УДК 519.7

О ТЕОРИИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

М.Ф. Бондаренко[1], Н.П. Кругликова[2], С.А. Пославский[3], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[4]

[1, 2, 4] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина
[3] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринята попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дана аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицированы первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проведена аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Одна из важнейших задач теории интеллекта состоит в том, чтобы формально описать *понятия*, которыми пользуются люди. Если это удастся сделать, тогда откроются дополнительные возможности для создания систем искусственного интеллекта, обладающих способностью к понятийному мышлению. Большинство понятий выражается с помощью прямых определений через другие понятия в виде словосочетаний, предложений и текстов, например, “Рекорд – это высшее достижение в некоторой области”. Такого рода определения понятий содержатся в словарях и энциклопедиях. Выражая формально смысл словосочетаний и предложений через смысл слов, из которых они составлены, можно свести содержание сложных понятий к содержанию более простых [3]. Понятия, которые на данном этапе развития науки не представляется возможным прямо выразить через другие, уже введенные ранее понятия, называются *категориями*. Аристотель [4, с. 220] полагал, что все известные понятия, можно свести к следующим десяти категориям: сущность, количество, качество, отношение, место, время, положение, состояние, действие и страдание.

Совокупность ***K*** всех категорий какого-либо множества понятий ***A*** характеризуется следующими свойствами: 1) каждое понятие совокупности ***K*** включено в множество ***A***; 2) ни одно из понятий совокупности ***K*** не выражается с помощью прямого определения через другие понятия совокупности ***K***; 3) все понятия множества ***A***, не принадлежащие совокупности ***K*,** выражаются прямо через понятия совокупности ***K***. Как формально определить (*идентифицировать*) содержание категорий? Науке известен лишь один способ решения этой задачи – *метод построения аксиоматических теорий*. Существо этого метода состоит в том, что каждой категории ставится в соответствие некоторая *предикатная переменная* [5]. Все такие переменные связываются логическими уравнениями, называемыми *аксиомами*. Последние записываются на каком-нибудь алгебро-логическом языке достаточно выразительной силы.

Аксиомы строятся на основе неформализованных (интуитивных) представлений о свойствах идентифицируемых понятий и связях между ними. Разнообразные аксиомы накопляются до тех пор, пока все категории, характеризуемые ими, не определятся в абстрактном смысле однозначно. Это значит, что описываемые понятия задаются аксиомами единственным образом с точностью до обозначений тех предметов, к которым они относятся, или, как говорят математики, – с точностью до изоморфизма тех предикатов, которые соответствуют определяемым понятиям. Современная наука не считает множество категорий, указанное Аристотелем, достаточно обоснованным. Тем не менее, все сходятся на том, что понятие *количества* должно быть отнесено к числу основополагающих.

При логико-математическом анализе категория количества расчленяется на более простые понятия натурального, рационального и действительного числа. Целью настоящей статьи является формальное описание этих понятий на языке *алгебры подстановочных операций* [5]. В первой части статьи формально описывается понятие натурального числа, которое, в свою очередь, расчленяется на первичные понятия счетного множества, счета, сложения и умножения натуральных чисел. После выражения понятия количества через более простые понятия оно перестает выполнять роль категории, а категориями, в соответствии с приведенным выше определением, становятся более глубинные понятия (счетного множества, счета и т.д.). Т.о. понятие категории относительно, и в этом смысле оно родственно такому понятию как физическая элементарная частица. Когда-то роль элементарной частицы выполнял атом, затем – электрон, протон и нейтрон. В настоящее время на роль элементарных частиц претендуют еще более глубинные физические объекты.

Решение поставленной задачи облегчается тем, что к настоящему времени выполнены глубокие и обширные разработки по аксиоматизации арифметики. Первые результаты в этой области были получены еще в 17 веке Лейбницем (доказательство соотношения $2\times 2=4$). В середине 19-го столетия Грассман сформулировал аксиомы сложения и умножения натуральных чисел. Построения Грассмана были продолжены работами Пеано, который в 80-х годах прошлого столетия сформулировал аксиомы натурального ряда чисел. Основания теории действительных чисел заложены во второй половине 19-го века в публикациях Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора [6, с. 324].

В 1930 г. Ландау опубликовал обширную работу [7], подводящую итог исследованиям в области аксиоматизации арифметики натуральных, рациональных и действительных чисел, которая до настоящего времени остается непревзойденной по строгости и полноте изложения. Однако эти результаты не решают задачу формального описания категории количества до конца, поскольку они выражены на не полностью формализованном логическом языке. Современные системы искусственного интеллекта не могут усвоить понятия, описанные с привлечением выразительных средств естественного языка, поскольку последние пока недоступны машине. При выполнении приведенного ниже в этой статье перевода уже известных формулировок на язык алгебры подстановочных операций нами был выявлен в них ряд пробелов, что потребовало их дополнения и доработки.

Вначале введем некоторые логические понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. *Прямым определением* предиката Q через предикаты P_1, $P_2,\ldots, P_n$ называется связь вида:

$$\forall\, x \in A(Q(x) \sim \mathbf{F}(P_1, P_2, \ldots, P_n))(x)) = 1. \qquad \text{(а)}$$

Здесь $\mathbf{F}$ – некоторая *предикатная операция* [5]; $x = (x_1, x_2,\ldots, x_m)$ – набор предметных переменных, заданный на декартовом произведении $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ каких-либо множеств $A_1, A_2,\ldots, A_m$ предметов, включенных в универсум U. Предикаты $P_1, P_2,\ldots, P_n$ могут быть определены на множествах, вообще говоря, отличных от A. Уравнение (а) имеет единственное решение относительно переменной Q:

$$Q = \mathbf{F}(P_1, P_2, \ldots, P_n). \qquad \text{(б)}$$

Косвенным определением предикатов $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ через предикаты $P_1, P_2,\ldots, P_n$ называется связь вида:

$$\mathbf{P}(P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_r) = 1, \qquad \text{(в)}$$

где $\mathbf{P}$ – некоторый *предикат второго порядка* [8, 9]. Прямое определение является частным случаем косвенного. Определение предикатов $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ называется *абсолютным*, если в характеризующем его уравнении (в) отсутствуют параметры $P_1, P_2,\ldots, P_n$, и *относительным* – в противном случае.

Определение предикатов $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ при фиксированных значениях параметров $P_1, P_2,\ldots, P_n$ называется *коэкстенсивным*, если задающее его уравнение (в) имеет единственное решение относительно набора $Q = (Q_1, Q_2,\ldots, Q_r)$ переменных предикатов $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$, заданных на A. Все прямые определения коэкстенсивны, существуют также и косвенные коэкстенсивные определения. Пусть предикаты $P_1, P_2,\ldots, P_n$ зафиксированы, а наборы предикатов $(Q_1(x), Q_2(x),\ldots, Q_r(x))$ и $(Q_1'(x'), Q_2'(x'),\ldots, Q_r'(x'))$ ($x\in A$; $x'\in A'$; $A' = A_1' \times A_2' \times \ldots \times A_m'$; $A_1', A_2',\ldots, A_m' \subseteq U$) удовлетворяют определению (в). Тогда определение (в) понятий $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ называется *полным*, если найдутся биекции $\varphi_i: A_i \to A'_i$, ($i = \overline{1,m}$), для которых при любых $x\in A$

$$Q_j(x) = Q'_j(\varphi(x)), \qquad \text{(г)}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_m)$, $j = \overline{1,r}$. В этом случае говорят, что условие (в) определяет понятия $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ *с точностью до набора* φ *изоморфизмов* $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_m$. Более подробно условие (г) записывается в виде:

$$Q_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = Q'_j(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi_m(x_m)). \qquad \text{(д)}$$

В противном случае определение понятий Q_1, $Q_2,\ldots, Q_r$ называется *неполным*.

