УДК 681.513

РЕКУРРЕНТНОЕ БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С.Г. Удовенко[1], В.И. Перепелица[2]

[1, 2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, udovenko@kture.kharkov.ua

Приведена байесовская модель стохастического процесса в пространстве состояний. Предложена рекуррентная процедура оценивания состояний, позволяющая осуществить прогнозирование выходных параметров процесса. Приведены экспериментальные результаты прогнозирования гидрофизических параметров по разработанной модели.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС, ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ, БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ, РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД

Введение

В начале 90-х годов начала формироваться новая комплексная дисциплина, известная в настоящее время под названием «вычислительный интеллект» (ВИ). ВИ базируется на применении мягких вычислений, главным принципом которых является терпимость к неточности и частичной истинности для достижения интерпретируемости, гибкости и низкой стоимости принимаемых решений. К мягким вычислениям относятся, в частности, методы теории хаоса и методы байесовского оценивания. В последнее время расширяется сфера приложений этих методов, связанных с алгоритмизацией анализа временных рядов, включающего восстановление аттрактора в псевдофазовом пространстве, нелинейное предсказание и редукцию шумов [1].

В работах [2,3] показано, что прогнозирование эволюции процесса $x(k)$, описываемого ARMAX или RARMAX – моделью в пространстве состояний, требует реализации оперативного оценивания условных функций, с помощью которых описывается неопределенность состояния $x(k)$. Представляется целесообразным рассмотреть концептуальное решение задачи такого оценивания, позволяющее определить алгоритмические возможности прогнозирования состояний системы. Кроме того, при дрейфе параметров объекта возникает задача определения условий возможности раздельного или одновременного оценивания параметров и состояний управляемых процессов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую систему, данные о которой наблюдаются в дискретные моменты времени $k = 1,2,...$ В соответствии с общей схемой непрямого адаптивного управления, эти данные содержат управляющий вход $u(k)$, управляемый выход $y(k)$, внешнее измеряемое возмущение $v(k)$, вектор задающих воздействий $y_0(k)$. Совокупность всей информации, доступной в момент k, обозначим как

$$d(1,k) = \big(u(1), y(1), v(1), y_0(1),..., \\ u(k), y(k), v(k), y_0(k)\big). \tag{1}$$

Предположим, что существует стохастическая модель, позволяющая определять распределение вероятностей вектора данных $d(1,k)$ и его отдельных составляющих для последующих тактов идентификации и управления по результатам текущих наблюдений.

В случае обычного регулирования или программного управления процессом сигналы $y_0(k), k > 0$ для всех тактов принятия решений априори известны и заданы. В более общем случае (для следящего управления) будущий задающий сигнал, как правило, однозначно не определен.

Применяя последовательно байесовское цепное правило, можно представить совместную функцию условного распределения для прогнозирования будущих данных следующим образом:

$$\begin{gathered} p(u(1,k), y(1,k), v(1,k) y_0(1,k)) = \\ = \prod_{i=1}^{K} p(u(k) \,|\, u(1,k-1), y(1,k-1), v(1,k-1), y_0(1,k) \times \\ \times p(y(k) \,|\, y(1,k-1), u(1,k) v(1,k), y_0(1,k)) p(v(k) \,| \\ | \, v(1,k-1)) p(y_0(i) \,|\, y_0(1,k-1)) \end{gathered} .(2)$$

Рассмотрим смысл отдельных сомножителей произведения (2).

Стратегия управления функцией условных распределений вида

$$\begin{gathered} f_u = p(u(k) | u(1,k-1), y(1,k-1), v(1,k-1), y_0(1,k)) = \\ = p(u(k) | d(1,k-1), y_0(1,k)) \end{gathered} \tag{3}$$

представляет собой стохастическое преобразование, в соответствии с которым управление $u(k)$ на каждом такте генерируется на основании доступных данных.

Эволюция внешних возмущений определяется функцией вида

$$f_v = p(v(k) | v(1,k-1)). \tag{4}$$

Очевидно, что изменение сигнала $v(i)$ можно считать автономным процессом, определяемым внешней средой.

