем *теоремой о явном задании конечного алфавитного оператора*. Ограничим область изменения буквенной переменной y значениями b_1, b_2,..., b_l, то есть опишем ее уравнением

$$y^{b_1} \vee y^{b_2} \vee \ldots y^{b_l} = 1\,. \qquad (32)$$

Тогда *любой однозначный, вообще говоря, частичный, алфавитный оператор* $y = G(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 1$, *заданный в неявной форме уравнением*

$$g(x_1, x_2,\ldots, x_m, y)=1, \qquad (33)$$

может быть представлен в явной форме с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_1) = y^{b_1}, \\ &g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_2) = y^{b_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g(x_1, x_2, \ldots, x_m, b_l) = y^{b_l}. \end{aligned} \qquad (34)$$

Чтобы доказать только что сформулированное утверждение, установим, что система, состоящая из уравнений (32) и (33), равносильна системе уравнений (32) и (34). Зафиксируем произвольным образом значения переменных x_1, x_2,..., x_m, y. Предположим, что набор (x_1, x_2,..., x_m, y) является решением системы, состоящей из уравнений (32) и (33). Отсюда следует существование такого i($1 \le i \le l$), что $y=b_i$ и $g(x_1, x_2,\ldots, x_m, b_i)=1$. В силу однозначности алфавитного оператора G для любого $j \ne i$ ($1 \le j \le l$) имеем $g(x_1, x_2,\ldots, x_m, b_j)=0$. Поэтому все уравнения системы (34), кроме i-го, обращаются в тождества вида 0=0, i-е же уравнение обращается в тождество вида 1=1. Таким образом, набор (x_1, x_2,..., x_m, y) есть также решение системы, состоящей из уравнений (32) и (34).

Предположим теперь, что набор (x_1, x_2,..., x_m, y) не является решением системы уравнений (32) и (33). Если $y \in \{b_1, b_2,\ldots, b_l\}$, то условие (32) не выполняется, а вместе с ним не выполняется и система условий (32) и (34). Если же $y=b_i$ ($1 \le i \le l$), то не выполняется условие (33), поэтому $g(x_1, x_2,\ldots, x_m, b_i)=0$. В результате i-е уравнение системы (34) обращается в противоречие вида 0=1. Таким образом, набор (x_1, x_2,..., x_m, y) не является также решением системы уравнений (32) и (34). Следовательно, системы уравнений (32), (33) и (32), (34) равносильны друг другу. Теорема доказана. Отметим, что в случае, когда уравнением (33) задан многозначный в области значений (b_1, b_2,..., b_l)=1 алфавитный оператор G, системы уравнений (32), (33) и (32), (34) уже не будут равносильными друг другу. Действительно, предположим, что существуют два набора (x_1, x_2,..., x_m, b_i) и (x_1, x_2,..., x_m, b_j), причем $i \ne j$ и $1 \le i, j \le l$, удовлетворяющие уравнению (33). Однако ни один из этих наборов не удовлетворяет системе уравнений (34). Набор (x_1, x_2,..., x_m, b_i) обращает в противоречие вида 1=0 j-е уравнение системы (34), а набор (x_1, x_2,..., x_m, b_j) – i-е уравнение.

Зададим алфавитный оператор $y_1y_2\ldots y_n=F(x_1x_2\ldots x_m)$ системой уравнений:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1) = 1, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_2) = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_n) = 1. \end{aligned} \qquad (35)$$

Каждым из этих уравнений определяется значение соответствующей буквы выходного слова $y_1y_2\ldots y_n$ алфавитного оператора F для входного слова $x_1x_2\ldots x_m$. Тем самым уравнения (35) задают в неявной форме систему алфавитных операторов:

$$\begin{aligned} &y_1 = F_1(x_1x_2\ldots x_m), \\ &y_1 = F_2(x_1x_2\ldots x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = F_n(x_1x_2\ldots x_m), \end{aligned} \qquad (36)$$

формирующих отдельные буквы выходного слова алфавитного оператора F.