Определение системы предикатов $Q_1, Q_2,\ldots, Q_r$ называется *непротиворечивым* при фиксированных значениях параметров $P_1, P_2,\ldots, P_n$, если задающее его условие (в) имеет хотя бы одно решение относительно набора Q переменных предикатов Q_1, $Q_2,\ldots, Q_r$, определенных на A. В противном случае оно называется *противоречивым*. Пусть $\mathbf{S}$ – какая-нибудь совокупность предикатов. Предикаты совокупности $\mathbf{S}$, выраженные прямо через другие предикаты этой же совокупности, называются *вторичными*, а предикаты, оставшиеся невыраженными, – *первичными*. Совокупность $\mathbf{S}$ предикатов называется *несократимой*, если ни один из них невозможно выразить прямо через остальные предикаты совокупности $\mathbf{S}$. В противном случае она называется *сократимой*.

Для построения теории совокупности каких-нибудь понятий каждое из них представляем формально в виде некоторого предиката. В результате приходим к совокупности $\mathbf{S}$ предикатов. Введенные выше термины переносятся с предикатов на соответствующие им понятия. Т.о. можно говорить о *прямых* и *косвенных*, *однозначных* и *многозначных*, *абсолютных* и *относительных определениях понятий*, о *первичных* и *вторичных понятиях*, о *непротиворечивых* и *противоречивых*, *несократимых* и *сократимых совокупностях понятий* теории. Категории представляют собой первичные понятия теории. Они определяются неявно с помощью связывающего их уравнения (в), записываемого обычно в виде системы (точнее, конъюнкции) логических условий. Первичные понятия, вводимые на начальном этапе формирования теории, задаются косвенными абсолютными определениями. Логические условия, неявно определяющие первичные понятия теории, называются ее *аксиомами*.

Теорией **T** *совокупности понятий* **S** называется множество всех утверждений, которые можно логически вывести из аксиом, формально определяющих понятия совокупности **S**. Вторичные понятия теории **T** вводятся с помощью прямых определений. Этими определениями новые понятия однозначно выражаются через уже введенные ранее понятия. С введением каждого нового вторичного понятия достигается так называемое *консервативное расширение теории*. Новые аксиомы при консервативном расширении теории не привлекаются. Если же в процессе развития теории вводятся новые первичные понятия, то говорят, что этим достигается *неконсервативное расширение теории*. В этом случае новые первичные понятия вводятся косвенными относительными определениями. В зависимости от того, вводятся ли первичные понятия теории до или после других понятий, они делятся на *начальные* и *не начальные*. Соответственно этому делятся на начальные и не начальные первичные предикаты теории.

1. Натуральный ряд чисел

Первым шагом на пути к идентификации категории количества является формальное описание понятий *натурального числа* и *счета*. У каждого человека есть достаточно четкое и определенное интуитивное понятие натурального числа. Именно оно служит объектом формального описания. Натуральные числа возникают в результате *счета*. Счет – это добавление единицы к уже имеющемуся числу. Начинается счет с единицы. Прибавляя к любому натуральному числу единицу, получаем каждый раз новое число. Получаемая таким способом бесконечная последовательность чисел называется *натуральным рядом*. Натуральные числа можно складывать и умножать. Операции сложения и умножения натуральных чисел коммутативны и ассоциативны. Сложение и умножение связаны друг с другом дистрибутивным законом. Числа в натуральном ряду упорядочены.

Приступаем к формальному описанию понятий натурального числа и счета. Множество всех натуральных чисел обозначаем символом N. Числа в натуральном ряду упорядочиваем *отображением* [5] *счета* $q{:}N\to N$. Если $q(x) = y$, то будем говорить, что натуральное число x *предшествует* натуральному числу y или же что число y *следует за* числом x. Отображение счета ставит в соответствие каждому натуральному числу одно следующее за ним натуральное число, т.е. оно всюду определено и однозначно. У каждого натурального числа не может быть более одного предшествующего числа, т.е. отображение счета инъективно. Отображению счета $q(x) = y$ *соответствует* [5] *предикат счета* $Q(x,\ y)$, определенный на $N\times N$. Аксиомы натурального ряда указывают связи предиката счета Q с множеством N. Множество N следует рассматривать как некоторое подмножество универсума U. Универсум U можно выбрать любым, даже таким, в котором не содержится ни одного множества натуральных чисел (т.е. конечным). В последнем случае система аксиом, определяющая натуральный ряд, будет *противоречивой*. Это означает, что она не определяет ни одного множества N, а значит, и никакого предиката Q. Если же универсум U бесконечен, то, каким бы он ни был, система аксиом определяет в абстрактном смысле единственное множество N (с точностью до обозначений содержащихся в нем натуральных чисел).

С логической точки зрения аксиомы связывают два предиката: $N(x)$ на U и $Q(x, y)$ на $U\times U$. Полагаем, что за пределами области $N\times N$ предикат Q принимает нулевые значения. Поскольку предикаты N *и* Q вводятся аксиомами одновременно, естественно не ограничивать область определения предиката Q заранее неизвестным множеством N. Для этого к системе аксиом надо добавить еще одно условие, носящее, скорее, более логический, чем арифметический, характер:

$$\forall\ x,y\in U(\neg(N(x)\wedge N(y))\supset\neg Q(x,y)).$$

Это условие позволяет вводить предикат Q на множестве $U\times U$ так, что всюду вне множества $N\times N$ его значения оказываются равными нулю. К числу необходимых логико-арифметических условий относятся также требования унарности предиката N и бинарности предиката Q.

Множество N и предикат Q формально определяем следующими пятью свойствами, называемыми *аксиомами натурального ряда*:

всюду определенности счета

$$\forall\ x\in N\ \exists y\in N\ \ Q(x,y); \tag{1}$$

однозначности счета

$$\forall\ x,y_1,y_2\in N(Q(x,y_1)\wedge Q(x,y_2)\supset D(y_1,y_2)); \tag{2}$$

инъективности счета

$$\forall\ x_1,x_2,y\in N(Q(x_1,y)\wedge Q(x_2,y)\supset D(x_1,x_2)); \tag{3}$$

существования единицы

$$\exists\ y\in N(\forall x\in N\neg Q(x,y)); \tag{4}$$

индукции

$$\begin{gathered}\forall\ M\subseteq N((\exists y\in M(\forall\ x\in N\neg Q(x,y)))\wedge\\ \wedge(\forall\ x,y\in N(M(x)\wedge Q(x,y)\supset M(y)))\supset\forall\ x\in N\ M(x)).\end{gathered} \tag{5}$$

Аксиомы (1)-(5) представлены в сокращенной форме [5]. В полной записи они выразятся следующим образом:

$$\forall\, x \in U(N(x) \supset \exists y \in U(N(y) \wedge Q(x,y))); \tag{1'}$$

$$\begin{gathered}\forall\, x, y_1, y_2 \in U(N(x) \wedge N(y_1) \wedge N(y_2) \supset \\ \supset (Q(x,y_1) \wedge Q(x,y_2) \supset D(y_1,y_2)));\end{gathered} \tag{2'}$$

$$\begin{gathered}\forall\, x_1, x_2, y \in U(N(x_1) \wedge N(x_2) \wedge N(y) \supset \\ \supset (Q(x_1,y) \wedge Q(x_2,y) \supset D(x_1,x_2)));\end{gathered} \tag{3'}$$

$$\exists y \in U(N(y) \wedge \forall\, x \in U(N(x) \supset \neg Q(x,y))); \tag{4'}$$

$$\begin{gathered}\forall\, M, N \subseteq U(\forall z \in U(M(z) \supset N(z)) \supset \\ \supset ((\exists y \in U(M(y) \wedge \forall\, x \in U(N(x) \supset \neg Q(x,y)))) \wedge \\ \wedge(\forall\, x, y \in U(N(x) \wedge N(y) \supset (M(x) \wedge Q(x,y \supset M(y)))) \supset \\ \supset \forall\, x \in U(N(x) \supset M(x)))).\end{gathered} \tag{5'}$$

Содержательно аксиома (1) означает, что за каждым членом натурального ряда следует хотя бы одно натуральное число, т.е. отображение $q{:}N\to N$ всюду определено. Аксиома (2) гласит, что за каждым членом натурального ряда следует не более одного числа. Поэтому отображение q однозначно. Вместе взятые, аксиомы (1) и (2) означают, что отображение q функционально. Условие функциональности отображения q можно записать следующим образом:

$$\forall\, x \in N\ \exists\, !y \in N\ Q(x,y). \tag{6}$$

Аксиома (3) гласит, что в натуральном ряду каждому числу может предшествовать не более одного числа. Это означает, что отображение q инъективно. Аксиома (4) гласит, что в натуральном ряду содержится число, у которого нет предшествующего числа. Наконец, аксиома (5) выражает *принцип математической индукции*: если свойством M обладает первое число натурального ряда и, кроме того, из предположения, что свойством M обладает число x, следует, что тем же свойством обладает и число $y = q(x)$, то свойством M обладают все натуральные числа.