Если предположить, что не существует скрытых связей в контуре управления, которые могут влиять на изменение задающего сигнала $y_0(k)$, то в общем случае можно прогнозировать его эволюцию с помощью функции вида

$$f_{y_0} = p(y_0(k) | y_0(1,k-1)). \quad (5)$$

Важнейшей составляющей произведения в правой части (2) является функция, определяющая вероятностную зависимость выхода управляемой системы от предыстории процесса и текущих данных, то есть

$$\begin{aligned} f_y &= p(y(k) | y(1,k-1), u(1,k), v(k), y_0(1,k)) = \\ &= p(y(k) | d(1,k-1), u(k), v(k), y_0(1,k)). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно предположить, что обусловленность выхода $y(k)$ от $y_0(1,k)$ является избыточной, т.к. эволюция задающего сигнала может влиять на $y(k)$ только посредством данных $d(k-1)$, которые уже включены в условие. Таким образом, управляемый процесс характеризуется следующим стохастическим преобразованием:

$$f_y = p(y(k) | d(1,k-1), u(k), v(k)). \quad (7)$$

Семейство функций условных распределений (7) для всех k задает математическую модель процесса. Целью моделирования с использованием байесовских оценок можно считать определение параметров этих распределений, позволяющих проводить выбор необходимых стратегий управления, основанных на пошаговом вычислении функции (3).

Решим задачу представления байесовской модели в пространстве состояний, а также последующего синтеза процедуры рекуррентного оценивания состояний стохастической системы.

2. Решение задачи

Модель процесса. Рассмотрим зависимость (7). Предположим, что в соответствии с зафиксированной ранее совокупностью данных $d(1,k-1)$ выбирается некоторое управление $u(k)$, которому соответствует оценка прогнозируемого выхода $\hat{y}(k)$. Этот прогноз может оказаться и абсолютно точным на отдельных тактах контроля и управления, но в общем случае действительное значение выхода будет равно

$$y(k) = \hat{y}(k) + e(k), \quad (8)$$

где величина $e(k)$ отражает рассогласование между действительным значением $y(k)$ и его оценкой и может быть как положительной, так и отрицательной. В момент времени k регистрируется новый набор данных $\{u(k), y(k), v(k)\}$ и выбирается новое управление $u(k+1)$ в соответствии с некоторой стратегией. По этим данным опять можно осуществить прогноз значения выхода $\hat{y}(k+1)$, действительное значение, которого составит

$$y(k+1) = \hat{y}(k+1) + e(k+1). \quad (9)$$

Естественно предположить, что выбираемые оценки $\hat{y}(k-1)$, $\hat{y}(k)$, $\hat{y}(k+1)$ являются средними значениями действительных величин

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= M\{y(k) | d(1,k-1), u(k), v(k)\} = \\ &= \int y(k) p(y(k) | d(1,k-1), u(k), v(k)) dy(k). \end{aligned} \quad (10)$$

Выразим оценку $\hat{y}(k)$ с помощью некоторой детерминированной функции

$$\hat{y}(k) = f(d(1,k-1), u(k), v(k)). \quad (11)$$

В этом случае выходную величину можно представить в виде

$$y(k) = f(d(1,k-1), u(k), v(k)) + e(k). \quad (12)$$

Таким образом, модель процесса определяется совокупностью детерминированной части и случайной составляющей $e(k)$.

Для большинства реальных технических систем допустимо считать временной ряд $\{e(k), k = 1,2,...\}$ дискретным белым шумом, то есть последовательностью некоррелированных величин с нулевым средним значением. Отметим, что в детерминированной части зависимости (12) учитывается полная совокупность данных от начального момента наблюдения до момента $(k-1)$. Однако известно, что в реальных системах на текущий выход не влияют существенно данные, измеренные много тактов наблюдения назад. Зачастую можно предположить, что существует такое целое число n, для которого справедливо

$$\begin{aligned} &p(y(k) | d(1,k-1), u(k), v(k)) = \\ &= p(y(k) | d(k-n,k-1), u(k)v(k)) \end{aligned}, \quad (13)$$

где n определяет учитываемую часть предыстории. Если оценивать качество модели по критерию среднеквадратичной ошибки прогноза, то для целей управления, как правило, достаточно использовать модель порядка $n \le 3$.

Очевидно, что в случае линейности функции (11) прогнозирующая модель процесса будет также линейной.

Модель стохастического процесса является линейной, если математическое ожидание $y(k)$ (среднее значение функции (13)) может быть представлено линейной функцией данных, причем ковариация $y(k)$ не зависит от этих данных, то есть

$$\begin{aligned} &M\{y(k) | d(k-n,k-1), u(k), v(k)\} = \hat{y}(k) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} A_i'(k) y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} B_i'(k) u(k-i) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n} C_i'(k) v(k-i) + g_y'(k); \end{aligned} \quad (14)$$

$$Cov\{y(k) | d(k-n,k-1), u(k), v(k)\} = R_y(k). \quad (15)$$

Подставив (14) в (8), получаем

$$A_0'(k)y(k) = -\sum_{i=1}^{n} A_i'(k)y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} B_i'(k)u(k-i) + \\ + \sum_{i=0}^{n} C_i'(k)v(k-i) + g_y'(k) + e(k), \quad (16)$$

где $A_0'(k) = I$.