Переходя описанным выше методом к представлению в явной форме алфавитных операторов F_1, F_2, ..., F_n, получаем в явной форме аналитическое задание алфавитного оператора F. Здесь имеется в виду, что области изменения переменных y_i ($1 \le i \le n$) ограничены множествами букв $T_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{il_i}\}$, где l_i – число букв в множестве T_i. Всего в системе (37) содержится $l_1+l_2+\ldots+l_n$ уравнений. Система (37) допускает непосредственное вычисление букв выходного слова $y_1y_2\ldots y_n$ алфавитного оператора F по заданным значениям букв входного слова $x_1x_2\ldots x_m$. Задание же алфавитного оператора F в виде системы (35) не дает такой возможности. В этом случае буквы выходного слова могут быть найдены только путем решения уравнения.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,...,x_m,b_{11}) = y_1^{b_{11}}, \\ f_1(x_1,x_2,...,x_m,b_{12}) = y_1^{b12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1(x_1,x_2,...,x_m,b_{1l_1}) = y_1^{b_{1l_n}}, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_m,b_{21}) = y_2^{b_{21}}, \\ f_2(x_1,x_2,...,x_m,b_{22}) = y_2^{b_{22}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_2(x_1,x_2,...,x_m,b_{2l_2}) = y_2^{b_{2l_n}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1,x_2,...,x_m,b_{n1}) = y_n^{b_{n1}}, \\ f_n(x_1,x_2,...,x_m,b_{n2}) = y_n^{b_{n2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1,x_2,...,x_m,b_{nl_n}) = y_n^{b_{nl_n}}. \end{array}\right\} \qquad (37)$$

Рассмотрим пример. В роли оператора F возьмем оператор $y_1y_2y_3=F(x_1x_2)$, который ставит в соответствие троичным цифрам x_1, x_2 их сумму в виде трехразрядного двоичного кода $y_1y_2y_3$. В предыдущем разделе было получено неявное описание этого оператора в виде системы (е). Требуется записать заданный алфавитный оператор F в явном виде. Значения переменных $y_1y_2y_3$ – двоичные, поэтому принимаем $T_1=T_2=T_3=\{0, 1\}$. Отправляясь от уравнений (е) и поочередно подставляя в них вместо переменных y_1, y_2, y_3 значения 0 и 1, после упрощения получаем следующую систему, задающую оператор $y_1y_2y_3=F(x_1x_2)$ в явном виде:

$$\begin{array}{c} (x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1 \vee x_2^2) \vee x_1^2(x_2^0 \vee x_2^1) = y_1^0; \\ x_1^2x_2^2 = y_1^1;\ x_1^0(x_2^0 \vee x_2^1) \vee x_1^1x_2^2 = y_2^0; \\ x_1^0x_2^2 \vee x_1^1(x_2^1 \vee x_2^2) \vee x_1^2(x_2^0 \vee x_2^1) = y_2^1; \\ (x_1^0 \vee x_1^2)(x_2^0 \vee x_2^2) \vee x_1^1x_2^1 = y_3^0; \\ x_1^1(x_2^0 \vee x_2^2) \vee (x_1^0 \vee x_1^2)x_2^1 = y_3^1. \end{array} \qquad (з)$$

Уравнения (37) можно вывести непосредственно по таблице алфавитного оператора, минуя его неявную форму задания (35). С этой целью в левой части уравнений записываем усеченные СДНФ, составленные из всех конституэнт единицы, наборы показателей которых совпадают с входными словами, такими, что им соответствует одна и та же буква на заданном месте в выходных словах. В правой части уравнений пишем переменную, соответствующую заданному месту в выходных словах, с показателем, совпадающим с буквой, стоящей на заданном месте. Например, по табл. 1 для алфавитного оператора $y_1y_2y_3=F(x_1x_2)$, рассмотренного выше, записываем следующие уравнения типа (37):

$$\begin{array}{c} x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^1x_2^2 \vee \\ x_1^2x_2^0 \vee x_1^2x_2^1 = y_1^0;\ x_1^2x_2^2 = y_1^1; \\ x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^2 = y_2^0; \\ x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^1x_2^2 \vee x_1^2x_2^0 \vee x_1^2x_2^1 = y_2^1; \\ x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^2 \vee x_1^1x_2^1 \vee x_1^2x_2^0 \vee x_1^1x_2^2 = y_3^0; \\ x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^1x_2^2 \vee x_1^2x_2^1 = y_3^1. \end{array} \qquad (и)$$

Из них путем тождественных преобразований могут быть получены уравнения (з).