Приведем пример объекта, удовлетворяющего всем аксиомам натурального ряда. Это – ряд кодов 1, 11, 111,... . Роль первого числа в нем выполняет символ 1. Каждый последующий код получается из предыдущего приписыванием к нему слева символа 1. Ясно, что для каждого кода существует единственный следующий. У каждого кода не может быть более одного предшествующего. Код 1 не имеет предшествующего. Наконец, начиная с кода 1 и переходя на каждом шаге к следующему коду, мы можем обойти все коды.

Определим понятие единицы. С этой целью обозначим символом J множество, включенное в N, элементы которого называются *единицами*. Множество J определим соответствующим ему предикатом J на N, который выражается формулой

$$J(y) = \forall\, x \in N \neg Q(x,y). \tag{7}$$

Согласно определению (7), множество J состоит из всех натуральных чисел, для каждого из которых нет предшествующего натурального числа. Согласно аксиоме (4), в множестве J содержится, по крайней мере, одна единица. Аксиомы существования единицы и индукции можно записать короче, используя предикат J:

$$\exists y \in N\ J(y); \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\forall\, M \subseteq N((\exists x \in M\ J(x)) \wedge (\forall\, x, y \in N(M(x) \wedge Q(x,y) \supset \\ \supset M(y))) \supset \forall\, x \in N\ M(x)).\end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 1 (о единственности единицы). *Не может существовать более одной единицы.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные единицы e_1 и e_2. Образуем множество $M \subseteq N$ из единицы e_1 и всех не единиц, т.е. всех таких натуральных чисел, для каждого из которых существует предшествующее натуральное число. Так построенное множество M удовлетворяет посылке аксиомы индукции, поскольку а) $M \subseteq N$; б) в M содержится единица; в) из предположения, что натуральное число x содержится в M и предшествует натуральному числу y, вытекает, что $y \in M$. Следовательно, согласно аксиоме индукции, множество M содержит все натуральные числа. Но $e_2 \notin M$. Получили противоречие. Это означает, что в множестве J не может содержаться более одной единицы. Теорема доказана.

Формально теорема о единственности единицы записывается следующим образом

$$\forall\, y_1, y_2 \in N(J(y_1) \wedge J(y_2) \supset D(y_1,y_2)). \tag{10}$$

В развернутом виде ее можно записать условием

$$\begin{gathered}\forall\, y_1, y_2 \in N((\forall\, x \in N \neg Q(x,y_1)) \wedge \\ \wedge(\forall\, x \in N \neg Q(x,y_2)) \supset D(y_1,y_2)),\end{gathered} \tag{11}$$

называемым *свойством единственности единицы*. Объединяя аксиому существования единицы со свойством ее единственности, получаем следующее утверждение

$$\exists\, !y \in N\ J(y). \tag{12}$$

В более развернутом виде оно записывается условием

$$\exists\, !y \in N(\forall\, x \in N \neg Q(x,y)), \tag{13}$$

называемым *основным свойством единицы*. Единственный элемент множества J обозначаем символом 1.

Переходим к рассмотрению вопроса о независимости аксиом натурального ряда. Аксиомы называются *независимыми* друг от друга, если ни одну из них невозможно вывести из совокупности остальных.

Теорема 2 (о независимости аксиом натурального ряда). *Каждая из аксиом натурального ряда логически не зависит от совокупности остальных.*

Доказательство ведем *методом интерпретаций*. Его существо состоит в следующем. Для каждой (i-той) аксиомы изобретают такие предикаты, которые, будучи подставлены вместо предикатных переменных во все аксиомы, кроме i-той, обращают их в *истину* (т.е. превращают логические уравнения, представленные этими аксиомами, в тождества вида 1=1). Подстановка тех же предикатов в i-тую аксиому обращает ее в *ложь* (в противоречие вида 0=1). Если бы i-тая аксиома следовала из остальных, то она выполнялась бы вместе с ними. В противном случае эта аксиома независима от остальных.

Доказываем независимость аксиомы (1). Принимаем $N=\{1,\ 2\}$, $Q\,(x,\ y)=x^1y^2$. Аксиома (1) не выполняется:

$$\forall\ x\in N\ \exists y\in N\ \ Q(x,y)=\forall\ x\in\{1,2\}\exists y\in\{1,2\}(x^1y^2)=$$
$$=\forall\ x\in\{1,2\}(x^1 1^2\vee x^1 2^2)=\forall\ x\in\{1,2\}(x^1)=1^1 2^1=0.$$

Аксиома (2) выполняется:

$$\forall\ x,y_{1,}y_2\in N(Q(x,y_1)\wedge Q(x,y_2)\supset D(y_1,y_2))=$$
$$=\forall\ x,y_1,y_2\in\{1,2\}(x^1y_1^2\wedge x^1y_2^2\supset y_1^1y_2^1\vee y_1^2y_2^2=$$
$$=\forall\ x,y_1\in\{1,2\}(x^1y_1^2 1^2\supset y_1^1)(x^1y_1^2 2^2\supset y_1^2=$$
$$=\forall\ x,y_1\in\{1,2\}(x^1y_1^2\supset y_1^2)=\forall\ x,y_1\in\{1,2\}(1)=1.$$

Аналогично доказывается выполнение аксиом (3)–(5). Итак, аксиома (1) не зависит от совокупности остальных аксиом натурального ряда. Тем же методом доказывается независимость аксиом (2)–(5). Для доказательства независимости аксиомы (2) полагаем: $N=\{1,\ 2,\ 2',\ 3,\ 3',\ 4,\ 4',...\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^1y^{2'}\vee x^2y^3\vee\ x^{2'}y^{3'}\vee x^3y^4\vee x^{3'}y^{4'}\vee...$; аксиомы (3) – $N=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^2y^3\vee x^3y^2$; аксиомы (4) – $N=\{2,\ 3\}$, $Q(x,\ y)=x^2y^3\vee x^3y^2$; аксиомы (5) – $N=\{1,\ 2,\ 2',\ 3,\ 4,...\}$, $Q(x,\ y)=x^1y^2\vee x^{2'}y^{2'}\vee x^2y^3\vee x^3y^4\vee...$. Теорема доказана.

Переходим к рассмотрению вопроса об изоморфности натуральных рядов. Любые множество N и определенное на нем какое-нибудь бинарное отношение Q, которые удовлетворяют аксиомам (1)–(5), называются *натуральным рядом чисел* (N, Q). Множество N называется *множеством натуральных чисел*. Отношение Q называется *отношением счета*. Функция $q(x)=y$ (q:$N\to N$), задаваемая условием xQy, называется *операцией счета*. Совокупность всех утверждений о свойствах предикатов N и Q, выводимых из аксиом натурального ряда, называется *теорией натурального ряда*. Предикаты N и Q являются первичными и начальными предикатами теории натурального ряда. Соответственно этому первичными и начальными понятиями теории натурального ряда будут множество натуральных чисел и отношение счета. Теория называется *категоричной*, если все ее первичные предикаты определяются аксиомами с точностью до изоморфизма.