Допустим, что матрица ковариации (15) может быть представлена в следующем факторизованном виде:

$$R_y(k) = L_y(k)D_e(k)L_y^T(k)\ , \quad (17)$$

где $L_y(k)$ – моническая нижняя треугольная матрица, $D_e(k)$ – диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами. Если умножить на $L_y^{-1}(k)$ обе части уравнения (16), то $A_0(k)$ преобразуется в нижнюю треугольную матрицу, то есть

$$A_0(k) = L_y^{-1}(k)\ . \quad (18)$$

Очевидно, что стохастическая составляющая $e(k)$ также переопределится

$$e(k = L_y^{-1}(k)(y(k)\hat{y}(k))\ , \quad (19)$$

причем теперь $e(k)$ имеет не только нулевое математическое ожидание, но и некоррелированные компоненты

$$Cov\{e(k)\} = M\{e(k)e^T(k)\} = D_e(k) = D_e = const\ . \quad (20)$$

Таким образом, модель (16) без изменения структуры может быть легко представлена в форме, характеризующейся важным свойством (20).

Реальные стохастические процессы зачастую характеризуются транспортным запаздыванием. Их можно разделить на процессы с транспортным запаздыванием, которые можно учесть повышением порядка модели и на процессы, для которых временная задержка должна быть отражена в соответствующих векторах данных зависимости (16):

$$A\ (k)y(k) = -\sum_{i=1}^{n} A_i(k)y(k-i) + \\ + \sum_{i=0}^{n} B_i(k)u(k-i-\rho) + \quad , \\ + \sum_{i=0}^{n} C_i(k)v(k-i-\mu) + g_y(k)e(k) \quad (21)$$

где ρ, μ – векторные величины, элементы которых соответствуют числу периодов транспортного запаздывания по отдельным каналам « $y(k)-u(k)$ », « $y(k)-v(k)$ ».

В этой модели условное среднее значение линейно зависит от n предыдущих входов. Если удается удержать процесс в окрестности некоторой рабочей точки, то можно предположить, что имеет место действительно линейная зависимость. Насколько большой может быть эта окрестность, зависит от свойств конкретной системы. Случайные отклонения от линейности можно отнести к составляющей $e(k)$.

Зависимость (21) представляет собой многомерную регрессионную модель стохастического объекта, часто именуемую авторегрессионной моделью со скользящим средним (ARMAX: Autoregressive Moving Average Exogenous). Очевидно, что форма линейной модели типа «вход-выход» не всегда удобна для непосредственного практического использования. Так как любая математическая модель может служить лишь упрощенным отражением объективной реальности, то один и тот же процесс может быть описан с помощью различных ее модификаций, отражающих некоторые специфические допущения.

Введем понятие состояния многомерного управляемого стохастического процесса, используя условную вероятностную зависимость (6).

Конечное векторное множество $x(k)$ фиксированной размерности, характеризующее текущую динамику объекта управления и соответствующее зависимости

$$p(y(k),x(k)|y(1,k-1),u(1,k)v(1,k),x(k-1)) = \\ = p(y(k),x(k)|u(k),v(k),v(k),x(k-1)), \quad (22)$$

назовем состоянием управляемого стохастического процесса.

Очевидно, что из общей зависимости (22) можно выделить локальные условные зависимости $p(x(k))$ и $p(y(k))$ от предыстории процесса и предыдущего состояния $x(k-1) = z(k) \setminus u(k)$.

При этом первая из формируемых таким способом функций, то есть

$$p(x(k)|u(k),v(k),x(k-1)) \quad (23)$$

непосредственно описывает эволюцию состояний, а функция

$$p(y(k)|u(k),v(k),x(k-1)) \quad (24)$$

соответствует эволюции выхода для модели процесса в пространстве состояний.