Рассмотрим пример вычисления выходного слова $y_1y_2...y_n$ алфавитного оператора F по заданному входному слову $x_1x_2...x_m$. Определим двоичную сумму $y_1y_2y_3$ троичных слагаемых $x_1=1$, $x_2=2$ с помощью явного задания алфавитного оператора $y_1y_2y_3=F(x_1x_2)$. Подставляя в левые части равенств (з) или (и) заданные значения x_1, x_2, x_3, имеем $y_1^0=1$, $y_1^1=0$, $y_2^0=0$, $y_2^1=1$, $y_3^0=0$, $y_3^1=1$. Таким образом, $y_1y_2y_3=011$.

4. Декомпозиция уравнений

Одна из важных задач теории интеллекта состоит в том, чтобы научиться производить *декомпозицию уравнений* алгебры конечных предикатов, то есть замену одного сложного уравнения эквивалентной ему системой более простых уравнений. Такую декомпозицию ежеминутно производит человек, выражая свою мысль (сложное уравнение) в форме последовательности отдельных предложений (системы более простых уравнений). Декомпозиция уравнений важна как один из этапов процесса решения уравнений алгебры конечных предикатов, поскольку в ряде случаев систему простых уравнений решать значительно легче, чем эквивалентное ей одно сложное уравнение. Декомпозиция уравнений также может служить мощным средством упрощения и сокращения записи уравнений алгебры конечных предикатов.

Тот факт, что человек никогда не испытывает затруднений при выражении мыслей в виде последовательности сравнительно коротких высказываний, свидетельствует о том, что мысли обладают одной важной особенностью: вне зависимости от уровня своей сложности они допускают выражение в виде конъюнкции (состоящей, быть может, из очень большого числа конъюнктивных членов) достаточно простых высказываний. Указанное свойство человеческого интеллекта назовем *конъюнктивностью интеллекта.* Очевидно, что свойство конъюнктивности чрезвычайно ограничивает класс уравнений алгебры конечных предикатов, которые могут эффективно решаться человеческим интеллектом. В свете данного вывода выглядит поразительной способность человеческого интеллекта эффективно познавать окружающий мир. Мы полагаем, что эту способность можно удовлетворительным образом объяснить, лишь признав конъюнктивность самого физического мира, то есть наличие такой его структуры, которая допускает описание в виде конъюнкции достаточно простых высказываний. Конъюнктивность представляется нам одним из фундаментальных качеств человеческого интеллекта. Она указывает на особую важность для теории интеллекта задачи декомпозиции уравнений алгебры конечных предикатов.

Рассмотрим условия, при которых уравнение $A=1$ может быть представлено в виде эквивалентной ему системы уравнений $B=1$, $C=1$. Здесь *A, B, C* – формулы алгебры конечных предикатов. Очевидно, такое представление возможно в том и только том случае, когда

$$A \equiv B \wedge C. \qquad \text{(a)}$$

Пусть задана некоторая формула *A*. Какой надо взять формулу *B*, чтобы для нее нашлась формула *C*, удовлетворяющая равенству (а)? Необходимое и достаточное условие состоит в следующем: формула *B* должна быть имплицентой для формулы *A*, то есть $A \supset B \equiv 1$. Иными словами, предикат *B* можно выбрать любым, но при условии, что он сохраняет все единичные значения предиката *A*. Это же самое можно сказать и о выборе предиката *C*: его можно выбрать любым, но с тем условием, чтобы он был имплицентой предиката *A*, то есть чтобы выполнялось условие $A \supset C \equiv 1$.

Если же к заданной формуле *A* подходящая формула *B* уже подобрана, то класс допустимых предикатов *C*, удовлетворяющих условию (а), сужается. Теперь, наряду с заранее сформулированными условиями, при выборе предиката *C* должно соблюдаться дополнительное условие $C \supset A \vee \overline{B} \equiv 1$ Действительно, согласно (а) имеем $A \sim BC \equiv 1$, что после тождественных преобразований дает: $(A \supset B)(A \supset C)(C \supset A \vee \overline{B}) \equiv 1$. Таким образом, предикат *C* должен выбираться с таким расчетом, чтобы он был импликантой предиката $A \vee \overline{B}$ и имплицентой предиката *A*. Иными словами, предикат *C* можно выбрать любым, но при условии, что он сохраняет все единичные значения предиката *A* и все нулевые значения предиката $A \vee \overline{B}$.