Теорема 3 (об изоморфности натуральных рядов). *Если множества N, N' и предикаты Q на $N\times N$, Q' на $N'\times N'$ удовлетворяют аксиомам натурального ряда, то существует биекция φ:$N\to N'$, такая что для любых x, $y\in N$*

$$Q(x,y)=Q'(\varphi(x),\varphi(y)).\qquad(14)$$

Доказательство. Определим предикат Φ на $N\times N'$ следующим образом. Полагаем $\Phi(1,\ 1')=1$, где 1 и $1'$ – единицы множеств N и N'. Существование элементов 1 и $1'$ следует из аксиомы существования единицы, единственность следует, как было установлено выше, из аксиомы индукции. Берем элементы $a_1\in N$ и $a_1'\in N'$, такие что $Q(1,\ a_1)=Q'(1',\ a_1')=1$. Согласно аксиомам всюду определенности и однозначности, эти элементы определяются единственным образом. Полагаем $\Phi(a_1,\ a_1')=1$. Берем, далее, элементы $a_2\in N$, $a_2'\in N'$, такие что $Q(a_1,\ a_2)=Q'(a_1',\ a_2')=1$, и полагаем $\Phi(a_2,\ a_2')=1$. Продолжая аналогично, получаем не более, чем счетные, множества $M=\{1,\ a_1,\ a_2,...\}$, $M'=\{1',\ a_1',\ a_2',...\}$. Из аксиомы индукции следует, что $M=N$, $M'=N'$. Для всех $i=1,\ 2,...$ имеем $\Phi(a_i,\ a_i')=1$. Для всех остальных пар элементов $b\in N$, $b'\in N'$ (т.е. таких, что не существует i, при котором $b=a_i$, $b'=a_i'$) полагаем $\Phi(b,\ b')=0$. Докажем, что для любых значений индексов i, j если $i\neq j$, то $a_i\neq a_j$, $a_i'\neq a_j'$. В самом деле, если бы это было не так, например, $a_s=a_p$ и $s<p$, то, согласно аксиоме инъективности, $a_{s-1}=a_{p-1}$, $a_{s-2}=\ a_{p-2},...,a_{p-s}=1$. Но тогда $Q(a_{p-s-1},\ 1)=1$, что, согласно аксиоме существования единицы, невозможно. Определим отображение $\varphi(x)=x'$ условием $\Phi(x,\ x')=1$. В силу доказанного, отображение φ:$N\to N'$ есть биекция. Из способа определения предиката Φ непосредственно следует (14) для всех x, $y\in N$. Теорема доказана.

Равенство (14) означает, что предикаты Q и Q' изоморфны. Изоморфность натуральных рядов не нарушится, даже если взять разные универсумы U и U', поскольку всегда можно образовать единый универсум $U''=U\cup U'$ и, согласно только что доказанной теореме, предикаты Q и Q' будут изоморфными. Т.о. имеется по существу (т.е. в абстрактном смысле) лишь один натуральный ряд чисел. Построение теории натурального ряда завершается фиксацией конкретных множества N и отношения счета Q. Если же возникает необходимость перейти от N и Q к другим N' и Q', то это можно сделать при помощи некоторого соответствия φ, взаимно однозначно отображающего часть N универсума U в часть $N'\subseteq U$. Важно отметить, что возможно изменение отношения счета Q при сохранении множества N.

Множество B называется *собственным подмножеством* множества A, если $B\subseteq A$ и $B\neq A$ (пишут

$B \subset A$). Множество A называется *бесконечным*, если существует его собственное подмножество B, равномощное множеству A. В противном случае множество A называется *конечным*. Множество натуральных чисел бесконечно. Действительно, в множестве $N = \{1, 2,...\}$ имеется собственное подмножество $M = \{2, 4,...\}$ всех четных чисел, равномощное множеству N. Множества N и M можно связать биекцией $2x = y$, отображающей N на M. Любое множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. (Заметим, что понятие счетного множества можно определить, не пользуясь аксиомами натурального ряда, как *минимальное бесконечное множество*, т.е. такое бесконечное множество A, все бесконечные подмножества которого равномощны множеству A.) Определение натурального ряда (N, Q) при заданном универсуме U непротиворечиво, если множество U бесконечно. Действительно, в этом случае существует последовательность подмножеств $\mathbf{V} = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$, такая что каждое A_i ($i = 1, 2,...$) есть собственное подмножество множества A_{i-1}. Выбирая последовательно по одному элементу $a_1 \in A_0 \backslash A_1$, $a_2 \in A_1 \backslash A_2, ..., a_i \in A_{i-1} \backslash A_i, ...$, получим натуральный ряд. В случае конечного универсума система логических уравнений (1)-(5) решений не имеет.

2. Сложение на множестве натуральных чисел

В арифметике натуральных чисел сложение определяют как операцию $x + y = z$, отображающую $N \times N$ в N, которая обладает следующими двумя свойствами, называемыми *аксиомами сложения*: 1) для всех $x \in N$ $x+1 = q(x)$; 2) для всех x, $y \in N$ $x+(y+1) = (x+y)+1$. Первая аксиома означает, что операция счета $q(x)$ совпадает с операцией прибавления единицы к произвольно взятому натуральному числу x. Т.о. операция счета поглощается (охватывается) операцией сложения натуральных чисел. Вторая аксиома выражает свойство ассоциативности сложения натуральных чисел в том частном случае, когда третье слагаемое равно единице. Оказывается, что этих двух свойств достаточно для однозначного определения операции сложения натуральных чисел при условии, что множество натуральных чисел и операция счета уже фиксированы. Множество натуральных чисел, а также операции счета и сложения вводятся косвенными определениями. Вместе с тем, для одноместной операции $x + 1$ дается прямое определение. Первые два понятия вводятся абсолютными определениями, а третье понятие – сложение – относительным определением. Все три понятия относятся к первичным и начальным. Определение сложения коэкстенсивно: для заданного натурального ряда (N, Q) операция сложения вводится единственным способом.

С помощью определения сложения, можно найти сумму любых двух натуральных чисел, которая, как оказывается, не зависит от порядка выполняемых действий. Для примера найдем сумму каких-нибудь двух натуральных чисел, пользуясь вышеприведенным определением сложения. Отыскиваем сумму чисел 4 и 3: $4+3 = 4+(2+1) = (4+2)+1$. Число 3 представляем в виде суммы 2+1 на основании того, что каждому натуральному числу, отличному от единицы, предшествует единственное натуральное число (в данном случае числу 3 предшествует число 2). Отыскиваем сумму чисел 4 и 2: $4+2 = 4+(1+1) = (4+1)+1 = 5+1 = 6$. Предполагается, что функция счета к моменту определения операции сложения уже задана. Окончательно имеем: $4+3 = (4+2)+1 = 6+1 = 7$.

Приведенное определение сложения натуральных чисел нуждается в переводе на язык алгебры подстановочных операций. При таком переводе нельзя принять заранее, что сложение есть операция. Это свойство сложения еще предстоит вывести из аксиом сложения. Сложение можно рассматривать лишь как отображение (быть может, частичное или многозначное), действующее из $N \times N$ в N. В соответствии с этим вводим предикат $S(x, y, z)$ на $N \times N \times N$, отвечающий отображению $x + y = z$. Первую аксиому сложения, называемую *аксиомой добавления единицы*, формулируем следующим образом:

$$\forall\, x, x' \in N(S(x,1,x') \sim Q(x,x')). \tag{15}$$

Смысл этой аксиомы состоит в том, что запись $x+1 = x'$ равносильна записи $q(x) = x'$. Для формулировки второй аксиомы сложения, называемой *аксиомой ассоциативности*, приходится использовать гораздо более сложную логическую конструкцию:

$$\begin{aligned}\forall\, x, y, z' \in N(\exists y' \in N(Q(y,y') \wedge S(x,y',z')) \sim \\ \sim \exists z \in N(S(x,y,z) \wedge Q(z,z'))).\end{aligned} \tag{16}$$

Аксиома выражает утверждение о равносильности соотношений $x + (y + 1) = z'$ и $(x + y)+1 = z'$. Кванторы существования использованы для выражения композиции отображений $y + 1 = y'$ и $x + y' = z'$, а также отображений $x + y = z$ и $z + 1 = z'$. Любой предикат S на $N \times N \times N$ называется *предикатом сложения* для натурального ряда (N, Q), если он удовлетворяет так сформулированным аксиомам сложения.