Введем обозначение

$$x_1(k-1) = \sum_{j=1}^{n}[-A_j y(k-j) + B_j u(k-\rho-j) + \\ + C_j v(k-\mu-j) + h_j e(k-j) + g_e].$$

Тогда ARMAX – модель типа (16) можно представить в виде:

$$A_0 y(k) = B_0 u(k-\rho) + C_0 v(k-\mu) + e(k) + x_1(k-1)\ . \quad (25)$$

Очевидно, что сдвиг индекса времени на один такт вперед преобразует (25) следующим образом:

$$A_1 y(k) = B_1 u(k-\rho) + C_1 v(k-\mu) + \\ + h_1 e(k) + x_2(k-1) - x_1(k), \quad (26)$$

где

$$x_2(k-1)=\sum_{j=2}^{n}[-A_j y(k+1-j)+B_j u(k+1-\rho-j)+ \\ +C_j v(k+1-\mu-j)+h_j e(k+1-j)]+g_e.$$

В общем случае для $i<n$ можно получить зависимость

$$A_i y(k)=B_i u(k-\rho)+C_i v(k-\mu)+ \\ +h_i e(k)+x_{i+1}(k-1)-x_i(k), \tag{27}$$

где

$$x_i(k-1)=\sum_{j=i+1}^{n}[-A_j y(k+i-j)+B_j u(k+i-\rho-j)+ \\ +C_j v(k+i-\mu-j)+h_j e(k+i-j)]+g_e. \tag{28}$$

При $i=n$ формируется ARMAX – модель в виде:

$$A_n y(k)=B_n u(k-\rho)+C_n v(k-\mu)+ \\ +h_n e(k)+g_e-x_n(k). \tag{29}$$

Используя зависимости (26)–(29), можно представить матричную ARMAX – модель в пространстве состояний:

$$Ax_c(k)=Bu(k-\rho)+Cv(k-\mu)+ \\ +He(k)+Ex(k-1)+g_c, \tag{30}$$

где

$$x_c^T(k)=[y^T(k),x^T(k)],x^T(k)= \\ =[x_1^T(k),x_2^T(k),...,x_n^T(k)],$$

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\.&.&.&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_0&0&.&0\\a_1&1&.&0\\.&.&.&.\\a_n&0&.&1\end{bmatrix},$$

$$B^T=[b_0^T,...,b_n^T],C^T=[c_0^T,...,c_n^T],g_c^T=[0,...,g_e],$$

I – единичная матрица размерности m.

Очевидно, что A является монической нижней треугольной матрицей размерности $\left[(n+1)m_y\times(n+1)m_y\right]$.

Для упрощения изложения положим, что временные задержки $\rho=\mu=0$. Тогда условное математическое ожидание и условная матрица ковариации переменной $x_c(k)$ примут вид

$$M\{x_c(k)\,|\,u(k),v(k),x(k-1)\}= \\ =A^{-1}(Bu(k)+Cv(k)+Ex(k-1)+g_c); \tag{31}$$

$$Cov\{x_c(k)\,|\,u(k),v(k),x(k-1)\}= \\ =A^{-1}HD_eH^T(A^{-1})^T.$$

Оценивание состояний. Предположим, что известна предыстория стохастического процесса $d(1,k-1)$, то есть зафиксированы соответствующие значения входных и выходных переменных в моменты времени $t=iT$, $i=1\div(k-1)$.

Тогда проблему байесовского оценивания состояний можно сформулировать следующим образом: по заданной модели процесса в пространстве состояний, определяемой условной функцией вида (22), найти прогнозирующую функцию условного распределения вероятностей для очередного значения выхода и после его наблюдения определить функцию условного распределения вероятностей для состояния $x(k)$ с целью подготовки следующего шага рекурсии.

Решение этой проблемы можно представить в виде трехэтапной процедуры. На первом этапе определяется совместное распределение вероятностей для $y(k)$ и $x(k)$ по результатам наблюдения $d(1,k-1)$ и расчетного значения управления $u(k)$. Такое распределение, полученное на основе элементарных операций байесовской статистики, будет иметь вид:

$$p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))= \\ =\int p(y(k),x(k),x(k-1)\,|\,d(1,k-1),u(k))dx(k-1)= \\ =\int p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),x(k-1),u(k))p(x(k-1) \\ |\,d(1,k-1),u(k))dx(k-1).$$

В соответствии с (22) получаем:

$$p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),x(k-1),u(k))= \\ =p(y(k),x(k)\,|\,x(k-1),u(k)). \tag{32}$$

Очевидно, что можно сформулировать естественное условие независимости текущих значений состояния $x(k)$ от текущих значений управления $u(k)$:

$$p(x(k-1)\,|\,d(1,k-1),u(k))= \\ =p(x(k-1)\,|\,d(1,k-1)). \tag{33}$$

С учетом (31) и (32) имеем:

$$p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))= \\ =\int p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))\times \\ \times p(x(k-1)\,|\,d(1,k-1))dx(k-1). \tag{34}$$

На втором этапе определяем функцию условного распределения для прогнозирования выхода процесса:

$$p(y(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))= \\ =\int p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))dx(k). \tag{35}$$