Проиллюстрируем сказанное примером. Требуется представить формулу

$$A \equiv y^1 z^0 t^1 \vee x^0 y^1 t^1 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^0 z^0 t^1$$

в виде конъюнкции возможно более простых формул *B* и *C*. Переменные *x*, *y*, *z*, *t* заданы в области {0, 1}. Значения предиката *A* указаны в таблице 2, составленной в форме диаграммы Вейча [2]. При формировании предиката *B* мы должны сохранить все единицы предиката *A*, часть же его нулей можно заместить единицами с таким расчетом, чтобы достичь определенного упрощения формулы для предиката *B*.

Таблица 2

xy \ *zt*	00	01	11	10	
00	0	1	0	0	
01	1	1	1	0	
11	0	1	0	0	*A*
10	0	0	0	0	

Таблица 3

xy \ *zt*	00	01	11	10	
00	1	1	0	0	
01	1	1	1	0	
11	0	1	1	0	*B*
10	0	0	0	0	

Наибольшего упрощения формулы для предиката *B* можно достичь, замещая все нули единицами, но тогда формула *B* превратится в истину, а формула *C* совпадет с формулой *A*, и в результате эффективная декомпозиция формулы *A* не будет достигнута. В табл. 3 даны значения предиката *B*, полученного в результате более умеренного замещения нулей единицами. Очень сильно упрощать формулу для предиката *B* не следует, так как это может привести к неоправданному усложнению формулы *C*. По табл. 3 находим минимальную ДНФ: $B \equiv y^1 t^1 \vee x^0 z^0$. В табл. 4 переносим все единицы предиката *A* (то есть все единицы табл. 2) и все нули предиката $A \vee \overline{B}$.

Таблица 4

xy \ *zt*	00	01	11	10
00	0	1		
01	1	1	1	
11		1	0	
10				

Нули надо ставить только в тех ячейках, в которых в табл. 3 стоят единицы, «лишние» по сравнению с табл. 2. В ячейках табл. 4, оставшихся незаполненными, можно проставить нули и единицы произвольным образом, руководствуясь соображениями минимизации формулы *C*. Предикат *C* задаем табл. 5, ей соответствует следующая минимальная ДНФ:

$$C \equiv x^0 t^1 \vee y^1 z^0.$$

Таблица 5

xy \ zt	00	01	11	10	
00		1	1	0	
01	1	1	1	0	
11	1	1		0	C
10	0	0	0	0	

Таким образом:
$y^1 z^0 t^1 \vee x^0 y^1 t^1 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^0 z^0 t^1 \equiv (y^1 t^1 \vee x^0 z^0) \wedge (x^0 t^1 \vee y^1 z^0)$.

Мы совершили декомпозицию уравнения

$$y^1 z^0 t^1 \vee x^0 y^1 t^1 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^0 z^0 t^1 = 1 \qquad (б)$$

на систему более простых уравнений:

$$\begin{cases} y^1 t^1 \vee x^0 z^0 = 1, \\ x^0 t^1 \vee y^1 z^0 = 1. \end{cases} \qquad (в)$$

Заметим, что в данном примере декомпозиция уравнения привела не только к уменьшению длины каждого уравнения, но и к упрощению полной его записи, поскольку общее число узнаваний буквы в системе уравнений (в) меньше, чем в исходном уравнении (8 против 12).

Если бы мы в качестве первого сомножителя выбрали более простую формулу, $B' \equiv y^1 \vee t^1$, что соответствует табл. 6, то в роли второго сомножителя вынуждены были бы взять более сложное выражение (см. табл. 7 и 8):

$$C' \equiv x^0 z^0 \vee y^1 z^0 t^1 \vee x^0 y^1 t^1.$$

Такое построение приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{r} y^1 \vee t^1 = 1, \\ x^0 z^0 \vee y^1 z^0 t^1 \vee x^0 y^1 t^1 = 1, \end{array}\right\} \qquad (г)$$

более сложной, чем система (в) (10 узнаваний буквы против 8).