Выводим свойства сложения натуральных чисел.

Теорема 4 (о функциональности предиката сложения). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд. Тогда любой предикат S на $N \times N \times N$, удовлетворяющий аксиомам сложения, функционален, т.е. для него выполняется условие*:

$$\forall\, x, y \in N\ \exists\, !z \in N\ S(x,y,z). \tag{18}$$

Доказательство ведем индукцией по y. Пусть для любого $x \in N$ $M_x = \{y \in N \mid \exists! z \in N\ S(x, y, z)\}$. Согласно аксиомам всюду определенности и однозначности счета для любого $x\in N$ найдется единственный $z\in N$, такой что $Q(x, z) = 1$. По аксиоме (15) для любых x, $z\in N$ равенство $Q(x, z) = 1$ равносильно равенству $S(x, 1, z) = 1$. Следовательно, равенство $S(x, 1, z) = 1$ определяет функциональную зависимость z от x. Т.о. $1\in M_x$. Выберем произвольно $y\in N$ и предположим, что $y\in M_x$. Тогда $\exists!\ z\in N\, S(x, y, z)$. Пусть $z'\in N$ таково, что $Q(z, z') = 1$. Тогда $\exists\ z\in N(S(x, y, z)\wedge Q(z, z'))$ и, в силу аксиомы ассоциативности, $\exists\ y'\in N(Q(y, y')\wedge S(x, y', z'))$. Покажем, что любой элемент $z''\in N$, для которого $S(x, y', z'') = 1$, совпадает с z'. Элемент z'' обладает свойством $\exists\ y'\in N(Q(y, y')\wedge S(x, y', z''))$, и поэтому, согласно аксиоме ассоциативности, $\exists\ z\in N(S(x, y, z)\wedge \wedge Q(z, z''))$. Но $y\in M_x$, т.е. элемент z определен однозначно. В силу аксиомы однозначности, из равенств $Q(z, z'') = Q(z, z') = 1$ следует, что $z'' = z'$. Отсюда вытекает, что $y'\in M_x$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_x = N$. Теорема доказана.

Теорема 5 (о существовании и единственности предиката сложения). *Пусть* (N, Q) *— натуральный ряд. Тогда существует, притом единственный, предикат* S *на* $N\times N\times N$, *удовлетворяющий аксиомам сложения.*

Доказательство. *Существование.* Сначала для каждого $x\in N$ определим специальным образом двухместный предикат S_x на $N\times N$. Фиксируя $x\in N$, обозначим $a_1 = 1$, $b_1 = q(x)$ (т.е. $Q(x, b_1) = 1$). Образуем два множества: $A = \{a_1, a_2,...\}$, $B = \{b_1, b_2,...\}$, где $a_{i+1} = q(a_i)$, $b_{i+1} = q(b_i)$, $i = 1,2,...$. Из аксиомы индукции вытекает, что $A = N$. Кроме того, для любых значений индексов i, j, если $i\neq j$, то $a_i\neq a_j$ (см. доказательство теоремы 3 об изоморфности натуральных рядов). Положим для всех $z\in N$ $S_x(a_i, z) = D(b_i, z)$, $i = 1,2,...$. Тогда будем иметь (при $i = 1$)

$$S_x(1,z) = D(q(x),z) = Q(x,z). \tag{а}$$

Для любого $y\in N$ существует номер i, такой что $y = a_i$, и поэтому

$$\begin{aligned} S_x(y,z) &= S_x(a_i,z) = D(b_i,z) = D(q(b_i),q(z)) = \\ &= D(b_{i+1},q(z)) = S_x(a_{i+1},q(z)) = S_x(q(y),q(z)). \end{aligned} \tag{б}$$

Положим $S(x, y, z) = S_x(y, z)$ для всех $x, y, z\in N$. Из свойств (а), (б) предикатов S_x вытекает, что предикат S на $N\times N\times N$ удовлетворяет аксиомам сложения.

Единственность. Доказательство ведем индукцией по y. Пусть S и S' – предикаты сложения. Если $y = 1$, то условие

$$\forall\ x,z\in N(S(x,y,z)\sim S'(x,y,z)) \tag{17}$$

выполняется, т.к. по аксиоме добавления единицы для любых $x, z\in N$ $S(x, 1, z) \sim Q(x, z)$ и $S'(x, 1, z) \sim Q(x, z)$. Предположим теперь, что (17) верно для некоторого $y\in N$. Покажем, что тогда $\forall x, y', z' \in N(Q(y, y') \supset \supset (S(x, y', z') \sim S'(x, y', z')))$. Действительно, если $Q(y, y') = 1$, то по аксиоме ассоциативности из $S(x, y, z) = 1$ вытекает, что высказывания $S(x, y', z')$ и $Q(z, z')$ равносильны для любого $z'\in N$. Аналогично, из $S'(x, y, z) = 1$ следует $\forall\ z'\in N\,(S'(x, y', z') \sim Q(z,z'))$. По теореме о функциональности предиката сложения, значение z определено однозначно значениями x и y, если $S(x, y, z)=1$. Тогда, в силу аксиом всюду определенности и однозначности, единственным образом определяется и значение z', если $Q(z, z') = 1$. Причем z' не зависит от выбора предиката сложения (S или S'). Итак, для любого x существует единственный $z'\in N$, такой что $S(x, y', z') = S'(x, y', z') = 1$. В силу функциональности предиката сложения, отсюда следует $S(x, y', z') \sim S'(x, y', z')$ для любого z'. Осталось применить аксиому индукции. Теорема доказана.

Доказав функциональность, существование и единственность предиката сложения $S(x, y, z)$, мы получаем возможность ввести функцию $z = x + y$, соответствующую этому предикату, которая называется *операцией сложения* натуральных чисел. Определяем ее следующим образом: для любых x, y, $z\in N$ $z = x + y$ в том и только том случае, когда $S(x, y, z) = 1$.

Теорема 6 (об ассоциативности сложения). *Для всех* $x, y, z\in N$ $(x + y)+z = x + (y + z)$.

Доказательство. Пусть для всех $x, y\in N$ $M_{x,y} = \{z\in N \mid (x + y)+z = x + (y + z)\}$. По аксиоме *ассоциативности* $(x + y) + 1 = x + (y + 1)$, т.е. $1\in M_{x,y}$. Покажем, что для любого $z\in N$ из $z\in M_{x,y}$ следует $(z+1)\in M_{x,y}$ (а). Пусть $z\in M_{x,y}$, т.е. $(x + y) +z = x +(y + z)$. Тогда, в силу аксиомы ассоциативности, $(x + y) + (z + 1) = ((x + y) + z) + 1$. Поскольку $z\in M_{x,y}$, то $((x + y) + z) + 1 = (x + (y + z)) + 1$. Т.к. $1\in M_{x,(y+z)}$, то $(x + (y + z)) + 1 = x + ((y + z) + 1)$. По аксиоме ассоциативности $(y + z) + 1 = y + (z + 1)$. Итак, $(x+ y) + (z + 1) = x + (y + (z + 1))$, т.е. $(z+1)\in M_{x,y}$. Справедливость (а) доказана. Применяя аксиому индукции, получаем, что множество $M_{x,y}$ совпадает с множеством всех натуральных чисел. Теорема доказана.

Теорема 7 (о коммутативности сложения). *Для всех* $x, y\in N$ $x+y = y + x$.