На третьем этапе завершаем рекурсию, определяя условное распределение вероятностей с учетом распределения (31) и результатов прогнозирования (34):

$$p(x(k)\,|\,d(1,k))=\frac{p(y(k),x(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))}{p(y(k)\,|\,d(1,k-1),u(k))}. \tag{36}$$

Очевидно, что если вероятность $p(y(k),x(k)\,|\,x(k-1),u(k))$ подчинена нормальному закону распределения и соответствующая модель процесса является линейной, то прогнозирующие функции (4), (5) и (6) также распределены по нормальному закону. Это означает, что если для линейной ARMAX– модели, представленной в пространстве состояний, задать априорную неопределенность начального состояния $x(0)$ с помощью нормально распределенной функции $p(x(0))$, то задача байесовского оценивания может быть решена путем рассмотрения лишь первого и второго моментов распределения (35).

При распределении вероятностей, используемых в рекурсиях, но отличных от нормальных законов, решение задачи оценивания состояний сопряжено со значительными вычислительными трудностями.

3. Экспериментальные результаты

Полученные теоретические результаты были частично использованы применительно к задачам прогнозирования и оперативной регистрации опасности возникновения волн цунами по данным реальных гидрофизических измерений [4].

Исследуемый процесс представляет собой дискретную последовательность регистраций уровня с десятиминутным периодом квантования. По условиям эксперимента в ситуациях, когда абсолютная величина прогнозирования на текущем такте вычислений превышала пороговую величину, принималась гипотеза о потере устойчивости процесса вследствие возникновения волны цунами. Качество прогнозирования в целом оценивалось по среднему квадрату ошибки прогноза на всем интервале моделирования.

В качестве прогнозирующей зависимости по данным ретроспективного анализа была использована обобщенная модель в пространстве состояний, а для настройки ее параметров использовался алгоритм байесовского оценивания с экспоненциальным дисконтированием. Параллельно для сравнения качества прогнозирования оценки параметров модели вычислялись также по рекуррентному методу наименьших квадратов (РМНК). Начальные значения во всех случаях принимались нулевыми.

Процедуры байесовского оценивания во всех рассмотренных ситуациях обеспечивали более высокое качество прогнозирования по сравнению с РМНК. При этом наблюдается тенденция улучшения качества прогнозирования при уменьшении величины «скользящего окна» на участке квазистационарности процесса ($105 \le k \le 204$). На условно стационарных интервалах качество прогнозов было приблизительно одинаковым для различных величин скользящего окна $S_{\text{ок}}$. Относительная ошибка прогноза на стационарных участках для всех $S_{\text{ок}}$ не превышает $0{,}09$. На участках нестационарности максимальная относительная ошибка для $S_{\text{ок}} = 5$ составила $0{,}35$; для $S_{\text{ок}} = 10$ составила $0{,}65$; для $S_{\text{ок}} = 15$ составила $0{,}67$.

Анализ отдельных реализаций, зарегистрированных в процессе измерений, показал их хаотичность, не позволяющую осуществлять прогнозирование и принимать решения по приведенным в настоящей работе алгоритмам. В то же время расширение возможностей прогнозирования становится реальным при дополнении вычислительных процедур методами теории динамического хаоса, на основании которых выделяется регулярная составляющая анализируемого процесса либо делается вывод о его шумовой природе.

Выводы

Приведено концептуальное решение одной из задач вычислительного интеллекта - байесовского оценивания состояний, позволяющего расширить алгоритмические возможности прогнозирования состояний в динамических системах. В случае хаотичности анализируемых последовательностей целесообразным является дополнение предложенной модели прогнозирования тестами теории динамического хаоса. Результаты экспериментального моделирования подтверждают работоспособность предложенной рекуррентной процедуры. Прогнозирование с помощью байесовских моделей может быть использовано при решении задач динамического предсказания ветвлений и переходов в компьютерах новых поколений.

Список литературы. 1. *Е.В. Бодянский, С.Г. Удовенко, А.Е. Ачкасов, Г.К. Вороновский*. Субоптимальное управление стохастическими процессами – Харьков: Основа, 1997. – 140 с. 2. *P. Congdon*. Bayesian Statistical Modeling.– New York.: Wiley, 2001.– 327 p. 3. *Zying L.* Recursive technique for identifying dynamic system // Proc. Of the Annual Control Conference. – Indiana, 1985. – P. 1–11. 4. *Калоша В.А., Кирияк Р.Д., Удовенко С.Г.* Алгоритм робастного управления стохастическими объектами с дрейфом параметров // Вестник Харьковского государственного политехнического университета.– 2000. – Вып. 99. – С. 70–73.

Поступила в редколлегию 18.04.2008