Таблица 6

xy \ zt	00	01	11	10	
00	0	1	1	0	
01	1	1	1	1	
11	1	1	1	1	B'
10	0	1	1	0	

Таблица 7

xy \ zt	00	01	11	10
00		1	0	
01	1	1	1	0
11	0	1	0	0
10		0	0	

Наиболее сложное уравнение в системе (в) имеет 4 узнавания буквы, в системе (г) — 8 узнаваний буквы. Таким образом, вариант декомпозиции (в) по обоим показателям удачнее варианта (г). Результат декомпозиции, вообще говоря, оказывается различным в зависимости от того, будем ли мы стремится к минимизации наиболее сложного уравнения системы или же к минимизации суммарной сложности уравнений системы. Общий метод решения этих задач здесь не приводится.

Таблица 8

xy \ zt	00	01	11	10	
00	1	1	0		
01	1	1	1	0	
11	0	1	0	0	C'
10	0	0	0	0	

Задачу декомпозиции уравнения можно сформулировать и по-другому. Требуется заменить уравнение $A=1$ равносильной ему системой уравнений $\{A_1=1, A_2=1, \ldots, A_n=1\}$, причем число n уравнений нас не лимитирует и может быть принято достаточно большим. Однако важно, чтобы каждое уравнение $A_i=1$ $(1 \le i \le n)$ было как можно более простым. Похожую задачу решает школьный учитель, излагающий первоклассникам свою мысль в виде последовательности достаточно простых высказываний. Метод решения этой задачи продемонстрируем на примере. Задано уравнение (б). Предикату, стоящему в левой части этого уравнения, соответствует табл. 2. Единицы таблицы охватываем какой-нибудь системой прямоугольников максимального размера, соответствующих наиболее коротким простым импликантам (табл. 9).

В результате получаем предикат $A_1 \equiv y^1 \vee t^1$. Крестиками в таблице отмечены «лишние» ячейки, попавшие внутрь прямоугольников. Содержательно эти ячейки будем интерпретировать как признак неполноты выражения мысли A высказыванием

A_1. Чем больше крестиков содержится в таблице, тем менее полно выражена мысль. Далее формируем предикаты $A_2 \equiv y^1 \vee z^0$, $A_3 \equiv x^0 \vee y^1$, $A_4 \equiv z^0 \vee t^1$, $A_5 \equiv x^0 \vee t^1$, $A_6 \equiv x^0 \vee z^0$ с таким расчетом, чтобы, во-первых, каждый из них был возможно более простым и, во-вторых, чтобы с введением очередного предиката сокращалось число крестиков (таблицы 10÷13).

Таблица 9

xy \ zt	00	01	11	10
00		1	×	
01	1	1	1	×
11	×	1	×	×
10		×	×	

A_1

Таблица 10

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	×
11	×	1	×	×
10		×		

A_2

Таблица 11

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	×
11	×	1	×	×
10				

A_3

Таблица 12

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11	×	1	×	
10				

A_4

После введения предиката A_6 все крестики исчезают (табл. 14). Это значит, что мы достигли полного выражения мысли A системой высказываний $A_1 \div A_6$. Таким образом, мы совершили декомпозицию уравнения (б) на систему простых уравнений

$$y^1 \vee t^1 = 1,\ y^1 \vee z^0 = 1,\ x^0 \vee y^1 = 1,\ z^0 \vee t^1 = 1,\ x^0 \vee t^1 = 1,\ x^0 \vee z^0 = 1.$$

Заметим, что в результате декомпозиции суммарное число узнаваний буквы в системе уравнений осталось таким же, как и в исходном уравнении (12 узнаваний буквы).

Таблица 13

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11		1	×	
10				

A_5

Таблица 14

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11		1		
10				

A_6

Задачи только что рассмотренного типа можно решать также и чисто аналитически без привлечения диаграмм Вейча. Рассмотрим пример. Дано уравнение:

$$x_1^c x_2^a x_3^a \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^b x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c = 1.$$

Переменные x_1, x_2, x_3 – троичные со значениями a, b, c. Требуется заменить это уравнение равносильной ему системой возможно более коротких уравнений. Ищем первое уравнение системы, отправляясь от предиката:

$$x_1^c x_2^a x_3^a \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^c \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee$$
$$x_1^b x_2^a x_3^c \vee x_1^b x_2^c x_3^c \vee x_1^c x_2^b x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^c x_2^b x_3^b \vee x_1^c x_2^a x_3^c \vee x_1^c x_2^b x_3^c \vee x_1^c x_2^c x_3^c.$$