Доказательство. Пусть для всех $x\in N$ $M_x = \{y\in N \mid x+y = y+x\}$. Поскольку $1+1=1+1$, то $1\in M_1$. Пусть $y\in M_1$, т.е. $1+y = y+1$. В силу ассоциативности сложения, $1+(y+1) = (1+y)+1$. По предположению $1+y = y+1$. Поэтому $1+(y+1) = (y+1)+1$. Итак, $1\in M_1$, и для всех $y\in N$ из $y\in M_1$ следует $y+1\in M_1$. Тогда из аксиомы индукции следует, что множество M_1 совпадает с N, т.е. что для всех $x\in N$ $x+1 = 1+x$. Покажем теперь, что для любого $x\in N$ множество M_x совпадает с N. Действительно, $1\in M_x$ по только что доказанному. Предположим далее, что $y\in M_x$, т.е. $x+y = y+x$. Тогда $x+(y+1) = (x+y)+1$ в силу аксиомы ассоциативности; $(x+y)+1 = 1+(x+y)$, т.к. $1\in M_{x+y}$; $1+(x+y) = 1+(y+x)$, в силу сделанного предположения; $1+(y+x)=(1+y)+x$, поскольку сложение ассоциативно; $(1+y)+x=(y+1)+x$, т.к. $1\in M_y$. Итак, $x+(y+1)=(y+1)+x$, и для всех $y\in N$ из $y\in M_x$ следует $y+1\in M_x$. Применяя аксиому индукции, приходим к выводу, что M_x совпадает с N. Теорема доказана.

3. Порядок на множестве натуральных чисел

Отношение порядка $x<y$ для любых натуральных чисел x и y определяется следующим образом: $x<y$ в том и только том случае, если существует натуральное число z, такое что $x+z=y$. Это утверждение называется *определением порядка*. Определение порядка – прямое и однозначное. Отношение порядка определяется не только множеством N, но и предикатом Q, так что на одном и том же множестве натуральных чисел может быть задано много разных отношений порядка. Высказывание $x<y$ будем записывать также и в виде $y>x$. В первом случае говорят "x меньше y", во втором "y больше x". Для формальной записи аксиомы порядка вводим предикат $H(x, y)$ на $N\times N$, соответствующий отношению $x<y$. Определение порядка теперь запишется в виде:

$$\forall\ x,y\in N(H(x,y)\sim\exists z\in N\ S(x,z,y)). \qquad (19)$$

Предикат H, удовлетворяющий определению порядка, называется *предикатом порядка* для натурального ряда (N, Q). Очевидно, что для каждого натурального ряда (N, Q) существует единственный предикат порядка H.

Теорема 8 (о неповторяемости чисел в натуральном ряду). *Для любых x, $y\in N$, если $x<y$, то $y\neq x$.*

Доказательство. Установим вначале, что для всех x, $z\in N$ $x+z\neq x$ (а). Доказательство ведем индукцией по x. Рассмотрим множество элементов $M=\{x\in N \mid \forall z\in N\ x+z\neq x\}$ Поскольку для любого $z\in N$ $1+z=z+1\neq 1$, то $1\in M$. Пусть $x\in M$. Тогда для любого $z\in N$ $(x+1)+z=x+(1+z)=x+(z+1)=(x+z)+1$ (б). Поскольку $x\in M$, то $x+z\neq x$. Отсюда следует, что $(x+z)+1\neq x+1$, или (с учетом равенства (б)) $(x+1)+z\neq x+1$. Поэтому $x+1\in M$. По аксиоме индукции получаем $M=N$. Утверждение (а) доказано. Пусть теперь $x<y$. Тогда найдется $z\in N$, такое что $x+z=y$. Согласно (а) $x+z\neq x$, следовательно $x\neq y$. Теорема доказана.

Теорема 9 (о сравнимости натуральных чисел). *Для любых x, $y\in N$ либо $x=y$, либо $x<y$, либо $x>y$.*

Доказательство. Несовместимость любых двух из трёх утверждений, указанных в формулировке теоремы, непосредственно следует из предыдущей теоремы. Образуем множество $M_x=M_x'\cup M_x''\cup M_x'''$, где $M_x'=\{y\in N \mid x=y\}$, $M_x''=\{y\in N \mid x<y\}$, $M_x'''=\{y\in N \mid x>y\}$. Доказав, что $M_x=N$, мы тем самым установим, что для любых x, $y\in N$ хотя бы одно из соотношений $x=y$, $x<y$, $x>y$ имеет место. Если $x=1$, то $1\in M_x'$, если же $x\neq 1$, то $x>1$, поэтому $1\in M_x'''$. Итак, мы получили, что $1\in M_x$. Предположим теперь, что $y\in M_x$. Отсюда следует, что $y\in M_x'$ или $y\in M_x''$, или $y\in M_x'''$. Если $y\in M_x'$, то $x=y$, $x+1=y+1$, $x<y+1$, $y+1\in M_x''$. Если $y\in M_x''$, то $x<y$. Следовательно, существует $z\in N$, такое что $x+z=y$, а значит $x+(z+1)=y+1$, $x<y+1$, $y+1\in M_x''$. Если же $y\in M_x'''$, то $x>y$. Следовательно, существует $z\in N$, такое что $x=y+z$. При $z=1$ получаем $x=y+1$, т.е. $y+1\in M_x'$. При $z\neq 1$ существует $z'\in N$, такое что $z=z'+1$, и тогда $y+z=y+(1+z')=(y+1)+z'=x$. Отсюда вытекает, что $x>y+1$, а значит, $y+1\in M_x'''$. Итак, из $y\in M_x$ следует $y+1\in M_x$. В силу аксиомы индукции, $M_x=N$. Теорема доказана.

Введем *отношение $\leq$ нестрого порядка*, определяемое следующим образом: для всех x, $y\in N$ $x\leq y$ равносильно $x<y$ или $x=y$. Отношение $<$ называется еще *отношением строгого порядка*, чтобы отличить его от отношения $\leq$. Запись $x\leq y$ читается "x меньше или равно y". Вместо $x\leq y$ также пишут $y\geq x$, последняя запись читается "y больше или равно x". Говорят, что произвольный предикат $K(x, y)$ на $A\times A$ обладает *свойством сравнимости*, если он удовлетворяет условию: $\forall x,\ y\in A(K(x,\ y)\vee K(y,\ x))$. Любой бинарный предикат на $A\times A$, обладающий свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и сравнимости, называется *линейным порядком* на A. Линейный порядок выстраивает все элементы множества, на котором он определен, в линию, упорядочивает их. Множество, на котором определен линейный порядок, называется *цепью*.

Теорема 10 (об упорядоченности множества натуральных чисел). *Множество натуральных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Поскольку $x=x$ для любого $x\in N$, то всегда $x\leq x$, так что отношение нестрогого порядка рефлексивно. Кроме того, оно антисимметрично. Действительно, пусть x, $y\in N$ таковы, что $x\leq y$ и $y\leq x$. Тогда $x<y$ или $x=y$, и, вместе с тем, ложно, что $y>x$. Следовательно, $x=y$. Доказываем транзитивность отношения $\leq$. Пусть x, y, $z\in N$ таковы, что $x<y$ и $y<z$. Тогда существуют x', y', такие что $y=x+x'$ и $z=y+y'$. Поэтому $z=(x+x')+y'=x+(x'+y')$, следовательно $x<z$. Если же $x=y$ и $y<z$, или $x<y$ и $y=z$, то $x<z$,. Наконец, если $x=y$ и $y=z$, то $x=z$. Итак, во всех случаях из $x\leq y$ и $y\leq z$, следует $x\leq z$. Покажем, наконец, что отношение $\leq$ обладает свойством сравнимости. В силу теоремы о сравнимости натуральных чисел, для любых x, $y\in N$ $y\in M_x'\cup M_x''\cup M_x'''$. Если $y\in M_x'\cup M_x''$, то $x\leq y$, если же $y\in M_x'\cup M_x'''$, то $x\geq y$. Теорема доказана.

4. Умножение на множестве натуральных чисел

В арифметике натуральных чисел умножение определяют как операцию $xy=z$, отображающую $N\times N$ в N, которая обладает следующими двумя свойствами, называемыми *аксиомами ум-*

ножения: 1) для всех $x \in N$ $x1 = x$; 2) для всех x, $y \in N$ $x(y + 1) = xy + x$. Первая аксиома определяет правило умножения произвольного числа на единицу, вторая выражает свойство дистрибутивности умножения натуральных чисел относительно сложения в том частном случае, когда второе слагаемое равно единице.