В указанном предикате сохранена вся левая часть исходного уравнения. Кроме того, в него введены в роли дополнительных членов конституэнты единицы для всех наборов (x_1, x_2, x_3), не являющихся решениями исходного уравнения. Эти конституэнты единицы заключены в квадратные скобки. Производим такую минимизацию полученной формулы, при которой разрешается использовать любые дополнительные члены, но не все одновременно. Все дизъюнктивные члены, не охваченные квадратными скобками, в процессе минимизации должны быть использованы обязательно.

После минимизации получаем левую часть первого уравнения $x_1^b \vee x_1^c$. В процессе минимизации были использованы следующие дополнительные конституэнты единицы:

$$x_1^b x_2^a x_3^a,\ x_1^b x_2^b x_3^a,\ x_1^b x_2^c x_3^a,\ x_1^b x_2^a x_3^c,\ x_1^b x_2^c x_3^c,$$
$$x_1^c x_2^b x_3^a,$$
$$x_1^c x_2^c x_3^a,\ x_1^c x_2^b x_3^b,\ x_1^c x_2^a x_3^c,\ x_1^c x_2^b x_3^c,\ x_1^c x_2^c x_3^c.$$

Далее, отправляясь от того же предиката, ищем второе уравнение системы. Теперь в процессе минимизации не должны использоваться все конституэнты единицы из только что приведенного перечня. Все те конституэнты единицы, которые не приведены в этом перечне и охвачены квадратными скобками, могут использоваться или не использоваться по нашему усмотрению. Получаем левую часть второго уравнения $x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c$. При минимизации не использовались из нашего перечня следующие конституэнты единицы: $x_1^c x_2^b x_3^a$, $x_1^c x_2^b x_3^b$, $x_1^c x_2^b x_3^c$. Повторяем процесс минимизации для еще более сокращенного перечня конституэнт единицы:

$$x_1^b x_2^a x_3^a,\ x_1^b x_2^b x_3^a,\ x_1^b x_2^c x_3^a,\ x_1^b x_2^a x_3^c,$$
$$x_1^b x_2^c x_3^c,\ x_1^c x_2^c x_3^a,\ x_1^c x_2^a x_3^c,\ x_1^c x_2^c x_3^c.$$

Получаем левую часть третьего уравнения $x_1^c x_2^a \vee x_3^b \vee x_3^c$. Перечень оставшихся конституэнт единицы становится еще меньшим:

$$x_1^b x_2^a x_3^c,\ x_1^b x_2^c x_3^c,\ x_1^c x_2^a x_3^c,\ x_1^c x_2^c x_3^c.$$

Наконец, получаем левую часть четвертого уравнения $x_1^b x_2^b \vee x_3^a \vee x_3^b$. Перечень конституэнт единицы превращается в пустое множество, что служит признаком окончания процесса построения системы уравнений. Итак, мы заменили исходное уравнение

$$x_1^c x_2^a x_3^a \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c = 1 \quad (д)$$

системой равносильных ему уравнений:

$$x_1^b \vee x_1^c = 1,\ x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c = 1,\ x_1^c x_2^a \vee x_3^b \vee x_3^c = 1,$$
$$x_1^b x_2^b \vee x_3^a \vee x_3^b = 1.$$

Суммарное число букв в системе осталось почти тем же, что и в исходном уравнении (13 узнаваний буквы против 14), зато максимальная сложность уравнений резко уменьшилась (с 14 до 4 узнаваний буквы).

Рассмотрим один специальный, но важный метод декомпозиции уравнений алгебры конечных предикатов, основанный на применении теоремы о конъюнктивном разложении. Пусть требуется произвести декомпозицию произвольно выбранного уравнения $f(x_1, x_2,..., x_n)=1$, где переменная x_1 определена на множестве букв $\{a_1, a_2,..., x_k\}$. Тогда согласно первому следствию теоремы о конъюнктивном разложении имеем:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) \equiv (\overline{x_1^{a_1}} \vee f(a_1, x_2,..., x_n))...$$
$$(\overline{x_1^{a_k}} \vee f(a_k, x_2,..., x_n)).$$

Таким образом, исходное уравнение заменяется системой, состоящей из k уравнений

$$\begin{array}{l} \overline{x_1^{a_1}} \vee f(a_1, x_2, \ldots, x_n) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{x_1^{a_k}} \vee f(a_k, x_2, \ldots, x_n) = 1. \end{array} \quad (е)$$

При желании процесс декомпозиции можно продолжить, раскладывая левую часть каждого из уравнений (е) по переменной x_2 и т.д.

Для иллюстрации метода приведем декомпозицию уравнения (д), рассмотренного в предыдущем примере. Производим разложение левой части уравнения (д) по переменной x_1. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\overline{x_1^a} = 1,\ \overline{x_1^b} \vee x_3^b \vee x_2^b x_3^c = 1,\ \overline{x_1^c} \vee x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^b \vee x_2^c x_3^b = 1.$$

Согласно закону отрицания:

$$\overline{x_1^a} \equiv x_1^b \vee x_1^c, \quad \overline{x_1^b} \equiv x_1^a \vee x_1^c, \quad \overline{x_1^c} \equiv x_1^a \vee x_1^b.$$

Окончательно имеем:

$$x_1^b \vee x_1^c = 1,\ x_1^a \vee x_1^c \vee x_3^b \vee x_2^b x_3^c = 1,$$
$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^b \vee x_2^c x_3^b = 1.$$

Суммарное число предикатов узнавания буквы в полученной системе несколько увеличилось по сравнению с тем, которое было в исходном уравнении (15 узнаваний буквы против 14), зато сложность каждого уравнения уменьшилась (соответственно 2, 5 и 8 узнаваний буквы против 14). Продолжив разложение второго и третьего уравнений по переменным x_2 и x_3, можно добиться еще большего упрощения отдельных уравнений, однако их число при этом увеличится.

Рассмотренный выше процесс замены уравнения равносильной ему системой более простых уравнений назовем *эквивалентной декомпозицией.* Наряду с нею возможна еще и *неэквивалентная декомпозиция уравнений.* Идею неэквивалентной декомпозиции поясним на примере. Дано уравнение:

$$x_1^b x_2^c x_3^b \vee (x_1^b x_2^c x_3^b \vee x_1^c)(x_2^c x_3^b \vee x_2^a) = 1.$$

Вводим обозначения для предикатов $t_1 = x_2^c x_3^b$ и $t_2 = x_1^b t_1$, входящих несколько раз в исходное уравнение. После подстановки имеем $t_2 \vee (t_2 \vee x_1^c)(t_1 \vee x_2^a) = 1$. Таким образом, мы заменили исходное уравнение системой, состоящей из трех более простых уравнений:

$$t_1 = x_2^c x_3^b,\ t_2 = x_1^b t_1,\ t_2 \vee (t_2 \vee x_1^c)(t_1 \vee x_2^a) = 1.$$

Наиболее сложное из этих уравнений имеет 2 узнавания буквы и 3 вхождения логических переменных против 10 узнаваний буквы в исходном уравнении. Полученная система уравнений, строго говоря, неэквивалентна исходному уравнению, так как в ней содержатся дополнительные логические переменные t_1 и t_2. Однако если эти переменные рассматривать исключительно как промежуточные, воздерживаясь от их использования в роли независимых переменных, то мы обнаружим, что система уравнений связывает переменные x_1, x_2, x_3 тем же самым отношением, что и исходное уравнение.

Рассмотрим один специальный, но важный способ введения промежуточных логических переменных в уравнение алгебры конечных предикатов. Пусть задано произвольное уравнение

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = 1, \quad (ж)$$

где переменная x_1 определена на множестве букв $\{a_1, a_2,..., x_k\}$. Тогда согласно первому следствию теоремы о дизъюнктивном разложении имеем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{x_1^{a_1}}\, f(a_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee$$
$$\vee\, \overline{x_1^{a_k}}\, f(a_k, x_2, \ldots, x_n)).$$

Обозначим

$$f(a_1, x_2, \ldots, x_n) = t_1, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad f(a_k, x_2, \ldots, x_n) = t_k. \qquad (з)$$

После замены уравнение (ж) запишется в виде:

$$t_1 x_1^{a_1} \vee t_2 x_1^{a_2} \vee \ldots \vee t_k x_1^{a_k} = 1. \qquad (и)$$

Таким образом, мы заменили уравнение (ж) системой уравнений (з) и (и). Каждое из уравнений (з) в случае надобности также можно заменить некоторой системой уравнений, производя разложение по переменной x_2, и т. д.