Для формальной записи аксиом умножения введем предикат $P(x, y, z)$ на $N\times N\times N$, соответствующий отношению $xy = z$. Первую аксиому умножения формулируем следующим образом, называя ее *аксиомой умножения на единицу*:

$$\forall\, x,x' \in N(P(x,\, 1,x') \sim D(x,x')). \tag{20}$$

Смысл этой аксиомы состоит в том, что запись $x1 = x'$ равносильна записи $x = x'$. Вторая аксиома, называемая *аксиомой дистрибутивности*, формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\forall\, x,y,z' \in N((\exists y' \in N\ Q(y,y') \wedge P(x,y',z')) \sim \\ \sim (\exists z \in N\ P(x,y,z) \wedge S(z,x,z'))).\end{aligned} \tag{21}$$

Она выражает утверждение о равносильности равенств $x(y+1) = z'$ и $xy + x = z'$. Любой предикат P на $N\times N\times N$ называется *предикатом умножения* для натурального ряда (N, Q), если он удовлетворяет так сформулированным аксиомам –умножения.

Теорема 11 (о функциональности предиката умножения). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд. Тогда любой предикат P на $N\times N\times N$, удовлетворяющий аксиомам умножения, функционален, т.е. для него выполняется условие*:

$$\forall\, x,y \in N\ \exists\, !z \in N\ P(x,y,z). \tag{22}$$

Доказательство ведем индукцией по y. При $y = 1$ условие (22) выполняется в силу аксиомы умножения на единицу. Предположим, что (22) выполняется для некоторого $y\in N$, т.е. $\forall x\in N\,\exists! z\in N\, P(x, y, z)$. Покажем, что тогда (22) справедливо и для $y + 1\in N$. Пусть $P(x, y, z) = 1$. По предположению, значение z однозначно определено значениями x и y. В силу функциональности предиката сложения, равенство $S(z, x, z') = 1$ однозначно разрешимо относительно z'. Но тогда, в силу аксиомы дистрибутивности, и уравнение $P(x, y{+}1, z') = 1$ однозначно разрешимо при фиксированных x, $y + 1\in N$. Осталось использовать аксиому индукции. Теорема доказана.

Теорема 12 (о существовании и единственности предиката умножения натуральных чисел). *Пусть (N, Q) – натуральный ряд чисел. Тогда существует хотя бы один предикат P на $N\times N\times N$, удовлетворяющий аксиомам умножения* (20), (21), *и все такие предикаты совпадают друг с другом. Последнее означает*: *если P и P' – предикаты на $N\times N\times N$, удовлетворяющие аксиомам умножения*, *то*

$$\forall\, x,y,z \in N(P(x,y,z) \sim P'(x,y,z)). \tag{23}$$

Доказательство. *Существование.* Сначала для каждого $x\in N$ строим двухместный предикат P_x на $N\times N$. Обозначим $a_1 = 1$, $b_1 = x$. Образуем два множества $A = \{a_1, a_2,...\}$, $B = \{b_1, b_2,...\}$, где $a_{i+1} = q(a_i)$, $b_{i+1} = b_i + x, i{=}1,2,\ldots$. Из аксиомы индукции следует, что $A = N$. Кроме того, $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. Положим для любого $z\in N$ $P_x(a_i, z) = D(z, b_i)$, $i = 1,2,\ldots$. Тогда при $i = 1$ будем иметь $P_x(1, z) = D(z, x)$ (а). Для любого $y\in N$ существует единственный номер i, такой что $y = a_i$, и тогда $P_x(y, z){=}P_x(a_i, z){=}D(b_i, z){=}D(b_{i+1}, z{+}x){=}P_x(a_{i+1}, z{+}x) = P_x(q(a_i), z + x) = P_x(q(y), z + x)$ (б).

Положим $P(x, y, z) = P_x(y, z)$ для всех $x, y, z\in N$. Из свойств (а), (б) предикатов P_x вытекает, что предикат P на $N\times N\times N$ удовлетворяет аксиомам умножения. Существование предиката P доказано.

Единственность. В силу теоремы о функциональности предиката умножения, достаточно показать, что для произвольных x, y, z, $z'\in N$ из равенств $P(x, y, z) = P'(x, y, z') = 1$ следует $z = z'$ (а). Доказательство ведем индукцией по y. При $y = 1$ утверждение (а) справедливо, т.к. по аксиоме (20) из равенств $P(x, 1, z) = P'(x, 1, z') = 1$ следует $z = z'$. Пусть (а) имеет место для некоторого $y\in N$. Покажем, что тогда для $y' = y{+}1$ верно утверждение $\forall\, x, z, z'\in N(P(x, y', z') \wedge P'(x, y', z'') \supset z = z'')$ (б). Действительно, в силу аксиомы (21) равносильны утверждения $P(x, y{+}1, z') = 1$ и $z' = z{+}x$, $P'(x, y{+}1, z'') = 1$ и $z'' = z + x$, при условии $P(x, y, z) = 1$. Отсюда следует справедливость (б).

Осталось применить аксиому индукции для множества $M = \{y\in N \mid \forall x, z, z'\in N(P(x, y, z)\wedge P'(x, y, z')\supset \supset z = z')\}$. Теорема доказана.

Доказав функциональность, существование и единственность предиката умножения $P(x, y, z)$, мы получаем возможность ввести функцию $z = xy$, соответствующую этому предикату, которая называется *операцией умножения* натуральных чисел. Определяем ее следующим образом: для любых x, y, $z\in N$ $z = xy$ в том и только том случае, когда $P(x, y, z) = 1$.

Теорема 13 (о дистрибутивности умножения). *Для всех x, y, $z\in N$ $(x + y)z = xz + yz$.*

Доказательство. Обозначим для произвольных x, $y\in N$ $M_{x,y}{=}\{z\in N \mid (x{+}y)z = xz{+}yz\}$. В силу аксиомы (20) $1\in M_{x,y}$. Пусть для некоторого $z\in N$ имеет место равенство $(x + y)z = xz + yz$, т.е. $z\in M_{x,y}$. Тогда, используя аксиому (21), коммутативность и ассоциативность сложения, получаем: $(x{+}y)(z{+}1) = (x{+}y)\, z{+} (x{+}y) = (xz{+}yz){+}(x{+}y) = xz{+}(yz{+}(x{+}y)) = xz{+}((x{+}y) {+}yz) = xz{+}(x{+}(y{+}yz)) = (xz + x) + (yz + y) = x(z + 1) {+}y\,(z + 1)$. Отсюда следует $z + 1\in M_{x,y}$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_{x,y} = N$. Теорема доказана.

Теорема 14 (о коммутативности умножения). *Для всех x, $y\in N$ $xy = yx$.*

Доказательство. Пусть $M = \{y\in N \mid 1y = y1\}$. Т.к. $1{\cdot}1 = 1{\cdot}1$, то $1\in M$. Предположим, что некоторый

$y \in M$. Тогда $1(y+1) = 1y+1 = y1+1 = (y+1)1$ (согласно аксиомам умножения). Поэтому $y + 1 \in M$. По аксиоме индукции отсюда следует $M = N$, т.е. для любого $y \in N$ $1y = y1$. Для произвольного $x \in N$ рассмотрим множество $M_x = \{y \in N | \, xy = yx\}$. По только что доказанному $1 \in M_x$. Пусть $y \in M_x$. Тогда, с использованием аксиомы (21) и дистрибутивности умножения, получаем $x(y+1) = xy+x = yx+x = (y+1)x$. Отсюда следует $y + 1 \in M_x$. Согласно аксиоме индукции, получаем $M_x = N$. Теорема доказана.

Теорема 15 (об ассоциативности умножения). *Для всех* $x, y, z \in N$ $(xy)z = x(yz)$.

Доказательство. Обозначим для произвольных $x, \; y \in N$ $M_{x,y} = \{z \in N | \, (xy)z = x(yz)\}$. Очевидно, что, $1 \in M_{x,y}$, т.к. $(xy)1 = xy = x(y1)$. Пусть для некоторого $z \in N$ $(xy)z = x(yz)$, т.е. $z \in M_{x,y}$. Тогда, в силу аксиомы (21) и теорем 13, 14, $(xy)\,(z + 1) = (xy)z + xy = x(yz + xy) = (yz)x + yx = (yz + y)x = x(yz+y) = x(y(z+1))$. Отсюда следует $z + 1 \in M_{x,y}$. Применяя аксиому индукции, получаем $M_{x,y} = N$. Теорема доказана.