Рассмотрим пример декомпозиции уравнения только что описанным методом. Дано уравнение:

$$(x_1^a \vee x_1^b) x_2^b x_3^c \vee x_1^b x_2^a x_3^b \vee x_1^c = 1. \qquad (к)$$

Производим разложение по переменной x_1. Записываем уравнение (и):

$$t_1 x_1^a \vee t_2 x_1^b \vee t_3 x_1^c = 1.$$

Согласно (в):

$$t_1 = (a^a \vee a^b) x_2^b x_3^c \vee a^b x_2^a x_3^b \vee a^c \equiv x_2^b x_3^c,$$
$$t_2 = (b^a \vee b^b) x_2^b x_3^c \vee b^b x_2^a x_3^b \vee b^c \equiv x_2^b x_3^c \vee x_2^a x_3^b,$$
$$t_3 = (c^a \vee c^b) x_2^b x_3^c \vee c^b x_2^a x_3^b \vee c^c \equiv 1.$$

Таким образом, уравнение (к) мы заменили системой уравнений:

$$t_1 x_1^a \vee t_2 x_1^b \vee t_3 x_1^c = 1,\ t_1 = x_2^b x_3^c,\ t_2 = t_1 \vee x_2^a x_3^b. \qquad (л)$$

Исходное уравнение (к) содержит 8 узнаваний буквы, наиболее же сложное из уравнений (л) – только 3 узнавания буквы и 2 вхождения логических переменных. Каждое уравнение системы проще, чем исходное уравнение, однако вместе взятые уравнения системы (л) сложнее (7 узнаваний буквы и 5 вхождений логических переменных против 8 узнаваний буквы в исходном уравнении). При определении сложности уравнений мы условно приравняли одно вхождение логической переменной к одному узнаванию буквы.

Выводы

Описанными выше методами широко пользуются люди в своей интеллектуальной деятельности. Когда какое-то понятие (то есть формулу) нам приходится использовать многократно, то мы вводим специальный термин (то есть обозначение формулы), его называющий, после чего для краткости в высказываниях употребляем уже не сами понятия, а только лишь соответствующие им термины. Очевидно, что метод неэквивалентной декомпозиции будет эффективным не для любых уравнений, а лишь для тех из них, у которых имеются черты иерархической структуры. Можно предположить, что уравнения именно такого типа будут наиболее важны для теории интеллекта. Об этом свидетельствует тот факт, что люди в своей интеллектуальной деятельности чрезвычайно широко пользуются терминологией, а это значит, что наши мысли имеют иерархическую структуру, построены по блочному принципу. Это свойство интеллекта человека назовем *иерархичностью интеллекта*. Весьма вероятно, что и окружающий нас физический мир также имеет иерархическую структуру, иначе было бы трудно понять, каким образом нам удается успешно его познавать. Мы ожидаем, что прием неэквивалентной декомпозиции уравнений найдет применение при решении многих задач теории интеллекта.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Об алгебре конечных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта. – 2011. – № 3. – С. 3-13. **2.** Справочник по цифровой вычислительной технике. – К.: Изд-во «Техніка», 1979. – 511 с.

Поступила в редколлегию 12.09.2011

УДК 519.7

Рівняння теорії інтелекту / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 3 (77). – С. 30-45.

Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів інтелекту людини – алгебри предикатів і предикативних операцій. Запропоновані способи запису предикативних рівнянь, а також методи їх аналітичного розв'язання.

Бібліогр.: 2 найм.

UDC 519.7

The intellect theory equations / M.F. Bondarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 3 (77). –P. 30-45.

The specialized mathematical apparatus develops for the effective design of the human intellect mechanisms work - algebra of predicates and predicate operations. The methods of the predicate equalizations record, and also methods of their analytical decision, are offered.

Ref.: 2 items.