Выводы

При написании данной статьи авторы базировались на работе Ландау [7], которая, как это явствует из ее названия "Основы анализа", нацелена на решение задачи обоснования математики (в части, касающейся введения чисел). Работы подобной направленности часто подвергаются критике, как содержащие *circulus vitiosus* (порочный круг) [10, с. 115, 6, с.29]. В применении к задаче обоснования теории натурального ряда указывается на невозможность формулировки и доказательства утверждений этой теории без фактического привлечения натуральных чисел и их свойств. Вместе с тем, ясно, что логически недопустимо основывать введение натуральных чисел на них же самих.

Задача, решаемая в настоящей работе, формулируется иначе: натуральные числа рассматриваются как нечто уже существующее, изначально данное. Поэтому нет необходимости извлекать их из небытия. Требуется лишь математически описать первичные понятия арифметики, которые в ней уже имеются и фактически используются. К такой постановке возражение *circulus vitiosus* неприменимо, поскольку об обосновании понятия натурального числа речь теперь не идет. Если анализируемые понятия недоброкачественны, то таким же недоброкачественным будет и результат их формального описания. Идентифицируя то, что реально существует в умах математиков и присутствует в их трудах, исследователь не отвечает за безупречность прототипа. Решая эту задачу, нет необходимости воздерживаться от использования натуральных чисел и их свойств в качестве одного из средств записи аксиом, формулировки необходимых теорем и построения их доказательств. Более того, в качестве инструмента описания арифметических понятий и их анализа не запрещается использовать любые логические и математические средства, которые признаются надежными современной наукой.

Решая задачу формального описания понятий, исследователь не вправе претендовать на абсолютную истинность получаемых результатов. Ведь степень их надежности зависит от уровня доброкачественности идентифицируемых понятий, от эффективности аппарата формального описания, вообще – от надежности функционирования человеческого разума, т.е. от факторов, которые ему не вполне подвластны. Доказательством безошибочности, абсолютной надежности и эффективности разума человека наука не располагает, и нет оснований надеяться, что оно когда-нибудь будет получено. Приходится довольствоваться верой в доброкачественность человеческого интеллекта, т.е., в конечном счете, полагаться на высокую квалификацию и добросовестность его создателя (предположительно – *генетического интеллекта* [9, с. 151]).

Только что мы охарактеризовали труд Ландау как работу, нацеленную на решение одной из задач обоснования математики. Но на него можно посмотреть также и как на работу, вносящую вклад в решение задачи идентификации первичных арифметических понятий, хотя, возможно, сам автор такую задачу перед собой и не ставил. Ландау вводит четыре первичных понятия: натуральное число, счет, сложение и умножение натуральных чисел; задает их с помощью девяти аксиом и выводит из них основные свойства первичных понятий. Все эти построения послужили базой для нашей работы.

Отличительной особенностью данной работы является то, что натуральный ряд (N, Q), предикаты сложения S и умножения P определяются как решения системы логических уравнений, именуемых аксиомами. Существование решения этой системы, как указывалось выше, зависит от выбора универсума U. В соответствии с методикой идентификации понятий, описанной в начале этой статьи, нами вводятся переменные предикаты $N(x)$, $Q(x, y)$, $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$, отвечающие понятиям натурального числа, счета, сложения и умножения натуральных чисел. Чтобы обеспечить корректность введения предикатов, каждый из них должен быть снабжен областью определения для набора своих переменных [11, с. 62, 69]. Значения аргументов предикатов N и Q должны быть ограничены каким-то универсумом U. Лучше всего было бы взять в качестве универсума множество всевозможных элементов, однако такое множество не существует. Пришлось принять в роли U произвольно выбираемое фиксированное множество. В качестве области изменения аргументов предикатов S и P принимается множество N, которое к моменту появления сложения и умножения уже оказывается введенным.

Полученные нами выражения (1′)-(5′), (15), (16), (20) и (21) представляют собой перевод на формальный язык аксиом натурального ряда, содержание которых пришлось несколько усложнить по сравнению с формулировками Пеано и Грассмана. Изменение содержания аксиом Пеано вызвано введением универсума U. Формулировка аксиом Грассмана была усложнена из-за того, что в них предикаты $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$ содержательно представлены равенствами $x+y=z$ и $xy=z$, которыми нельзя пользоваться, пока не доказано, что сложение и умножение – это операции. Но предикаты S и P изначально не обладают свойством функциональности, они выражают собой не операции, а всего лишь отношения, связывающие переменные x, y, z. Именно аксиомы, характеризующие эти предикаты, должны превратить их в функции. Только после того, как из аксиом выведены функциональность, существование и единственность предикатов S и P, можно на законных основаниях использовать выражения $x+y=z$ и $xy=z$. При записи аксиом сложения и умножения универсум U не привлекается, поскольку предикат $N(x)$ к этому моменту уже определен и зафиксирован, а значит множество N имеется в наличии и может теперь само выступать в роли универсума.

Изменение формулировок аксиом привело к необходимости замены доказательств большинства теорем, а иногда и их формулировок. К ним, в частности, относятся теоремы о существовании и единственности предикатов S и P, без которых вывод основных свойств сложения и умножения не представляется возможным. В заключение подчеркнем, что полученные в настоящей статье результаты следует расценивать лишь как перевод достижений уже существующей аксиоматической теории натуральных чисел, ориентированный на решение формального описания категории количества. Как это обычно бывает при выполнении подобных работ, в ранее полученных не полностью формализованных описаниях выявляются некоторые пробелы и производятся соответствующие дополнения и доработки, которые, однако, не затрагивают существа теории, созданной предшественниками.

Список литературы: 1. *Баталин, А. В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А. В. Баталин, З. В. Дударь, С. А. Пославский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А. В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А. В. Баталин, С. А. Пославский, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. С. 155-164. 3 *Баталин, А. В.* О лингвистической алгебре [Текст] / *А. В. Баталин, З. В. Дударь, А. В. Стороженко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1998. № 4. – С. 101-109. 4. *Рассел, Б.* История западной философии. [Текст] / *Б. Рассел.*– М.: ИЛ, 1959. –932 с. 5. *Баталин, А. В.* О системном анализе информационных процессов [Текст] / *А. В. Баталин, А. Д. Тевяшев, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1998. № 3. – С. 102-110. 6. *Бурбаки, Н.* Теория множеств. [Текст] / *Н. Бурбаки.*– М.: Мир, 1965.– 449 с. 7. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау.*– М.: ИЛ, 1947.–182 с. 8. *Шабанов-Кушнаренко, Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. [Текст] / *Ю. П. Шабанов-Кушнаренко.*– Х.: Вища школа, 1984.– 142 с. 9. *Шабанов-Кушнаренко, Ю. П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. [Текст] / *Ю. П. Шабанов-Кушнаренко.*– Х.: Вища школа, 1987.– 159 с. 10. *Вейль, Г.* Математическое мышление. [Текст] / *Г. Вейль.*– М.: Наука, 1989.– 398 с. 11. *Куратовский, К.* Теория множеств. [Текст] / *К. Куратовский, А.. Мостовский.*– М.: Мир, 1970.– 413 с.

Поступила в редколлегию 15.04.2010

УДК 519.7

Про теорію натурального ряду/ М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 129–139.

З категорії кількості виділено поняття натурального, числа, яке в свою чергу, зведене до понять лічильної множини, операцій лічби, складання та множення натуральних чисел. Мовою алгебри підстановочних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті, виведені основні властивості натуральних чисел та арифметичних операцій над ними.

Бібліогр.: 11 найм.

UDC 519.7

On the natural series theory / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 129–139.

The concept of natural number is selected from the category of quantity which is reduced in one’s turn to concepts of the calculating set, operations of calculation, addition and multiplication. On the language of algebra substitutional operations characteristical properties of these concepts are described and the completeness of descriptions is proved. The main properties of natural numbers and arithmetical operations with them were deduced from considered definitions.

Ref.: 11 items.